

Università degli Studi di Salerno



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica

Dottorato di Ricerca in Matematica
XII Ciclo – Nuova Serie

TESI DI DOTTORATO

**Analisi, modellazione e
previsione della disposizione
di uccelli su cavi elettrici.**

CANDIDATO: **ING. RAFFAELE PICCOLO**

COORDINATORE: **PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI**

TUTOR: **PROF. CIRO D'APICE**

Anno Accademico 2012 – 2013

Sommario

1	Introduzione	3
2	Stato dell'arte	5
2.1	Modelli Teorici	6
2.1.1	Modelli di aggregazione basati su Agenti	6
2.1.2	Approccio Euleriano: dal punto di vista microscopico a quello macroscopico.....	10
2.1.3	Modelli Fenomenologici	11
2.2	Studi Empirici.....	12
2.3	Osservazioni.....	17
2.3.1	Verifica delle ipotesi del Modello mediante dati empirici	17
2.3.2	L'analogia con i sistemi fisici: strumenti concettuali e metodologici ..	19
2.3.3	Funzione biologica di aggregazione	21
3	Modello di riferimento.....	24
4	Modello monodimensionale	34
5	Soluzione numerica.....	37
6	Validazione sperimentale.....	39
7	Appendice I – Approfondimenti sull'elaborazione dei dati sperimentali	48
7.1	Fase 1.....	48
7.2	Fase 2.....	50
8	Appendice II – Approfondimenti sull'elaborazione della soluzione numerica	57
9	Bibliografia.....	65

1 Introduzione

Il problema affrontato è “la disposizione spontanea degli uccelli su un filo orizzontale”. Partendo da basi biologiche ed etologiche si è definito un modello e se ne è verificata la coerenza mediante osservazioni sperimentali.

Il comportamento degli animali organizzati in gruppi è stato sempre di grande interesse per i ricercatori, avendo anche dei risvolti nell’ambito della disposizione spontanea in generale e non solo in ambito animale, motivando così il coinvolgimento di competenze scientifiche non limitate alla sola sfera biologica. In particolare, c’è stata negli ultimi anni un’evoluzione nell’affrontare la tematica dell’auto-organizzazione in gruppi di singoli individui che ha fatto scoprire anche delle peculiarità per alcune specie animali. Ad esempio, riconoscendo che nell’ambito di un gruppo possano essere le interazioni tra singoli individui a determinare la formazione e la caratterizzazione del gruppo stesso, per gli uccelli in particolare si è riscontrato come dei limiti sensoriali riducano il numero degli uccelli che possono influenzare il comportamento di un singolo uccello preso come riferimento, mentre in precedenza si riteneva l’interazione dipendente esclusivamente dalle distanze tra uccelli.

Nel presente lavoro verranno evidenziati degli approcci già utilizzati ed, in particolare, verrà descritto un modello di riferimento. Ispirandosi a questo modello di riferimento verrà poi definito un nuovo modello per il problema specifico. Successivamente verrà descritta la fase di elaborazione dei dati sperimentali aventi il duplice scopo di validare i risultati della simulazione numerica basata sul modello e di riconoscere delle tipicità nel comportamento di alcune specie.

Ponendosi nel contesto della “Simulation based Research”, si è partiti dalla descrizione ed analisi del problema reale. Successivamente si è definito un modello matematico per rappresentare il problema reale, con conseguenti equazioni da risolvere per via numerica. Ricavata la soluzione numerica mediante un algoritmo/metodo, avvalendosi di un software opportuno, la si è confrontata con una serie di dati sperimentali funzionali proprio alla validazione di alcuni risultati numerici significativi ed, in ultima analisi, funzionali alla validazione del modello.

Per quanto detto, le classiche “Conclusioni” si ritroveranno nel capitolo dedicato alla validazione dei risultati numerici mediante misurazioni ed elaborazioni dei dati sperimentali, evidenziando sia le convergenze tra output numerici e dati sperimentali, che eventuali deduzioni o nuovi spunti di riflessione che i dati sperimentali stessi suggeriscono.

2 Stato dell'arte

Molti sistemi biologici animali sono caratterizzati da comportamenti di gruppo, o collettivi, con peculiarità e complessità molto diverse. Basti pensare agli stormi di uccelli al tramonto, ai banchi di pesce sott'acqua, agli sciame di insetti, ai branchi di mammiferi, che rappresentano degli esempi molto familiari. Il comportamento collettivo si riscontra non solo negli insetti "sociali", come le formiche o le api, caratterizzate anche da spiccati legami genetici oltre che da relazioni collaborative nell'ambito delle colonie, ma anche in gruppi di animali "non imparentati", come pesci o uccelli. In molti casi si formano gruppi coesi, che agiscono quasi come un'entità unica, con notevoli capacità di coordinamento e di adattabilità reciproca, spesso basate sull'attrazione che si esercita tra soggetti del gruppo.

Negli esempi citati si è accennato a specie in cui il comportamento collettivo si realizza in assenza di una sorta di controllo centralizzato, cioè i singoli membri operano sulla base di interazioni locali con i soggetti più prossimi, riuscendo comunque a realizzare un comportamento unitario dell'intero gruppo. Il meccanismo che, in base ad interazioni locali, riesce a dar vita a modelli globali ordinati è noto come "auto-organizzazione". E', ad esempio, il caso degli stormi di uccelli in cui ciascun soggetto vola nella stessa direzione di tutti gli altri dando vita ad un gruppo che mantiene la propria forma anche dopo i cambi di direzione.

Da una prospettiva più generale, i comportamenti collettivi e di auto-organizzazione sono concetti chiave in diversi settori della scienza, compresa la fisica, l'economia e la finanza, le scienze sociali, etc.. Ad esempio, in un contesto tipico della fisica, spesso considerato come fonte di ispirazione per interpretare e modellare fenomeni collettivi in altri campi, si può pensare ad un sistema di singole unità (particelle, momenti magnetici, etc.) che interagiscono localmente nello spazio e possono generare, in condizioni adeguate, uno stato ordinato con proprietà ben delineate a livello di intero gruppo.

Tornando alla Biologia, oggi è piuttosto condivisa l'idea che aggregazioni di individui soggetti solo a regole di comportamento locali possono auto-organizzarsi in gruppi coerenti complessi, proprio come nei sistemi fisici.

In ogni caso, indagare sul comportamento collettivo nei sistemi biologici è un compito complicato soprattutto per le inevitabili differenze tra le specie e ciò comporta un'importanza crescente per l'analisi quantitativa dei dati empirici,

proprio per consentire un matching continuo tra osservazioni empiriche e modellazione proposta. Ad esempio, per osservazioni tridimensionali di gruppi di animali (uccelli o pesci) i dati empirici negli anni passati non sono state molto numerose e comunque limitate a piccoli gruppi e per intervalli di tempo ridotti. Questo ha limitato la possibilità di un'analisi statistica affidabile di dati empirici e il confronto con le predizioni dei modelli.

2.1 Modelli Teorici

I modelli del comportamento collettivo da auto-organizzazione possono essere di diversi tipi in funzione:

- della scala spazio-temporale utilizzata per l'analisi dei fenomeni;
- del tipo di informazione locale che induce l'aggregazione degli individui (interazione diretta o indiretta);
- della complessità matematica.

2.1.1 Modelli di aggregazione basati su Agenti

I modelli di raggruppamento ad agenti assumono delle regole di comportamento a livello di singolo individuo. In base alle regole di comportamento, si definisce un'equazione evoluzione per ciascun individuo/agente nel sistema basandosi sulle dinamiche microscopiche di interazione in termini di forze sociali che agiscono su ciascun individuo. I modelli ad agenti sono utilizzati in genere per studiare sistemi come i banchi (di pesci), le greggi, gli sciame, insomma sistemi in cui le azioni esercitate su ciascun individuo dipendono dagli altri vicini che interagiscono direttamente con esso.

I modelli ad agenti sono stati originariamente sviluppati per i banchi di pesci ([1], [34], [26]) e per gli stormi di uccelli ([38], [25]), successivamente sono stati utilizzati anche per le mandrie di mammiferi ([21]) e per i gruppi di altri vertebrati. In questi sistemi, tipicamente, si formano gruppi coesi e polarizzati, che presentano notevole coordinamento e capacità di adattamento.

Il comportamento collettivo è retto da tre semplici regole seguite dai singoli individui:

- muoversi nella stessa direzione degli altri membri più vicini;
- rimanere vicino ai membri adiacenti;

- evitare collisioni.

Queste regole inducono tre distinti contributi alle interazioni tra individui:

- allineamento delle velocità, ovvero i soggetti più vicini si muovono nella stessa direzione;
- attrazione tra individui, in modo che nessun soggetto resti isolato;
- repulsione a corto-raggio, evitando vicinanze pericolose tra soggetti.

A livello di intero gruppo, cioè a livello macroscopico, queste tre componenti devono garantire la polarità direzionale (allineamento) e la coesione del gruppo (aggregazione), preservando l'integrità individuale (assenza di urti tra soggetti del gruppo).

Il modo secondo cui siano definite le regole che reggono i comportamenti degli individui variano da modello a modello, a seconda del sistema biologico da studiare/modellare ed a seconda di quali siano ritenute le ipotesi comportamentali più ragionevoli da parte di chi modella il sistema. In generale, il modello definisce un'equazione per l'aggiornamento delle velocità di ciascun individuo. La suddetta equazione definisce tipicamente la velocità all'istante $t+1$ del soggetto i -esimo come risultante vettoriale di tre componenti:

- una componente che rappresenta in modo stocastico l'incertezza del processo interattivo;
- una componente che caratterizza la direzione del movimento. Di solito è la media delle direzioni di movimento degli individui vicini che interagiscono con il soggetto i -esimo;
- una componente caratterizzata dalle interazioni attrattivo/repulsive tra il soggetto i -esimo ed altri soggetti del gruppo. In genere, a distanze brevissime prevale l'effetto repulsivo, mentre per i soggetti un po' più distanti dall' i -esimo si ha prevalenza dell'effetto attrattivo.

La maggior parte dei modelli assumono che i soggetti interagenti ricadano in una data regione dello spazio intorno all'individuo in esame; in particolare, alcuni modelli specificano zone comportamentali di diversa estensione spaziale in cui l'allineamento, l'attrazione e la repulsione si esercitano; altri modelli assumono una dipendenza funzionale delle forze attrattivo-repulsive in base alle distanze tra i soggetti (la scala di decadimento di questa funzione definisce la regione dove le

interazioni tra individui sono significative). In tutti questi casi i modelli hanno una natura metrica intrinseca, poiché ciò che conta è la distanza tra un individuo e altri membri del gruppo.

In generale, i modelli basati su agenti non sono risolvibili in modo esatto, poiché il numero dei soggetti coinvolti risulta tipicamente elevato e, di conseguenza, il set di equazioni risultanti risulta difficile da trattare. Piuttosto, dei risultati significativi possono essere raggiunti mediante simulazioni numeriche. Il risultato più significativo che questi modelli hanno fornito è stato soprattutto che "regole locali" possono generare "comportamenti di gruppo" mediante un'opportuna scelta di alcuni parametri significativi. Previsioni più dettagliate possono riguardare sia caratteristiche globali (come la forma e le dinamiche interne al gruppo) che alcune proprietà strutturali (come la distribuzione delle distanze tra soggetto *i*-esimo e soggetti più prossimi, come la disposizione relativa o la variazione di densità all'interno del gruppo). Le previsioni possono, ovviamente, cambiare qualitativamente e quantitativamente al variare delle regole adottate. Allo stesso tempo, nell'adozione dei vari modelli si sono fatte assunzioni diverse riguardo i comportamenti dei soggetti osservati (ad esempio in dipendenza della specie) utilizzando di conseguenza valori differenti per i parametri caratterizzanti lo specifico modello o valori differenti per le variabili che caratterizzano le intensità delle interazioni.

Ad esempio, l'interazione tra due individui può dipendere dalla loro distanza o anche dal loro orientamento relativo per poter considerare le "aree buie" spesso presenti nei campi di percezione (a riguardo, molti autori hanno studiato come angoli e distanze tra soggetti possano condizionare i comportamenti di gruppo. Ad esempio, Couzin [12] nel 2002 ha analizzato come fosse possibile condizionare le aree di influenza al fine di ottenere in ambito tridimensionale gruppi con caratteristiche differenti in termini di forma, allungamento e aggregazione. Ad esempio, si è andati da aggregazioni tipo sciame (coesione e bassa polarizzazione), ai gruppi di forma quasi toroidale (alta polarizzazione e notevole movimento nell'ambito del gruppo) ed ai gruppi con elevata "coerenza dinamica" (coesione, alta polarizzazione, movimento limitato nell'ambito del gruppo). Le eterogeneità delle regole comportamentali sono state studiate in diversi lavori, ipotizzando per ogni soggetto diverse velocità, diversa influenza dei "disturbi", diverse "aree d'influenza" e diverse dimensioni caratteristiche. Queste analisi hanno mostrato che le citate differenze tra gli individui influenzano sia le posizioni occupate

all'interno di un gruppo (auto-selezione) che la stratificazione del gruppo stesso, la sua forma e la traiettoria globale percorsa.

Lo scopo principale di questi studi è stato trovare un modello appropriato per descrivere gruppi di particolari specie di animali e rivelare l'origine locale (microscopica) dell'aggregazione. In questo contesto si evince l'importanza fondamentale del confronto dei risultati derivanti dalle simulazioni con i dati sperimentali.

La peculiarità dei modelli ad agenti, in definitiva, è che il comportamento su scala globale, quindi a livello di gruppo, può essere valutato in termini di comportamento statistico aggregato dei singoli soggetti. Da questo punto di vista, l'approccio è analogo a quello adottato nella meccanica statistica per sistemi fisici, in particolare, per la teoria che deriva il comportamento macroscopico dei materiali dal comportamento microscopico dei componenti. Questa analogia ha stimolato i fisici a sviluppare i propri modelli di movimento/aggregazione auto-organizzato ([43], [19], [20]). Questi modelli sono più semplici rispetto a quelli sviluppati dai biologi e le questioni stesse che intendono affrontare sono più concettuali e meno legate alle istanze biologiche reali. Il loro scopo è quello di costruire la configurazione "minima" necessaria per produrre un gruppo in movimento ordinato. Secondo questa impostazione, si considerano solo gli elementi ritenuti essenziali per la modellazione dell'aggregazione (peraltro nel modo più semplice possibile). In questo modo il numero dei parametri ritenuti indispensabili è piuttosto contenuto. Ad esempio, nel modello delle "particelle auto-movimentate" ([43]) sono state considerate, per quanto concerne le interazioni locali/microscopiche, solo le regole relative all'allineamento (e non quelle relative all'attrazione/repulsione) e si è supposta la costanza in modulo delle velocità.

Modelli di gruppi auto-organizzati in movimento sono stato studiati, in particolare, in ambito bidimensionale, ma molti gruppi di animali esplicano il loro movimento in 3D. Ciò ha reso sempre più necessario estendere e generalizzare le simulazioni numeriche anche in 3D, riscontrando che molti dei risultati qualitativi ottenuti in 2D potevano essere accettati anche in 3D ([11], [19], [24]).

Nei modelli utilizzati fino a qualche anno fa per gli uccelli ci si basava soprattutto sulle interazioni tra coppie di individui. In verità, ogni singolo uccello subisce/esercita forze con tutti gli altri uccelli con cui costituisce una coppia

significativa (significativa al fine della forza subita/esercitata), ma ciò è stato gestito coinvolgendo per il singolo uccello i -esimo tutte le coppie significative, ovvero tutte le relative interazioni (attrattive e repulsive). Nel caso questa assunzione (utilizzo delle sole azioni tra coppie) non sia più sufficiente si crea uno spunto per ulteriori approcci e modellazioni.

2.1.2 Approccio Euleriano: dal punto di vista microscopico a quello macroscopico

I modelli euleriani rappresentano un approccio complementare ai modelli basati su agenti. I modelli euleriani lavorano a livello macroscopico, cioè, invece di descrivere l'evoluzione dinamica di ciascun individuo, vedono lo spazio come rappresentato da un reticolo e la porzione di gruppo (con i relativi individui) all'interno di ogni cella è seguita nel tempo. Le variabili rilevanti diventano in questo caso il numero di individui in ciascuna cella (concetto di densità) situata in una specifica posizione del reticolo al tempo t , e la velocità media posseduta dagli individui nella stessa cella. Quando ci si pone nel continuo (in termini di spazio e di tempo), il metodo porta ad equazioni di convezione-diffusione per la densità di popolazione ([33]), proprio come si possono derivare alcune equazioni della fluidodinamica per il moto dei fluidi. Da un punto di vista concettuale, l'ipotesi del continuo non è sempre accettabile o comunque potrebbe risultare complesso ricondurvisi. In alternativa, equazioni differenziali parziali per la densità di popolazione possono essere scritte in modo euristico, includendo tutti i termini più significativi di diffusione, convezione e interazione.

L'utilizzo di un modello euleriano o di un modello agent-based (talvolta identificato come Lagrangeano) dipende dal sistema studiato, dagli obiettivi da raggiungere (problema da analizzare) e dalla scala di interesse. Se si deve trattare con le variabili a grana grossa (si pensi ad esempio alla popolazione cellulare ed alla velocità media), i modelli Euleriani presuppongono implicitamente che un gruppo è già formato ed abbia un numero sufficiente di componenti per realizzare una grana grossa significativa. Inoltre, questi modelli non possono affrontare quelle problematiche caratteristiche che si verificano su scale più piccole di quelle del cellulare e su tempi inferiori a quelli necessari per propagare informazioni all'esterno della cellula. In questo caso i modelli basati su agenti risultano più appropriati per studiare i meccanismi del processo decisionale e di formazione di gruppo. I modelli euleriani risultano più indicati per descrivere l'evoluzione della

popolazione in tempi lunghi e per studiare gli schemi che si sviluppano su grandi scale spaziali. Ad esempio, l'esistenza di soluzioni per il trasporto di porzioni di gruppo viene analizzato in [30], utilizzando le equazioni di diffusione-trasporto continui per gruppi di individui con comportamento a sciame. Il trasporto di onde di densità si ritrova anche in un modello proposto da Toner e Tu nel 1998, in cui viene introdotto un modello continuo per particelle semoventi e si formulano equazioni idrodinamiche per la densità di grana grossa e la velocità degli uccelli analoghe alle equazioni di Navier-Stokes per fluidi.

2.1.3 Modelli Fenomenologici

Come detto, i modelli euleriani trattano con i gruppi a livello macroscopico (popolazioni) e conservano molta della complessità dei modelli agent-based, considerando le correlazioni tra gli individui in scale di lunghezza diverse. Queste correlazioni derivano dalle interazioni locali tra individui e rappresentano una delle caratteristiche più sorprendenti di gruppi di animali come greggi, sciame e banchi di pesci. Come contropartita, anche se una vasta letteratura esiste sia in biologia che in fisica, l'analisi di questi modelli è tutt'altro che banale.

A volte il comportamento collettivo da spiegare e le domande a cui rispondere possono essere affrontati all'interno di una formulazione matematica semplice. Un caso significativo si ha quando le persone interagiscono indirettamente attraverso segnali chimici: il numero di persone che svolgono un determinato compito dipende dalla quantità di sostanza chimica percepita che a sua volta dipende dal numero di individui che lo depositano. L'esempio più celebre è quello dei sentieri della formica ([41]). Quando una formica esploratrice scopre una fonte di cibo, dopo esserne nutrita, deposita feromone sulla via del ritorno al nido. Altre formiche che incrociano la pista usano il feromone prima depositato per trovare il cibo e nel viaggio di ritorno rinforzano a turno la traccia ponendo altre feromone.

In questo esempio il meccanismo che caratterizza il modello è il reclutamento locale di soggetti ed il conseguente coinvolgimento dei soggetti a causa dell'aumento di feromone. Dato un insieme di possibili percorsi, si può scrivere un insieme di equazioni non lineari che descrive l'evoluzione nel tempo dei flussi dei soggetti raccoglitori lungo i percorsi. I modelli specificano matematicamente come avviene il reclutamento locale in modo proporzionale alla concentrazione di

feromone sul sentiero. Altri modelli fenomenologici simili sono stati utilizzati per altri tipi di comportamento collettivo. I modelli fenomenologici hanno il grande vantaggio di essere matematicamente semplici fornendo previsioni quantitative a fronte di un numero limitato di parametri. Da questo punto di vista rappresentano uno strumento per testare i meccanismi di base (reclutamento di massa, le risposte positive, l'amplificazione delle fluttuazioni locali) in quei sistemi dove i parametri che entrano nel modello possono essere misurati e/o sintonizzati empiricamente.

2.2 Studi Empirici

Negli ultimi 50 anni sono stati condotti molti esperimenti ed osservazioni empiriche su gruppi di animali per testare l'ipotesi teorica sulla auto-organizzazione dei gruppi e per caratterizzare empiricamente il comportamento di gruppo.

Alcuni dei sistemi più studiati sono stati gli insetti sociali, come le formiche, che possono essere tenuti sotto controllo in laboratorio, anche in numero elevato grazie alle ridotte dimensioni degli individui. Ad esempio, è stato piuttosto agevole studiare il meccanismo di condizionamento dei percorsi tramite feromone. Gli esperimenti sono stati condotti mettendo i soggetti raccoglitori nella condizione di scegliere tra due percorsi distinti che conducono dal nido alla fonte di cibo ([4]). Nel caso di percorsi aventi lunghezza analoga ne veniva scelto uno soltanto (uguale probabilità tra i due), mentre in caso di percorsi con lunghezza diversa le formiche hanno scelto quello più breve perché su questo si è realizzato l'accumulo più rapido di feromone.

Più recentemente questo approccio è stato utilizzato anche per studiare il traffico lungo i sentieri di formiche in condizioni di sovraffollamento: è stata studiata la stessa configurazione con due possibili rami dal nido alla fonte di cibo è stato studiato, con un numero variabile di soggetti e con larghezze variabili dei tragitti ([15]). E' stata osservata una transizione dal traffico asimmetrico a bassa densità (un percorso stabilito) al traffico simmetrico ad alto affollamento (entrambi i rami utilizzati dai raccoglitori). Questa transizione è stata descritta con successo da un modello non lineare per i flussi di traffico.

Nel trasporto di locuste si è riscontrata la transizione da un comportamento disordinato ad uno ordinato condizionato dalla densità di popolazione ([6]). Delle

locuste desertiche sono state collocate in un'arena circolare e la loro dinamica è stata osservata con diversi valori della densità di individui. L'osservazione di come si sia realizzato l'allineamento collettivo (polarizzazione media) ha mostrato una transizione da uno stato disorganizzato per le locuste che si muovono indipendentemente ad uno stato più coordinato per i gruppi in movimento, aventi, inoltre, densità più grandi. Risultati simili sono stati ottenuti anche per i banchi di pesce ([3]) e per le cellule ([39]), indicando che tali modelli semplici di movimento auto-organizzato ben rappresentano il comportamento collettivo.

Tutti gli esempi descritti riguardano i modelli collettivi in spazi mono o bidimensionali. Alcuni degli esempi più eclatanti di raggruppamento degli animali, come stormi di uccelli, banchi di pesce e sciame di insetti, si verificano, tuttavia, in tre dimensioni. Lo studio di gruppi di animali in 3D è molto più esigente, soprattutto per quanto riguarda gli esperimenti. Questa difficoltà è legata al fatto che gli individui spesso hanno dimensioni maggiori e naturalmente si muovono in un ambiente molto più grande. In questi casi il controllo di laboratorio può essere problematico, mentre le tecniche di osservazioni sul campo possono rivelarsi piuttosto complicate.

Il primo contributo significativo nel campo degli studi empirici 3D è stato fornito da Cullen e dai suoi collaboratori ([13], [36]), che hanno analizzato gruppi fino a 50 pesci in vasche di laboratorio. Il comportamento di gruppo è stato studiato in aggregazioni di varie dimensioni e con specie diverse. È stata effettuata anche una caratterizzazione della struttura 3D e della forma dei gruppi. Anche molti studi più recenti hanno riguardato i pesci. Va comunque osservato che, dal momento che gli esperimenti possono essere eseguiti in vasche di laboratorio, i pesci sono spesso studiati in acque poco profonde, dove formano banchi pseudo-2D, rendendo l'analisi sperimentale molto più facile, ma non sempre utilizzabile per un 3D puro.

Ben più complicato è ottenere dati per gli uccelli, in quanto questo deve essere fatto all'aperto, sul campo. Dopo alcuni lavori iniziali pionieristici ([29], [42]), Major e Dill ([28]) hanno ricostruito le posizioni dei volatili in gruppi fino a 70 soggetti. Questi gruppi, tuttavia, si muovevano dal sito di alimentazione al posatoio e non erano molto coesi. Pomeroy e Heppner [37] hanno ottenuto per la prima volta le traiettorie individuali in gruppi fino a 16 uccelli. Più di recente, Budgey [5] ha studiato stormi di fino a 30 uccelli.

In tutti questi casi, tuttavia, il numero di individui per gruppo era piuttosto limitato (poche decine) e la ricostruzione dei gruppi si presentava spesso non univoca. Il motivo è essenzialmente di natura tecnica, poiché per ricostruire la posizione 3D di un oggetto si utilizzavano tecniche ottiche che richiedono la messa in corrispondenza di diverse immagini di esso ([23]). Ad esempio, quando si utilizza la fotografia stereoscopica con i gruppi di animali, due immagini dello stesso gruppo sono rilevate contemporaneamente da diversi punti di osservazione. Poi, ogni individuo su una fotografia deve essere abbinato con l'individuo corrispondente nella seconda fotografia (vedi Figura 1).

Solo a questo punto, delle formule stereometriche possono essere applicate per recuperare da ogni coppia di foto le coordinate 3D del singolo individuo nello spazio. Il problema del matching può diventare estremamente grave quando i gruppi sono grandi e compatti: le immagini fotografiche degli stormi che volano sono in genere insieme molto densi di punti senza forma distintiva ([9]). A causa di queste limitazioni, fino a poco tempo fa, sono stati analizzati solo piccoli gruppi, limitando per lungo tempo la possibilità di un confronto significativo tra i risultati derivanti dalle teorie di raggruppamento autogestito ed risultati empirici.

Il comportamento di gruppo in sistemi naturali comporta molto spesso aggregazioni di un numero enorme di individui (da centinaia a decine di migliaia) ed è naturale chiedersi se il meccanismo di formazione del gruppo sia lo stesso quando si considerano sistemi grandi e sistemi piccoli sistemi. Inoltre, l'analisi di piccoli sistemi è fortemente polarizzato da effetti di confine, poiché una grande percentuale di individui si trovano in prossimità del contorno del gruppo. Spesso questo aspetto non è stato preso in considerazione nell'analisi statistica dei dati empirici con il rischio conseguente di guardare alla "proprietà di superficie", dipendente dalla forma del gruppo, piuttosto che proprietà "bulk", molto più stabili e dipendenti solo dalle interazioni tra individui ([8]).

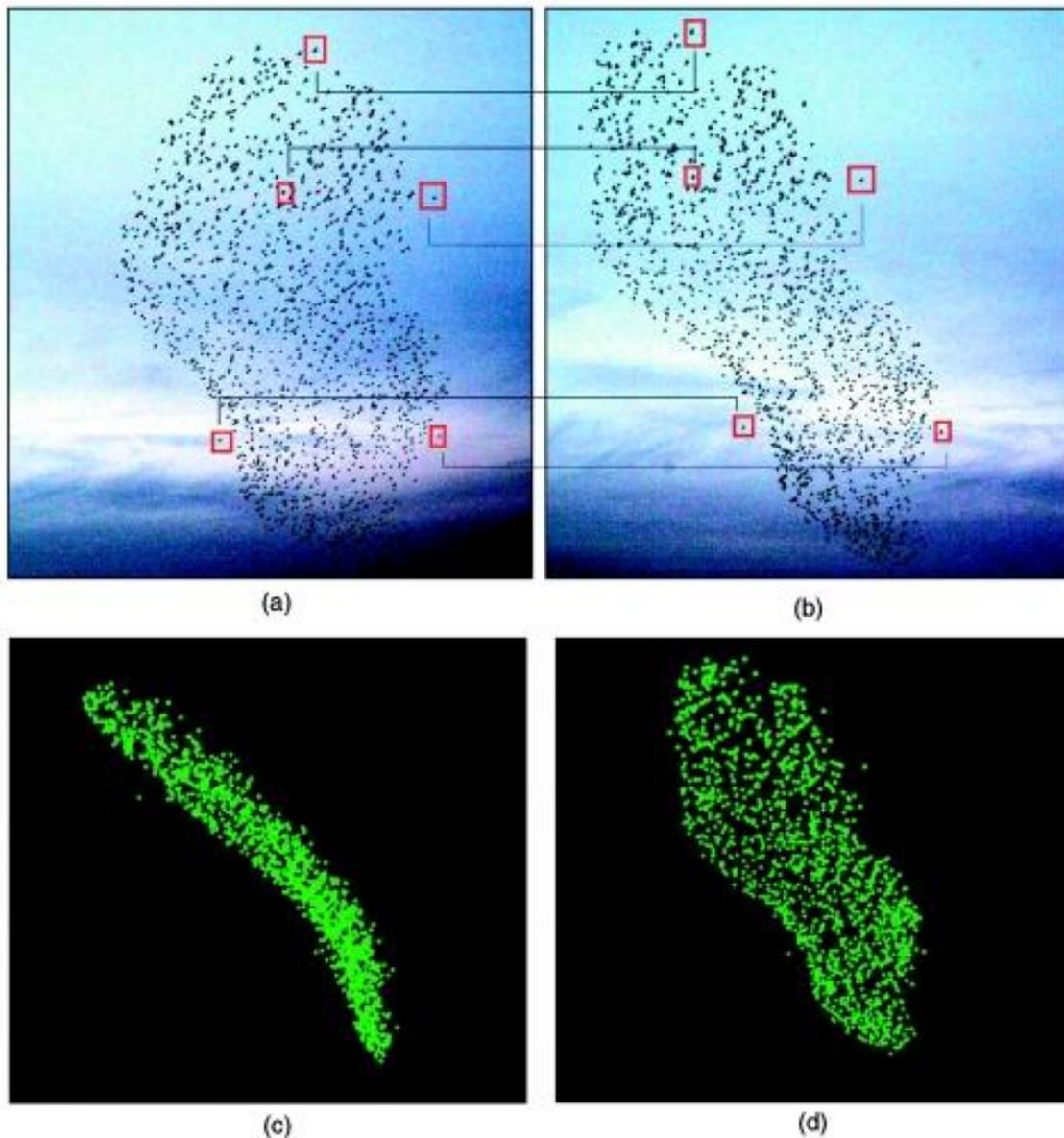


Figura 1 - Esempio di stormo analizzato in uno studio empirico

L'analisi dei piccoli sistemi, sia con simulazioni numeriche che con dati sperimentali, può essere utile per capire come i comportamenti individuali cambiano quando si verificano delle interazioni significative tra individui ed in quale misura può realizzarsi il coordinamento tra gli stessi, anche con pochi individui. Questo tipo di problema può avere importanti applicazioni tecnologiche nei sistemi artificiali basati sul controllo delle singole unità ed ha attirato molto interesse a livello teorico ([35]). Quando, però, l'interesse si rivolge al comportamento collettivo su larga scala diventa obbligatorio analizzare i grandi gruppi.

Ballerini [2] nel 2008 ha eseguito uno studio mediante l'osservazione del comportamento di stormi di storni, ricostruendo gruppi anche di 3000 uccelli (vedi Figura 1) mediante dati 3D empirici analizzati statisticamente. Questo lavoro ha migliorato i riferimenti precedenti sotto vari aspetti. Da un punto di vista tecnico, utilizzando la meccanica statistica, la teoria di ottimizzazione e le tecniche di computer vision, il problema del matching è stato risolto consentendo le ricostruzioni in 3D di grandi gruppi. Inoltre, l'analisi dei dati è stata effettuata tenendo conto degli effetti di frontiera e con tecniche di meccanica statistica e della fisica dei liquidi. In questo modo, per la prima volta, le caratteristiche morfologiche, dinamiche e strutturali di gruppi di animali sono stati valutati quantitativamente nel caso di grandi gruppi. Gli stormi sono risultati relativamente sottili ed il loro movimento piuttosto parallelo al suolo, una caratteristica emersa dalle foto e da osservazioni condotte da notevole distanza (quindi non derivanti da una riduzione del problema da 3D a 2D). I gruppi erano molto variabili in dimensione, densità, volume e velocità, consentendo un'analisi sistematica delle correlazioni reciproche tra le varie proprietà macroscopiche.

Per esempio, la densità e la distanza dall'individuo più vicino sono risultati essere indipendenti dal numero di individui appartenenti al gruppo, contrariamente alle precedenti osservazioni su piccoli gruppi. La forma degli stormi ha manifestato delle proporzioni costanti anche nel caso di dimensioni complessive molto diversificate e ciò ha suggerito la presenza di un meccanismo di auto-organizzazione indipendente dal numero totale degli individui. Poter gestire l'osservazione di grandi gruppi ha anche permesso una determinazione accurata di come gli individui siano distribuiti nello stormo. La distribuzione angolare dei soggetti più vicini ad un individuo focale ha rivelato una certa anisotropia, in cui i soggetti più vicini hanno maggiori probabilità di disporsi sui lati piuttosto che nella direzione del moto, come suggerito anche da osservazioni in piccoli gruppi di pesci ([36]). La distribuzione delle distanze dall'individuo più prossimo è stata quantitativamente caratterizzata evidenziando che gli stormi sono sistemi relativamente sparsi composti da unità interagenti tra loro. Le variazioni nella densità nell'ambito del gruppo si è riscontrato che siano maggiori al confine che non al centro del gruppo. Le dinamiche del gruppo nel suo complesso hanno mostrato che gli stormi eseguono particolari manovre, ad esempio curvare su un lato, lasciando quasi inalterata la forma e la velocità, nel curvare, ruota rispetto agli assi principali dello stormo. Tutti questi risultati possono essere considerati

significativi perché ottenuti su campioni statisticamente significativi (stormi in ambiente naturale, non condizionato) ed il numero dei componenti piuttosto elevato.

2.3 Osservazioni

I dati empirici, soprattutto per grossi gruppi, possono fornire una caratterizzazione affidabile delle leggi che regolano il raggrupparsi degli animali. I modelli, da parte loro, possono chiarire come specifiche norme locali portano a certi schemi collettivi. Tutte queste informazioni possono aiutare a comprendere meglio il fenomeno del raggruppamento. A questo proposito, ci sono diverse questioni da affrontare:

- le previsioni teoriche devono essere confrontate con i risultati empirici, per poter selezionare i modelli più affidabili e per supportare la comprensione dei meccanismi di formazione del gruppo;
- adeguati strumenti concettuali e metodologici devono essere sviluppati per poter procedere all'analisi ed all'interpretazione dei dati;
- la funzione di raggruppamento dovrà essere studiata sotto una prospettiva più generale dal punto di vista biologico.

2.3.1 Verifica delle ipotesi del Modello mediante dati empirici

Una descrizione quantitativa empirica del fenomeno del raggrupparsi è il punto di partenza per verificare a posteriori le ipotesi comportamentali utilizzate nei modelli teorici. A volte queste assunzioni possono necessitare solo di piccole rettifiche, in altri casi, per quanto possano apparire ragionevoli, è necessario procedere ad una revisione più radicale. L'analisi eseguita su stormi offre un chiaro esempio di questa strategia. Gli uccelli osservati come singoli individui hanno evidenziato intorno a sé una regione in cui gli altri soggetti vicini non penetravano ([2]), in coerenza con la zona di repulsione assunta dai modelli teorici. L'estensione di questa regione è dell'ordine dell'apertura alare e fornisce un valore quantitativo di riferimento per perfezionare i modelli al fine di avere previsioni migliori. Su scala più ampia, tuttavia, si è riscontrato che le interazioni tra gli individui dipendono dalla distanza "topologica" (cioè se due uccelli sono i più vicini o se tra essi ce ne sono altri) piuttosto che sulla semplice distanza metrica (quanto distanti sono). È stato dimostrato, in particolare, che ogni uccello interagisce con un numero fisso di vicini (6-7), indipendentemente dalla loro

distanza, piuttosto che con tutti i vicini di una regione ben definita nello spazio, come invece ipotizzato, in passato, dalla stragrande maggioranza dei modelli ad agenti (vedi Figura 2).

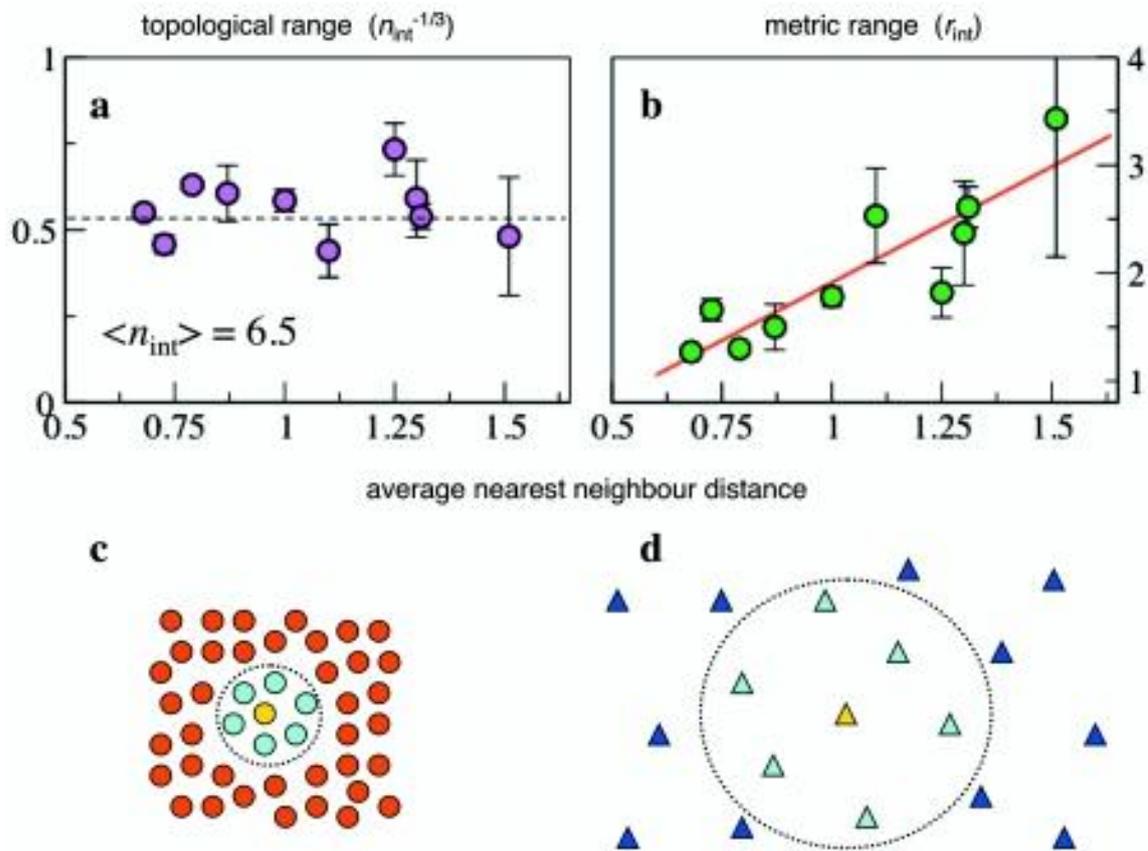


Figura 2 - Per studiare la natura delle interazioni tra individui negli stormi di storni, Ballerini ha considerato il campo di interazione misurato in metri (metrica) ed il numero di vicini significativi (topologia), per diversi stormi con diverse distanze medie

Gli autori hanno sostenuto che questa caratteristica topologica è indispensabile per mantenere la coesione dei gruppi, nonostante ampie fluttuazioni di densità che sono frequenti negli stormi a causa degli attacchi di predatori. In realtà, a causa di una perturbazione generica le distanze reciproche tra alcuni individui possono aumentare oltre ogni previsione, sia in termini proprio di lunghezza, che di zona, causando così la frammentazione in gruppi più piccoli e non coordinati tra loro. Le simulazioni numeriche in semplici modelli 2D confermano questa ipotesi, suggerendo che le interazioni topologiche, ben note nel caso di relazioni in reti sociali, possono svolgere un ruolo importante anche nei sistemi biologici. Questo risultato suggerisce un nuovo tipo di regola microscopica di cui tener conto.

Alcuni modelli già incorporano vincoli sul numero di soggetti influenti ([27]) o vincoli topologici ([19]) considerati insieme ai vincoli dipendenti dalla distanza.

Solo Ballerini [2] nel 2008 ha studiato simulazioni basate esclusivamente su vincoli topologici. Un ulteriore passo in questa direzione è stato fatto anche da Hemelrijk e Hildenbrandt [24] sempre nel 2008, che hanno assunto interazioni metriche, ma con dei limiti che si basano sulla densità locale, rendendo di fatto l'interazione topologica. Che le interazioni topologiche siano limitate ai soli storni (o agli uccelli in generale) o rappresentano un paradigma più generale è ancora da approfondire mediante studi empirici su specie differenti.

La constatazione che ogni uccello interagisce con i suoi primi sei/sette vicini più prossimi ha altre conseguenze interessanti. Una possibile spiegazione di questo numero è legato alle capacità numerica dei singoli uccelli. Degli studi empirici effettuati su diverse specie ([32], [16]) hanno dimostrato che sette è la numerosità massima che un uccello può discriminare. E', quindi, plausibile che quando si vola in un gruppo ogni individuo tiene traccia al massimo dei sette vicini più prossimi. Ciò dimostra che le capacità cognitive degli individui possono determinare in modo non banale le loro regole di comportamento in gruppo.

2.3.2 L'analogia con i sistemi fisici: strumenti concettuali e metodologici

Il problema della formazione del gruppo è, entro certi limiti, indipendentemente dalla natura dei suoi componenti ed i comportamenti collettivi degli animali hanno così scatenato interessi ed applicazioni interdisciplinari. La fisica ha fornito un importante paradigma concettuale che è stato ampiamente utilizzato nello sviluppo di modelli numerici e matematici. Gli individui in un gruppo sono trattati come semplici unità interagenti e le caratteristiche globali sono derivate dalle interazioni microscopiche locali, alla stessa stregua di come dei risultati macroscopici vengono calcolati per i sistemi fisici di particelle o molecole. L'analogia con la fisica è estremamente utile, ma ha comunque diversi limiti. Nei sistemi fisici singole unità possono essere caratterizzate completamente e la natura delle interazioni tra loro è nota dall'inizio. Al contrario, nei sistemi biologici singole caratteristiche indicate nei modelli dipendono sempre da alcune semplificazioni concettuali di un comportamento molto più complesso e le interazioni tra gli individui non vengono da leggi fisiche, ma piuttosto derivano da processi biologici complessi. Questo può portare a notevoli differenze. Un chiaro

esempio è il risultato trovato osservando gli storni, in cui gli individui presentano interazioni topologiche, mentre negli esempi della fisica tutte le interazioni dipendono dalla distanza e per i sistemi di particelle non si sarebbe mai potuto ottenere un comportamento tipo quello osservato negli stormi di storni. In questo caso le capacità cognitive degli individui fanno la differenza e la determinazione della natura delle interazioni risulta più complessa. Più in generale, gli animali non sono unità passive, ma individui adattivi che possono modificare il proprio comportamento in funzione degli stimoli ambientali, sociali e/o biologici e possono imparare dalle esperienze passate o dagli altri individui. Di conseguenza, oltre la forza, anche la natura delle interazioni tra individui interazioni può variare nel tempo, inducendo diversi modelli collettivi. Questa è un'altra differenza con i sistemi fisici dove le interazioni sono date una volta per tutte e lo stato globale (ad esempio, ordinato o disordinato) può essere modificato solo mediante la variazione dei parametri esterni (ad esempio, temperatura, pressione, campo magnetico).

A parte l'analogia meccanica, la fisica fornisce sofisticati strumenti metodologici di analisi che possono anche essere applicati a gruppi biologici. In particolare, suggerisce particolari aspetti da osservare per quantificare il comportamento collettivo in sistemi complessi. Ad esempio, un sistema di particelle fisiche soggette ad interazioni reciproche ed aventi un raggio di repulsione breve si può trovare in diversi stati (gas, liquidi, solidi) e può visualizzare diversi comportamenti dinamici. La teoria dei liquidi indica cosa calcolare per quantificare la struttura interna del sistema, la suscettibilità alle perturbazioni, le caratteristiche dinamiche e le proprietà di diffusione. Le stesse grandezze possono essere calcolate in gruppi di animali (proprio come accennato per Ballerini nel caso degli stormi di storni).

La maggior parte delle analisi dei dati effettuate nelle osservazioni empiriche, negli esperimenti e nelle simulazioni numeriche su gruppi di animali si sono concentrate sulla quantità medie aggregate e sulle funzioni puntuali. Esempi sono la velocità media del gruppo, la polarizzazione o la densità locale di individui. Un alto livello di indagine quantitativa, molto utilizzato nei sistemi fisici, è fornita da funzioni di correlazione a due punti. Queste funzioni descrivono come il comportamento degli individui in una certa regione del gruppo e ad un certo momento sia legato al comportamento di individui in un'altra posizione del gruppo e/o in un altro momento.

Delle funzioni di correlazione spaziale possono contribuire a caratterizzare la struttura del gruppo ed il posizionamento relativo degli individui. Correlazioni densità-densità, per esempio, presentano diversi modelli in corrispondenza della disposizione disordinata o di quella cristallina di individui. Un'analisi empirica di queste correlazioni in stormi di storni ([7]) ha dimostrato che, anche se gli stormi presentano qualche struttura spaziale un po' ibrida tra un liquido e un gas, una disposizione cristallina deve essere esclusa.

Più in generale, le funzioni di correlazione descrivono come le informazioni e le perturbazioni si propagano attraverso il gruppo fornendo una misurazione della sensibilità reciproca dei membri per i cambiamenti di posizione e di velocità. L'efficienza del trasferimento di informazioni è un elemento chiave per la disposizione in gruppo degli animali ed un'analisi quantitativa di questa efficienza è quindi di interesse teorico primario. Nonostante alcune analisi empiriche su piccoli sistemi, un'analisi sistematica delle correlazioni a due punti non è stata ancora eseguita. Misure accurate di queste funzioni su degli intervalli completi richiedono grandi statistiche e, quindi, insiemi di dati relativi a grandi gruppi. Lo stesso vale quando si tratta di proprietà di diffusione che descrivono come gli individui si muovono attraverso il gruppo e il modo in cui si scambiano le loro posizioni reciproche. Le previsioni teoriche sulla diffusione tipicamente riguardano i comportamenti su grande scala e possono essere richiesti grandi gruppi per testarli empiricamente, con un notevole lavoro di campionamento.

La raccolta dei dati sui grandi gruppi appare dunque come una condizione essenziale per un'analisi statistica più dettagliata. Ciò può essere tecnicamente impegnativo, come confermato dalle difficoltà incontrate per ottenere ricostruzioni 3D stereoscopiche. Un problema simile è dato dal monitoraggio dinamico necessario per rilevare le traiettorie degli individui attraverso il gruppo. Queste traiettorie sono il punto di partenza per calcolare le proprietà di diffusione e funzioni di correlazione multi-temporali.

2.3.3 Funzione biologica di aggregazione

Dal punto di vista biologico è importante capire qual è la funzione che regge il fenomeno dell'aggregazione e di come agisce la pressione selettiva sui singoli individui per promuovere proprietà funzionali a livello di intero gruppo.

Vivere in gruppi può avere molti vantaggi. Uno di questi, soprattutto nel caso di stormi di uccelli e di banchi di pesce, è associato con la risposta agli attacchi dei predatori. L'appartenenza ad un gruppo di individui simili garantisce l'anonimato e diminuisce la probabilità di essere scoperti (effetto di diluizione). Muoversi insieme confonde anche la capacità di predatori di concentrarsi su un individuo e catturarlo (effetto confusione). Essere in un gruppo di molti unità, aumenta la probabilità di intercettare l'attacco di un predatore. Inoltre, le forti correlazioni presenti tra i membri del gruppo permettono la rapida propagazione dell'informazione riguardante eventuali attacchi: la risposta di pochi individui, consapevoli direttamente della presenza dei predatori, può innescare manovre di fuga collettiva grazie alla natura imitativa delle dinamiche di ciascun individuo. Questo stesso meccanismo, in cui un segnale locale è rinforzato e trasferito per imitazione, può essere usato per trasmettere vari tipi di informazioni come la presenza di ostacoli o la distribuzione e localizzazione delle risorse, i soggetti più informati conducono tutto il gruppo verso la destinazione preferita. Allo stesso modo, le interazioni sociali possono migliorare lo sfruttamento dei gradienti ambientali, consentendo una migliore individuazione anche di segnali di lieve intensità. Tutte queste caratteristiche rappresentano vantaggi adattativi, che possono essere invocati per spiegare il successo evolutivo del gruppo animale. A questo proposito, sono particolarmente utili le analisi empiriche che quantificano l'efficienza del trasferimento di informazioni, mentre le funzioni di correlazione a due punti sono un possibile strumento. Inoltre, sarebbe auspicabile avere dati sugli eventi di risposta (ad esempio, quando si verifica un attacco di predatori), ma purtroppo le strategie di fuga tipicamente coinvolgono rapidi cambiamenti di forma, densità e direzione del gruppo, difficili da recuperare con le tecnologie attuali. Da un punto di vista teorico, i modelli possono chiarire come possono essere ottimizzati il trasferimento delle informazioni e le risposte a stimoli esterni all'interno di una determinata classe di regole comportamentali. In termini generali, i membri del gruppo mediano i "segnali" (coordinate di orientamento e di posizione) provenienti dai loro vicini, in modo tale che le informazioni siano condivise da tutti i vicini ottenendo sia una migliore propagazione del "segnale" che una riduzione del "rumore" (grazie alla media). Purtroppo, se le informazioni ce l'hanno solo in pochi, l'azione mediativa può quasi sopprimere del tutto il "segnale" e di conseguenza la propagazione risulta inefficace. Questi due effetti, media e propagazione, sono stati indagati, con particolare attenzione al numero dei soggetti vicini che interagiscono, sia nel contesto della klinotaxis (tendenza a

muoversi in modo ondeggiante verso uno stimolo) che per la risposta anti-predatori.

Un'altra questione riguarda la "robustezza" del comportamento collettivo. Ci si aspetterebbe che i gruppi possano fronteggiare in modo efficiente le perturbazioni esterne ed i cambiamenti ambientali. Questo significa, ad esempio, che sotto gli attacchi predatori, non solo dovrebbe essere propagata velocemente l'informazione, ma che anche la coesione dovrebbe essere preservata. Questo è ciò che effettivamente si verifica in molti gruppi naturali, ad esempio, nei gruppi di volatili, nonostante manovre straordinarie e variazioni di densità, raramente si riscontra la disgregazione dello stormo. Ci si potrebbe chiedere quale sia il meccanismo adeguato per garantire una tale coesione. Le interazioni di tipo topologico, come quelle osservate negli storni, forniscono una possibile spiegazione: se ogni individuo interagisce con un numero fisso di vicini indipendentemente dalla loro distanza, cambiamenti di densità (e quindi le variazioni di distanze reciproche) non influenzano l'intensità delle relazioni sociali ed il grado di coesione rimane pressoché immutato. Simulazioni su semplici modelli 2D indicano che le interazioni topologiche sono più efficienti di quelle metriche per mantenere la coesione sotto sollecitazioni perturbative (Ballerini [2]). Eppure, un'analisi più approfondita sarebbe necessaria per indagare questa ipotesi nel caso dei modelli 3D e di valutare empiricamente in quali circostanze ed in quali specie le interazioni topologiche siano prevalenti.

La coesione dovrebbe essere preservata anche nei confronti delle tensioni interne. Non tutte le posizioni in un gruppo sono equivalenti in termini di benessere individuale e quelle che risultano vantaggiose in determinate circostanze (difesa, foraggiamento, migrazione, etc.) possono non esserlo in altre. I soggetti di un gruppo devono sperimentare un ragionevole compromesso tra costi e benefici per spiegare la persistenza dell'aggregazione. Pertanto, gli stessi meccanismi che portano alla formazione di un gruppo devono anche considerare una ridistribuzione adeguata dei rischi tra i membri del gruppo. Ad esempio, la constatazione che stormi di storni sono più densi sul confine che al centro può essere correlata alle strategie di riduzione del rischio. Ulteriori analisi empiriche di come gli individui siano posizionati all'interno del gruppo e si riorganizzino dinamicamente, integrate da un adeguato esercizio di modellazione, può aiutare a chiarire proprio la ridistribuzione dei rischi.

3 Modello di riferimento

Come accennato nel capitolo precedente, un filone di ricerca è stato quello basato sull'idea che comportamenti, anche complessi, di gruppi di soggetti derivino da interazioni semplici tra soggetti prossimi nell'ambito di ciascun gruppo, provando ad individuare schemi comportamentali e disposizioni tipiche più ricorrenti, riconducibili a particolari specie o classi di specie caratterizzate da determinati valori per alcuni parametri più significativi nell'ambito dei modelli definiti ([17]).

L'approccio descritto è stato completato dall'assunto che ciascun soggetto sia trattabile come a sé stante ed avente pari rilevanza rispetto agli altri (assenza di leader), ipotizzando così che il comportamento di ciascuno sia assoggettato alle stesse regole. Ciò ha riscontro in molti risultati scientifici di derivazione biologica focalizzati su alcune specie di animali ([40]).

Le interazioni tra soggetti sono state caratterizzate come di tipo repulsivo, evitando contatti o addirittura collisioni/compenetrazioni, e di tipo attrattivo che consentono la formazione dei gruppi di soggetti che si posizionano l'uno "vicino" agli altri ([40], [31]).

In verità, queste tipologie di interazione condizionerebbero anche la rapidità con cui si raggiungono le disposizioni e le distanze caratteristiche di ciascuna specie, ma questo aspetto non è stato considerato.

Altra peculiarità delle interazioni è che ciascun soggetto sia influenzato da un numero limitato di soggetti più prossimi ([1]) e non dai soggetti che ricadano entro una determinata distanza. Ad esempio, nel caso di stormi piuttosto numerosi di storni (variante della famiglia dei passeri), risultati sperimentali hanno confermato che le interazioni significative sono quelle che coinvolgono sei o sette soggetti più vicini [1], indipendentemente da quanto siano distanti, purché le distanze non siano eccessive, al punto di non poter più considerare i soggetti come appartenenti allo stesso gruppo.

In aggiunta, per molte specie di animali, gli n soggetti più prossimi, per condizionare il soggetto in esame devono ricadere nella sua cosiddetta "area d'influenza", avente dimensioni e forme caratteristiche di ciascuna specie.

Uno approccio basato sulla valutazione della velocità di spostamento [14] ha fornito una serie di risultati in ambito bidimensionale che si sono rivelati compatibili con quanto appena accennato. La suddetta velocità di spostamento di ciascun soggetto si è supposta dipendente, nell'ambito di ciascun gruppo, dalle interazioni esercitate tra i soggetti stessi, interazioni caratterizzate essenzialmente come forze attrattive e forze repulsive (il contesto considerato non prevedeva gerarchie tra soggetti, ovvero si è supposta l'assenza del leader o del dominante). Ciascun soggetto si suppone sia influenzato solo dai soggetti che rientrano nella sua "zona di influenza" (si possono modellare interazioni non simmetriche, in quanto un soggetto può rientrare nella zona di influenza di un altro soggetto che, però, non lo condiziona in quanto fuori dall'area sensibile) e tra tutti questi si è considerata significativa solo l'influenza degli n soggetti più prossimi.

Detto N il numero di soggetti componenti un gruppo in uno spazio bidimensionale, si è espressa la velocità di spostamento del soggetto i -esimo come:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{v}_i(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j \in A_i^n} f_a(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} - \sum_{j \in R_i^n} f_r(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$$

- con $i \in \{1, \dots, N\}$;
- con $f_a : R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ e $f_r : R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ funzioni che descrivono rispettivamente come ciascun soggetto sia attratto e respinto dai soggetti adiacenti in funzione della posizione relativa;
- con A_i^n e R_i^n set dei soggetti, in numero $\leq n$, che rientrano nelle zone di influenza, rispettivamente attrattiva e repulsiva, del soggetto i -esimo.

Sono state attuate delle semplificazioni assumendo che le funzioni $f_a(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)$ ed $f_r(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)$ siano legate alle distanze tramite delle costanti:

- $f_a(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) = F_a \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$ e
- $f_r(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) = \frac{F_r}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$, con F_a e F_r costanti positive (non adimensionali).

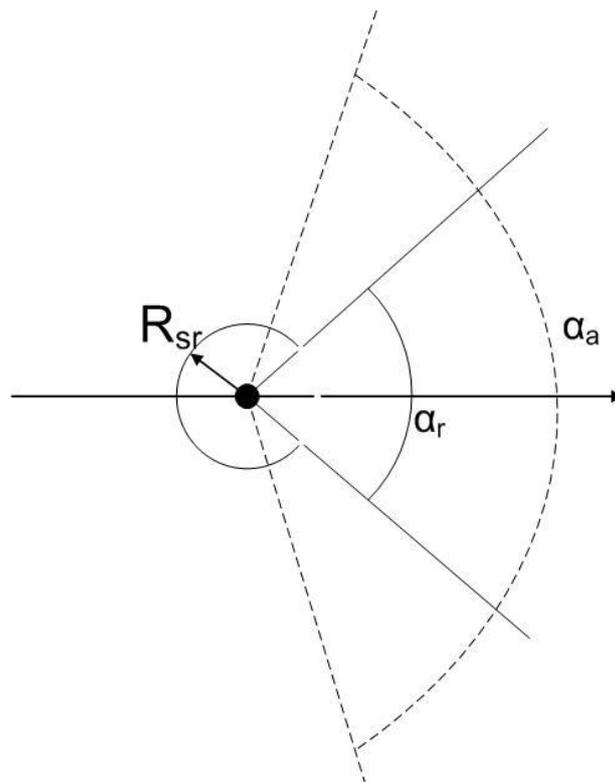
Ciò consente di ricondursi alla

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \in A_i^n} F_a (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \sum_{j \in R_i^n} F_r \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2}$$

ovvero, $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \in A_i^n} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \xi^2 \sum_{j \in R_i^n} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2}$,

- con $\xi = \sqrt{\frac{F_r}{F_a}}$ ed avendo scelto come unità di misura del tempo $\frac{1}{F_a}$ e come unità di misura delle lunghezze la dimensione tipica degli animali considerati.

L'aspetto relativo all'“area d'influenza prima accennata è stato formalizzato come nella figura



In riferimento alla figura, si sono considerati i seguenti parametri caratteristici:

- α_a angolo del cono di attrazione
- α_r angolo del cono di repulsione
- R_{sr} raggio area di repulsione (eventualmente esterna all'angolo di repulsione)

La valutazione di A_i^n e R_i^n consente di ricondursi ad un approccio “topologico” ([2]) e non “metrico”, nel senso che l'influenza sul soggetto i-esimo viene esercitata dai soggetti che ricadono in una zona specifica e non semplicemente posti entro una distanza significativa.

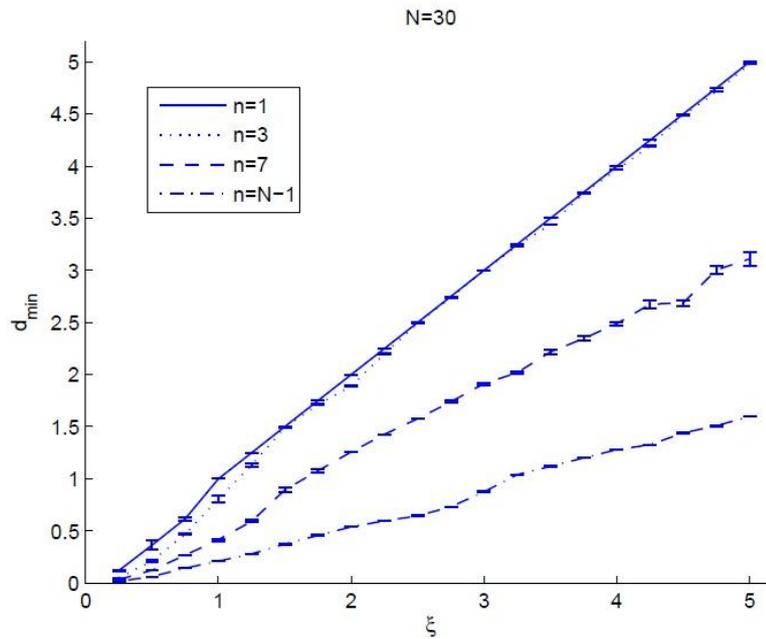
Nel caso di $\alpha_a = \alpha_r = 360^\circ$ il parametro R_{sr} diventa influente e l'interazione diventa isotropica (in coerenza con quanto presentato da [2] e [10]). È importante osservare che in questo caso ($\alpha_a = \alpha_r = 360^\circ$), ma ancor più nel caso generale, può accadere che il soggetto j-esimo ricada tra gli n soggetti che influenzano il soggetto i-esimo, ma non viceversa e ciò proprio perché i soggetti attivi per l'i-esimo sono i primi n, a prescindere dalla distanza a cui si trovino.

In dipendenza dalle forme assunte dalle funzioni $f_a(\|x_j - x_i\|)$ e $f_r(\|x_j - x_i\|)$ si potrebbero avere diversi modelli, coerenti con i comportamenti di altre specie animali.

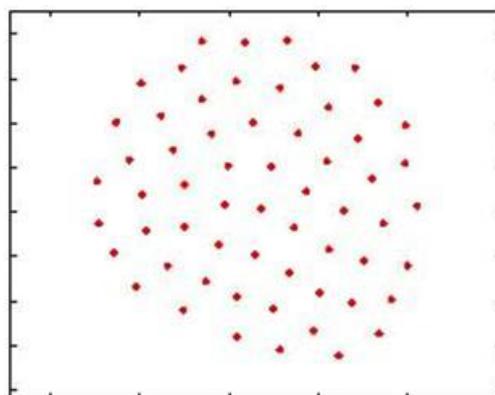
In funzione dei parametri caratteristici dell'"area d'influenza" si possono avere delle disposizioni particolari nell'ambito dei gruppi in modo da dare agli stessi gruppi delle forme specifiche:

- $\alpha_a = \alpha_r = 360^\circ$ (interazioni simmetriche) → disposizione a cluster
- $\alpha_a = 360^\circ, \alpha_r < 180^\circ$ (cono di repulsione frontale ristretto) → disposizione a "V"
- α_a e $\alpha_r < 360^\circ$ (con $\alpha_r \geq 180^\circ$) → disposizione allungata

In particolare, nel caso $\alpha_a = \alpha_r = 360^\circ$, definendo un indicatore, la distanza media dal soggetto più vicino (D_{min}), si è riscontrato che al crescere di ξ (ovvero al crescere di F_r rispetto ad F_a) cresce anche D_{min} (in modo approssimativamente lineare). L'andamento crescente è piuttosto indipendente da N (numero totale dei soggetti) ed è meno accentuato al crescere di n (numero massimo di soggetti influenti su ciascun soggetto), fino ad N-1. In definitiva, al crescere di n (indipendentemente da N) i soggetti tendono ad essere più ravvicinati a parità di ξ , ovvero più ravvicinati, a parità di n, al diminuire di ξ (cioè al diminuire di F_r rispetto ad F_a).

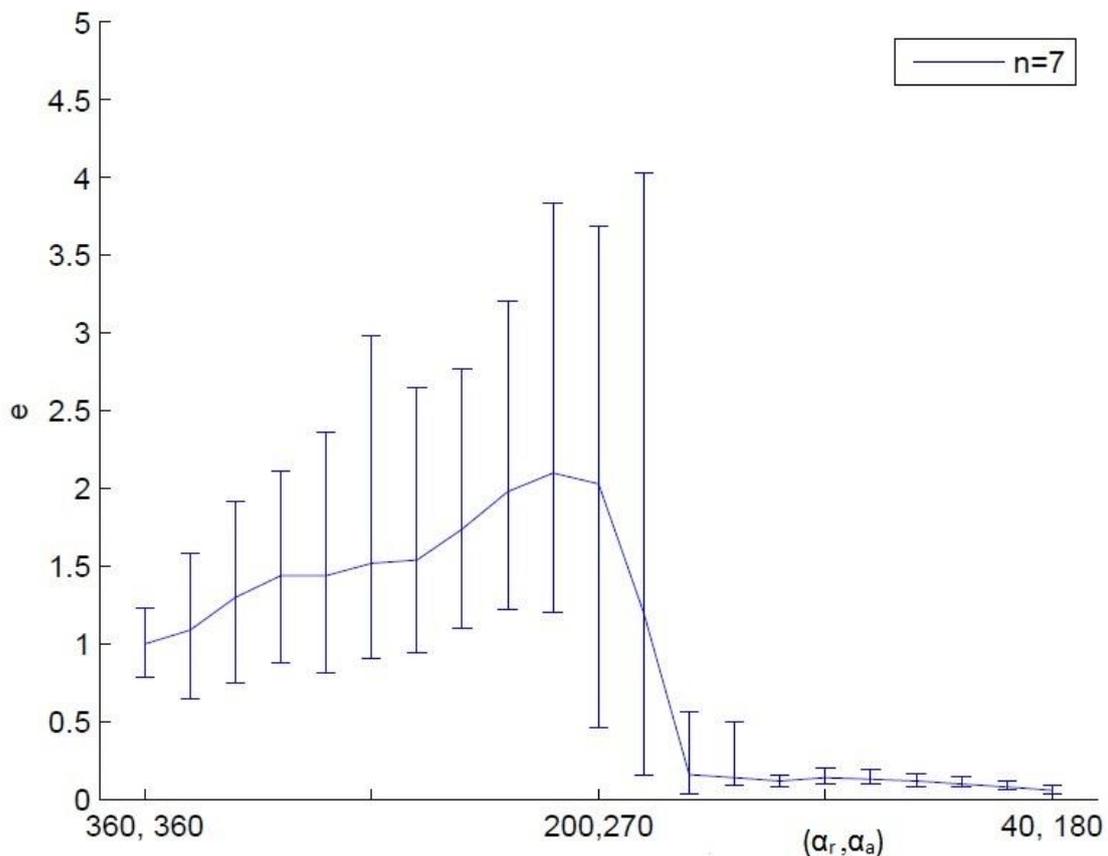


Va osservato che il parametro n è comunque soggetto a vincoli “biologici”, nel senso non può essere molto grande a causa dei limiti sensoriali degli animali, ma neanche piccolissimo ($n=1$ è molto improbabile), altrimenti sarebbero favorite le collisioni tra soggetti. Ulteriore influenza di ξ si esplica sulla forma del gruppo intero. Nel caso di $n=1$ si ha una forma approssimativamente esagonale ed internamente i soggetti sembrano rispettare una disposizione ordinata ad esagono. Nel caso di $n=N-1$ si ha una forma approssimativamente circolare, con i vari soggetti disposti secondo cerchi concentrici. Per valori intermedi di n si ha una disposizione meno ordinata ed una forma aggregata meno regolare.

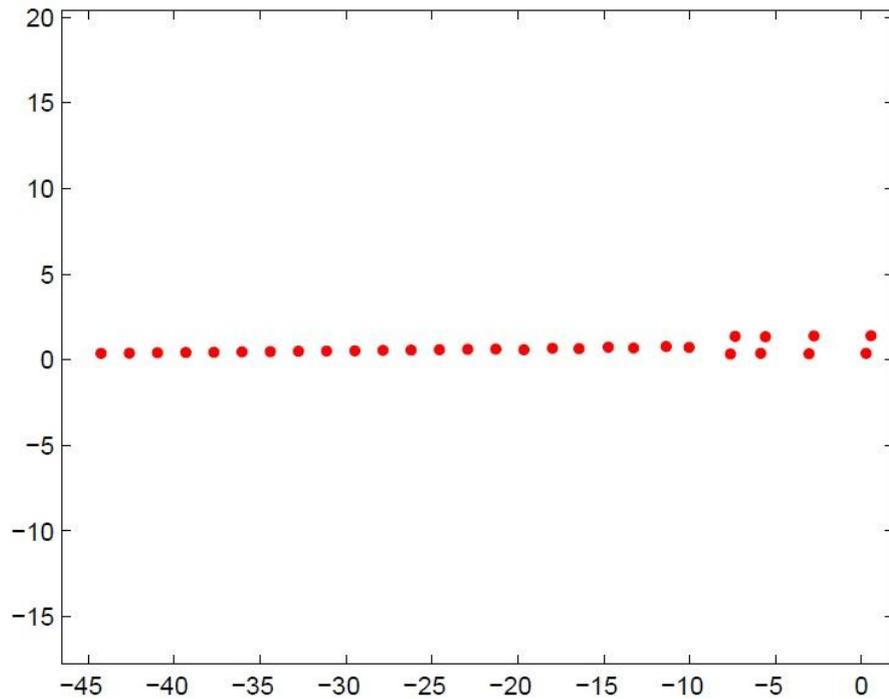


Nel caso di α_a e $\alpha_r < 360^\circ$, o meglio nel caso α_a sia compreso tra 360° e 180° , ed α_r anche minore di 180° , ad esempio perché l’area d’influenza repulsiva sia sostanzialmente frontale, si riscontra la dipendenza dell’allungamento del gruppo

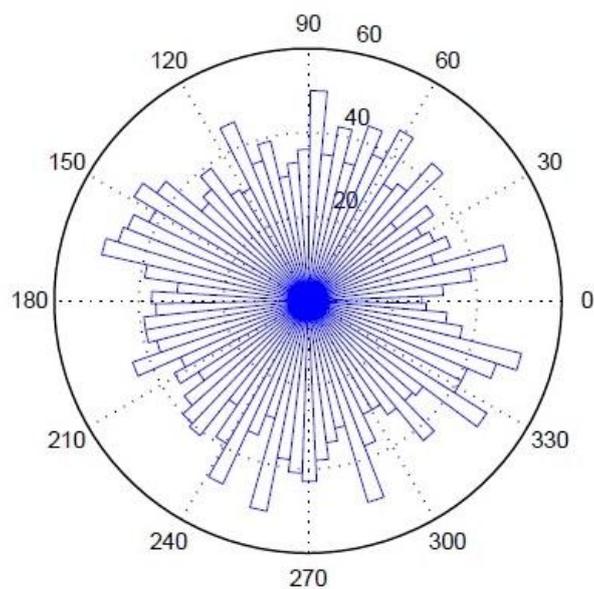
costituito da tutti i soggetti da n e dai due angoli α_a e α_r . Considerando il rapporto tra la dimensione trasversale del gruppo (trasversale rispetto alla direzione del movimento) e la dimensione longitudinale (si può pensare al rettangolo di area minore che contenga tutti i soggetti del gruppo), si è riscontrato che, nel caso $n=7$, si ha per $(\alpha_a, \alpha_r) = (360^\circ, 360^\circ)$ che ci si ha ad un allungamento unitario (ovvero ci si riconduce alla disposizione a cluster); per $(\alpha_r, \alpha_a) = (200^\circ, 270^\circ)$ si ha prevalenza della dimensione trasversale rispetto alla direzione del movimento. Questo effetto si esalta per $n=1$ (rapporto = 3 circa) e si attenua per $n=N-1$ (rapporto = 1,5 circa); per $(\alpha_r, \alpha_a) = (40^\circ, 180^\circ)$ si ha invece una disposizione piuttosto allungata nella direzione del movimento (dimensione longitudinale prevalente rispetto a quella trasversale) e la dipendenza da n è più contenuta. In generale, valori più elevati di n inducono andamenti più smussati.



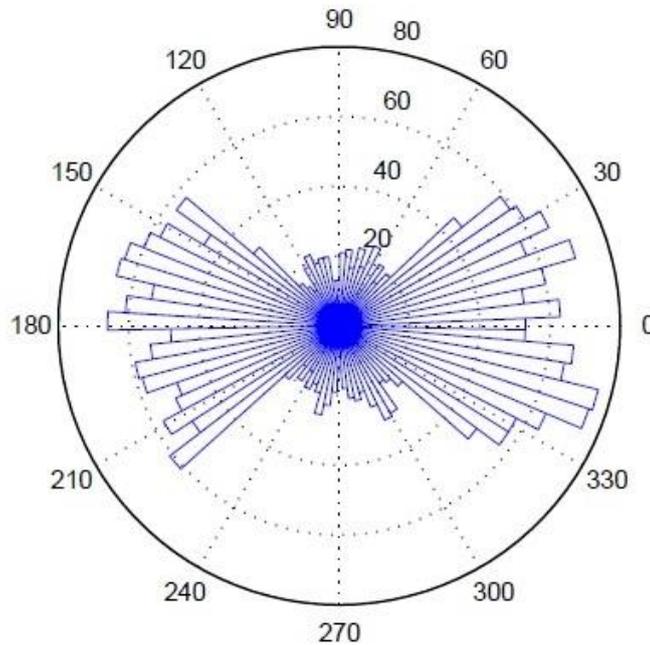
Un effetto riportato è stato quello di una sorta di instabilità in corrispondenza della “testa del gruppo” nel caso di $(\alpha_r, \alpha_a) = (40^\circ, 180^\circ)$. Ciò perché è come se i soggetti in testa al gruppo, avendo meno soggetti che li influenzano, non interagiscono in modo completo come può invece accadere per i soggetti posizionati in zone più interno del gruppo.



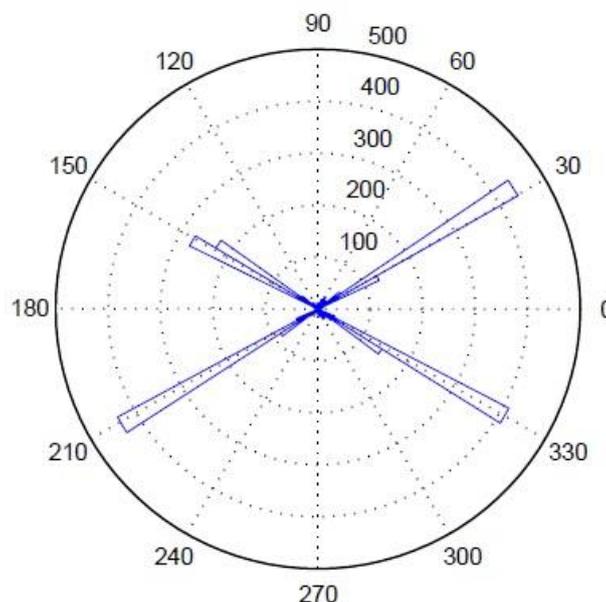
Nel caso di $\alpha_a = 360^\circ$ e $\alpha_r < 360^\circ$ si riscontra una diversa conformazione del gruppo e della disposizione dei soggetti. Nel caso di $\alpha_a = 360^\circ$ e $\alpha_r = 360^\circ$ si è verificato che la distribuzione degli angoli formati dalla congiungente il soggetto in esame con il suo vicino più prossimo e la direzione del movimento del soggetto in esame non ha un valore preferito, nel senso che i soggetti si dispongono secondo tutte le direzioni.



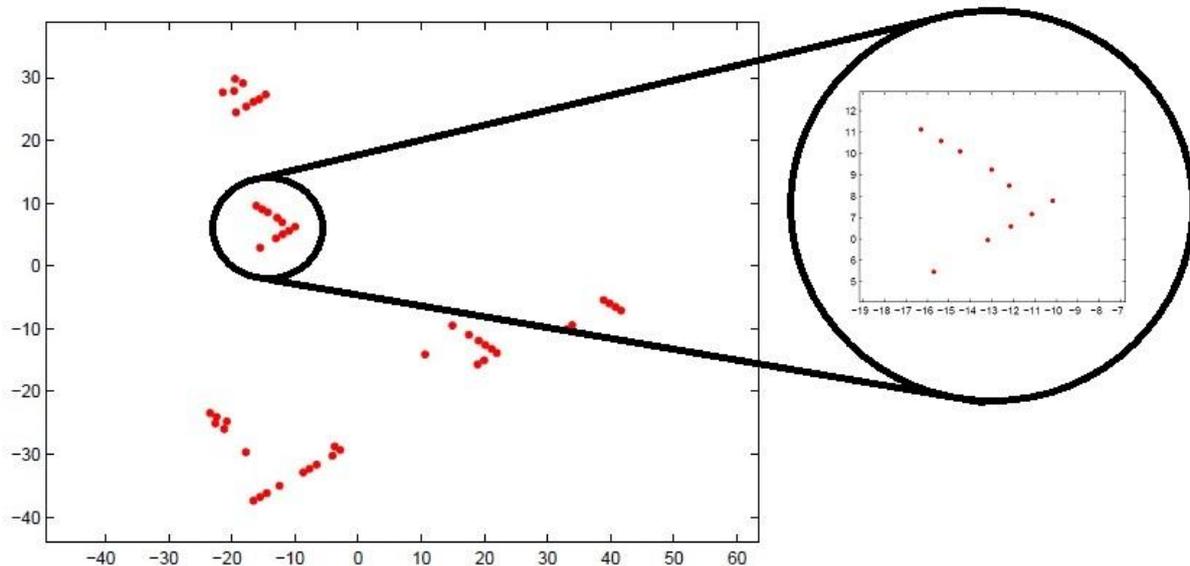
Nel caso di $\alpha_a = 360^\circ$ e $\alpha_r = 270^\circ$ si riscontra che la distribuzione dell'angolo prima descritto è tale da indurre il soggetto a disporsi nelle zone posteriori ed anteriori rispetto alla direzione del movimento, lasciando quasi vuote le aree laterali.



Nel caso di $\alpha_a = 360^\circ$ e $\alpha_r = 60^\circ$ si riscontra che la distribuzione dell'angolo prima descritto si concentra su alcuni valori specifici (e non su range di valori come nel caso di $\alpha_r = 270^\circ$). In particolare, i valori preferenziali sono pari a $\pm \alpha_r / 2$, ovvero $\pm 180^\circ + \alpha_r / 2$.



Siffatti angoli, per $N=60$ ed $n=7$ (quindi un valore piuttosto probabile per n perché >1 e $< N-1$), inducono la formazione di aggregazioni localmente assimilabili a delle “V” (con vertice orientato verso la direzione del movimento del gruppo).



Per valori di n prossimi ad 1 o molto elevati (fino a $N-1$) non si evince la tendenza alla disposizione a “V”.

Dunque, α_a e α_r , ovvero le peculiarità delle aree d’influenza, condizionano fortemente la disposizione relativa dei soggetti e, di conseguenza, la forma complessiva del gruppo (o dei sottogruppi). E’ da osservare, però, che gli stessi α_a e α_r , oltre a dipendere dalla specie trattata, possono essere condizionati anche dalle condizioni esterne: tipo di movimento del gruppo e/o del singolo soggetto, condizioni ambientali, eventuale presenza di predatori, etc..

Riassumendo, si sono individuate tre casistiche principali.

Caso di interazioni isotropiche che conducono a disposizione a “cluster”. Questa disposizione si riscontra negli uccelli di taglia piccola e nei pesci. Per questi, la biologia conferma la capacità di “sentire” in modo omogeneo la presenza di altri soggetti intorno. Con questa disposizione, anche se il gruppo deve modificare la direzione in cui si muove, oltre a riuscirci in modo rapido, non ha bisogno di riorganizzare la propria forma (prerogativa non disponibile per le disposizioni a linea e a “V”).

Caso di interazioni non isotropiche, in particolare con aree d’influenza frontali sia per l’attrazione che per la repulsione che conducono ad una disposizione lineare.

Questa disposizione si ritrova negli animali che si muovono lentamente, come, ad esempio, gli elefanti, i pinguini, le aragoste. Queste tipologie di animali, tendono a mantenere in modo piuttosto stabile la direzione del proprio movimento, per questa ragione l'area di influenza repulsiva è piuttosto concentrata nel frontale per evitare collisioni con chi precede. Analogamente, per $\alpha_r = 180^\circ$ si intuisce l'interazione attrattiva esercitata dai soggetti che precedono e la "non curanza" nei confronti di chi segue, compreso il caso in cui i soggetti che seguono si attardino, con eventuale discontinuità del gruppo. In definitiva, la disposizione a linea è tipica degli animali che non sono molto interessati a preservare la coesione del gruppo o che abbiamo, ad esempio, un'area "sensibile" per la vista, sostanzialmente frontale.

Caso di interazioni attrattive isotropiche e interazioni repulsive non isotropiche che inducono una disposizione a "V". Queste formazioni non sono molto stabili. Nel caso si perda la disposizione a "V", questa viene ripristinata in fretta. In ogni caso, la disposizione a "V" riguarda singoli sottogruppi e non il gruppo completo e questi sottogruppi (ovvero ciascuna "V") sono tipicamente costituiti sempre dallo stesso numero di soggetti. Se N (numero complessivo di soggetti) aumenta si avranno più sottogruppi, ma non sottogruppi con più soggetti. La disposizione a "V" caratterizza alcune specie di uccelli. Nel loro caso c'è un vantaggio aerodinamico (si riesce a volare "sfiorando" le aree vorticose generate alle estremità delle ali di chi precede), ma anche un vantaggio di visuale (si riesce a volare con una visuale non coperta da chi precede), oltre a riuscire ad evitare le collisioni perché non ci sono più soggetti adiacenti sulla stessa linea del movimento.

4 Modello monodimensionale

Il problema della “disposizione spontanea degli uccelli su un filo orizzontale” è un problema monodimensionale. L’approccio adottato per la definizione del modello si basa sullo stesso principio precedentemente descritto: la velocità con cui si sposta ciascun soggetto i -esimo ha una componente derivata dalle interazioni repulsive ed un’altra componente derivata dalle interazioni attrattive tra il soggetto i -esimo e un sottogruppo di soggetti che si ritiene possano interagire con esso in modo significativo.

Assumendo che sia $\mathbf{x} : R_{\geq 0} \rightarrow R^N$ il vettore delle posizioni degli N soggetti costituenti il gruppo da analizzare (con N il numero di uccelli in uno spazio unidimensionale - su un filo - costituenti il gruppo), in generale si ha $\mathbf{x}(t)$ perché, a causa delle interazioni tra soggetti, le posizioni assunte dagli N soggetti dipendono dal tempo.

La funzione $\mathbf{x}(t)$ soddisfa il sistema di N equazioni differenziali ordinarie $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Se si suppone di poter accettare l’ipotesi semplificativa di avere $\dot{\mathbf{x}}$ indipendente dal tempo, il sistema di equazioni differenziali ordinarie assume la forma:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} \left[|x_j - x_i|^{m_a - 1} - \xi^{m_a - m_r} |x_j - x_i|^{m_r - 1} \right] (x_j - x_i) \quad \forall i$$

$$\in \{1, \dots, N\}, \quad (XYZ)$$

Avendo assunto che $i > j \Rightarrow x_i > x_j$



ed essendo:

- $m_a \geq 0$ rappresentativo dell’attrazione tra soggetti,
- $m_r < 0$ rappresentativo della repulsione tra soggetti,
- $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid |i - k| \leq d\}$, con d rappresentativo del numero massimo di soggetti che riescono ad esercitare influenza su ciascun lato (l’interazione dipende dal numero e non dalle distanze dei soggetti),
- $\xi > 0$ distanza caratteristica legata al rapporto tra forze repulsive e forze attrattive.

Vista la convenzione su x_i e x_j , nel caso di $j > i$ (ad esempio $j = i + 1$) si ha $(x_j - x_i) > 0$, pertanto il contributo $|x_j - x_i|^{m_a - 1} (x_j - x_i) > 0$, ovvero da un apporto alla velocità dell'elemento i -esimo "verso" l'elemento j -esimo. Per questo motivo lo si può legare al contributo alla velocità derivante dall'interazione attrattiva.

Analogamente, nel caso di $j < i$ il contributo $-\xi^{m_a - m_r} |x_j - x_i|^{m_r - 1} (x_j - x_i) < 0$, ovvero da un apporto alla velocità dell'elemento i -esimo "nel verso opposto" all'elemento j -esimo. Per questo motivo lo si può legare al contributo alla velocità derivante dall'interazione repulsiva. In definitiva si possono riconoscere i due contributi alla velocità del soggetto i -esimo: quello derivante dalle interazioni attrattive e quello derivante dalle interazioni repulsive con tutti i soggetti che possono esercitare un'influenza significativa:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \dot{x}_{ia} + \dot{x}_{ir} \\ &= \sum_{j \in N_i} \left[|x_j - x_i|^{m_a - 1} \right] (x_j - x_i) \\ &\quad + \sum_{j \in N_i} \left[-\xi^{m_a - m_r} |x_j - x_i|^{m_r - 1} \right] (x_j - x_i)\end{aligned}$$

Nel caso particolare di $m_a = 1$ e $m_r = -1$ si ottiene

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} \left[|x_j - x_i|^0 - \xi^2 |x_j - x_i|^{-2} \right] (x_j - x_i), \text{ ovvero}$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} \left[1 - \xi^2 \frac{1}{|x_j - x_i|^2} \right] (x_j - x_i)$$

Partendo dalla modellazione descritta in precedenza per l'individuazione delle diverse disposizioni possibili,

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in A_i^n} (x_j - x_i) - \xi^2 \sum_{j \in R_i^n} \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^2},$$

- ipotizzando coincidenti i due insiemi A_i^n e R_i^n (quindi per ciascun soggetto i -esimo i soggetti in grado di esplicare interazioni attrattive coincidono con quelli in grado di esplicare interazioni repulsive), indicandoli con N_i ,
- considerando il caso monodimensionale, quindi, per ciascun soggetto i -esimo, non più il vettore $\dot{x}_i(t)$, bensì la velocità scalare $\dot{x}_i(t)$,

il problema monodimensionale della previsione della disposizione degli uccelli su di un filo (in particolare sui cavi elettrici), secondo il modello precedente, si può rappresentare come segue:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} \left[1 - \frac{\xi^2}{|x_j - x_i|^2} \right] (x_j - x_i), \text{ con } \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Assumendo che $i > j \Rightarrow x_i > x_j$ si può definire $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid |i - k| \leq n\}$, con n rappresentativo del numero massimo di soggetti che riescono ad esercitare influenza su ciascun lato, proprio perché si lavora nell'ipotesi che l'interazione dipenda dal numero e non dalle distanze dei soggetti.

Come si vede, il modello proposto, nel caso di $m_a = 1$ e $m_r = -1$, equivale alla riduzione monodimensionale del modello precedente.

Tornando al modello proposto, si noti che il membro a destra della (XYZ) è non definito se $x \in D$, con $D = \{x \in R^n \mid x_h = x_k \text{ per alcuni } h \neq k\}$

La condizione appena descritta implica che, con il modello, non sono rappresentabili sovrapposizioni di soggetti.

Si definisca $x^* \in R^N$ di equilibrio per la (XYZ), ovvero per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (XYZ), se $\dot{x} = f(x^*) = 0$.

Se $x(t)$ è soluzione del sistema (XYZ), con $x(0) = \bar{x} \in (R^N \setminus D)$, con $\bar{x}_i > \bar{x}_j$ quando $i > j$, si può dimostrare che:

- esiste una soluzione $x(t)$ per $t > 0 \rightarrow$ esistenza di una soluzione;
- $x_i(t) > x_j(t)$ per $t > 0 \rightarrow$ non si verifica scambio d'ordine tra i soggetti;
- $\forall i \in \{1, \dots, N\} \frac{x_{i+1}^* - x_i^*}{x_N^* - x_1^*}$ è indipendente da $\xi \rightarrow$ all'equilibrio, le distanze tra soggetti, normalizzate rispetto all'estensione del gruppo, non dipendono da ξ ;
- il baricentro del gruppo è invariante nel tempo.

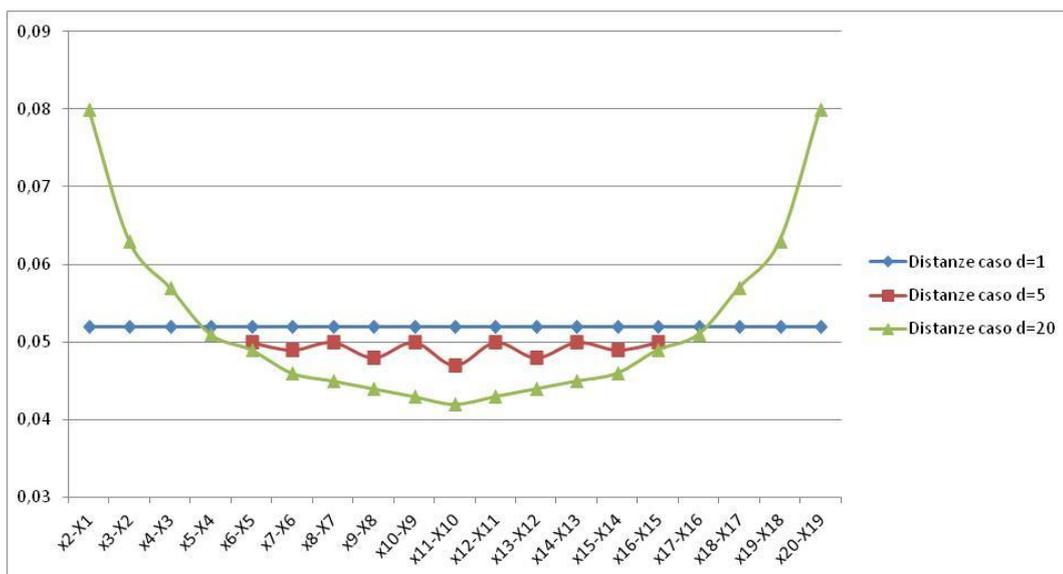
5 Soluzione numerica

Ponendo $\xi = 1$, $m_a = 0$ e $m_r = -2$, il sistema di equazioni differenziali ordinarie si presenta come segue:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} \left[1 - \frac{1}{|x_j - x_i|^2} \right] \frac{(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

con $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid |i - k| \leq d\}$

Si è considerato in particolare il caso $N = 20$. La soluzione numerica, per i valori delle distanze tra soggetti adiacenti, ha fornito delle indicazioni di dipendenza da “ d ”, ovvero dal numero di soggetti più vicini, sia a destra che a sinistra, in grado di interagire con il soggetto in esame.



Nel caso di $d=1$ si ha che i soggetti sono equispaziati nell’ambito dell’intero gruppo.

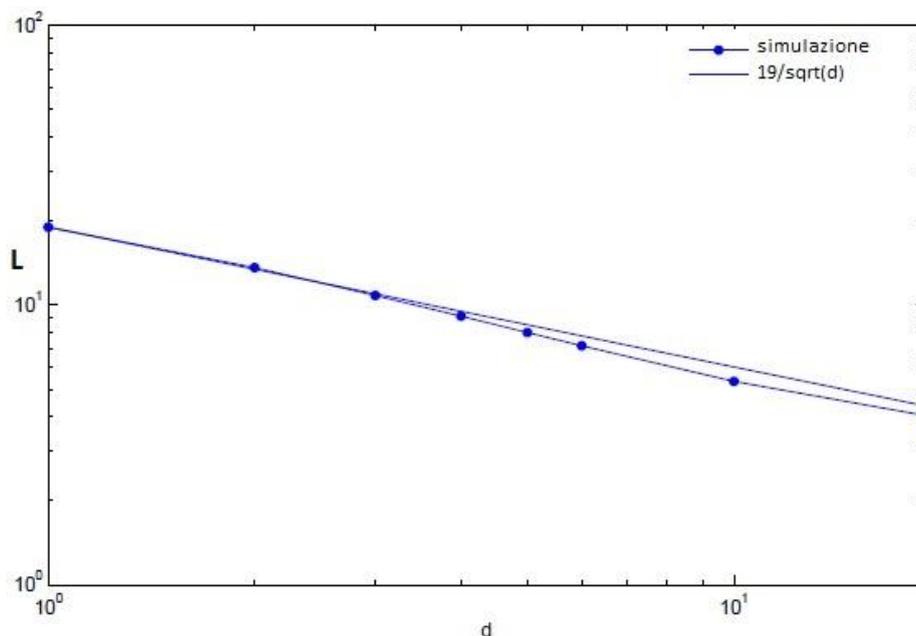
Nel caso di “ d ” più elevato si ha, invece, che nella zona centrale del gruppo i soggetti sono più ravvicinati, mentre sono più distanti man mano che ci si avvicina alle estremità del gruppo.

Per valori intermedi di “d” si mantiene la tendenza ad avere distanze maggiori all’estremità del gruppo, mentre nelle parti più interne si ha una sorta di oscillazione, ma sempre intorno a valori minori rispetto alle estremità.

Risolvendo il sistema di equazioni per più valori di ξ , si è riscontrato che l’estensione dell’intero gruppo (lunghezza L del gruppo) all’equilibrio è approssimativamente proporzionale sia a ξ che ad N-1:

$$L \approx \frac{\xi(N - 1)}{\sqrt{d}}$$

Nel caso di $N = 20$, $\xi = 1$, $m_a = 0$ e $m_r = -2$, si ottiene l’andamento di seguito riportato per la lunghezza L del gruppo rispetto a “d”.



Si noti che l’andamento ottenuto dalla simulazione è praticamente quasi coincidente con $\frac{\xi(N-1)}{\sqrt{d}} = \frac{19}{\sqrt{d}}$. Da un punto di vista fisico/qualitativo ciò significa che, a parità di numero di soggetti componenti il gruppo, per una specie caratterizzata da d minore il gruppo avrà estensione maggiore.

6 Validazione sperimentale

Al fine di validare il modello definito dal sistema di equazioni differenziali ordinarie (XYZ) sono state considerate 114 fotografie di uccelli disposti su cavi elettrici sorretti da pali. Le foto sono state scattate a Lindsey, Tuckerton, Deptford e Camden nel New Jersey dal team del professor Bill Saidel.

Nonostante la notevole mole di foto, in definitiva solo 6 fotografie di piccioni e 5 di storni sono state ritenute significative, consentendo comunque di individuare complessivamente 24 gruppi di uccelli (ciò perché in una singola foto è stato possibile individuare più gruppi, eventualmente posizionati su fili diversi).

I criteri adottati per individuare i membri di ciascun gruppo e per considerare significativi i gruppi per i nostri scopi sono stati i seguenti (gli stessi criteri hanno determinato, di conseguenza, l'esclusione delle foto in cui non vi fossero uccelli che li rispettassero):

- si sono considerati solo gruppi costituiti da almeno 5 elementi;
- si è considerato terminato un gruppo nel caso dopo l'ultimo uccello si trovasse un sostegno (ad esempio palo che sorregge i cavi elettrici), come anche nel caso ovvio in cui non vi fossero altri uccelli o nel caso il successivo si trovasse ad una distanza superiore a due volte l'apertura alare del volatile;
- tutti i membri di ciascun gruppo devono essere rivolti dallo stesso lato rispetto al fotografo;
- tutti i membri devono appartenere alla stessa specie;
- tutti i soggetti sono fermi sul cavo (non ci sono uccelli lasciano o arrivano sul cavo);
- sono stati esclusi i gruppi di uccelli disposti su cavi che si incrociano, perché vi sarebbero interazioni tra soggetti (ad esempio disposti uno di fronte all'altro) non gestite dal modello.

Di seguito sono riportate alcune fotografie con i gruppi considerati.

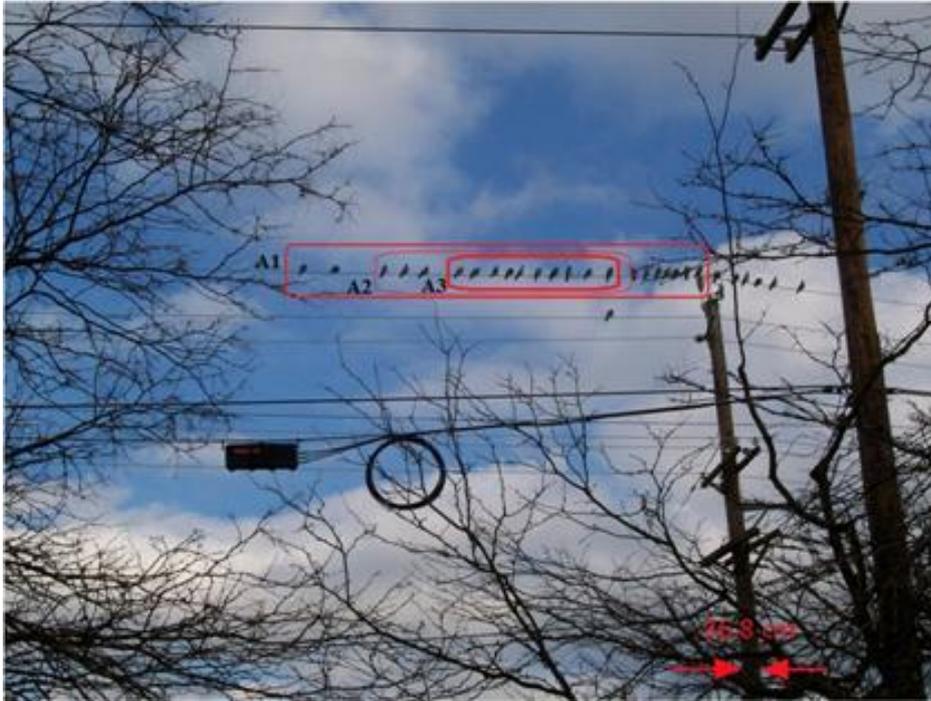


Figura 3 – Esempio di gruppi di piccioni

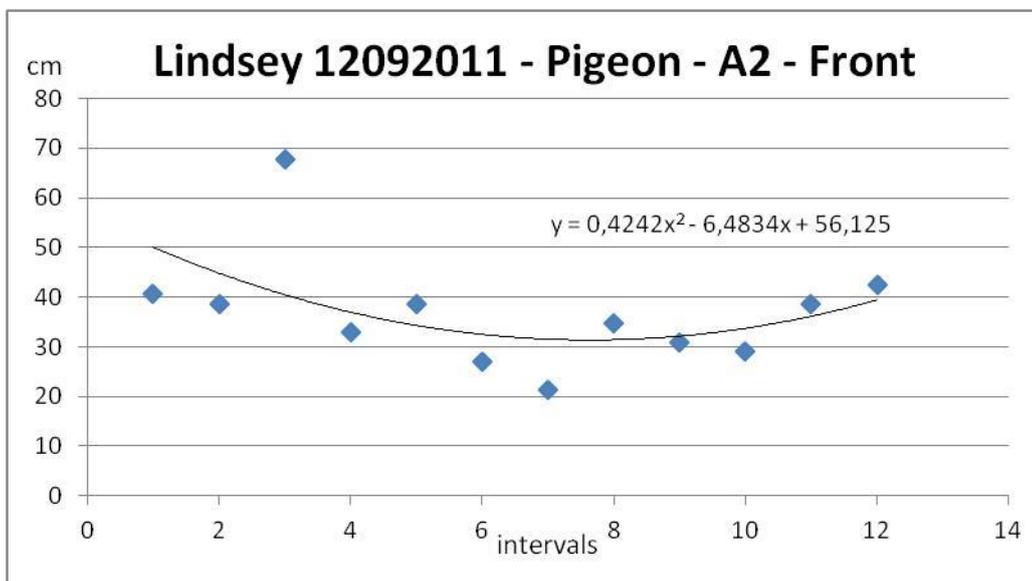


Figura 4 – Distanza tra due soggetti consecutivi della Figura 1 (piccioni)



Figura 5 - Esempio di gruppi di storni

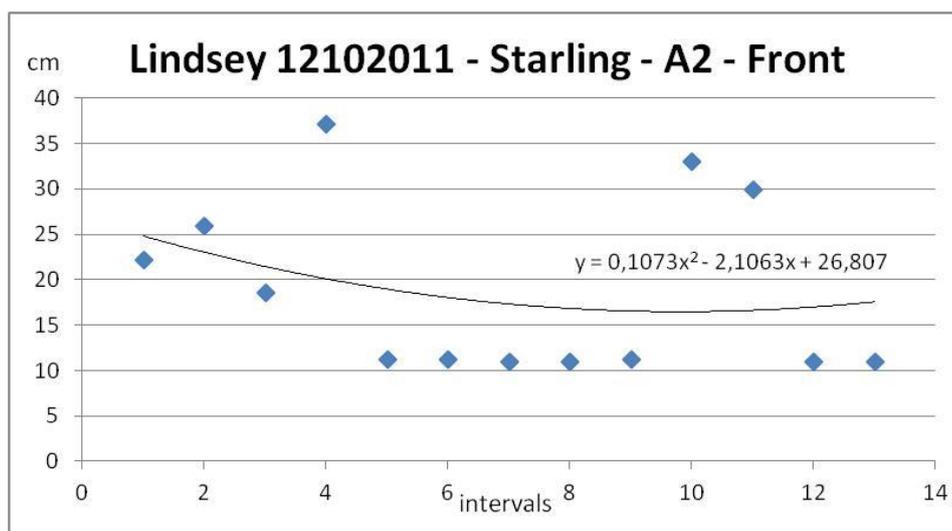


Figura 6 - Figura 7 – Distanza tra due soggetti consecutive della Figura 3 (storni)

I diagrammi riportati sopra, o meglio le curve di regressione del secondo ordine mostrano un andamento analogo per le due specie, ed una discreta consistenza con quanto ritrovato per via numerica (per $d=20$). Anche in questo caso si evince una maggiore concentrazione di soggetti nella parte centrale del gruppo dove le distanze tra soggetti adiacenti sono minore che agli estremi del gruppo stesso (man mano che ci si avvicina alle estremità del gruppo le distanze tendono ad aumentare – monotonia).

I diagrammi riportano l'andamento delle distanze tra due volatili adiacenti. Le curve di regressione sono caratterizzate dai coefficienti "a" di x^2 e "b" di x . L'analisi di questi coefficienti ha consentito di individuare comportamenti piuttosto interessanti dei volatili osservati.

Di seguito sono riportati I diagrammi delle distribuzioni delle distanze tra i due soggetti adiacenti di ciascuna coppia.

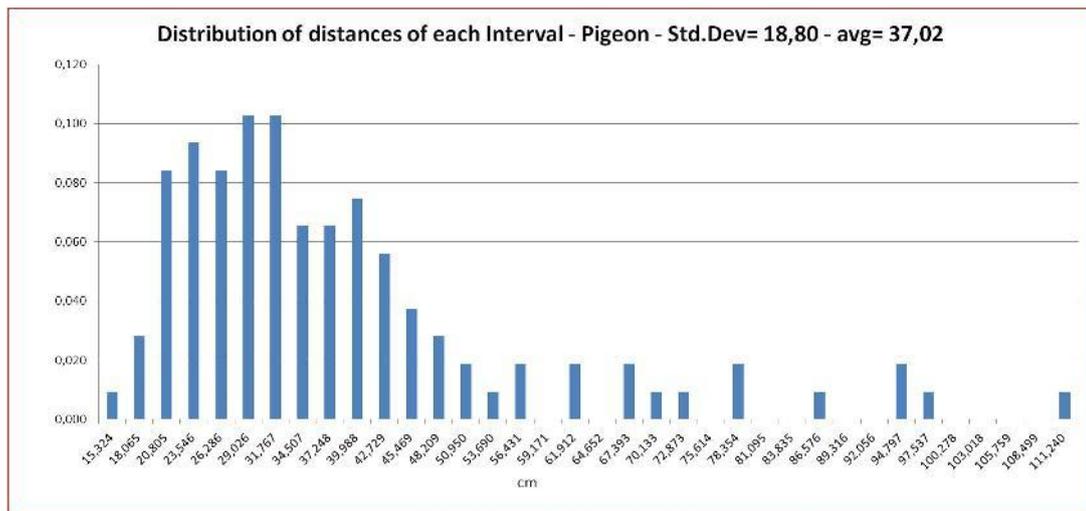


Figura 8 – Distribuzione delle distanze nei gruppi di piccioni (cumulativo di tutti i gruppi)

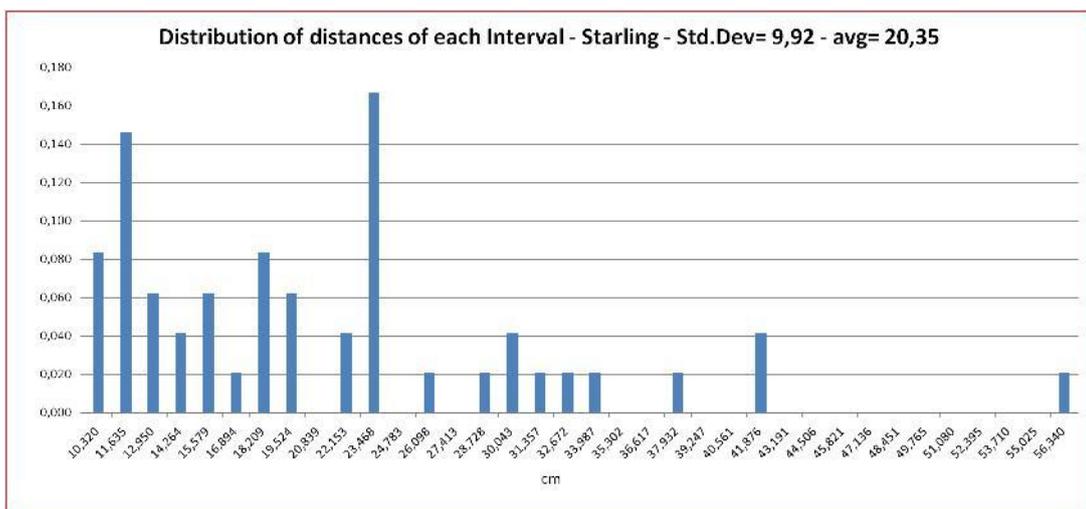


Figura 9 – Distribuzione delle distanze nei gruppi di storni (cumulativo di tutti i gruppi)

Soprattutto nel caso dei piccioni, l'andamento delle distribuzioni evidenzia che la distanza più probabile è una distanza piuttosto ridotta, anche se non la minore.

Di seguito viene riportato il grafico dell'estensione (lunghezza) del gruppo in funzione del numero di coppie (ovvero N-1, con N numero di uccelli componenti il gruppo) di soggetti adiacenti. In coerenza con quanto trovato con la soluzione numerica ($L \approx \frac{\xi(N-1)}{\sqrt{d}}$) si riscontra un andamento crescente (in modo lineare) dell'estensione del gruppo rispetto al numero di coppie di soggetti adiacenti.

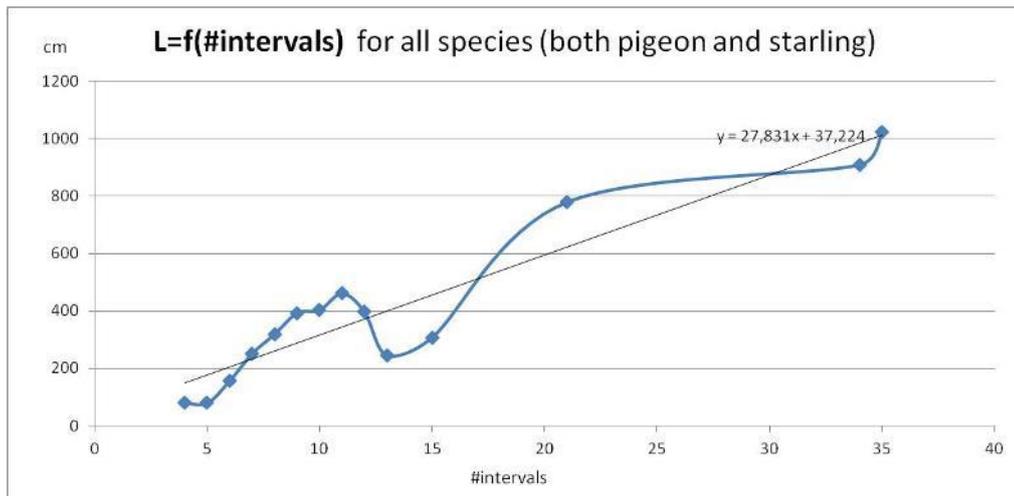


Figura 10 - L=f(#intervalli) (cumulativo per piccioni e storni)

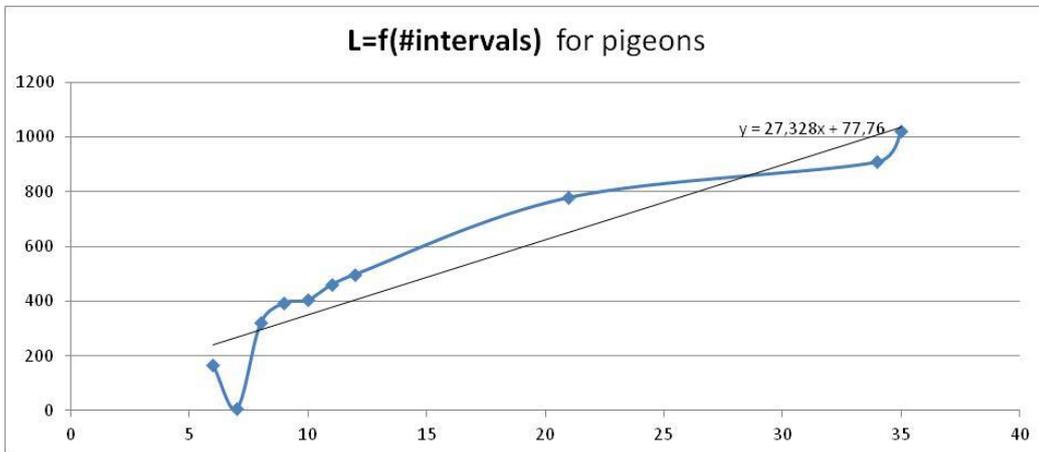


Figura 11 - L=f(#intervalli) per piccioni

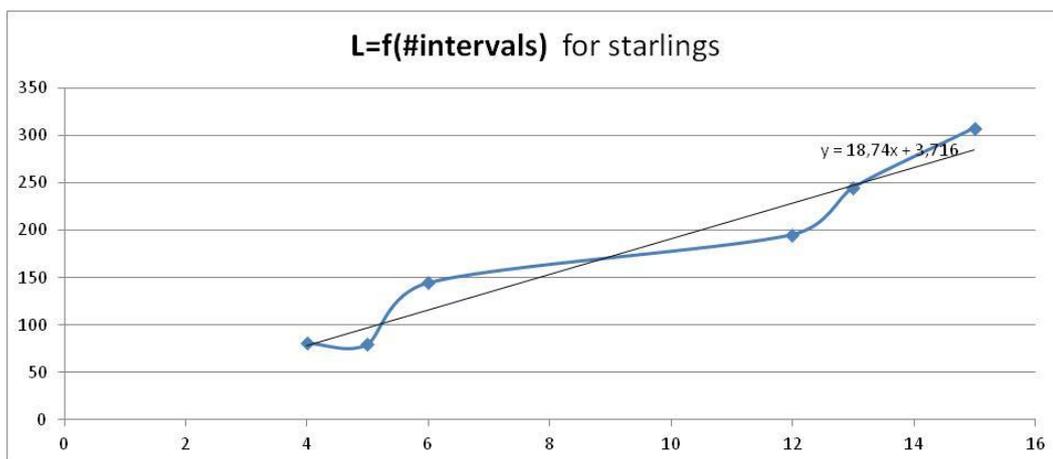


Figura 12 - L=f(#intervalli) per piccioni

Di seguito viene riportato il grafico del coefficiente “a” in funzione del numero di coppie (ovvero N-1, con N numero di uccelli componenti il gruppo) di soggetti adiacenti. Il coefficiente “a” è indicativo della curvatura della parabola, ovvero della curva di regressione rappresentativa delle distanze tra soggetti adiacenti. Al crescere del numero di coppie (N-1) il coefficiente “a” diminuisce, ovvero la “parabola” si “appiattisce” e ciò, dal punto di vista fisico, significa che al crescere di N-1 la tendenza ad avere maggiori distanze all’estremità del gruppo diminuisce e nella parte di gruppo dove ci sono le distanze minori si hanno distanze più omogenee.

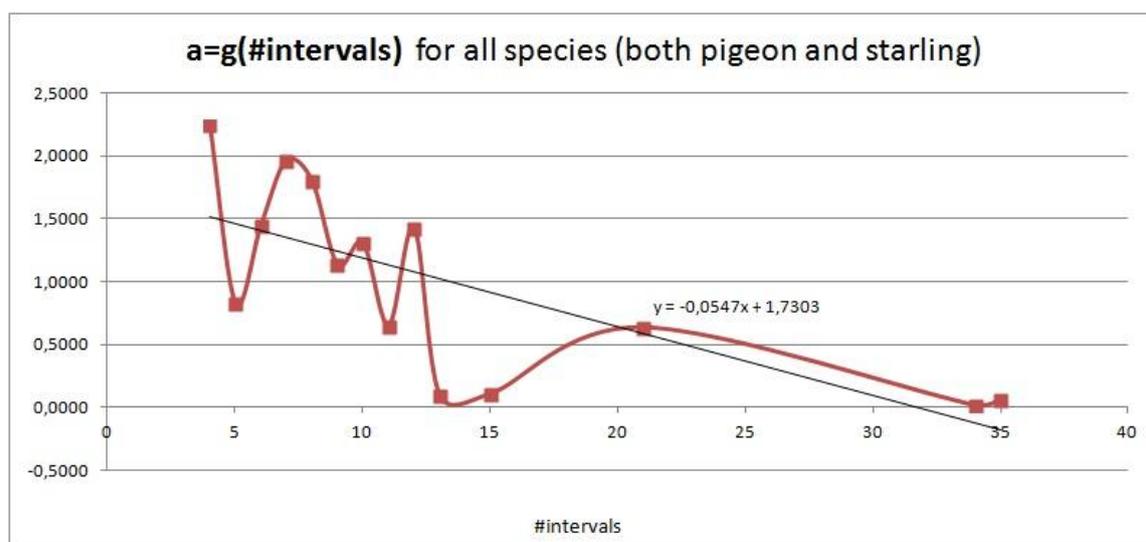


Figura 13 - a=g(#intervalli) (cumulativo per piccioni e storni)

E' giusto il caso di osservare che $a=g(\#intervalli)$ and $L=f(\#intervalli)$ non variano se valutati da foto in cui i soggetti sono ripresi frontalmente o dal lato opposto (invarianti per verso di osservazione).

Di seguito il diagramma del parametro $-\frac{b}{2a}$ in funzione del numero di coppie. In generale, il coefficiente "b" (e di conseguenza $-\frac{b}{2a}$) dipende da verso di osservazione (fronte o retro). Poiché $-\frac{b}{2a}$ rappresenta il valore dell'ascissa in cui si ha il minimo per la curva di regressione di secondo grado, si capisce che $-\frac{b}{2a}$ è invariante rispetto al verso di osservazione solo per curve simmetriche, inoltre, dal punto di vista fisico, rappresenta la posizione nell'ambito del gruppo della coppia in cui due soggetti adiacenti sono più vicini rispetto a tutte le altre coppie.

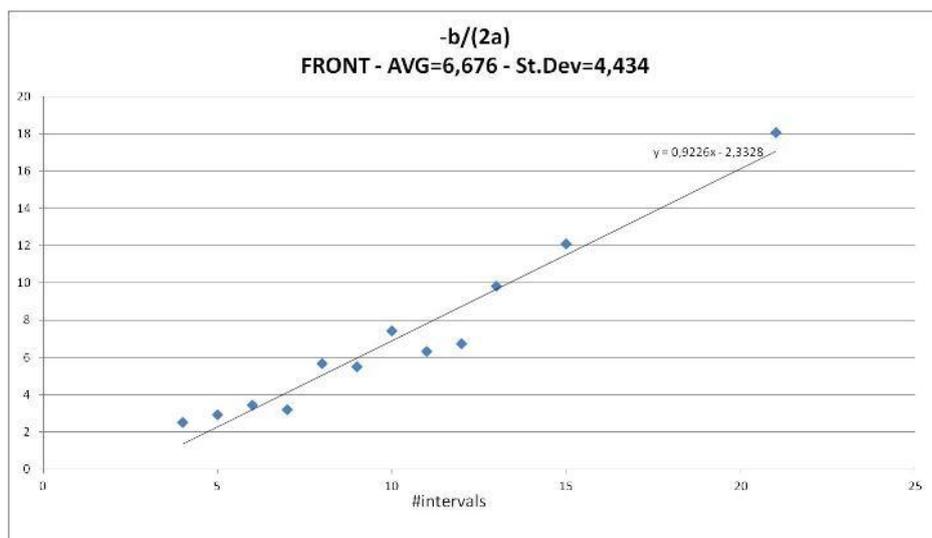


Figura 14 – “-b/(2a)” funzione di #intervalli - Front Side – cumulative piccioni e storni

Dalle figure di seguito riportate, sia per i piccioni che per gli storni, risulta evidente la differente posizione nell'ambito del gruppo, della coppia in cui due soggetti adiacenti siano più vicini. In particolare, sia se si considerano fotografie in cui gli uccelli che si osservano siano di fronte che fotografie in cui siano di dietro, si rileva che, all'aumentare del numero di coppie, la coppia di minima distanza tende ad avere indice crescente (ma questo sembra ragionevole), ma questo

aumento di indice della coppia più ravvicinata cresce maggiormente nel caso di fotografie frontali. Ciò ha fatto capire che per le due specie considerate lato destro e lato sinistro non siano equivalenti, o meglio per i gruppi considerati, per entrambe le specie, si è riscontrata la presenza di un lato preferenziale (uguale per entrambe le specie). Resta aperto un punto: nelle foto ritenute significative si è osservata una maggiore frequenza di pali di sostegno sul lato destro della foto, ovvero sul lato sinistro dei gruppi, pertanto questa asimmetria potrebbe derivare sia dalla preferenza per un lato (proprio come accade per gli esseri umani), ma potrebbe anche derivare, magari parzialmente, dalla presenza dei pali. I pali potrebbero condizionare il posizionamento degli uccelli in modo diretto (proprio il “sentire” che ci sia un palo può indurre un diverso comportamento) o in modo indiretto, ad esempio per la diversa curvatura che potrebbe aversi per il cavo elettrico man mano che ci si avvicina al palo di sostegno.

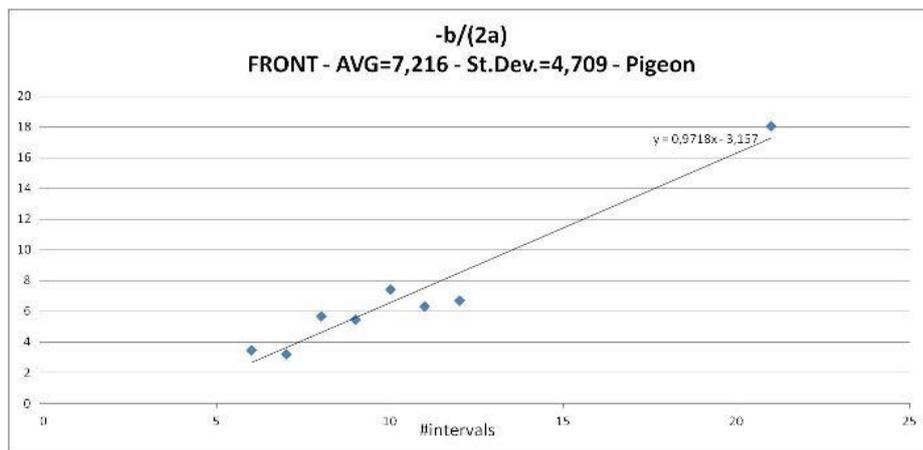


Figura 15 – “-b/(2a)” funzione di #intervalli - Front Side - piccioni

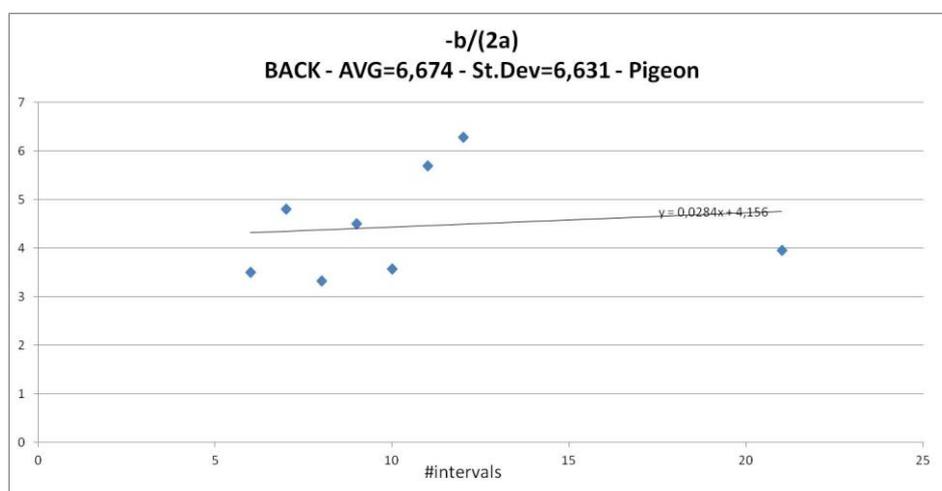


Figura 16– “-b/(2a)” funzione di #intervalli - Back Side - piccioni

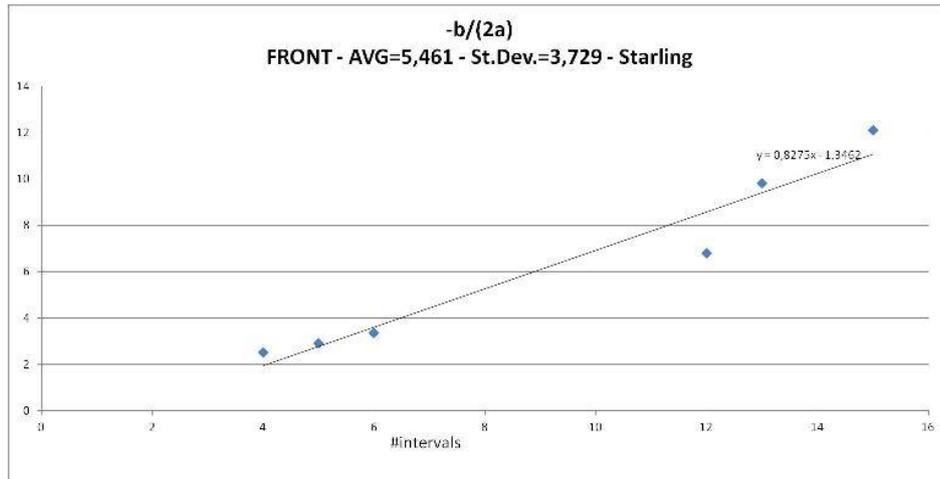


Figura 17 – “-b/(2a)” funzione di #intervalli - Front Side - storni

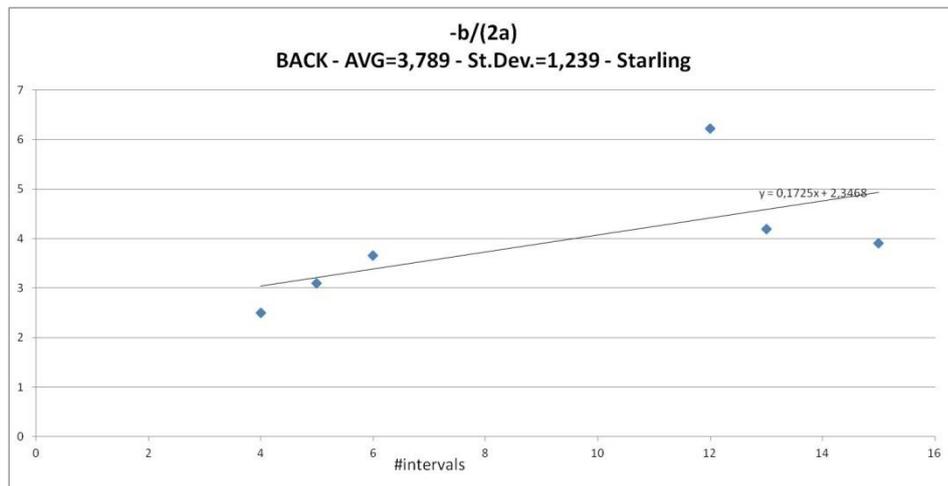


Figura 18 – “-b/(2a)” funzione di #intervalli - Back Side - storni

7 Appendice I – Approfondimenti sull’elaborazione dei dati sperimentali

7.1 Fase 1

Inizialmente è stato analizzato un set di 61 immagini che ha consentito di individuare 121 gruppi di uccelli, considerando che ciascuna foto riportava più fili, fino a 4, su cui individuare i gruppi. La ricostruzione delle 45 immagini è stata realizzata mediante l'utilizzo di 1 o più foto per immagine, in quanto fili piuttosto lunghi sono stati ricostruiti mediante l'unione anche di più di una foto (si è individuato un filo su cui giacevano 71 uccelli).

File Name	Wire	#Couples	Image_Wire	Measurements	
				left to Right	left to Right
082510-0012.JPG	1	71	082510-0012_w1	3.420	2.432
082510-0011.JPG	2	69	082510-0011_w2	1.954	1.505
082510-0022.JPG	3	62	082510-0022_w3	19.303	13.845
082710-0056.JPG	1	61	082710-0056_w1	36.766	6.355
082710-0055.JPG	1	57	082710-0055_w1	38.061	22.463
082710-0057.JPG	1	57	082710-0057_w1	2.920	14.273
082510-0017.JPG	1	47	082510-0017_w1	3.948	3.613
082510-0029.JPG	1	45	082510-0029_w1	3.604	2.216
082510-0033.JPG	1	42	082510-0033_w1	11.283	1.700
082510-0011.JPG	1	41	082510-0011_w1	1.715	1.702
082510-0029_w2	2	38	082510-0029_w2	1.559	1.361
082510-0018_w1	1	37	082510-0018_w1	4.890	2.478
082510-0021_w1	1	37	082510-0021_w1	2.709	3.282
082510-0016_w1	1	34	082510-0016_w1	2.564	4.009
082510-0019_w5	5	31	082510-0019_w5	2.720	5.516
082510-0015_w1	1	30	082510-0015_w1	2.500	1.684
082510-0013_w1	1	28	082510-0013_w1	2.242	1.495
082510-0019_w1	1	28	082510-0019_w1	2.786	7.489
082510-0049_w1	1	28	082510-0049_w1	1.634	15.315
082510-0011_w4	4	27	082510-0011_w4	1.353	3.756
082510-0004_w1	1	25	082510-0004_w1	2.862	5.633
082510-0050_w1	1	25	082510-0050_w1	1.465	11.745
082510-0027_w2	2	24	082510-0027_w2	1.987	1.319

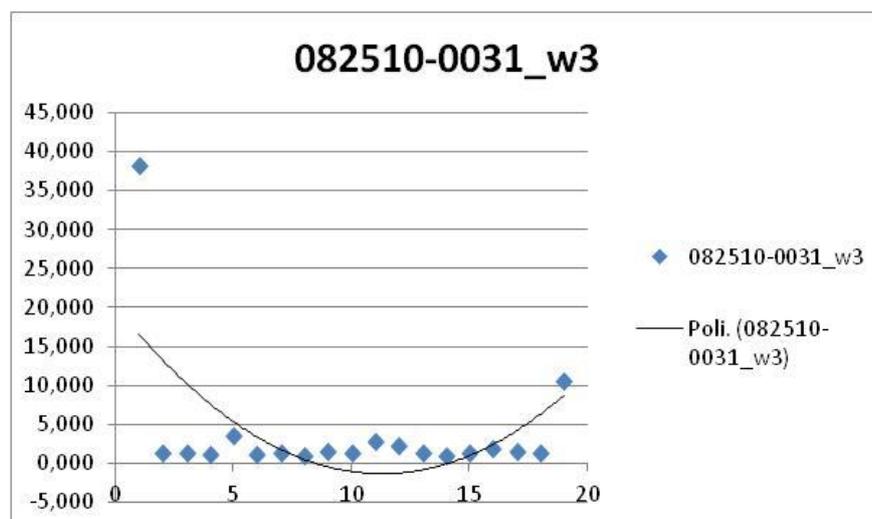
Questo primo set di foto era privo di riferimenti metrici assoluti, pertanto si è proceduto ad una quantificazione delle distanze tra individui adiacenti in pixel, normalizzandole, successivamente, rispetto alla distanza minima misurata per ciascuna immagine.

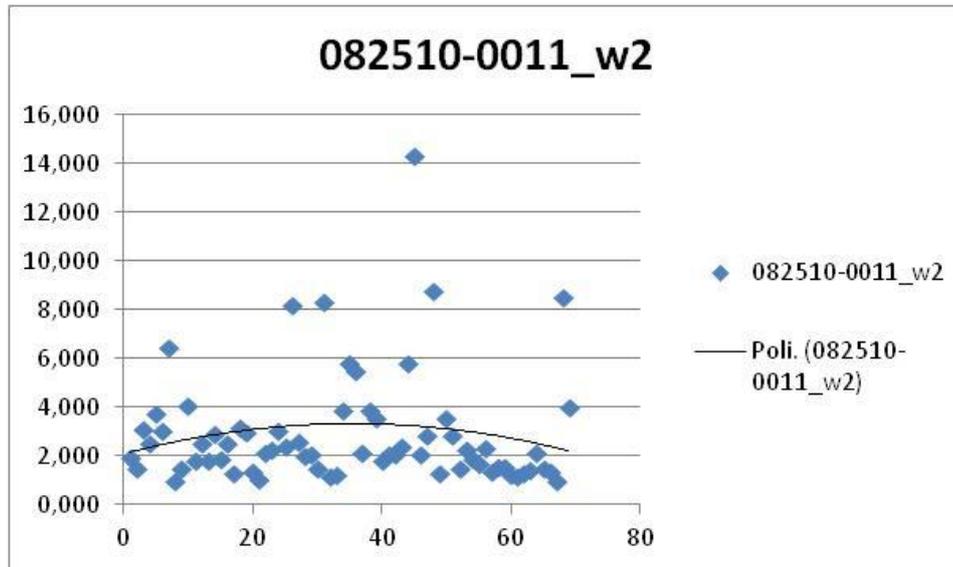
Procedendo in parallelo con la valutazione dei possibili modelli da adottare si è, però, capito che i dati raccolti non sarebbero stati utilizzabili, se non in prima approssimazione, soprattutto perché non si avevano a disposizione le distanze vere, ma solo quelle normalizzate.

Altre ragioni che hanno impedito l'utilizzo della notevole mole di dati misurati erano meno bloccanti (infatti i seguenti problemi si sono riscontrati anche nel set definitivo di immagini, ma sono stati parzialmente risolti):

- le foto spesso non consentivano di distinguere la specie di volatile sui fili;
- i gruppi si erano considerati come costituiti da tutti gli uccelli presenti su un filo, senza considerare gli effetti dei pali o interruzioni nella continuità del gruppo nel caso i due soggetti adiacenti fossero troppo distanti;
- dalle foto non si riusciva ad evincere se tutti gli uccelli fossero rivolti dallo stesso lato.

E' stato, comunque, verificato dal punto di vista squisitamente qualitativo, che l'andamento delle distanze in funzione delle coppie in successione sui fili rispettavano un andamento a "sorriso", poi riscontrato anche nei dati finali, ma solo quando ci si trovava in situazioni "pulite" (assenza di pali, soggetti non troppo distanti per non considerare interrotto un gruppo).





7.2 Fase 2

Successivamente è stato analizzato un nuovo set di foto in cui, però, era stato inserito un riferimento metrico assoluto, tipicamente la dimensione del diametro di uno dei pali in corrispondenza della base, facilmente raggiungibile per la misurazione.

1	File-Wire	rif-pix	rif-cm	coeff	Coppia 1	Coppia 2	Coppia 3	Coppia 4	Coppia 5	Coppia 6	Coppia 7	Coppia 8	Coppia 9	Coppia 10	Coppia 11	Coppia 12
36	10062011-2A-w2	53,814	58,540	1,088	505,091	28,973	343,605	24,835	12,417	273,241	16,620	20,695	20,695	8,278	28,973	
37	10062011-2A-w3	53,814	58,540	1,088	20,698	16,558	16,558	20,698								
38	10122011a1	45,011	31,700	0,704	961,609	24,552	32,736	69,563	40,919	61,387	65,471	28,643	20,460	139,143	53,195	73,654
39	10122011c1	45,535	35,170	0,772	1.449,216	285,491	62,085	161,422	111,756	1.245,839						
40	10122011d1	49,674	41,170	0,829	169,721	28,976	82,791	37,256	53,814	49,674	178,000	- 682,311	843,763	202,836	37,255	33,139
41	20111025-1-w1	49,674	35,980	0,724	120,687	42,654	104,196	41,573	37,476	54,436	29,271	33,372	41,053	41,591	29,786	29,269
42	20111025-1-w2	49,674	35,980	0,724	95,569	112,893	414,471									
43	20111025-1-w3	49,674	35,980	0,724	962,947	120,687	24,728	33,353	20,618	33,019	170,493	33,013	24,769			
44	20111025-1-w4	49,674	35,980	0,724	187,014	41,262	33,335									
45	20111025-2-w1	70,372	25,300	0,360	182,562	473,068	228,275	112,073	306,740	157,781	28,911	37,175	29,186	28,914	45,441	448,836
46	20111025-2-w2	70,372	25,300	0,360	1.088,729	190,782	82,849									
47	11072011B	20,698	26,800	1,295	21,311	20,261	26,350	39,601	17,221	27,357	11,175	19,251	24,346	20,328	15,196	16,244
48	11162011A	81,941	41,200	0,503	69,683	57,431	65,599	45,184	49,007	147,788	188,630	126,857	57,192	57,426	102,602	
49	11272011A-w1	37,256	30,500	0,819	749,987	621,099	169,622	566,901	28,969	12,323	12,416	12,416	12,416			
50	11272011A-w2	37,256	30,500	0,819	389,204	49,606	16,539	12,418	467,805	24,836	37,254	107,625	16,535	28,998	62,064	20,697
51	12102011Am-w1	37,256	33,100	0,888	136,667	443,813	1.136,664	24,789	149,508	66,362	25,051	45,708	25,056	29,189	20,932	41,874
52	12102011Am-w2	37,256	33,100	0,888	467,932	16,553	16,553	70,458	273,466	1.671,446	78,988	20,666	70,493	149,486		
53	12242011-A1-w1	111,844	42,000	0,376	49,674	33,117	58,196	66,155	66,193	37,571						
54	12242011-A1-w2	111,844	42,000	0,376	53,973	41,236	87,119	37,224	24,821	70,477	45,385	28,969	28,971	57,943	732,803	244,433
55	12252011-A1scale-w1	37,256	35,700	0,958	33,374	25,168	960,801	538,905	335,516	352,444	74,624	144,917	87,029	28,945	95,494	24,809
56	12252011-A1scale-w2	37,256	35,700	0,958	166,407	37,105	393,500	2.013,656	66,165							
57	12252011-A1scale-w3	37,256	35,700	0,958	91,164	28,954	1.503,767	401,875	174,051	37,392	165,614	45,343	16,546	16,547	37,231	
58	12252011-D2-w1	53,195	35,700	0,671	61,366	20,163	21,917	14,030	17,530	18,410	14,027	14,903	21,042	23,668	22,793	41,205
59	12252011-D2-w3	53,195	35,700	0,671	36,828	57,287	81,839	28,644	16,368	16,403	36,822	40,916	40,917	49,100	73,705	24,631

L'importanza dell'aver a disposizione delle misure reali e non normalizzate è correlato alla necessità di produrre andamenti significativi per il confronto "soluzione numerica" vs "dati sperimentali" derivati cumulando i risultati di tutti i gruppi a parità di specie.

Nel caso si fossero considerate le distanze normalizzate, ad esempio rispetto alla distanza tra i due soggetti più prossimi in ciascun gruppo, ci si sarebbe ritrovati ad eseguire un merge dei dati che avrebbe potuto aver senso solo a parità di distanza minima (effettiva e non in pixel o normalizzata) tra tutti i gruppi.

A questo punto, per filtrare le foto effettivamente utilizzabili, si è iniziata una prima valutazione in base ai criteri descritti nel capitolo 6. In verità, alcuni criteri sono stati utilizzati subito, altri successivamente, per verificare dubbi o rispondere a domande in corso d'opera. In ogni caso, il set completo di criteri è stato il seguente:

1. si sono considerati solo gruppi costituiti da almeno 5 elementi;
2. si è considerato terminato un gruppo nel caso dopo l'ultimo uccello si trovasse un sostegno (ad esempio palo che sorregge i cavi elettrici), come anche nel caso ovvio in cui non vi fossero altri uccelli o nel caso il successivo si trovasse ad una distanza superiore a due volte l'apertura alare del volatile;
3. tutti i membri di ciascun gruppo devono essere rivolti dallo stesso lato rispetto al fotografo;
4. tutti i membri devono appartenere alla stessa specie;
5. tutti i soggetti sono fermi sul cavo (non ci sono uccelli lasciano o arrivano sul cavo);
6. sono stati esclusi i gruppi di uccelli disposti su cavi che si incrociano, perché vi sarebbero interazioni tra soggetti (ad esempio disposti uno di fronte all'altro) non gestite dal modello.

Per ciascuna foto che rispettasse i criteri elencati sono stati valutati andamenti e grandezze significativi allo studio. Va sottolineato che il criterio "2." è stato meglio definito anche grazie alla valutazione dei dati sperimentali non essendoci specifiche indicazioni in letteratura.

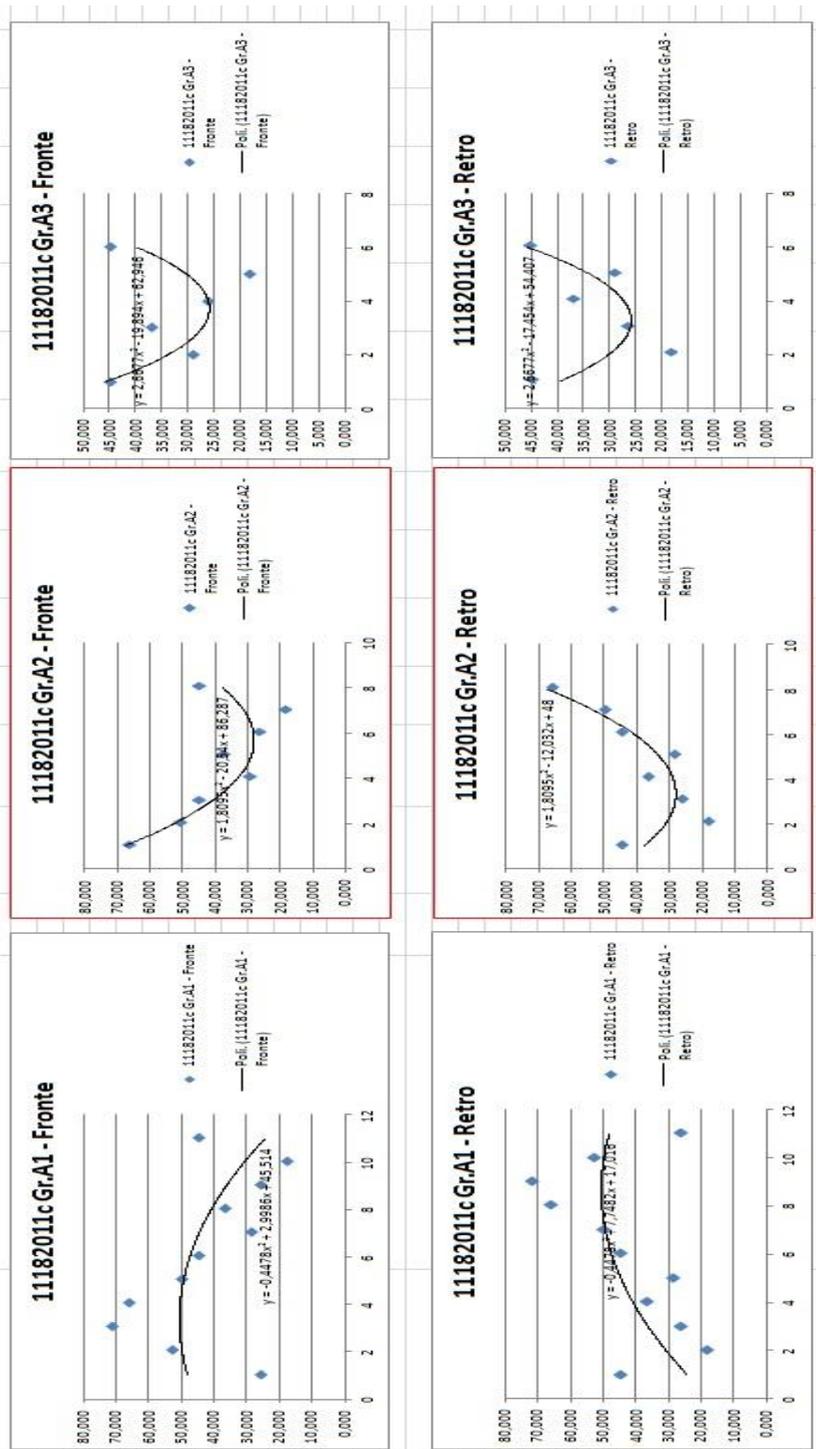


Figura 19 - 11182011c

Ad esempio, per la foto in Figura 19 si sono valutate le grandezze d'interesse per tutti e tre i gruppi individuati:

	Media	DevStandard	Varianza	#coppie	min	max	step_min	step_max	Distanze tra coppie																
	min dist.	left dist.	right dist.	max int.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
11182011c GrA1 - Fronte	42,907	17,093	292,162	11	18,672	71,999	1,481	5,925	26,666	53,313	71,999	66,666	50,666	50,666											
11182011c GrA2 - Fronte	40,000	15,285	233,646	8	18,672	66,666	1,333	5,333	66,666	50,666	45,340	29,333	37,333	37,333											
11182011c GrA3 - Fronte	33,778	10,756	115,688	6	18,672	45,340	0,741	2,963	45,340	29,333	37,333	26,659	18,672	18,672											
11182011c GrA1 - Retro	42,907	17,093	292,162	11	18,672	71,999	1,481	5,925	26,666	53,313	71,999	66,666	50,666	50,666											
11182011c GrA2 - Retro	40,000	15,285	233,646	8	18,672	66,666	1,333	5,333	66,666	50,666	45,340	29,333	37,333	37,333											
11182011c GrA3 - Retro	33,778	10,756	115,688	6	18,672	45,340	0,741	2,963	45,340	29,333	37,333	26,659	18,672	18,672											
11182011c GrA1 - Fronte - MinDist= 5,00	5,000	5,000	-	3,856																					
11182011c GrA2 - Fronte - MinDist= 3,86	3,856	3,856	-	3,570																					
11182011c GrA3 - Fronte - MinDist= 2,43	2,428	0,903	-	2,428																					
11182011c GrA1 - Fronte	18,672	24,598	30,523	36,448	42,373	48,298	54,224	60,149	66,074	71,999															
11182011c GrA2 - Fronte	18,672	24,005	29,338	34,670	40,003	45,335	50,668	56,001	61,333	66,666															
11182011c GrA3 - Fronte	18,672	21,636	24,599	27,562	30,525	33,488	36,451	39,414	42,377	45,340															
Distribuzioni: tra 0 ed 1) di (normalizzato contegio occorrenze e in 10 parti del range [Min,Max])	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10															
Distribuzioni: tra 0 ed 1) di (normalizzato contegio occorrenze e in 10 parti del range [Min,Max])	0,09	0,27	0,00	0,00	0,09	0,18	0,18	0,00	0,00	0,18															
Distribuzioni: tra 0 ed 1) di (normalizzato contegio occorrenze e in 10 parti del range [Min,Max])	0,13	0,25	0,00	0,00	0,13	0,13	0,25	0,00	0,00	0,13															
Distribuzioni: tra 0 ed 1) di (normalizzato contegio occorrenze e in 10 parti del range [Min,Max])	0,17	0,00	0,00	0,17	0,17	0,00	0,00	0,17	0,00	0,33															

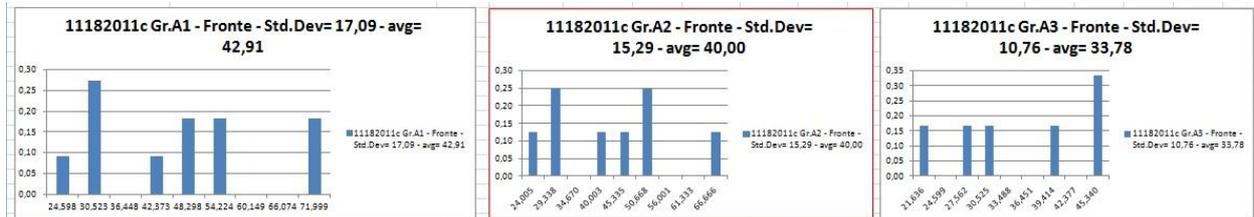
Per ciascun gruppo è stato definito l'andamento delle distanze tra soggetti consecutivi rispetto al progressivo delle coppie.



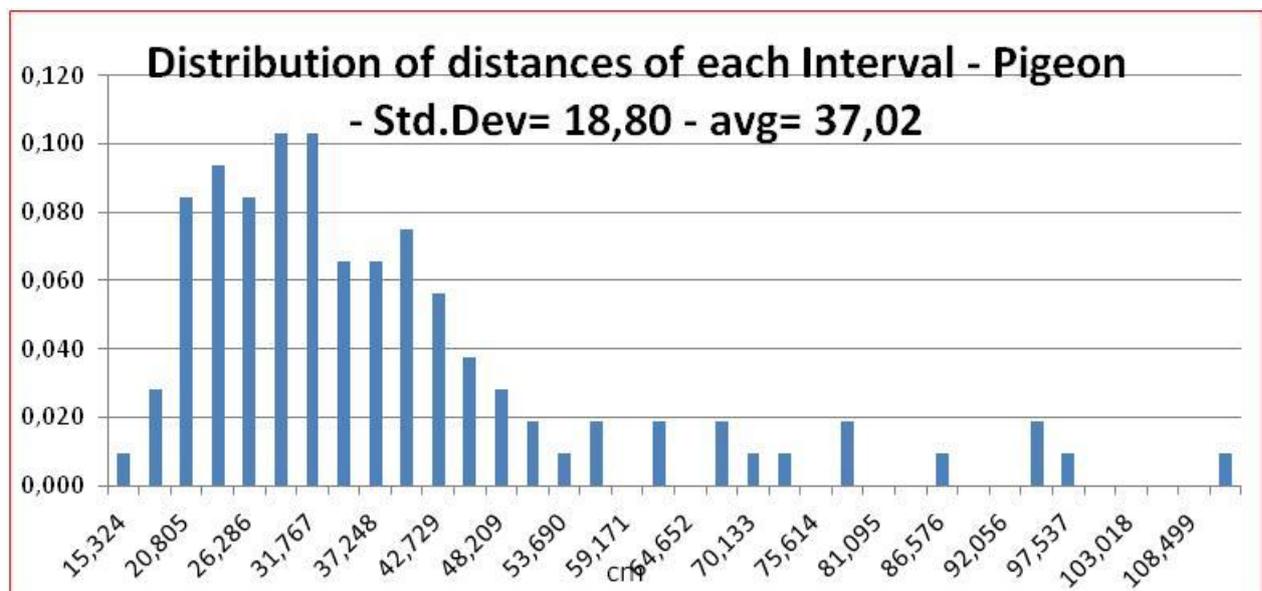
Nell'esempio riportato, si noti che il gruppo A1 ha un andamento distanza-coppia anomalo rispetto agli altri due gruppi e rispetto a quanto ci si aspetterebbe. Ciò è servito, valutato su molte foto, a meglio definire il criterio "2." sopra citato (nel caso specifico si riscontra una distanza eccessiva tra due uccelli che inducono a non poter considerare come unico gruppo l'A1). Si noti che l'andamento "Fronte" e "Retro" sono speculari, ma la loro importanza si riflette nei coefficienti

caratteristici della parabola che interpola i dati sperimentali (evidentemente i coefficienti sono diversi tra “Fronte” e “Retro”).

Successivamente si è valutato l’andamento delle distribuzioni delle distanze,



anche se questo aspetto sarà valutato su tutte le foto della singola specie.



A questo punto, quindi, si è partiti con la valutazione cumulativa di alcune grandezze misurate/calcolate, cumulativa per singola specie, per consentire il confronto con gli output della soluzione numerica da validare.

Foto	Gruppo	Coeff. di x^2 a	Dist.Media in cm	#coppie	Lungh. Gruppo L in cm	Foto - Gruppo
20111025-1- a SN palo	Gr. A1	1,3125	40,4225	10	404	20111025-1- a SN palo - Gr. A1
	Gr. A2	0,5146	34,6535	9	312	20111025-1- a SN palo - Gr. A2
	Gr. A3	0,5858	29,0912	7	204	20111025-1- a SN palo - Gr. A3
20111025-1- a DX palo	Gr. A2	0,0725	29,2309	35	1023	20111025-1- a DX palo - Gr. A2
	Gr. A1	0,0235	26,7224	34	909	20111025-1- a DX palo - Gr. A1
10272010b	Gr. A2	0,7639	35,3231	9	318	10272010b - Gr. A2
	Gr. A3	1,0231	27,5588	6	165	10272010b - Gr. A3
09202011-B1w1	Gr. A1	3,0239	71,7537	9	646	09202011-B1w1 - Gr. A1
09202011-B1w2	Gr. A1	1,1482	46,0908	12	553	09202011-B1w2 - Gr. A1
	Gr. A2	0,6555	41,8867	11	461	09202011-B1w2 - Gr. A2
10162011d		1,9098	42,7846	7	299	10162011d
11182011c	Gr. A2	1,8095	40,0002	8	320	11182011c - Gr. A2
	Gr. A3	2,6677	33,7783	6	203	11182011c - Gr. A3
12092011-2A	Gr. A3	0,6726	32,9243	9	296	12092011-2A - Gr. A3
	Gr. A2	0,4242	36,9610	12	444	12092011-2A - Gr. A2
	Gr. A1	0,1490	37,0767	21	779	12092011-2A - Gr. A1
12092011-2A	Gr. A4	0,7247	21,3076	6	128	12092011-2A - Gr. A4
	Gr. A1	0,1490	37,0767	21	779	12092011-2A - Gr. A1

Gli output cumulativi derivati sono stati già riportati e descritti nel capitolo 6.

8 Appendice II – Approfondimenti sull’elaborazione della soluzione numerica

Come indicato nel Capitolo 5, l’equazione di partenza, nel caso $\xi = 1$, $m_a = 0$ e $m_r = -2$, si riconduce alla seguente:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} \left[1 - \frac{1}{|x_j - x_i|^2} \right] \frac{(x_j - x_i)}{|x_j - x_i|} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

con $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid |i - k| \leq d\}$

Discretizzando:

$$x_{i(t+\Delta t)} - x_{i(t)} = \Delta t \sum_{j \in N_i} \left[1 - \frac{1}{|x_{j(t)} - x_{i(t)}|^2} \right] \frac{(x_{j(t)} - x_{i(t)})}{|x_{j(t)} - x_{i(t)}|} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

con $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid |i - k| \leq d\}$

In definitiva, ci si riconduce alla risoluzione di un problema esplicito.

Il problema a valori iniziali di Cauchy può essere espresso in forma autonoma come

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

con $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $t \in [t_0; T]$, o equivalentemente in forma non autonoma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

con $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $t \in [t_0; T]$.

La risoluzione numerica del problema di Cauchy sposta il problema dal continuo al discreto. Basti pensare che l’intervallo continuo $[t_0; T]$ può essere sostituito da un insieme discreto finito, ad esempio $[t_0; t_0 + m \cdot h]$, essendo m le iterazioni previste a step temporale costante.

Nel caso si possa ricondurre il problema numerico ad un Eulero esplicito si avrebbe:

$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + hf(t_n, \mathbf{x}^n)$, con $t_n = n \cdot h$ e $\mathbf{x}^n \approx \mathbf{x}(t_n)$, essendo $\mathbf{x}(t_n)$ la soluzione esatta al passo t_n e \mathbf{x}^n la soluzione numerica corrispondente.

Tornando al problema di Cauchy, si può dire che il problema “è ben posto” secondo Hadamard se la soluzione esiste ed è unica ed, inoltre, dipende con continuità dai dati iniziali.

Nel caso del modello che rappresenta il problema in esame, si è visto che ci si riconduce ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE) in cui le posizioni di tutti i soggetti all'istante k (ovvero il vettore x^k) è calcolabile dalle posizioni di tutti i soggetti all'istante $k-1$ (ovvero dal vettore x^{k-1}). Focalizzandosi sui metodi ad un passo, un'importante famiglia (di metodi sia espliciti, che impliciti) per la risoluzione dei problemi a valori iniziali (IVP) è quella dei metodi Runge-Kutta (RK).

I Runge-Kutta sono metodi iterativi ad s stadi che prevedono ad ogni iterazione la risoluzione del sistema degli stadi, ovvero la determinazione della soluzione anche in un numero finito di s punti interni a ciascun sub intervallo di integrazione.



con $x_{n_j} \in]x_n, x_{n+1}[$.

La struttura generale di un Runge-Kutta è data da:

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + hc_j, Y_j) \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j f(t_n + hc_j, Y_j)$$

o, in modo equivalente,

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

Viene inoltre imposta la seguente condizione di somma per righe:

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Questo metodo è rappresentato da una tabella, l'“Array di Butcher”:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

dove

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_s)^T, \quad \mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_s), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix},$$

e per la condizione di somma per righe si ha

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T.$$

Se la matrice \mathbf{A} è strettamente triangolare inferiore il metodo è esplicito, mentre se la matrice è triangolare inferiore il metodo è detto semi-implicito.

I metodi RK sono generalizzati dalla classe generale di metodi

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n, t_n; h).$$

Per questi, infatti, ponendo

$$k = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 = -1, \quad \phi_f(y_n, t_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

con

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

ci si riconduce ai metodi Runge-Kutta.

Per chiarire alcuni aspetti qualitativi generali, e dei RK in particolare, è opportuno premettere alcune definizioni.

Nell'ambito dei metodi lineari multistep a k -passi per risolvere un IVP, con passo fisso, si ha:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j},$$

dove $f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j})$ per $j = 0, \dots, k$, e α_j e β_j sono costanti soggette alle condizioni

$$\alpha_k = 1, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0.$$

Se $\beta_k \neq 0$ allora il metodo è implicito, altrimenti il metodo è esplicito.

Si noti come la notazione dei multistep evidenzia a primo membro una componente dipendente dalle soluzioni numeriche ed a secondo membro una componente legata alla valutazione della f in alcuni punti della rete.

Dalle condizioni si osserva che è possibile scrivere il metodo come

$$y_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j},$$

in questo modo è evidente come sono calcolati i nuovi valori a partire dai precedenti, quindi per dare inizio alla computazione, è necessaria una procedura di starting per generare y_1, \dots, y_{k-1} . Si parla di "valori d'innescio del metodo" da ricavare "in qualche modo" dalla condizione iniziale y_0 (ad esempio i valori d'innescio potrebbero essere ricavati utilizzando un altro metodo a partire da y_0).

Per valutare l'accuratezza di un metodo si procede sviluppando in serie di Taylor sia la soluzione esatta che la soluzione approssimata, verificando fino a quali termini delle due serie c'è coincidenza tra soluzione esatta e soluzione approssimata, individuando così l'ordine di grandezza della differenza tra le due serie. Se accade che $|y(x_n) - y_n| = O(h^{p+1})$ si dice che il metodo è di ordine " p " (intendendo con "ordine" l'"ordine di convergenza") E' appena il caso di osservare che un metodo di ordine 5 è "più accurato" di un metodo di ordine 2. Resta da capire come poter eseguire il confronto tra le due serie di Taylor, della soluzione

approssimata e di quella esatta, non conoscendo la soluzione esatta. Per poter, allora, studiare l'accuratezza del metodo si definisce il seguente operatore lineare alle differenze \mathcal{L} associato al metodo multistep:

$$\mathcal{L}[z(t); h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j z(t + jh) - h\beta_j z'(t + jh)],$$

dove $z(t) \in C^1[a, b]$ è una funzione arbitraria.

Scegliendo $z(t)$ differenziabile, è possibile espandere in serie di Taylor $z(t + jh)$ e $z'(t + jh)$ di centro t , ottenendo

$$\mathcal{L}[z(t); h] = C_0 z(t) + C_1 h z^{(1)}(t) + \dots + C_q h^q z^{(q)}(t) + \dots$$

dove le C_q sono costanti.

Il metodo lineare multistep e l'operatore alle differenze associato \mathcal{L} sono di ordine p se $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0, C_{p+1} \neq 0$.

L'espressione generale di queste costanti è data da

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \\ C_1 &= \sum_{j=0}^k (j\alpha_j - \beta_j) \\ C_q &= \sum_{j=0}^k \left[\frac{1}{q!} j^q \alpha_j - \frac{1}{(q-1)!} j^{q-1} \beta_j \right] \quad q = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Se l'espansione in serie di Taylor di $z(t + jh)$ e $z'(t + jh)$ viene fatta prendendo come punto iniziale $t + xh$ si ottiene

$$\mathcal{L}[z(t); h] = D_0 z(t + xh) + D_1 h z^{(1)}(t + xh) + \dots + D_q h^q z^{(q)}(t + xh) + \dots$$

Le funzioni $z^{(q)}(t + xh), q = 0, 1, 2, \dots$ possono essere a loro volta espanso in serie di Taylor di centro t nel seguente modo:

$$\begin{aligned} z^{(q)}(t + xh) &= z^{(q)}(t) + xh z^{(q+1)}(t) + \dots + \frac{x^s h^s}{s!} z^{(q+s)}(t) + \dots \\ &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad q$$

Sostituendo questa espressione nella precedente si ha

$$\begin{aligned}
 C_0 &= D_0 \\
 C_1 &= D_1 + xD_0 \\
 C_2 &= D_2 + xD_1 + \frac{x^2}{2!}D_0 \\
 &\vdots \\
 C_p &= D_p + xD_{p-1} + \dots + \frac{x^p}{p!}D_0 \\
 C_{p+1} &= D_{p+1} + xD_p + \dots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}D_0 \\
 C_{p+2} &= D_{p+2} + xD_{p+1} + \dots + \frac{x^{p+2}}{(p+2)!}D_0.
 \end{aligned}$$

Da qui segue che $C_q = 0, q = 0, 1, \dots, p$ se e solo se $D_q = 0, q = 0, 1, \dots, p$, quindi la definizione di ordine è indipendente da x e dal centro dell'espansione in serie.

Inoltre se $C_q = 0, q = 0, 1, \dots, p, C_{p+1} \neq 0$, allora

$$D_{p+1} = C_{p+1}, \quad D_{p+2} = C_{p+2} + xC_{p+1}, \quad \dots$$

così i primi coefficienti diversi da zero nell'espansione sono indipendenti da x , mentre i seguenti dipendono da x . Ovviamente l'unico coefficiente che ha un significato è C_{p+1} , che rappresenta la costante di errore del metodo multistep.

Mediante l'operatore lineare alle differenze è possibile definire il residuo

$$R_{n+k} = \mathcal{L}[y(t_n); h],$$

dove $y(t)$ è la soluzione esatta del problema a valori iniziali.

Un metodo lineare multistep è detto "zero-stabile" se tutte le radici del primo polinomio caratteristico hanno modulo minore di 1, e quelle con modulo uguale ad 1 hanno molteplicità 2.

Un metodo si definisce "convergente" se rendendo più fitta la discretizzazione ("rete più fitta") ci si avvicina maggiormente alla soluzione esatta.

Un metodo lineare multistep è "consistente" se ha ordine $p \geq 1$, cioè se

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j\alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j,$$

o equivalentemente se

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1)$$

essendo i seguenti due polinomi caratteristici del metodo multistep:

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j.$$

Si osservi che se $\sigma(1) = 0$ allora $\rho(1) = \rho'(1) = 0$, quindi ρ ha una radice doppia in 1, e di conseguenza il metodo fallisce nel soddisfare le condizioni sulle radici. Così per tutti i metodi lineari multistep consistenti e zero-stabili si ha $\sigma(1) \neq 0$.

Per la classe di metodi generale si dimostra che condizione necessaria per la "consistenza" è che

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \phi_f(y(t_n), y(t_n), \dots, y(t_n), t_n; 0) / \left(\sum_{j=0}^k j\alpha_j \right) = f(t_n, y(t_n)).$$

Quindi effettuando le sostituzioni necessarie si osserva che per i metodi Runge-Kutta condizione necessaria e sufficiente affinché il metodo sia consistente è che

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Si definisce l'errore locale di troncamento T_{n+1} nel punto di rete t_{n+1} come

$$T_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi_f(y(t_n), t_n; h).$$

Se p è il più grande intero tale che $T_{n+1} = O(h^{p+1})$, si dice che il metodo ha ordine p .

Come per i metodi multistep, si indica con \tilde{y}_{n+1} il valore del Runge-Kutta in t_{n+1} , quando è stata effettuata l'ipotesi di localizzazione $y_n = y(t_n)$.

Allora si ha

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \phi_f(y_n, t_n; h),$$

e quindi

$$y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} = T_{n+1}.$$

Se il metodo è consistente si ha

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - \phi_f(y(t_n), t_n; h) = hy'(t_n) - hf(t_n, y(t_n)) + O(h^2) = O(h^2)$$

poiché $y'(t) = f(t, y(t))$. Quindi un metodo consistente ha almeno ordine 1.

Dall'espressione dei metodi Runge-Kutta è evidente che la condizione sulle radici è sempre verificata, e quindi i metodi sono convergenti se e solo se sono consistenti.

È possibile stabilire dei limiti per l'errore locale e l'errore globale di troncamento. Comunque se il metodo ha ordine p l'errore locale di troncamento è $O(h^{p+1})$, mentre quello globale di troncamento è $O(h^p)$.

In definitiva si è adottato un Runge-Kutta del quarto ordine:

`[t,x]=ode45(@funcsoluz,[0,s],x0)`, con

- `@funcsoluz` la funzione che include i parametri della legge di interazione
- `s` il numero di step temporali
- `ode45` è la solver function scelta (RK quarto ordine)
- `x0` le posizioni iniziali degli N uccelli, ad esempio, `x0=10*rand(N,1); x0=sort(x0);`

Va sottolineato che è nella `@funcsoluz` che si definisce, per ciascun soggetto i -esimo, quali siano i soggetti che vi interagiscono (precisamente d soggetti a destra e d soggetti a sinistra).

9 Bibliografia

- [1] Aoki I (1980) An analysis of the schooling behavior of fish: internal organization and communication process. *Bull Ocean Res Inst Univ Tokyo* 12:1–65
- [2] Ballerini M, Cabibbo N, Candelier R, Cavagna A, Cisbani E, Giardina I, Lecomte V, Orlandi A, Parisi G, Procaccini A, Viale M, Zdravkovic V (2008) Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study. *Proc Natl Academy Sci* 105:1232–1237
- [3] Becco C, Vandewalle N, Delcourt J, Poncin P (2006). “Experimental evidences of a structural and dynamical transition in fish school.”
- [4] Beckers R, Deneubourg J L, Goss S (1992). “Trails and U-turns in the selection of a path by the ant *Lasius niger*.” *J. Theor. Biol.* 169, 397–415
- [5] Budgey R (1998). “The three-dimensional structure of bird flocks and its implications for birdstrike tolerance in aircraft.” *International Bird Strike Committee Proceedings*, 24, 207–220.
- [6] Buhl J, Sumpter D J T, Couzin I D, Hale J J, Despland E, Miller E R, Simpson S J (2006). “From disorder to order in marching locusts.” *Science* 312, 1402–1406. [10.1126/science.1125142](https://doi.org/10.1126/science.1125142)
- [7] Cavagna A, Cimarelli A, Giardina I, Orlandi A, Parisi G, Procaccini A, Santagati R, Stefanini F (2008). “New statistical tools for analyzing the structure of animal groups.” *Math. Biosci.* 214, 32–37
- [8] Cavagna A, Giardina I, Orlandi A, Parisi G, Procaccini A (2008). “The STARFLAG handbook on collective animal behaviour. 2: three-dimensional analysis.” *Anim. Behav.* 76, 237–248.
- [9] Cavagna A, Giardina I, Orlandi A, Parisi G, Procaccini A, Viale M, Zdravkovic V (2008). “The STARFLAG handbook on collective animal behaviour. 1: empirical methods.” *Anim. Behav.* 76, 217–236.
- [10] Chao D, Levin SA (1999) A simulation of herding behavior: The emergence of large-scale phenomena from local interactions. In: Ruan S, Wolkowicz GSK, Wu J (eds) *Differential Equations with Applications to Biology*, vol 21 of *Fields Institute Communications*, pp 81–95. AMS, Providence, RI
- [11] Chaté H, Ginelli F, Gregoire G, Raynaud F (2008). “Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion.”
- [12] Couzin I D, Krause J, James R, Ruxton G D, Franks N R (2002). “Collective memory and spatial sorting in animal groups.” *J. Theor. Biol.* 218, 1–11. [10.1006/jtbi.2002.3065](https://doi.org/10.1006/jtbi.2002.3065)
- [13] Cullen J M, Shaw E, Baldwin H A (1965). “Methods for measuring the three-dimensional structure of fish schools.” *Anim. Behav.* 13, 534–543

- [14] Cristiani, Frasca, Piccoli (2010) Effects of anisotropic interactions on the structure of animal groups
- [15] Dussutour A, Fourcassie V, Helbing D, Deneubourg J L (2004). "Optimal traffic organization in ants under crowded conditions." *Nature* (London)
- [16] Emmerton J D, Delius D (1993). *Vision, Brain and Behaviour*, Zeigler H P, Bischof H J, eds., MIT Press, Cambridge, MA.
- [17] Giardina Irene (2008) Collective behavior in animal groups: theoretical models and empirical studies. *HFSP Journal* 2:205–219
- [18] Gönci B, Mate N, Vicsek T (2008). "Phase transition in the scalar noise model of collective motion in three dimensions."
- [19] Gregoire G, Chate H, Tu Y H (2003). Moving and staying together without a leader. *Physica D* 181, 157–170.10.1016/S0167-2789(03)00102-7
- [20] Gregoire G, Chate H (2004). "Onset of collective and cohesive motion." *Phys. Rev. Lett.* 92, 025702.10.1103 / *PhysRevLett.*92.025702
- [21] Gueron S, Levin S A, Rubenstein D I (1996). The dynamics of herds: from individuals to aggregations. *J. Theor. Biol.* 182, 85–98.10.1006/jtbi.1996.0144
- [22] Hamilton (1971). *Geometry for the selfish herd*
- [23] Hartley R, Zisserman A (2003). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [24] Hemelrijk C K, Hildenbrandt H (2008). "Self-organized shape and frontal density of fish schools." *Ethology* 114, 245–254
- [25] Heppner F H, Grenander U (1990). A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks. In *The Ubiquity of Chaos*, Krasner S., ed., pp 233–238
- [26] Huth A, Wissel C (1992). The simulation of the movement of fish schools. *J. Theor. Biol.* 156, 365–385.10.1016/S0022-5193(05)80681-
- [27] Inada Y, Kawachi K (2002). "Order and flexibility in the motion of fish schools." *J. Theor. Biol.* 214, 371–387
- [28] Major P F, Dill L M (1978). "The three-dimensional structure of airborne bird flocks."
- [29] Miller R S, Stephen W JD (1966). "Spatial relationships in flocks of sandhill cranes (*Grus Canadensis*)." *Ecology* 47, 323–327
- [30] Mogilner A, Edelstein-Keshet L (1999). "A non-local model for a swarm." *J. Math. Biol.*
- [31] Mogilner A, Edelstein-Keshet L, Bent L, Spiros A (2003) Mutual interactions, potentials, and individual distance in a social aggregation. *J Math Biol* 47:353–389
- [32] Nieder A (2005). "Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence." *Nat. Rev. Neurosci.* 6, 177–190

- [33] Okubo A (1980). *Diffusion and ecological problems: mathematical models*, Springer, Berlin.
- [34] Okubo A (1986). Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds. *Adv. Biophys.* 22, 1–94.10.1016/0065-227X(86)90003-1
- [35] Paley D A, Ehrich Leonard N, Sepulchre R, Grunbaum D, Parrish J K (2007). “Oscillator models and collective motion: spatial patterns in the dynamics of engineered and biological networks.” *IEEE Control Syst. Mag.* 27, 89–105
- [36] Partridge B L, Pitcher T J, Cullen J M, Wilson J (1980). “The three-dimensional structure of fish schools.” *Behav. Ecol. Sociobiol.* 6, 277–288.
- [37] Pomeroy H, Heppner F (1992). “Structure of turning in airborne rock dove (*Columba livia*) flocks.”
- [38] Reynolds C W (1987). *Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model*.
- [39] Szabó B, Szöllösi G J, Gönci B, Jurányi Z, Selmeczi D, Vicsek T (2006). “Phase transition in the collective migration of tissue cells: experiment and model.”
- [40] Warburton K, Lazarus J (1991) Tendency-distance models of social cohesion in animal groups. *J Theor Biol* 150:473–488
- [41] Wilson E O (1971). *The insect societies*, Belknap Press of Harvard University, Cambridge, MA.
- [42] Van Tets G F (1966). “A photographic method of estimating densities of bird flocks in flight.” *CSIRO Wildlife Res.*11, 103–110.
- [43] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O (1995) Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1226–1229.10.1103/PhysRevLett.75.1226