



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE

***Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture e del
Recupero Edilizio ed Urbano***

IX Ciclo N.S. (2007-2010)

**MATRICI GEOMETRICHE DEL DECORO
ARCHITETTONICO. PHOTO SCANNING, REVERSE
ENGINEERING E PROCESSI CAD/CAM**

Maria Giordano

Il Tutor
Prof. Vincenzo Iannizzaro

Il Coordinatore
Prof. Ciro Faella

Il co-Tutor
Ing. Salvatore Barba

INDICE

INTRODUZIONE	pag.	9
1. CAOS E ORDINE	pag.	15
2. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE		
2.1 Cenni storici: Programma di Erlangen	pag.	25
2.2 Proiettività	pag.	33
2.3 Affinità	pag.	34
2.4 Similitudini	pag.	35
2.4.1 Costruzione del punto unito di una similitudine	pag.	36
2.5 Isometrie	pag.	38
3. GRUPPI DI SIMMETRIA		
3.1 Cenni storici	pag.	51
3.2 Le permutazioni	pag.	52
3.3 Simmetrie di figure geometriche piane	pag.	54
3.3.1 Le simmetrie del rettangolo	pag.	54
3.3.2 Le simmetrie del quadrato	pag.	55
3.3.3 Le simmetrie di un triangolo equilatero	pag.	56
3.4 Classificazione dei reticoli piani	pag.	57
3.5 Gruppo dei mosaici	pag.	62
3.6 Gruppo dei fregi	pag.	74
3.7 Gruppo dei rosoni	pag.	76
4. L'ESGRAFIADO		
4.1 Introduzione	pag.	79
4.2 L' <i>esgrafiado</i> : rivestimento murale	pag.	79
4.3 Procedimento e tecniche di esecuzione	pag.	81
4.4 Regole compositive dei motivi decorativi	pag.	86

4.5 Figure geometriche di base dei motivi decorativi	pag.	88
4.6 La geometria della torre di Codorniz	pag.	97

5. IL RILIEVO DI DETTAGLIO

5.1 Generalità	pag.	101
5.2 Fase di presa	pag.	103
5.3 Fase di orientamento	pag.	105
5.3.1 Orientamento interno	pag.	105
5.3.2 Orientamento esterno	pag.	106
5.3.2.1 Orientamento relativo	pag.	106
5.3.2.2 <i>Bundle adjustment</i>	pag.	107
5.3.2.3 Orientamento assoluto	pag.	108
5.4 Digital Image Processing	pag.	108
5.5 Le <i>features</i>	pag.	109
5.6 Rilievo delle facciate con il software Allplan Photo	pag.	111
5.7 Rilievo dei rosoni con i programmi ZScan e Z-Map Laser	pag.	112
5.7.1 Il progetto delle stazioni di presa delle triplete	pag.	113
5.7.2 Il trattamento dei dati	pag.	115
5.7.3 Il processamento dei dati	pag.	119
5.8 Rilievo dei sarcofagi con il software Photodeler Scanner	pag.	122
5.8.1 La calibrazione	pag.	122
5.8.2 Progetto delle stazioni fotografiche	pag.	124
5.8.3 Acquisizione dati	pag.	125
5.8.4 Il processamento dei dati	pag.	125
5.9 Rilievo di dettaglio con il laser VIVID 910	pag.	131
5.9.1 Acquisizione dati	pag.	133
5.9.2 Il processamento dei dati	pag.	135
5.9.3 Reverse engineering con il software Geomagic Studio 10	pag.	137
5.10 Rilievo architettonico con il laser scanner Ilris 3 ₆ D	pag.	144
5.11 Conclusioni	pag.	145

6. PROCESSI CAD/CAM PER LA PRODUZIONE IN SERIE DEL DECORO ARCHITETTONICO CON MACCHINE CNC	
6.1 Generalità	pag. 147
6.2 Stenza	pag. 149
6.3 Rhinoceros	pag. 152
6.4 Processi CAM e prototipazione	pag. 155
7. II SISTEMA INFORMATIVO MULTIMEDIALE	pag. 167
BIBLIOGRAFIA	pag. 179

*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro
che continuamente ci sta aperto innanzi
a gli occhi (io dico lo universo). [...] Egli è scritto
in lingua matematica, e i caratteri son
triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche.*
Galileo Galilei

INTRODUZIONE

Quanto segue propone in forma sintetica gli esiti della tesi di Dottorato dal titolo “Le matrici geometriche del decoro architettonico. Photo scanning, reverse engineering e processi CAD/CAM”, svolta durante gli anni 2007-2010, per il IX ciclo di Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano, Dipartimento di Ingegneria Civile della Facoltà di Ingegneria dell’Università degli Studi di Salerno.

La ricerca si applica allo studio di decorazioni compositive a matrice geometrica originate dalle mutevoli combinazioni di forme elementari: la divisione regolare del piano con forme chiuse che lo ricoprono completamente, senza sovrapporsi e senza mai lasciare spazi vuoti. Operando su di esso, si inizia a quantificarlo, individuando ogni sua singola parte: la misurazione conduce alla scomposizione in forme elementari di figure complesse.

Nello sviluppo di tali configurazioni, il problema della replica è sempre presente, dalla mera idea progettuale fino alle azioni di restauro, in quanto dalla ripetitività delle singole parti – fondamento del suo stesso esistere – prende origine l’intera composizione.

Si è cercato, quindi, a partire da un’attenta analisi delle leggi simmetriche che dettano le logiche generative del disegno ornamentale, per una ben precisa canonizzazione di temi e motivi, di identificare gli schemi geometrici che consentano il controllo razionale della decorazione tramite l’individuazione dei procedimenti della iterazione in serie.

Tale ambito di indagine è scaturito da una precedente esperienza Erasmus maturata nel Nord della Spagna, nella regione della *Castilla y Leon*, ricca di esempi identificativi dell’architettura *Mudéjar*, diffusasi in Spagna intorno al XVII secolo quale sintesi di elementi costruttivi e ornamentali, cristiani e musulmani. La decorazione di tale stile architettonico è ben descritta dalle seguenti parole: “*Le decorazioni mudéjares obbediscono in tutto al sistema decorativo ispanomusulmano, sono decorazioni planari, dove l’ornamento si inquadra in una specifica disciplina geometrica conservando l’angolo retto, in forma di riquadri e alfices*”¹.

¹ CHUECA GOITIA F., *Invariantes castizas de la arquitectura española* en Seminarios y Ediciones. Serie: Hora H. Ensayos y Documentos. Madrid 1971.

Da qui la scelta di analizzare le composizioni ornamentali con ragione geometrica, puntualizzandone e sistematizzandone la grammatica attraverso la definizione dei gruppi di simmetria a cui appartengono.

Questa prima classificazione tiene conto dello stato dell'arte e delle principali teorie che hanno contribuito a definire le leggi di simmetria che governano le trasformazioni piane.

Il tema del decoro è stato analizzato, indagando, anche dal punto di vista storico, il ruolo che la teoria della matematica e della geometria ha avuto nella definizione del linguaggio architettonico.

Dall'analisi di diverse composizioni artistiche, si è cercato di individuare una chiave di lettura della geometria dell'opera e quindi una metodologia semplificativa per il successivo rilievo di dettaglio, verificabile su qualsiasi opera nonché per qualsiasi periodo artistico.

Il disegno decorativo è stato così man mano decodificato, cercando di individuare come il modulo, figura geometrica elementare, secondo specifici assi di simmetria, seguendo determinate direzioni di traslazione, o di rotazione, possa generare piani compositivi.

Le fasi da seguire al fine di rendere evidente il processo configurativo sotteso alla forma finale del motivo ornamentale sono le seguenti:

- individuazione della GRIGLIA, reticolo geometrico di base, per evidenziare i rapporti dimensionali e formali tra le parti, le relazioni non casuali ma costitutive dell'insieme;
- individuazione del MODULO (triangoli, quadrati, cerchi, rombi, ecc.), come base della composizione e delle relazioni tra le parti all'interno dell'opera;
- individuazione dei centri di irraggiamento e, tramite vettori, delle linee di tensione secondo cui il MOTIVO si ripete (dinamismo rotatorio o direzionale, rottura reale o apparente della simmetria);
- individuazione della trama del sistema reticolare o configurazione della griglia (PATTERN), funzione del trattamento formale e cromatico del modulo.

Con questo lavoro si è cercato di creare un ponte che legasse la base teorica con quella sperimentale nel campo della produzione in serie del decoro architettonico, fondamentale nel campo del rilievo e del restauro monumentale. I casi studio esaminati riguardano due esempi architettonici differenti: l'*esgrafiado* della torre di *Codorniz* in Segovia (Spagna), i rosoni e i sarcofagi del Duomo di Salerno.

In particolare, la torre di *Codorniz*, località a ovest della provincia di Segovia (Spagna), è risultata molto interessante sia sotto il profilo tipologico che sotto il profilo della ricercatezza architettonica per la presenza, sulla facciata Sud, di un notevole *esgrafiado*, segno dell'influenza islamica nelle costruzioni ispaniche.

Il duomo di Salerno, costruito tra il 1080 ed il 1085, presenta una pianta a croce latina e, come ideale continuazione verso l'esterno delle navate interne, un quadriportico le cui colonne sono sormontate da archi a tutto sesto decorati con intarsi di pietra vulcanica sulle lesene e ai pennacchi. Oltre ai rosoni, in tufo giallo e nero, presenti sui piedritti delle colonne, l'atrio conserva antichi sarcofagi romani riccamente.

Lo stato di conservazione, la tipologia dell'ornamento, la storia delle maestranze documentata da fonti bibliografiche, le informazioni relative al progetto, ancora presenti sotto forma di incisioni sulle superfici dell'edificio, ha consentito di poter giungere a delle conclusioni, non sempre generalizzabili, sui procedimenti di standardizzazione dei metodi e delle tecniche di produzione delle decorazioni planari.

Questi esempi sono stati utili per poter introdurre il concetto dei gruppi di simmetria e quindi della teoria dei gruppi, fondamento teorico che ordina le logiche di aggregazione del disegno ornamentale a matrice geometrica. Attraverso i casi studio esaminati, ed in particolare in funzione del sistema decorativo riscontrato, è stato possibile individuare procedure metodologiche di rilievo ritenute idonee ad esplicitare il processo geometrico di base al fine di facilitare la successiva fase di replica sia in ambiente digitale che fisico e di favorire una funzionale sistematizzazione dell'ornato.

In particolare si è ricorso ad un'innovativa metodologia, detta di photo scanning, che permette l'acquisizione simultanea di nuvole di punti e di texture. Al fine di testare la validità di tale tecnica, si è ricorso all'utilizzo di differenti software e nello specifico al programma ZScan e Z-Map della Menci House per la restituzione dei rosoni, e al programma Photomodeler Scanner della Eos Systems per il rilievo dei sarcofagi.

In entrambi i casi, il trattamento dei dati si basa su un algoritmo di rettifica multi-focale mediante il quale le immagini vengono ricampionate secondo piani a profondità variabili e identificate da un numero di features – la cui disposizione influenza le successive fasi di calcolo – tali da interessare omogeneamente l'intero fotogramma.

La rettifica è seguita da un processo di image-matching multi-oculare di programmazione dinamica: un algoritmo di ricerca delle features omologhe, agendo simultaneamente sulle immagini, sfrutta le componenti cromatiche RGB e conduce alla ricostruzione degli orientamenti dei fotogrammi.

L'applicazione di rilievo ha richiesto l'analisi e la verifica di una specifica procedura metodologica, che si è articolata nelle seguenti fasi: progetto delle stazioni anche in funzione del contesto ambientale; realizzazione delle prese fotografiche con camera digitale calibrata; ricostruzione dell'orientamento interno/esterno dove, con procedure semiautomatiche o automatiche, si sono correlate le diverse immagini in un prefissato sistema di riferimento; generazione del modello tridimensionale tramite specifici algoritmi (*matching area based/feature based*), visualizzabile come nuvola di punti in modalità wireframe o con mappatura di texture; generazione delle ortofoto e DEM; editing delle immagini georiferite e, infine, l'ortofotomosaicatura con l'esportazione dei risultati ottenuti.

Dal punto di vista geometrico, ogni motivo ornamentale rilevato è stato poi ridisegnato in ambiente CAD seguendo le logiche generative che, come è noto, per tali decorazioni, trovano fondamento teorico nelle possibili composizioni di moduli organizzati tramite simmetrie geometriche.

Si è potuto così valutare che l'individuazione delle regole costitutive dell'intera composizione agevola di molto, in termini di accuratezza del rilievo e di tempo, la restituzione del modello digitale.

Non si restituisce semplicemente il dettaglio così come ci appare, ma la scomposizione teorica dell'opera permette di individuare, nella successiva ricomposizione grafica, la natura e la posizione di ogni singolo elemento: uno sguardo critico che guida a una corretta e realistica riproduzione. I modelli formali tendono a divenire così modelli geometrici, simbolo di una struttura più profonda, che è possibile cogliere con l'aiuto di precisi schemi topologici.

Sono state, poi, sperimentate e verificate le possibilità offerte dalla modellazione digitale e dalle applicazioni a sviluppo parametrico che permettono di riprodurre la decorazione così come di deformarla, creando nuove superfici di involuppo del tema ornamentale.

Tuttavia, nonostante i software di modellazione di oggi spingano verso un'illusoria libertà artistica, lo studio delle leggi simmetriche che governano tali tipi di decorazioni conduce a una ben precisa canonizzazione di temi e motivi.

E così, nota la legge armonica che domina l'intera composizione, definita dal movimento rigido di un modulo predefinito su di un reticolo piano, la decorazione può facilmente riprodursi partendo dalla semplice unità quale entità che può essere, con l'utilizzo di macchine a controllo numerico, reiterata meccanicamente.

La procedura è stata applicata a casi studi idonei per analizzare i principi della ripetibilità in serie e delle operazioni di laboratorio; ciò ha consentito, grazie alla ri-progettazione digitale e alla produzione con gli strumenti della tecnologia a controllo numerico, di codificare la riproducibilità tecnica, immateriale e materiale, del decoro architettonico. Vengono quindi illustrati i processi di progettazione digitale e di prototipazione con macchine a controllo numerico eseguiti per la definizione di elementi di decorazioni planari e la realizzazione di prototipi.

Le procedure e le strumentazioni descritte possono essere un potente metodo per il controllo, la verifica e il monitoraggio del decoro architettonico, permettendo di realizzare *database* metrici interattivi in grado di fornire in qualsiasi momento informazioni sull'oggetto rilevato.

La precisione, la velocità di acquisizione dei dati metrici, gli elevati livelli di automazione, la riproducibilità delle operazioni di rilevamento e le possibilità di implementazione e di interrelazione nel tempo di dati di diversa natura, per la costruzione critica di modelli geometrici e prototipi, sono caratteristiche che comportano vantaggi innegabili e aprono nuove frontiere per uno sviluppo rigoroso di metodologie integrate di rilievo e l'analisi dei manufatti.

Durante lo sviluppo della ricerca è nata, inoltre, la necessità di realizzare una banca dati che consentisse, attraverso un approccio più sistematico, la gestione di una documentazione in continuo aumento. Il presupposto da cui si è partiti è duplice: da un lato considerare la decorazione in se stessa, cercando di creare una griglia informativa utile alla sua classificazione; dall'altro, inserirla nel suo contesto monumentale di riferimento, ricontestualizzandola nell'originario ambiente architettonico,

approdando così ad una migliore conoscenza topografica del luogo di provenienza.

Impostare un modello di schedatura dei rivestimenti geometrici costituisce uno strumento di catalogazione funzionale sia alla tutela e alla fruizione del bene immobile, sia alla definizione di un metodo di approccio allo studio dei gruppi di simmetria. Si sarà così in grado di stabilire l'origine degli schemi decorativi, i percorsi di distribuzione, lo sviluppo di tendenze locali.

Nel predisporre la scheda modello, si è cercato di allinearsi con gli standard istituzionali indicati dalla normativa vigente in materia di catalogazione di Beni Mobili dell'Istituto Centrale per il Catalogo e la Documentazione (ICCD).

La scheda, creata mantenendo una suddivisione in finestre, risulta sostanzialmente divisa in due sezioni: la prima volta a fornire tutte le informazioni di contesto, relative all'*Edificio* e all'*Ambiente* di provenienza; la seconda, invece, dedicata al *Rivestimento* in sé, ovvero alle caratteristiche tecniche, compositive, e tipologico-stilistiche, corredate da immagini, informazioni relative allo stato del ritrovamento e allo stato di conservazione.

Così facendo è possibile creare un vero e proprio Sistema Informativo per il Rilevamento, basato su mappe elettroniche e su banche dati multimediali contenenti immagini, video, riprese fotogrammetriche, misure automatiche, rilievi architettonici, informazioni sullo stato di conservazione e, ovviamente, disegni.

1. CAOS E ORDINE

Il concetto di caos e la sua consapevolezza visiva sono istintivamente rifiutati dall'essere umano tramite la razionale e periodica ricerca di un ordine capace di comunicare sicurezza e stabilità. Sia emotivamente che intellettualmente l'uomo, fin da quando è bambino, avverte il bisogno di essere in armonia con la natura e con ciò che lo circonda, attraverso delle forme espressive univoche e chiare, che possano essere espressione del proprio immaginario e/o di concrete esperienze emotive ed intellettuali.

Fin da piccoli si incomincia ad instaurare un rapporto con il mondo esterno, sebbene ciò significa scontrarsi con le forze, le forme e la geometria che lo regolano. Man mano, attraverso l'apprendimento, l'esperienza, la memoria, si riacquista la consapevolezza di esser parte del tutto: la virtù di comprendere, riflettere, discernere e le capacità di ponderare e discretizzare ciò che si vede. Ed è da tali presupposti che si fa derivare la parola "*anthropos*" da "*anathron-ha-opope*" cioè "colui che riflette su ciò che ha visto" o da "*anti-ro-op-os*", cioè "colui che cammina guardando di fronte a sé".

Subito, fin dai primi passi, attraverso gioie e paure, si crea uno scambio di emozioni con il mondo, una sorta di interazione spontanea che conduce alla scoperta di noi stessi; ciò che vediamo e ci fa emozionare, nel bene e nel male, diventa parte di noi.

La vista, rappresenta lo strumento attivo grazie a cui la mente umana riceve e registra l'enorme quantità di forme, azioni, movimenti che attorno ad essa, grazie alla luce, prendono vita; la visione del mondo che circonda l'uomo, quindi, è una fase formativa, dinamica, viva.

Risultato di tale esperienza è l'immagine: un'entità formata da numerosissime componenti, dotata di una propria vitalità espressiva, capace di comunicare emozioni.

Ogni elemento che compone un'immagine possiede caratteristiche uniche, poiché queste sono determinate dal contesto in cui sono inserite: la sua consistenza, la sua geometria, la sua estensione, risulteranno ben diverse se avulse dal proprio insieme.

Ogni immagine, percepita dal campo visivo di un osservatore, è composta da numerosi fattori, capaci di determinarne il risultato finale, quali luminosità, dimensione, posizione e direzione all'interno del soggetto osservato, geometria e plasticità della figura; tali ed ulteriori

parametri agli occhi dello spettatore danno vita ad un'equilibrata rappresentazione della realtà.

Ma come riuscire ad infondere la sensazione della profondità e la forza comunicata tridimensionale di un soggetto spaziale su un campo pittorico bidimensionale?

Tale scopo presuppone l'introduzione di un sistema di riferimento differente – all'interno di un mondo, quello del supporto bidimensionale –, con leggi dettate da nuove relazioni, convenzioni ed espressioni.

Una rappresentazione bidimensionale ha il potere di apparire tridimensionale allorquando richiama nell'osservatore l'aspetto o la vista di un'immagine presente nel proprio immaginario: lo spettatore cerca inconsciamente di organizzare e percepire le unità ottiche dell'oggetto rappresentato come figure dell'universo spaziale, tramite i canoni e le proporzioni in esso delineati.

Il piano della rappresentazione diventa così lo spazio in cui punti, linee, curve prendono vita, agendo come forme spaziali. La sensazione della tridimensionalità che un quadro bidimensionale può evocare nello spettatore trova soluzione nel movimento di linee e figure piane che, variando di forma, posizione, direzione, tessitura, colore, e luce, suscita, se scandito da un ritmo, una melodia dove ogni singolo elemento risulta armonicamente connesso all'altro.

Il ripetersi e l'alternarsi regolare di linee, curve, figure, posizioni, direzioni, crea un flusso continuo di informazioni, che suscita nello spettatore una sensazione di tensione data dalla percezione del movimento di ogni singola unità.

Qualsiasi composizione visiva sprigiona la sua vitalità tramite il ritmo che regola i battiti dell'opera: lo spettatore, dopo la fase iniziale di impatto visivo, puramente emotiva, cercherà man mano di ri-leggere e comprendere i tempi, le forme, gli spazi che si susseguono nella complessità della composizione; la tensione lascia spazio alla quiete.

In qualche modo acquisire la chiave di lettura geometrica dell'opera è un pò come conoscere l'assassino del nostro romanzo noir, svanendo quella sensazione di paura che si ha nello sfogliare la pagina successiva del libro in quanto già si intuisce come andrà a finire. Automaticamente non possiamo più, essendo in possesso della soluzione, non decifrare la realtà che ci circonda.

L'ordine fra un'unità compositiva e l'altra esige intervalli e pause, soffi di silenzio fra segnali successivi: nascono così diversi ritmi melodici capaci di trattenere l'attenzione dell'osservatore, travolto da diverse emozioni, e di prolungare i limiti di vita dell'immagine.

Anche la pausa intesa come sfondo, vuoto, diventa un vero e proprio elemento della nostra visione; dentro la pausa c'è la presenza dell'assente, vi si crea quell'attesa che placa le emozioni fino ad ora sentite, preparando ad accoglierne nuove.

Insomma la pausa costituisce la ripresa, e tra un motivo e la sua rielaborazione, diventa luogo della interiorizzazione delle percezioni visive, infatti, senza una pausa ogni immagine apparirebbe monotona e uniforme.

Nasce una melodia caratterizzata da tensioni e distensioni che convogliano il discorso e le aspettative dell'osservatore verso un avanzamento nella lettura e verso una direzione preferenziale.

Così come nelle composizioni musicali le serie di note, armonicamente connesse, emettono melodie atte a suscitare emozioni vive nell'ascoltatore, portandolo a danzare, scappare, correre, saltellare, così la gamma cromatica dei colori utilizzati, il rapporto delle forme con lo sfondo, le luci, le ombre, i contorni di forme, relazionate tra loro su di un piano bidimensionale, possono lavorare sulla sensibilità dello spettatore per evocare in lui forti sensazioni: attrazione-dispersione, concentricità-eccentricità, staticità-dinamismo.

Secondo Escher: *“La vita è possibile soltanto se i sensi percepiscono i contrasti. Un suono monotono d'organo, sostenuto a lungo, diventa insopportabile per l'orecchio, come per l'occhio la contemplazione di una grande parete in tinta unita, o perfino di un cielo senza nubi [...]. Non è affascinante rendersi conto che non c'è immagine né forma e neppure tonalità di colore che possa esistere autonomamente? Che per tutto ciò che possiamo osservare con lo sguardo dobbiamo fare riferimento ai rapporti e ai contrasti? Se una quantità non può essere confrontata con un'altra, non esiste”*.

Con giochi di intreccio, di sovrapposizione, di scontri, di colori, di luce, di texture si ha la sensazione di scorgere su di una superficie piana, bidimensionale, un mondo tridimensionale: l'attività di ogni singola unità riprende lì dove l'altra si è fermata, procedendo come un flusso visivo in continuo movimento, verso un'unità completa.

Conosciamo il mondo esterno tramite una serie di sistemi sensoriali: quando si arriva a un'identificazione dell'oggetto fino a classificarlo in una specifica categoria si parla di "percezione".

La percezione, differentemente dalla sensazione, è un processo di elaborazione sintetica di dati sensoriali e si inserisce all'interno delle nostre conoscenze precedenti; la percezione è, dunque consapevolezza, mentre la sensazione avviene, invece, a livello più inconscio. È la percezione che intrecciandosi continuamente con l'esperienza, permette a ogni individuo la comprensione del mondo: si sviluppa una capacità di confronto che conduce a un facile riconoscimento degli oggetti precedentemente osservati. Ed è per questo che, anche se gli oggetti si trasformano, siamo sempre in grado di riconoscerne le identità e i cambiamenti. Alla indeterminatezza delle forme intuitive va sostituendosi l'assoluta identità con se stesse delle forme geometriche, il loro essere univocamente ed esattamente determinabili.

Quando guardiamo un oggetto, di solito, abbiamo l'impressione di coglierne simultaneamente tutti gli attributi, sebbene in realtà elaboriamo separatamente ciascuna singola caratteristica visiva (colore, forma, profondità e movimento); solo la successiva integrazione delle varie informazioni permetterà la percezione dell'oggetto.

Grazie a questo processo è possibile poi arrivare a possibili forme di rappresentazione e riproduzione, rivivendo l'oggetto e le sue caratteristiche nella nostra mente. Tale processo, dunque, non solo ci permette di vedere un'immagine, ma anche di quantificarla, misurarla, relazionarla con oggetti contigui o già presenti nei nostri ricordi, e di individuarne, valutando tonalità, valore, saturazione, tessitura, dimensione, forma, posizione, direzione, le differenze e le similitudini che essa presenta. A seconda di come la superficie del disegno è organizzata, modulata, ritmata, così l'attività dell'occhio risulterà più o meno agevolata nella lettura dell'insieme.

Un'ideale organizzazione ritmica del quadro bidimensionale non solo facilita la lettura, ma permette all'osservatore, richiamando la sua attenzione, di intuire come ogni singola unità compositiva si lega organicamente al tutto.

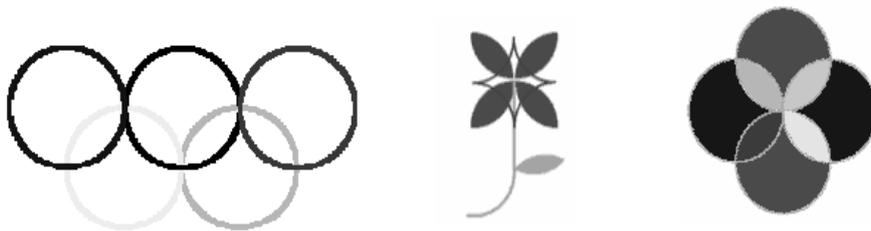
Il ritmo, dunque, quale principio costruttivo, ordinatore di pattern geometrici, individua, su uno schema regolare, lo scorrere interrotto di ogni entità ripetitiva, creando una sorta di continuità.

Come quando da bambini si gioca con le costruzioni lego o con un puzzle, il poter individuare il collegamento delle singole parti tra loro e con il tutto, percependo quella sorta di ordine spaziale che giustifica l'essere, la dimensione, la forma, la direzione, di ogni elemento costitutivo, provoca una grande soddisfazione.

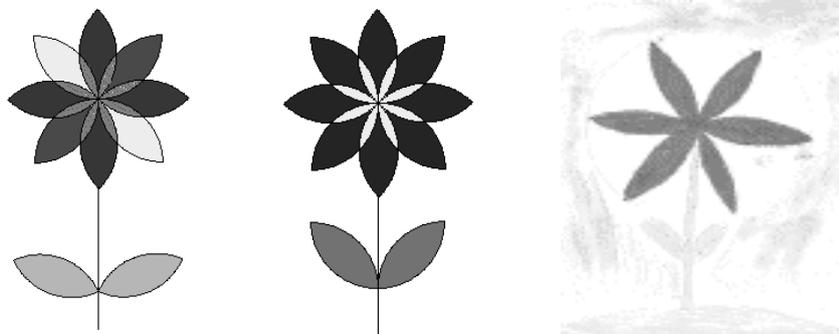
Lo spazio non è più semplicemente intuito ma operando su di esso, si inizia a quantificarlo, individuando ogni sua singola parte: la misurazione ci permette, dunque, la scomposizione in forme elementari, trasformando così figure complesse in figure sempre più semplici. Ma se si considera lo spazio come somma di elementi che è possibile quantificare, allora potremmo iniziare a pensare il mondo intero come risultato dell'*iterazione di un modulo*, di una qualche figura geometrica che diviene così l'elemento di base di altre configurazioni spaziali; uno spazio, insomma, possibile da ri-costruire: uno spazio geometrico.

L'atto dell'apprezzare la misura ci permette di applicare la geometria all'esperienza e di superare l'indeterminatezza del mondo sensibile fino a costruire un'immagine significativa del mondo. Da quanto detto, si capisce come l'applicazione della geometria allo spazio intuitivo è il primo passo per far sì, sempre che sia possibile, che il mondo venga compreso fin da bambini.

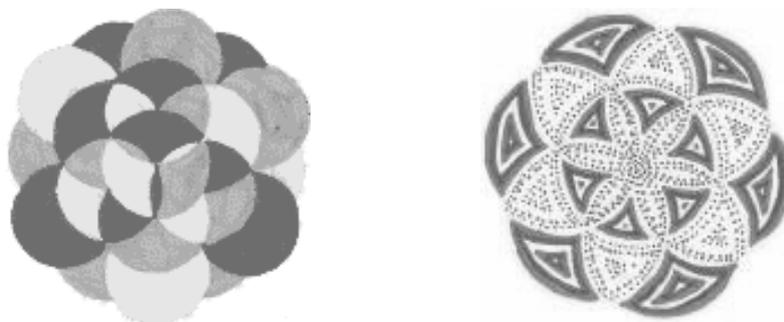
Quante volte ci siamo soffermati a guardare il disegno di un fiore, graffiti e mosaici di antiche facciate, o semplicemente i cartoni animati senza mai renderci conto che altro non sono che la composizione di forme geometriche elementari. Il cerchio, ad esempio, è da sempre una delle figure più utilizzate nei motivi ornamentali in quanto offre, attraverso differenti giochi, infinite possibilità compositive. Semplici cerchi secanti possono unirsi in una sorta di allaccio curvo, trecce, cerchi annodati.



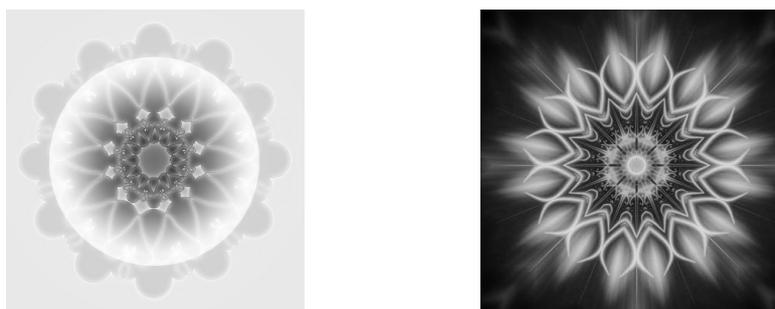
Cinque cerchi secanti di uguale dimensione realizzano fiori a quattro petali



Rosette di sei o otto petali

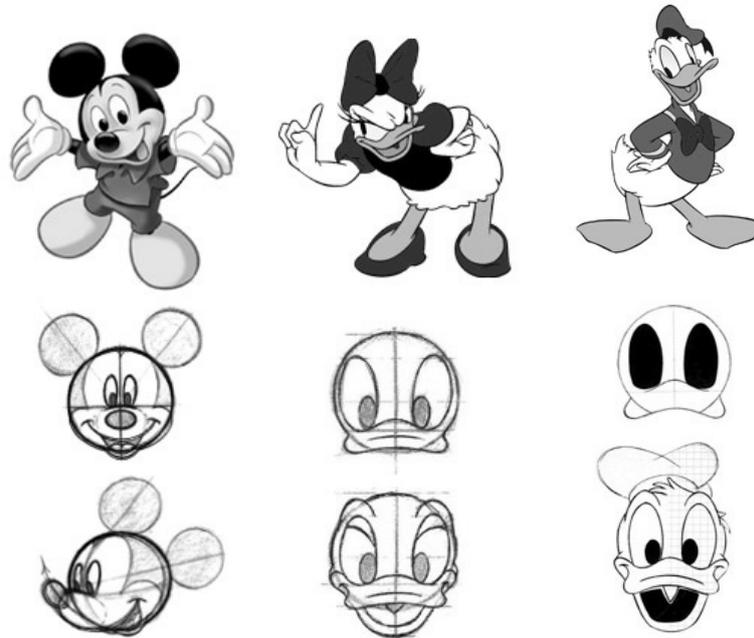


Composizioni di cerchi

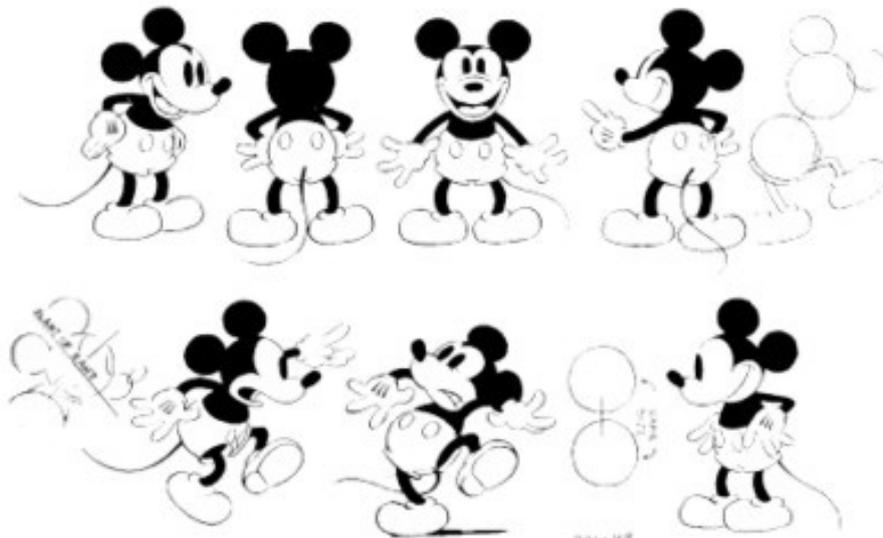


Mandala: struttura che si organizza intorno a un centro

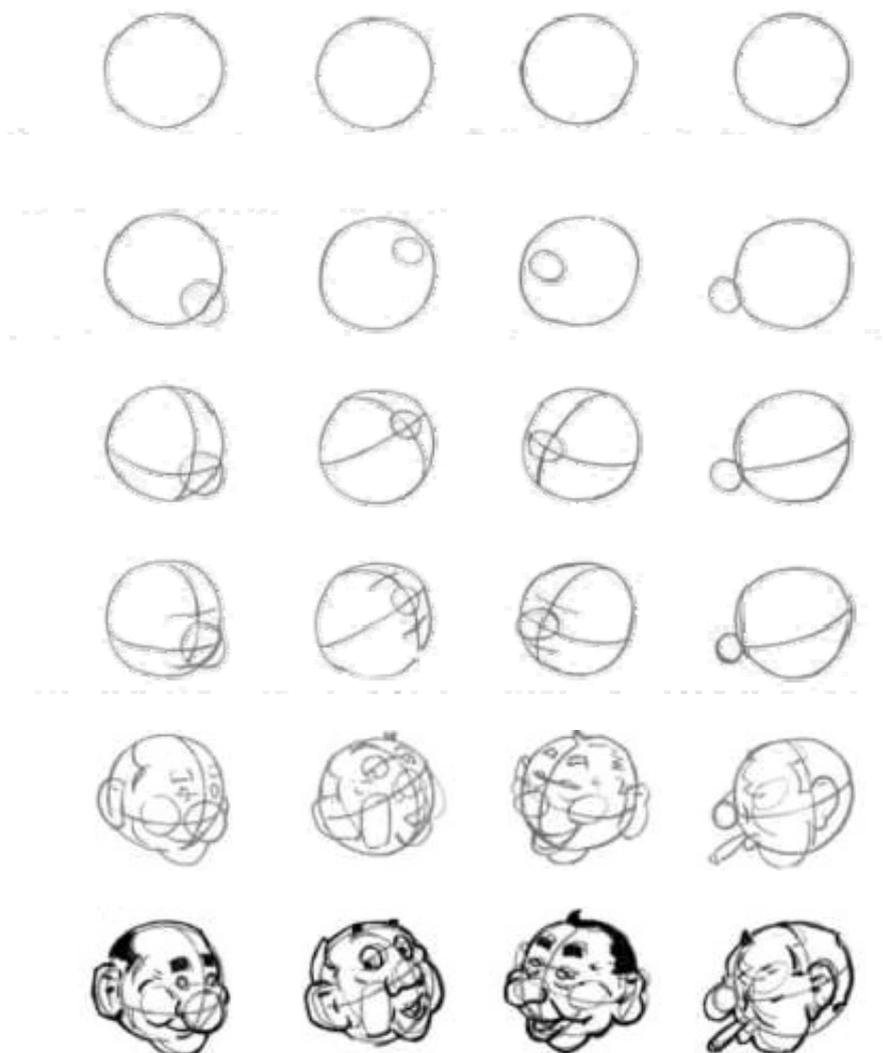
Il cerchio risulta essere nella stragrande maggioranza la figura di base anche per il disegno dei fumetti e non solo:



Character Design di alcuni cartoni animati

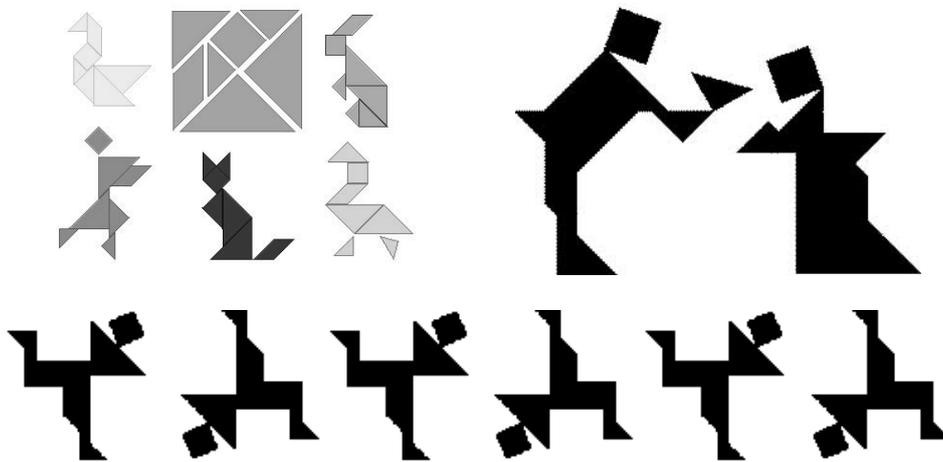


Character Design di Topolino



Character Design di un ritratto

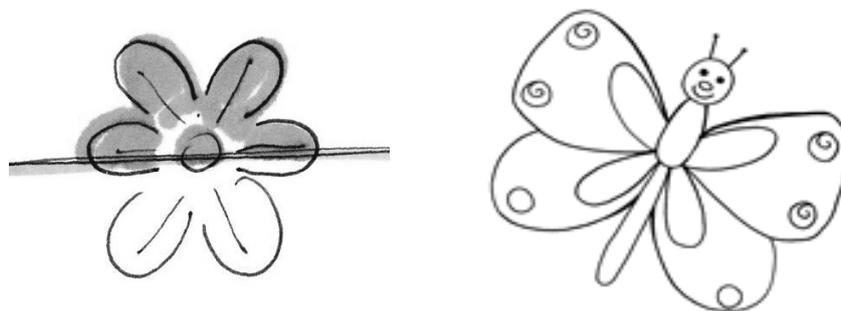
Le figure mostrano alcuni esempi di possibili decorazioni date dalla semplice scomposizione e ricomposizione geometrica del cerchio. A queste si aggiungono poi quelle derivanti dal quadrato, triangolo, rombo, ecc., quelle derivanti dalla loro combinazione e le ulteriori variazioni che si possono ottenere giocando con i colori, gli sfondi, i contorni e le texture.



Gioco del tangram: con i sette pezzi è possibile ottenere figure diverse ma equiestese

È facile osservare innumerevoli decorazioni, come quelle delle architetture e dei motivi ornamentali, la cui composizione si basa su diversi schemi ripetitivi, riflesso di quella quasi simmetria, caratteristica intrinseca dell'uomo, insita nel suo stesso corpo, e nella natura che lo circonda.

Fin da piccoli non troviamo alcuna difficoltà nel disegnare un fiore, una farfalla intuendone a livello inconscio la regolarità che li costituisce: sebbene non ancora come modelli geometrici, i nostri occhi percepiscono la regolarità delle forme che originano i diversi oggetti. Ritroviamo la simmetria in tutte le forme di vita: dalle forme più semplici a quelle più complesse, dal virus al corpo umano, dai vegetali agli animali, tutti gli organismi vivono su schemi simmetrici.



Semplici disegni simmetrici

“Il piccolo principe indovinò che non era molto modesto, ma era così commovente! “Come fai ad essere così bello?”. “Vedi, io sono un fiore e sono una creazione della natura, e in quanto tale sono perfettamente simmetrico...”. “Non capisco” rispose il piccolo principe spiazzato dall’uscita del fiore. “Ora ti spiego” disse superbamente il fiore. “In natura esistono tantissime simmetrie”. “E a cosa servono?”. “Beh, a fare i fiori belli, non c’è dubbio. Una simmetria della natura è qualcosa che il sole ci ha dato e che nessuno potrà mai imitare”^I.

Ciò che conferisce bellezza, tanto da far sembrare ciò che è inerte l’opera di una volontà volta ad un fine estetico, pare dunque determinato da una necessità intrinseca della materia.

Tuttavia con il tempo i modelli formali tendono a divenire modelli geometrici e diventano simbolo di un’armonia strutturale ben più profonda, che è possibile cogliere con l’aiuto di schemi topologici; questi ultimi ci permettono di trovare la simmetria nascosta in forme all’apparenza tanto diverse, e aiutarci a scoprire la vera chiave di lettura di quanto stiamo osservando.

In ambito matematico si affida al principio di simmetria, al di là di implicazioni estetiche o morali, una connotazione dinamica: sono le trasformazioni dell’ambiente che danno senso alla simmetria.

Caglioti, difatti, la definisce *“ciò che rimane quando tutto cambia”*^{II}. La simmetria di una figura, pertanto, è una trasformazione che la lascia sostanzialmente invariata, che si ripete e che può ripetersi in modi molto diversi: la ripetizione di un modulo secondo determinate regole sono dette, appunto, operazioni di simmetria.

Per questo la simmetria, come vedremo nel capitolo successivo, rimane legata alla teoria degli invarianti delle figure: nello spazio euclideo, ad esempio, la simmetria di una figura è data dall’insieme delle isometrie dello spazio in sé, cioè delle trasformazioni di natura euclidea che può subire lo spazio, che lasciano invariata la figura, senza necessariamente lasciare invariato ogni singolo punto.

^I DE SAINT-EXUPÉRY A., *Il piccolo principe*, Bompiani 1993.

^{II} CAGLIOTI G., *Simmetrie infrante, nella scienza e nell’arte*, Clup 1983.

2. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

2.1 Cenni storici: Programma di Erlangen

Nel 1865, Julius Plücker, professore di matematica e fisica all'Università di Bonn, ha tra i propri studenti del primo corso un giovane dotato di eccezionale talento matematico, Felix Klein.

Plücker, ispirandosi alle idee di Gergonne, aveva progettato di trattare analiticamente la geometria proiettiva, problematica già affrontata in una precedente contesa fra J.V. Poncelet e J. Gergonne, allievi entrambi di G. Monge, creatore di questa nuova geometria.

Difatti Gergonne, contrariamente a Poncelet, ritiene che anche per la geometria proiettiva sia necessario fare ricorso al metodo algebrico cartesiano. Plücker risulta sostenitore di Gergonne e introduce l'algebra in geometria proiettiva, individuando un nuovo modo per determinare le coordinate geometriche di un punto.

Nello specifico, il problema da risolvere consisteva nel trovare il modo di descrivere algebricamente i punti impropri o all'infinito, e quindi in geometria proiettiva i punti di convergenza di rette fra loro parallele.

Plücker comprendendo che, per descrivere i punti all'infinito, non sono sufficienti le coppie di coordinate cartesiane, attribuisce allora a ogni singolo punto terne numeriche che chiama *coordinate omogenee*. Le coordinate di Plücker sono individuate in modo tale che, quando il valore del terzo numero è zero, le coordinate descrivono i punti all'infinito.

Purtroppo Plücker muore in quello stesso anno lasciando il secondo volume del suo lavoro sotto forma di semplici appunti. Nel frattempo Klein, divenuto suo assistente a soli diciassette anni, consegue il diploma di laurea a Bonn sotto la guida di A. Clebsch, che proprio nel 1868 viene nominato professore di geometria a Gottinga.

Clebsch, che si occupa di geometria proiettiva, di geometria delle superfici e di teoria degli invarianti, cerca con i suoi studi di individuare quel che vi è di comune nei diversi metodi usati in geometria, anziché fissare la propria attenzione sulle diversità degli stessi.

È Clebsch che trasmette al giovane Klein l'interesse per l'unità dei metodi in geometria e colpito quanto Plücker dalle straordinarie capacità matematiche del giovane Klein, ritiene che sia quest'ultimo la persona più adatta per terminare l'opera incompiuta di Plücker.

Terminato e pubblicato il secondo volume dell'opera di Plücker, Klein si trasferisce da Gottinga a Berlino, dove nel 1869 frequentando il Seminario matematico di Weierstrass, conosce il matematico norvegese Sophus Lie, abile conoscitore e sostenitore della teoria di Plücker.

Tramite il lavoro di Lie, Klein viene a conoscenza del contributo dato alla geometria proiettiva da A. Cayley che aveva sviluppato la teoria degli invarianti algebrici, cioè di quelle proprietà delle forme algebriche che restano invariate per una trasformazione lineare delle variabili. In un secondo momento, Cayley estende la teoria degli invarianti algebrici alla geometria, assimilando le trasformazioni algebriche lineari alle trasformazioni proiettive e gli invarianti algebrici agli invarianti proiettivi. Da ciò consegue che la geometria proiettiva è, per Cayley, "tutta la geometria". La geometria di Euclide è quindi un caso particolare di geometria proiettiva.

Dai risultati di Cayley, Klein intuisce che anche le geometrie non euclidee dovrebbero potersi costruire come casi particolari di geometria proiettiva. Tale ipotesi viene discussa al Seminario matematico di Weierstrass che esprime un giudizio altamente negativo convinto che una geometria costruita indipendentemente dal concetto di distanza non abbia alcun senso.

L'intervento di Klein non aveva difatti, tenuto conto del fatto che Cayley aveva trattato algebricamente la geometria proiettiva, servendosi delle coordinate di Plücker: coordinate che assumono implicitamente il concetto euclideo di distanza.

Il mancato apprezzamento di Weierstrass, considerato in quel tempo il più grande matematico vivente, spingerà Klein e Lie ad allontanarsi da Berlino per recarsi in Francia, patria indiscussa della geometria proiettiva.

A Parigi, i due giovani studiosi conoscono Chasles e instaurano rapporti d'amicizia con Gaston Darboux e Camille Jordan che li spinge ad approfondire sia lo studio delle trasformazioni geometriche, sia i rapporti fra geometria differenziale e geometria proiettiva.

Purtroppo l'esplosione del conflitto franco-prussiano costringe i due studiosi a lasciare Parigi e a rallentare i loro studi. Nel 1871 Klein ritorna a Gottinga, dove consegue l'abilitazione all'insegnamento universitario e di nuovo in collaborazione con Lie, approfondisce il problema della struttura delle trasformazioni geometriche. Gli autori intravedono

un'analogia tra il proprio modo di trattare le trasformazioni geometriche e quello usato da Jordan per le sostituzioni algebriche, ma non riescono a unificare i due campi di ricerca, perché la struttura delle trasformazioni geometriche è continua, mentre quella delle sostituzioni algebriche è discreta. Tuttavia, convinti di avere individuato un interessante filone di ricerca, separano i rispettivi ambiti d'indagine e in particolar modo Lie, abile nel calcolo, studia i gruppi continui e le loro applicazioni all'analisi, mentre Klein è tutto preso dal problema dell'unificazione delle diverse geometrie.

Partendo dell'idea di Cayley, Klein estende il discorso dal piano allo spazio con l'intenzione di definire la distanza fra due punti dello spazio, partendo dalla geometria proiettiva. A questo proposito assume una superficie di secondo grado come *superficie fondamentale*. Considera poi due punti qualsiasi dello spazio. La retta che unisce questi due punti interseca la superficie fondamentale in altri due punti. Quattro punti formano un *birapporto*. Dato che il birapporto è un invariante proiettivo, il suo logaritmo può essere usato per definire la distanza fra i due punti dello spazio. In ragione di ciò, la superficie assoluta diventa la superficie dei punti all'infinito. Considerato poi che essa può essere scelta arbitrariamente, consegue che, se la superficie è reale, i due punti all'infinito sono reali e distinti, mentre, se essa è degenere, i due punti all'infinito sono reali e coincidenti. Infine, se la superficie è immaginaria, i due punti all'infinito sono immaginari. Dato che l'iperbole ha due punti reali all'infinito, la parabola ne ha uno e l'ellisse nessuno, Klein denota rispettivamente questi tre sistemi metrici come geometrie iperbolica, parabolica ed ellittica. Così come Riemann si è servito dell'analisi, Klein si è servito dell'algebra per dimostrare che le tre geometrie metriche corrispondono a tre distinte "varietà" di un'unica geometria.

Nell'Ottobre del 1872, Klein riceve la nomina di professore di geometria presso l'Università di Erlangen e il 7 Dicembre dello stesso anno rende pubblica la memoria *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche*, dove l'autore porta a compimento il progetto di unificazione dell'intera geometria sotto il titolo "Metodi della geometria".

Scopo essenziale del lavoro di Klein è l'individuazione di un principio atto a unificare le diverse ricerche geometriche dove la misura non è più considerata una proprietà intrinseca degli oggetti, ma soltanto un sistema di relazioni.

Studio reso necessario dall'avvento della geometria proiettiva, che si basa su trasformazioni per proiezioni, prescindendo da qualsiasi riferimento al concetto di misura.

Secondo Klein anche la geometria deve essere considerata come una scienza unitaria e il contrasto tra le nuove geometrie e la geometria euclidea si spiega con il fatto che, quando si passa a un gruppo più esteso, solo una parte delle proprietà geometriche si conserva.

A giudizio di Klein, qualsiasi studio geometrico può essere ricondotto, per mezzo della teoria dei gruppi di trasformazioni, alla geometria proiettiva. Con l'ingresso all'università e la prematura scomparsa di Clebsch, Klein diventa, di fatto, un punto di riferimento, oltre che della propria sede universitaria, anche dell'importante scuola geometrica di Gottinga, dove ne diviene insegnante del 1886.

Quando Klein, lascia l'Università di Lipsia, dove si era trasferito con la moglie Anne Hegel, nipote del famoso filosofo, per trasferirsi a Gottinga, il posto resosi vacante viene occupato da Lie. Nasce così un polo unitario di ricerca fra Lipsia e Gottinga, che rappresenta la vittoria Klein nei confronti dei matematici di Berlino.

Nell'ultimo decennio del secolo, la teoria dei gruppi di trasformazioni è considerata essenziale per gli sviluppi della matematica e Klein e Lie diventano gli indiscussi maestri delle nuove generazioni di studiosi.

Sono perciò gli sviluppi della teoria dei gruppi di trasformazioni a conferire portata storica al saggio *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche*, diffusosi successivamente con il titolo "Programma di Erlangen".

L'idea fondamentale su cui poggia il lavoro di Klein è che vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche (invarianti) dei corpi. Egli chiamava *gruppo principale* il gruppo di trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà. Così diviene possibile definire diverse geometrie, ciascuna delle quali è associata ad un gruppo di trasformazioni e ad un insieme di proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni considerate. Per classificare le varie geometrie è necessario esaminare tali trasformazioni:

- se le trasformazioni considerate sono le congruenze (isometrie), la geometria che ne studia gli invarianti (le distanze) è la geometria euclidea;

- se le trasformazioni considerate sono trasformazioni affini, la geometria che ne studia gli invarianti è la geometria affine e gli invarianti sono i rapporti dei segmenti appartenenti a rette parallele;
- infine, se le trasformazioni considerate sono trasformazioni proiettive (o proiettività), la geometria che ne deriva è la geometria proiettiva (della quale le prime due geometrie sono casi particolari); gli invarianti, come si è detto, sono, in questo caso, i birapporti.

Con il programma di Klein la geometria proiettiva, diretta derivazione della prospettiva, diviene così la geometria fondante per le geometrie classiche.

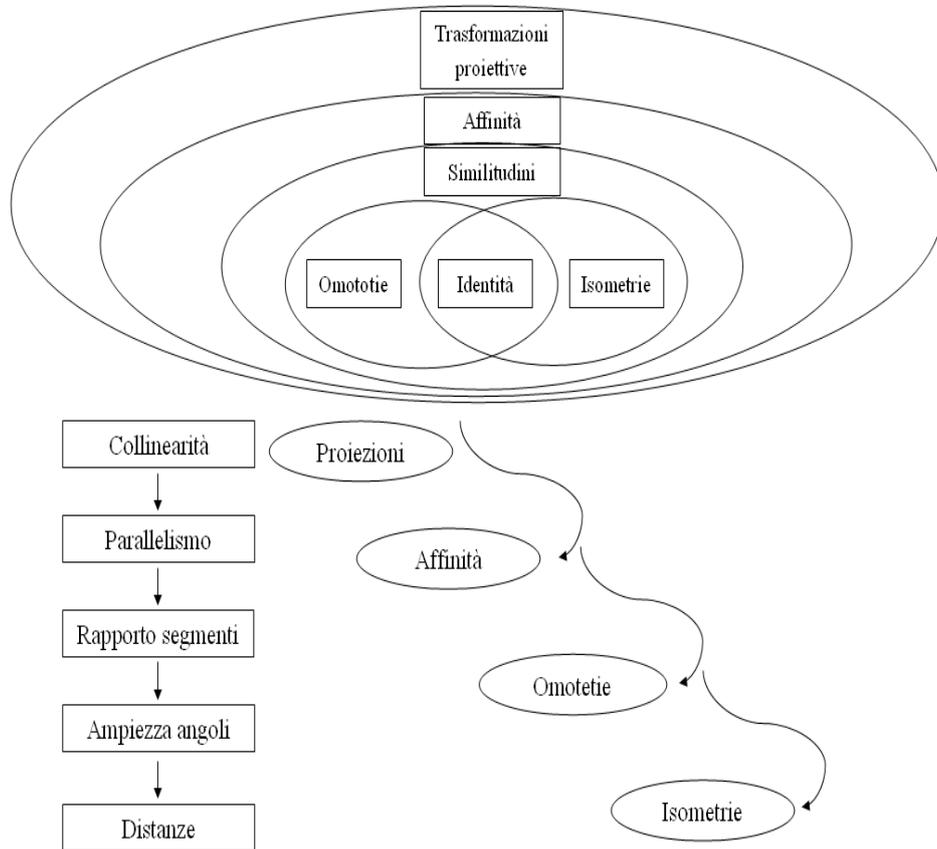
Il filo conduttore della trattazione è il concetto di transitività: comunque si fissino due punti, esiste un'isometria che manda l'uno nell'altro ma questo non è più vero per le coppie di punti perché le isometrie conservano la distanza (numero reale definito sulle coppie di punti); comunque si fissano due coppie di punti esiste una similitudine che manda l'una nell'altra, ma questo non è più vero per le terne di punti, perché le similitudini conservano il rapporto (numero reale complesso definito sulle terne di punti); estendendo la trattazione alle omografie: comunque si fissano due terne di punti, esiste un'omografia che manda l'una nell'altra, ma questo non è più vero per le quaterne di punti, perché le omografie conservano il birapporto (numero complesso definito sulle quaterne di punti).

Da definizione una *geometria* è lo studio di quelle proprietà di un insieme \mathcal{S} che rimangono *invarianti* quando gli elementi di \mathcal{S} sono sottoposti alle trasformazioni di un certo gruppo di trasformazioni.

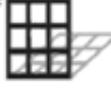
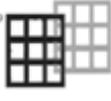
La geometria varia al variare del gruppo di trasformazioni. Se ci limitiamo alle trasformazioni lineari, cioè a quelle che trasformano una retta in una retta, otteniamo:

- la **geometria euclidea**
- la **geometria elementare**
- la **geometria affine**
- la **geometria proiettiva**

La geometria proiettiva è la più generale perché ha un invariante comune a tutte le altre. Se poi si impone la condizione di mantenere il parallelismo si ottiene un sottoinsieme che costituisce la geometria affine, se ancora si impone di mantenere il rapporto fra segmenti corrispondenti, si ottiene un sottoinsieme della geometria affine che costituisce la geometria elementare e finalmente, se si impone al rapporto costante di segmenti corrispondenti di assumere il valore 1, si ottiene un nuovo sottoinsieme che è la geometria euclidea. Il procedimento si può invertire.



Proprietà invarianti delle trasformazioni geometriche

SORGENTE LUMINOSA	POSIZIONE DEL PIANO	TRASFORMAZIONE GEOMETRICA	RAFFIGURAZIONE
Raggi luminosi emessi da una sorgente artificiale posta ad una distanza finita	Ombra di una figura piana verticale proiettata su di un piano orizzontale	PROIETTIVITÀ Il quadrato e la sua ombra sono figure proiettive	
	Ombra di una figura piana verticale proiettata su di un piano parallelo	SIMILITUDINE Il quadrato e la sua ombra sono figure simili	
Raggi luminosi emessi da una sorgente naturale ipotizzata posta ad una distanza infinita	Ombra di una figura piana verticale proiettata su di un piano orizzontale	AFFINITÀ Il quadrato e la sua ombra sono figure affini	
	Ombra di una figura piana verticale proiettata su di un piano parallelo	ISOMETRIA Il quadrato e la sua ombra sono figure uguali	

Trasformazione geometriche al variare della posizione del piano

		CENTRO	
		Proprio	Improprio
ASSE	Proprio	PROIETTIVITÀ	AFFINITÀ
	Improprio	OMOTETIA	TRASLAZIONE

Trasformazione geometriche al variare del centro e dell'asse omologico

Prima di proseguire con il descrivere le caratteristiche principali di ogni trasformazione, è opportuno dare alcune definizioni utili per meglio comprendere quanto di seguito esposto.

Una **trasformazione geometrica** del piano in sé è una funzione biunivoca $t: \pi \rightarrow \pi$ che a ogni punto del piano associa un punto del piano. Essendo biunivoca, una trasformazione t è anche invertibile. L'inversa è anch'essa una trasformazione. L'inversa di una trasformazione è quella trasformazione che, composta con la prima dà l'identità I , cioè: $t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = I$

Una trasformazione è detta involutoria, se coincide con la sua inversa.

Un punto è detto unito per una trasformazione t se $t(P) = P$, cioè se ha se stesso come immagine.

Una retta è unita se, preso un punto P appartenente alla retta, il punto $t(P) = Q$ appartiene alla retta. Q può essere diverso da P , in tal caso la retta è unita ma non costituita da punti uniti; se $Q = P$ per ogni punto P allora la retta è unita e formata da punti uniti.

Una figura F è unita per una trasformazione t se mediante t viene portata in se stessa cioè se $t(F) = F$.

Se nel piano è definito un sistema cartesiano ortogonale Oxy , una trasformazione geometrica associa al punto $P(x,y)$ il punto $P'(x',y')$.

Le coordinate di P' si determinano mediante le equazioni della trasformazione $t\{x' = f(x,y); y' = g(x,y)\}$ dove con $f(x,y)$ e $g(x,y)$ s'intendono espressioni lineari che contengono x e y .

$f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono espressioni lineari, poiché le trasformazioni portano rette in rette.

Formalmente, date due funzioni $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ definiamo la **funzione composta** $g \circ f: X \rightarrow Z$ ponendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni x in X , cioè applicando prima f ad x e quindi applicando g al risultato $f(x)$.

Date due trasformazioni f e g la loro **composizione** $f \circ g$ (oppure $g \circ f$) è ancora una trasformazione. La composizione di trasformazioni non gode in generale della proprietà commutativa quindi $f \circ g \neq g \circ f$.

In generale si dice gruppo un insieme dotato di un'operazione che gode delle seguenti proprietà:

- l'operazione è associativa;
- esiste un particolare elemento, l'identità, che composto con tutti gli altri sia a destra sia a sinistra li lascia invariati;

- ogni elemento è dotato di un inverso ossia di un elemento che composto con esso sia a destra sia a sinistra dà come risultato l'identità.

La proprietà commutativa dell'operazione non è richiesta e in molti dei gruppi più interessanti effettivamente non vale.

2.2 Proiettività

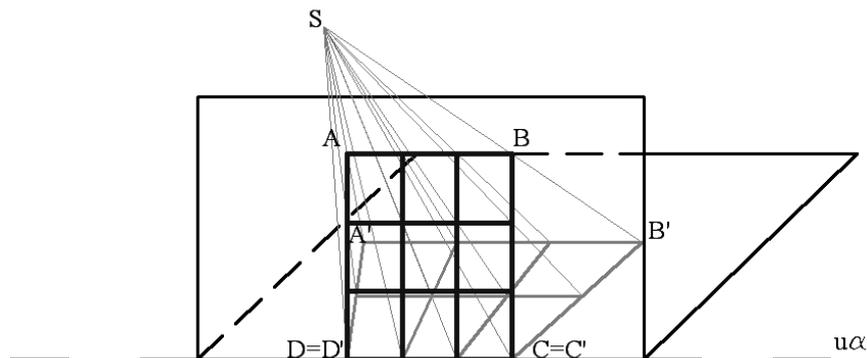
Un esempio di trasformazione proiettiva sono le ombre prodotte da raggi provenienti da una sorgente luminosa puntiforme (raggi luminosi incidenti) su piani incidenti.

L'insieme delle proiettività del piano π è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni del piano.

La trasformazione proiettiva gode delle seguenti proprietà:

- è una trasformazione lineare, cioè a rette corrispondono rette (proprietà invariante);
- non si conserva la forma;
- la lunghezza dei segmenti nella trasformata cambia e non si conserva un rapporto costante;
- l'ampiezza degli angoli cambia;
- non si conserva il parallelismo.

È facile notare, nell'ambito della geometria descrittiva, come la trasformazione proiettiva che fa corrispondere in modo biunivoco la figura $ABCD$ con $A'B'C'D'$, altro non è che un'omologia piana generale con asse e centro proprio.



Proiettività: omologia piana generale

Difatti sono soddisfatti i principi fondamentali dell'omologia piana: coppie di rette corrispondenti si incontrano sull'asse dell'omologia (data dall'intersezione del piano α su cui insiste la figura $ABCD$ con il piano α' su cui si proietta la figura trasformandosi in $A'B'C'D'$); coppie di punti corrispondenti sono allineati con il centro dell'omologia. $\omega = (u_\omega, S, A, A')$.

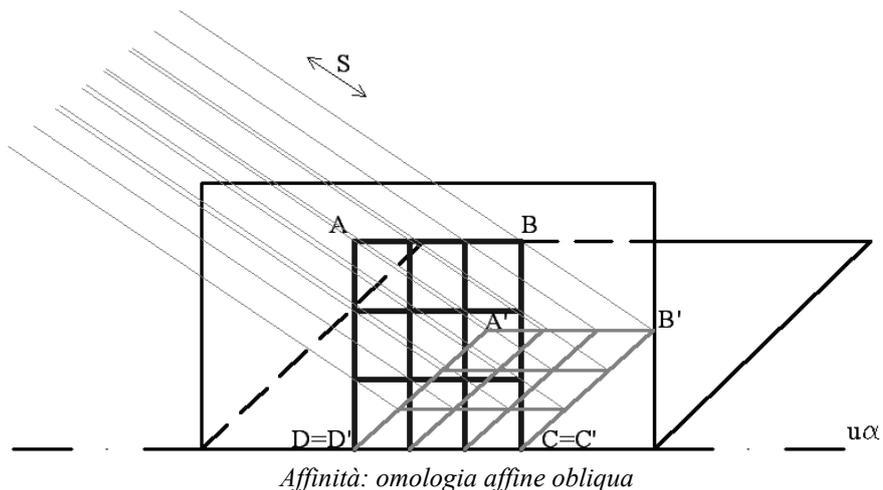
2.3 Affinità

Un esempio di trasformazione affine sono le ombre prodotte da raggi provenienti da una sorgente solare, considerata posta a una distanza infinita, (fascio di raggi luminosi paralleli) su piani incidenti.

L'insieme delle affinità del piano π è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni del piano.

La trasformazione affine gode delle seguenti proprietà:

- trasforma rette in rette;
- se tre punti P, Q, R sono allineati, i loro corrispondenti in un'affinità P', Q', R' sono anch'essi allineati;
- a rette parallele corrispondono rette parallele e a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conserva il rapporto fra segmenti paralleli (in particolare al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento trasformato).



Inoltre le trasformazioni affini formano un gruppo rispetto all'operazione di composizione, infatti:

- la composizione di due affinità è ancora un'affinità, restano infatti invariati sia l'allineamento dei punti, sia il parallelismo;
- la composizione è, come ogni composizione di trasformazioni, associativa;
- c'è l'elemento neutro, perché l'identità è una particolare affinità;
- ogni affinità ha una sua inversa: è infatti possibile sul piano cartesiano trovare l'equazione dell'inversa di una generica trasformazione affine.

In tal caso la corrispondenza biunivoca tra la figura $ABCD$ con $A'B'C'D'$ è un'omologia affine con asse e centro improprio. Infatti, coppie di punti corrispondenti sono allineati secondo una direzione S , ovvero si incontrano in un centro improprio. Nello specifico la direzione del centro improprio è orientata rispetto alla direzione dell'asse dell'omologia e per questo parleremo di affinità obliqua. $\omega = (u_\alpha, S^\infty, A, A')$.

2.4 Similitudini

Anche l'insieme delle similitudini del piano π è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni.

Una **similitudine** è un'applicazione (biunivoca e continua) f del piano in sé che conserva i rapporti tra le distanze; esiste cioè una costante k , strettamente positiva, tale che per ogni coppia di punti A e B si ha:

$$d(f(A), f(B)) = kd(A, B) \quad (k > 0)$$

Il numero reale positivo k viene chiamato rapporto della similitudine f .

Una similitudine gode delle seguenti proprietà:

- trasforma rette in rette;
- il rapporto tra segmenti corrispondenti si mantiene costante;
- trasforma angoli in angoli di uguale ampiezza, in particolare conserva il parallelismo e la perpendicolarità;
- il centro di similitudine è un punto unito;

- le similitudini mantengono la forma, cioè trasformano una figura geometrica in una figura simile a quella data.

Dalle proprietà di cui sopra possiamo dedurre che:

- la trasformazione identica è una similitudine di rapporto 1;
- ogni omotetia è un'applicazione biunivoca e quindi invertibile: l'inversa della omotetia f di centro C e rapporto k è una similitudine di centro C e rapporto $1/k$;
- le similitudini formano un gruppo: di nuovo è immediato il fatto che la composizione di due similitudini sia una similitudine (il cui rapporto è il prodotto dei due rapporti similitudine). Se f è una similitudine di rapporto k e g è una similitudine di rapporto h , la funzione $g \circ f$ è una similitudine di rapporto hk .

2.4.1 Costruzione del punto unito di una similitudine

Supponiamo che la similitudine diretta f sia assegnata mediante l'immagine di due punti $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$ e che non sia un'isometria; vogliamo determinare il punto fisso di f .

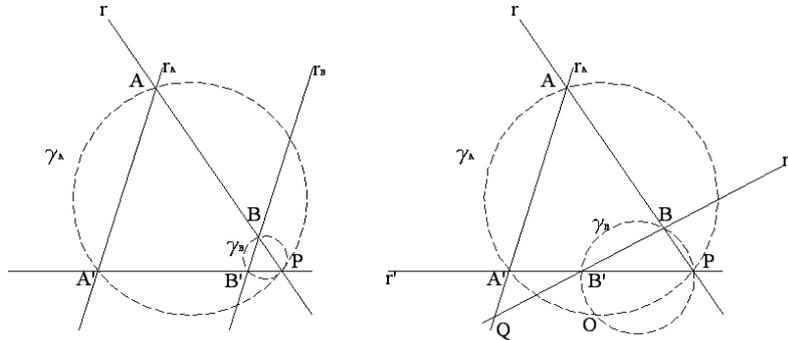
Supponiamo che i 4 punti A, B, A', B' siano a tre a tre non allineati; sia r la retta per A e B e r' la retta per A' e B' : se r e r' sono parallele, allora f è un'omotetia e il centro dell'omotetia è il punto Q di intersezione tra la retta r_A (passante per i punti A e A') e la retta r_B (passante per i punti B e B'); si noti che se r e r' sono parallele non potranno essere parallele anche le rette r_A e r_B , altrimenti sarebbe che $d(A, B) = d(A', B')$.

Se r e r' sono incidenti nel punto P , consideriamo le due circonferenze γ_A (per i punti P, A, A') e γ_B (per i punti P, B, B'): queste due circonferenze potranno essere tangenti in P o secanti nel punto P e in un altro punto O .

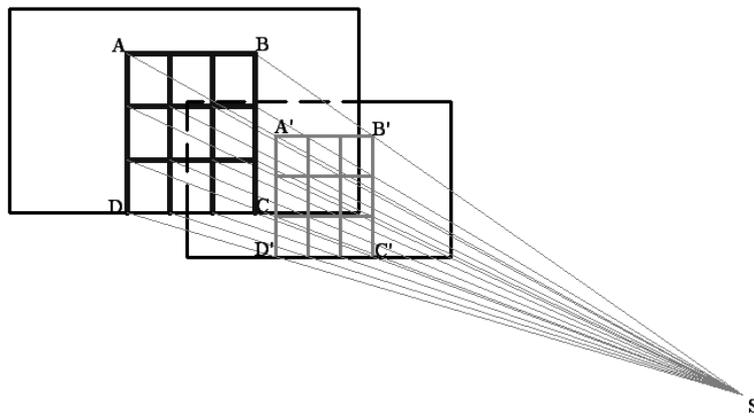
Nel primo caso, si verifica facilmente che le rette r_A e r_B sono parallele: quindi il punto fisso dell'omotetia f è P .

Nel secondo caso, le rette r_A e r_B sono incidenti e le circonferenze γ_A e γ_B sono secanti in P e in O : vogliamo dimostrare che O è il punto fisso dell'omotetia f . Infatti:

$$\begin{aligned} \angle BAO &= \angle PAO = \angle PA'O = \angle B'A'O, \\ \angle ABO &= \pi - \angle PBO = \pi - \angle PB'O = \angle A'B'O \end{aligned}$$



Individuazione del punto fisso di una similitudine



Similitudine: omotetia

Quindi i due triangoli ABO e $A'B'O$ sono direttamente simili e questo basta a garantire che $f(O)=O$.

Un esempio di similitudine sono le ombre prodotte da raggi provenienti da una sorgente luminosa puntiforme su piani paralleli.

In tal caso la corrispondenza biunivoca tra la figura $ABCD$ con $A'B'C'D'$ è un'omotetia con asse improprio e centro proprio. Infatti, coppie di rette corrispondenti sono parallele tra di loro ovvero si incontrano all'infinito questo perché il piano α su cui insiste la figura $ABCD$ e il piano α' sui cui si proietta la figura trasformandosi in $A'B'C'D'$ sono tra di loro paralleli. $\omega = (u^\infty, S, A, A')$.

2.5 Isometrie

Un'isometria (o movimento rigido) del piano è un'applicazione biunivoca f che preserva la distanza tra coppie di punti corrispondenti, ossia tale che: $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall (x, y) \in R^2$.

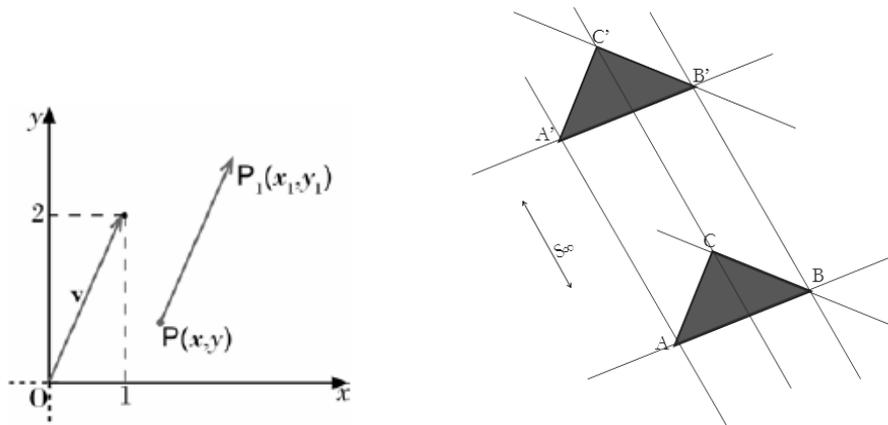
Dalla definizione seguono immediatamente alcune proprietà:

- è un'applicazione biunivoca e continua.
- è un'applicazione iniettiva (una trasformazione) perché se esistessero due punti P, Q con la stessa immagine, allora sarebbe $d(f(P), f(Q)) = 0$ e quindi anche $d(P, Q) = 0$, da cui segue $P = Q$.
- una isometria manda tutti i punti di una retta nei punti di un'altra retta. Di conseguenza in un'isometria: a punti allineati corrispondono punti allineati; se (A, A') e (B, B') sono due coppie di punti corrispondenti esse individuano due segmenti, AB e $A'B'$, che sono eguali; due triangoli corrispondenti sono eguali; due angoli corrispondenti sono eguali.

L'insieme delle isometrie del piano, con l'operazione di composizione (prodotto di due applicazioni) è un *gruppo* G , giacché:

- la composizione di due isometrie è un'isometria: se f, g sono isometrie, anche le applicazioni composte $f \circ g, g \circ f$ sono isometrie quindi appartiene ancora al gruppo G (proprietà di chiusura).
- per tutte le applicazioni g, f, d che appartengono a G vale $g \circ (f \circ d) = (g \circ f) \circ d$ (proprietà associativa);
- esiste un elemento e (identità o elemento neutro) tale che per ogni elemento g che appartiene a G si ha: $g \circ e = e \circ g = g$;
- per ogni elemento g che appartiene a G esiste un unico inverso, indicato con g^{-1} che appartiene a G tale che: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Un esempio di trasformazione isometrica sono le ombre prodotte da raggi provenienti da una sorgente solare (fascio di raggi luminosi paralleli) su piani paralleli. Diamo alcuni esempi di movimenti rigidi del piano e in seguito dimostreremo, attraverso il teorema di *Chasles*, che sono gli unici esistenti.



Traslazione del vettore v ; traslazione del triangolo ABC

La **traslazione** di un vettore v è l'applicazione τ_v che a ogni punto P del piano associa il punto $P' = \tau_v(P)$ tale che il segmento orientato di primo estremo P e secondo estremo P' rappresenti il vettore v .

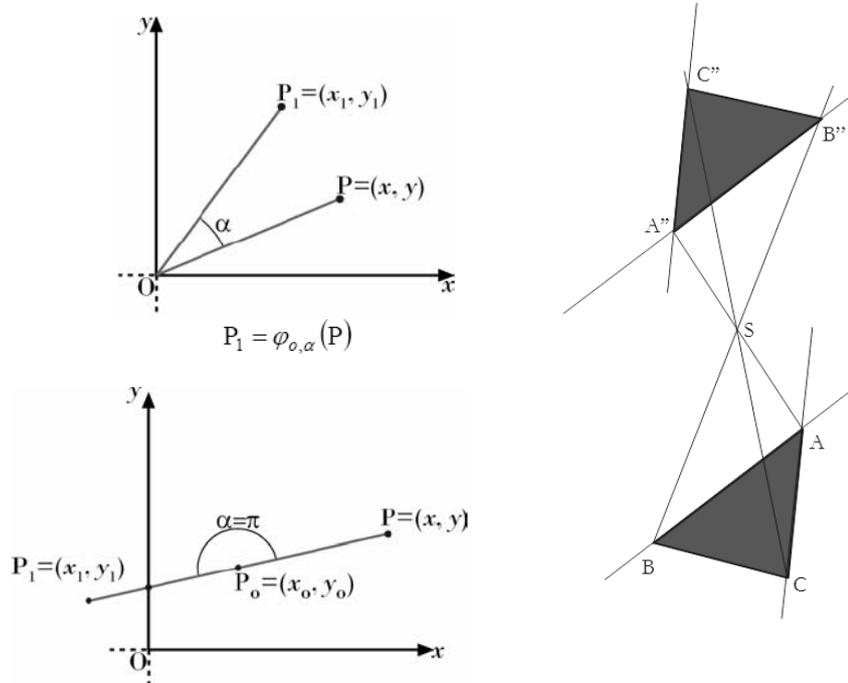
In geometria descrittiva, la traslazione è un'omologia con asse e centro improprio: $\omega = (u_\infty, S_\infty, A, A')$.

La **rotazione** di centro O e angolo α è l'applicazione $f_{o,\alpha}$ che ad ogni punto P del piano associa il punto $P' = f_{o,\alpha}(P)$ tale che $d(O, P) = d(O, P')$ e $\angle POP' = \alpha$.

Se la rotazione intorno al punto O è di 180° , $\rho_{o,\pi}$, parleremo di simmetria centrale cioè di un'isometria che fa corrispondere ad ogni punto P del piano un punto P' tale che il segmento PP' sia allineato con O e diviso da esso in due parti uguali.

In geometria descrittiva, la simmetria centrale si ha attraverso una relazione omotetica armonica con $\omega = (u_\infty, S, A, A')$. In tal caso accade che la distanza di entrambi i punti corrispondenti dall'asse è infinita e quindi uguale e che la distanza di A e A' dal centro dell'omologia deve risultare uguale e devono trovarsi opposti rispetto alla posizione dell'asse.

Di conseguenza il rapporto omologico $k = \frac{AA_o}{AS} = \frac{A'S}{A'A_o} = \frac{A'S}{AS} = -1$.



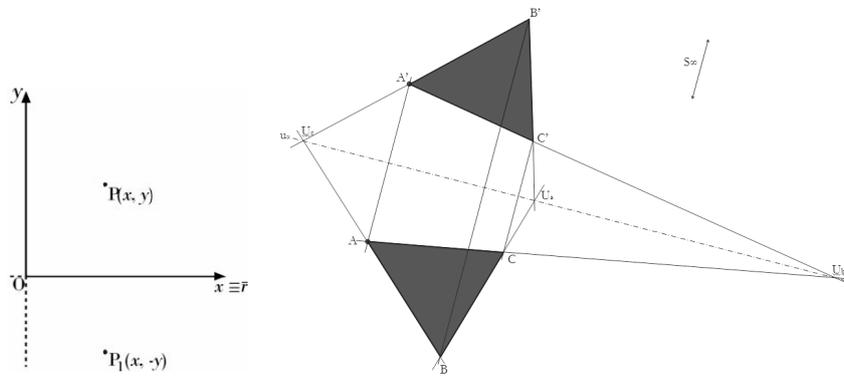
Rotazione del punto P di un angolo α ; rotazione attraverso un'omotetia armonica

A_o rappresenta il punto in cui la retta passante per il centro S e i punti A e A' interseca l'asse omologico.

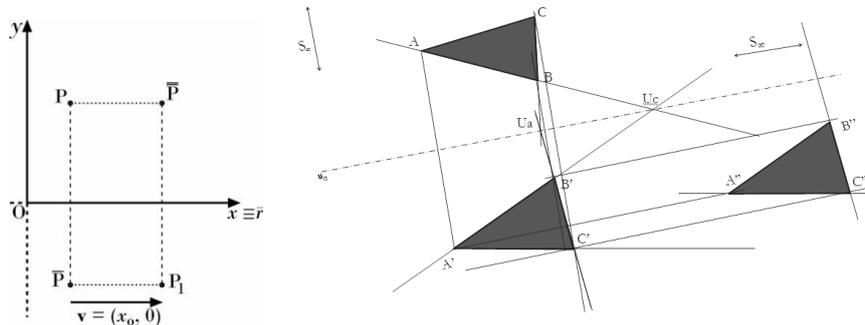
La **riflessione** rispetto a una retta r , detta anche simmetria assiale, è un'isometria che fa corrispondere a ogni punto P del piano un punto P' in modo che il segmento PP' sia perpendicolare all'asse e intersechi l'asse nel suo punto medio. La retta r viene definita asse di simmetria.

Tale isometria, in geometria descrittiva, si ottiene attraverso un'omologia affine ortogonale armonica $\omega = (u_\infty, S_\infty \perp u_\infty, A, A')$. Nello specifico, trattandosi di un'omologia affine, la distanza dei punti corrispondenti A e A' da S risulta infinita, essendo S un punto improprio. Invece la distanza di A e A' rispetto all'asse omologico (su cui è A_o) risulta essere uguale in valore assoluto e si trovano in posizioni opposte rispetto all'asse.

Di conseguenza il rapporto omologico $k = \frac{AA_o}{AS} \cdot \frac{A'S}{A'A_o} = \frac{AA_o}{A'A_o} = -1$.



Riflessione assiale del punto P; riflessione attraverso un'affinità ortogonale armonica



Glissoriflessione del punto P; glissoriflessione del triangolo ABC

La **glissoriflessione** con asse la retta r e vettore di traslazione v (parallelo a r) è la composizione di $\sigma_{r, v} = \sigma_r \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma_r$ della riflessione nella retta r e della traslazione del vettore v (il fatto che v sia parallelo a r garantisce che queste due applicazioni commutano).

La glissoriflessione anche in geometria descrittiva può sempre essere pensata come la composizione di un'omologia affine ortogonale armonica seguita da una traslazione.

Omologia		Trasformazione geometrica		Rapporto omologico
Omologia generale piana	$\omega = (u_\infty, S, A, A')$	Proiettività		
Omologia affine	$\omega = (u_\infty, S_\infty, A, A')$	Affinità		
Omotetia	$\omega = (u_\infty, S, A, A')$	Similitudine		
Traslazione	$\omega = (u_\infty, S_\infty, A, A')$	Isometria	Traslazione	
Omotetia armonica	$\omega = (u_\infty, S, A, A')$		Rotazione	$A'S/AS = -I$
Affinità ortogonale armonica	$\omega = (u_\infty, S_\infty \perp u_\infty, A, A')$		Riflessione	$AAo/A'Ao = -I$
Affinità ortogonale armonica + Traslazione	$\omega = (u_\infty, S_\infty \perp u_\infty, A, A') + \omega = (u_\infty, S_\infty, A, A')$		Glissoriflessione	$AAo/A'Ao = -I$

Schema riassuntivo delle trasformazioni geometriche

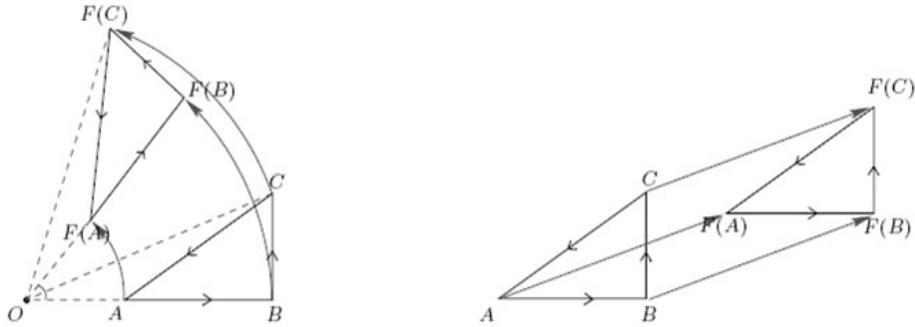
Da quanto sopra esposto, si hanno le seguenti proprietà:

- traslazioni, rotazioni, riflessioni, glissoriflessioni sono applicazioni biunivoche;
- le traslazioni (diverse dall'identità) e le glissoriflessioni non hanno punti uniti;
- le rotazioni (diverse dalle identità) hanno un unico punto fisso (il centro di rotazione);
- le riflessioni hanno una retta di punti fissi (l'asse di riflessione: P è fisso per σ_r , se è solo se P appartiene a r).

Quindi, una figura trasformata da un'isometria non cambia né forma né dimensioni, ma solo la sua posizione nel piano.

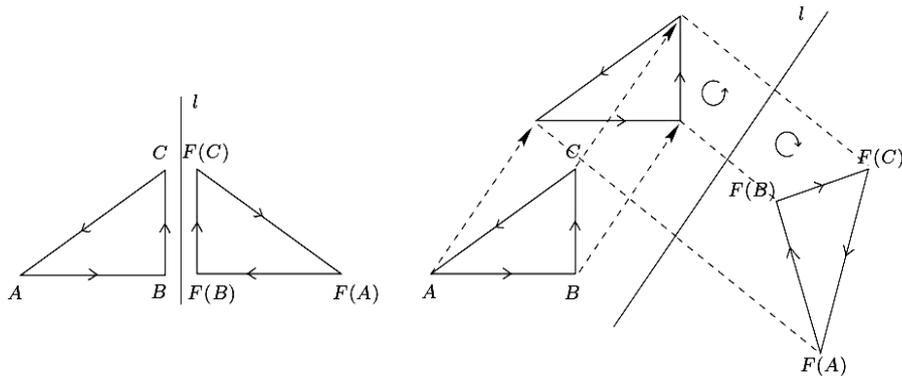
Denotando con Γ l'insieme dei movimenti rigidi del piano, tali isometrie si dividono in due tipi differenti.

Sia dato un triangolo qualsiasi ABC di angoli α , β , e γ . Un movimento rigido $F \in \Gamma$ si dice del primo tipo (o pari) se F è una traslazione o una rotazione e tale che $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$ conserva il verso di percorrenza del triangolo.



Trasformazioni pari

Sia dato un triangolo qualsiasi ABC di angoli $\alpha, \beta, e \gamma$. Un movimento rigido $F \in \Gamma$ si dice del secondo tipo (o dispari) se F è una riflessione o una glissoriflessione tale che $F(A), F(B), F(C)$ cambia il verso di percorrenza del triangolo.



Trasformazioni dispari

Le **isometrie pari** (o dirette) mantengono l'orientamento e si ottengono componendo un numero pari di riflessioni; esempi ne sono la traslazione, la rotazione e l'identità.

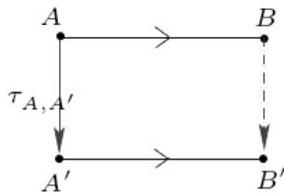
Le **isometrie dispari** (o inverse) cambiano l'orientamento e si ottengono componendo un numero dispari di riflessioni; esempi ne sono le riflessioni e le glissoriflessioni.

Osservazione: L'insieme delle isometrie pari è un gruppo.

È facile verificare che se AB e $A'B'$ sono due segmenti distinti del piano, con $|AB|=|A'B'|$ allora esiste $F \in \Gamma$ che è una traslazione o una rotazione tale che $F(A) = A'$ e $F(B) = B'$. F porta AB su $A'B'$.

Sia $AB \parallel A'B'$; ho due casi:

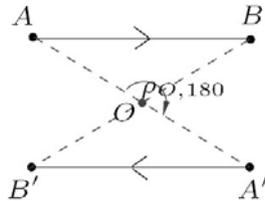
I segmenti sono equiorientati, allora per andare da AB a $A'B'$ è sufficiente una traslazione:



$$\begin{aligned} A &\rightarrow \tau_{A,A'}(A) = A' \\ B &\rightarrow \tau_{A,A'}(B) = B' \text{ si ha che:} \\ |AB| &= |\tau(A)\tau(B)| = |A'B'| \end{aligned}$$

Traslazione

I segmenti non sono equiorientati; sia O l'intersezione tra AA' e BB' , la rotazione di $\rho_{O,180^\circ}$ mi porta

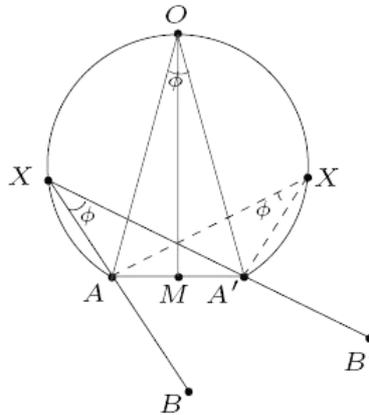


$$\begin{aligned} A &\rightarrow \rho_{O,180^\circ}(A) = A' \\ B &\rightarrow \rho_{O,180^\circ}(B) = B' \text{ si ha che} \\ |AB| &= |\rho_{O,180^\circ}(A)\rho_{O,180^\circ}(B)| = |A'B'| \end{aligned}$$

Rotazione

Sia invece $AB \not\parallel A'B'$

Sia ψ l'angolo tra AB e $A'B'$, e consideriamo il luogo dei punti X tale che l'angolo ψ è un arco di circonferenza (per tre punti, in tal caso A, X, A' , passa un'unica circonferenza). Sia M il punto medio del segmento AA' e sia O l'intersezione tra il cerchio e la perpendicolare ad AA' passante per M . $\rho_{O,\psi}$ porta AB su $A'B'$.



Trasformazione geometrica che porta AB su $A'B'$

Ugualmente, se AB e $A'B'$ sono due segmenti distinti del piano, con $|AB| = |A'B'|$ allora esiste $G \in \Gamma$ che è una riflessione o una glissoriflessione tale che $G(A) = A'$ e $G(B) = B'$. G porta AB su $A'B'$.

Sia $AB \not\parallel A'B'$

Consideriamo il punto medio M tra A e A' e trasliamo i due segmenti in M , rispetto a $\tau_{(v)}$ e $\tau_{(-v)}$ di vettore $v = AM$; otteniamo due segmenti coincidenti in M di angolo B_1MB_1' (dove $B_1 = \tau_{(v)}(B)$ e $B_1' = \tau_{(-v)}(B')$).

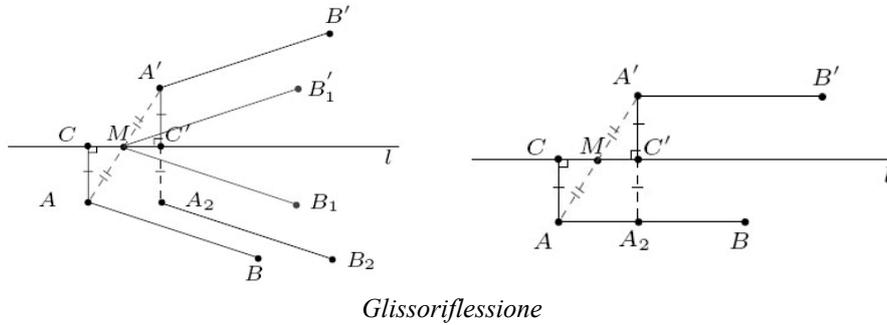
Sia l la bisettrice di tale angolo, siano C e C' rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e A' su l ; abbiamo che $|CA| = |C'A'|$ (essendo i triangoli ACM e $MA'C'$ uguali).

Dunque sotto la traslazione $\tau_{CC'}$, il segmento AB viene mandato nel segmento A_2B_2 , e successivamente, riflettendo quest'ultimo rispetto ad l , il segmento A_2B_2 va a coincidere con il segmento $A'B'$ (essendo $|C'A'| = |CA| = |A_2C'|$ e $A'A_2$ perpendicolare ad l).

Abbiamo così che la glissoriflessione $\gamma^{CC'}_l$ manda il segmento AB nel segmento $A'B'$.

Sia $AB \parallel A'B'$

Basta considerare la retta l passante per il punto medio di AA' e parallela ai segmenti AB e $A'B'$; procedendo come nel caso precedente, otteniamo così $\gamma^{CC'}_l(AB) = A'B'$.



Concludendo, possiamo quindi affermare che ogni movimento rigido del piano è (Teorema di Chasles):

- una traslazione
- una rotazione
- una riflessione
- una glissoriflessione

Riassumendo quanto sopra esposto, possiamo quindi dire che se F è un movimento rigido del piano, un'isometria, e A, B sono due punti del piano tale che $F(A) = A'$ e $F(B) = B'$, abbiamo che $|AB| = |F(A)F(B)| = |A'B'|$. Quindi, esisterà sempre una traslazione o rotazione e una glissoriflessione o riflessione che mandano A in A' e B in B' , una del primo e l'altra del secondo tipo. F coinciderà con una di queste.

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE			
	Punti fissi	Orientazione	Isometria
Traslazione	nessuno	conserva	pari
Rotazione	uno	conserva	pari
Riflessione	infiniti	inverte	dispari
Glissoriflessione	nessuno	inverte	dispari

Classificazione delle isometrie

Di seguito vedremo come le riflessioni generano, per composizione, tutte le altre isometrie del piano.

Sia f un'isometria composizione di due riflessioni, $f = \sigma_r \circ \sigma_s$; se le rette r e s sono parallele, allora f è una traslazione (di un vettore v ortogonale a r e s , di lunghezza doppia della distanza tra r e s , e orientato in modo tale che, se si sceglie il primo estremo di v su s , il secondo estremo appartenga al semipiano individuato da r che non contiene s); se le rette r e s sono incidenti, allora f è una rotazione (di centro il punto O comune a r e s , e di angolo α doppio dell'angolo orientato, individuato da s ed r).

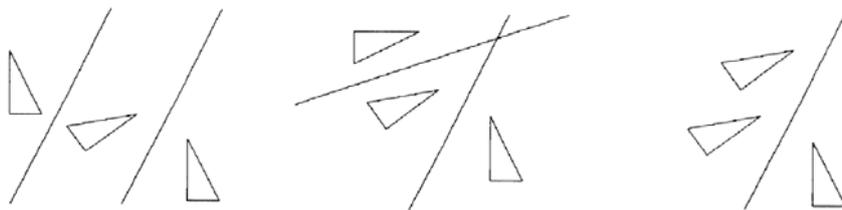
Sia ora f un'isometria, senza punti fissi, composizione di tre riflessioni; allora f è una glissoriflessione.

È facile osservare che se un'isometria:

- ha tre punti fissi non allineati, allora è l'identità;
- ha due punti fissi A e B , e non è identica, allora è la riflessione che ha per asse la retta per A e B ;
- ha un punto fisso, allora è una rotazione, o composizione di al più due riflessioni con assi incidenti;
- non ha punti fissi, è una traslazione o composizione di al più due riflessioni con assi paralleli, oppure è una glisso riflessione.

Riassumendo, si è ottenuta una classificazione delle isometrie in base ai punti fissi:

- se $f (\neq id)$ è diretta e ha un punto fisso, allora f è una rotazione;
- se $f (\neq id)$ è diretta e non ha punti fissi, allora f è una traslazione;
- se f è inversa e ha punti fissi, allora f è una riflessione;
- se f è inversa e non ha punti fissi, allora f è una glissoriflessione.



Composizioni di isometrie

Quindi, ogni traslazione τ_v , si può vedere come la composizione di due riflessioni in due rette parallele (e ortogonali al vettore v) e ogni rotazione si può vedere come la composizione di due riflessioni in due rette incidenti (nel centro C di rotazione).

Si può osservare che volendo scomporre una traslazione τ_v nella composizione delle riflessioni in due rette, possiamo scegliere arbitrariamente una delle due rette, purché sia ortogonale al vettore v ; così come volendo scomporre una rotazione di centro C nella composizione delle riflessioni in due rette, possiamo scegliere arbitrariamente una delle due rette, purché passi per C .

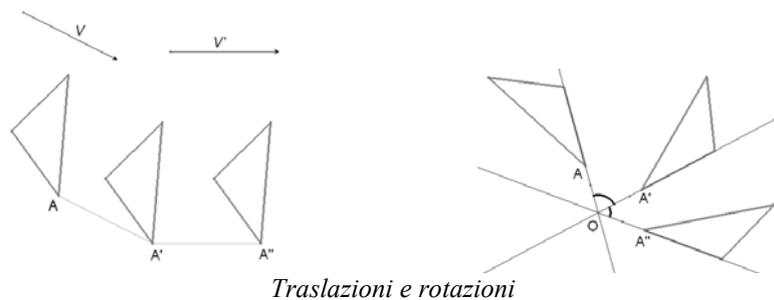
La composizione d'isometrie è un gruppo.

Considerando le singole isometrie, abbiamo dei gruppi solo per:

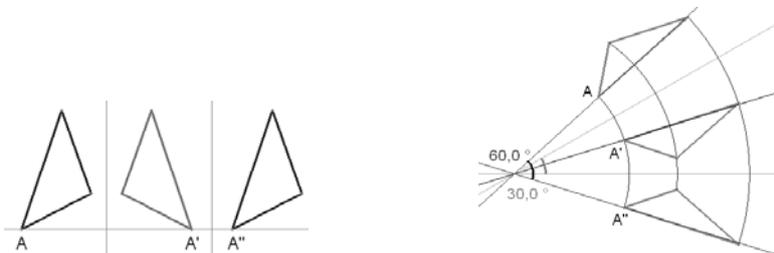
- le traslazioni e le rotazioni del piano aventi lo stesso centro.

Questo non accade per le simmetrie assiali perché il gruppo non è chiuso rispetto all'operazione di composizione di trasformazioni. Infatti:

- la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore doppio rispetto alla distanza fra le due rette;
- la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione d'angolo doppio rispetto all'angolo d'incidenza.



Traslazioni e rotazioni



Composizioni di riflessioni assiali

ESEMPI DI ISOMETRIE COMPOSTE	
Rotazione di centro A e angolo α + Traslazione di δ	Rotazione di centro B e angolo α
Rotazione di centro A e angolo α + Rotazione di centro A e angolo β	Rotazione di centro A e angolo $\alpha+\beta$
Rotazione di centro A e angolo α + Rotazione di centro B e angolo β	Rotazione di centro C e angolo $\alpha+\beta$
Più riflessioni con assi incidenti in un punto O o tra loro paralleli	Riflessione
Più riflessioni con assi né incidenti in un punto O né tra loro paralleli	Glissoriflessione

Isometrie composte

Componendo due simmetrie centrali di centri C_1 e C_2 si ottiene una traslazione di vettore doppio della congiungente i due centri.

L'insieme delle rotazioni del piano non è un gruppo, poiché la composta di due rotazioni aventi angoli α_1 e α_2 , centri O e O' e, la somma degli angoli $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$, è una traslazione.

3. GRUPPI DI SIMMETRIA

3.1 Cenni storici

La caratterizzazione della simmetria in termini matematici fu introdotta nei primi decenni dell'Ottocento dal geniale e precoce matematico francese Evariste Galois (1811-1832).

Il 4 giugno 1832 "Le Precursor" scriveva:

Nella giornata di ieri, un deplorabile duello ha privato le scienze esatte di un giovane in cui si riponevano le più alte speranze, la cui precocità fu negli tempi adombrata dalla politica. Evariste Galois [...] si battè con uno dei suoi vecchi amici, giovane quanto lui, come lui membro della Società degli Amici del popolo, come lui assolto in un processo politico. Si dice che la causa del combattimento fosse di natura amorosa. Scelsero di sfidarsi alla pistola, ma per via dell'antica amicizia non ebbero cuore di guardarsi e mirare, dunque si affidarono al cieco fato. A distanza ravvicinata, scelsero una pistola e fecero fuoco. Si scoprì che solo una delle armi era carica. Galois fu trapassato da parte a parte da una pallottola del suo rivale. Portato all'Hopital Cochin. Morì due ore dopo. Aveva 22 anni.

L'uomo che stava per cambiare il corso della matematica e della scienza, Evariste Galois non morì due ore dopo, ma il giorno dopo, il 31 maggio 1832, a causa della peritonite. Rifiutò l'estrema unzione e fu sepolto il 2 giugno nella fossa comune del cimitero di Montparnasse.

La sua vita è una delle più teatrali e tragiche nella storia della disciplina. Evariste Galois, rivoluzionario e ossessionato dalla matematica lascia una eredità scientifica di portata sconvolgente.

Il suo merito è stato quello di inventare un linguaggio matematico per descrivere la simmetria nelle strutture, come vedremo non solo matematiche, e calcolarne le conseguenze, dando origine al concetto di "gruppo". Galois prese il nobile e antico strumento della matematica e lo reinventò per rendere possibile lo studio della simmetria. Non più scienza degli oggetti ma scienza delle trasformazioni.

Con Galois, nasce una nuova vasta branca della disciplina, una sorta di "analisi della simmetria" che da quel momento avrebbe colonizzato ogni ambiente.

Il concetto di **gruppo**, introdotto da Galois allo scopo, consente per così dire di "misurare" il grado di simmetria.

La simmetria non intesa come un valore numerico o una forma geometrica, ma un tipo particolare di trasformazione, cioè un modo di spostare le cose. Se un oggetto ha ancora lo stesso aspetto dopo una certa trasformazione, allora siamo in presenza di una simmetria.

Le simmetrie sono quindi permutazioni, cioè modi per risistemare gli oggetti: non sono le disposizioni in sé, ma le regole applicate per le disposizioni.

3.2 Le permutazioni

Permutare n oggetti significa cambiare l'ordine in cui tali oggetti sono disposti. Si considerino tre oggetti a , b e g : si vuole scrivere, per esempio, la permutazione che pone b al posto di a , g al posto di b e a al posto di g . Si sostituiscano le tre lettere con i numeri 1, 2, e 3 e nello specifico 1 sta per a , 2 sta per b e 3 per g .

La permutazione precedente può essere individuata mediante la tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima riga contiene gli elementi 1, 2, 3, mentre nella seconda riga si inseriscono, sotto a ciascun elemento della prima riga, quello che lo sostituisce: sotto 1 c'è 2 perché 1 rappresenta a , che viene sostituito con b rappresentato dal 2. Questa tabellina prende il nome di p_1 : un passo avanti. Le due tabelline:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

rappresentano rispettivamente la permutazione che non muove nulla, detta permutazione identica o **identità** e la permutazione che lascia fermo 3 e scambia tra loro 1 e 2, detta **scambio 1-2**.

L'elenco completo delle permutazioni di tre elementi è formato da sei elementi: e , s_{23} , s_{13} , s_{12} , p_1 , p_2 .

Scegliendo, infatti, tra i tre elementi quello con cui scambiare 1, si lasciano ancora due possibili opzioni per l'elemento 2; a questo punto 3 verrà scambiato con l'unico elemento non ancora permutato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Più in generale il numero di permutazioni di n oggetti è:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

che si indica con il simbolo $n!$ e si legge n fattoriale.

Eseguendo due permutazioni una dopo l'altra, ad esempio, prima p_1 e poi s_{12} , si ottiene s_{23} , infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e questa operazione, nell'insieme di tutte le permutazioni di tre elementi, si chiama composizione oppure prodotto.

La permutazione identica è l'identità rispetto all'operazione di composizione, perché composta con ogni altra la lascia invariata. Inoltre ogni permutazione ha la permutazione inversa, ossia una permutazione che composta con se stessa dà la permutazione identica.

L'insieme delle permutazioni di tre elementi dotato di questa operazione costituisce un gruppo che si chiama gruppo simmetrico su tre elementi e si indica con S_3 .

Allo stesso modo è possibile identificare i gruppi simmetrici S_4 , S_5 , . . . S_n su 4, 5, . . . n elementi.

La permutazione identica su n elementi è l'identità di S_n ; per ogni operazione, la permutazione inversa si ottiene scambiando la riga superiore con l'inferiore (e se si preferisce, riordinando le colonne in modo da riottenere la prima riga scritta in ordine crescente).

La proprietà commutativa non è richiesta per la definizione di gruppo, infatti, è possibile notare che il risultato che si ottiene dalla composizione di $p_1 \circ s_{12} = s_{23}$ è differente da quello che si ha attraverso l'operazione $s_{12} \circ p_1 = s_{13}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Invece che un intero gruppo di permutazioni, è possibile individuare solo la parte che soddisfi le condizioni necessarie per essere un gruppo: in tal caso si avrà un sottogruppo.

Per quanto detto, ad esempio l'identità e , p_1 e p_2 formano un sottogruppo di S_3 . Invece l'identità e , insieme con s_{12} , s_{13} e s_{23} non formano un sottogruppo di S_3 . Se, infatti, componiamo s_{12} e s_{13} otteniamo p_1 che non è uno degli elementi elencati. Quanto specificato può anche dedursi considerando che G è un gruppo con un numero finito n di elementi, allora il numero di elementi di ogni sottogruppo H di G sarà un divisore di n (Teorema di Lagrange). Quindi nessun sottogruppo di S_3 può avere quattro elementi, non essendo 4 un divisore di 6.

Di seguito si mostrerà come determinate permutazioni corrispondono a simmetrie di figure geometriche.

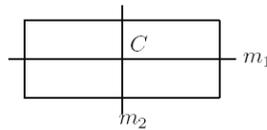
3.3 Simmetrie di figure geometriche piane

Da quanto esposto nel precedente capitolo, è possibile quindi dire che un'isometria è un movimento rigido del piano che manda una figura in se stessa. Ora si può aggiungere che lo strumento matematico che misura la simmetria di una figura è il gruppo di simmetria: se consideriamo una figura F , il gruppo di simmetria di F contiene tutte le isometrie del piano che lasciano invariata la figura F . L'insieme di tutte le simmetrie di F è un gruppo.

Per avere un'idea più chiara, andiamo a esaminare le simmetrie di alcune figure geometriche.

3.3.1 Le simmetrie del rettangolo

L'insieme delle simmetrie di un rettangolo è costituito dalle riflessioni rispetto alle due rette m_1 e m_2 passanti per i punti medi dei lati e perpendicolari tra loro (si indichi la simmetria con lo stesso simbolo della retta), da una rotazione di 180° intorno al loro punto di intersezione C (simbolo r) e dall'operazione identità (simbolo e), che corrisponde alla rotazione nulla o di 360° .



Simmetrie del rettangolo

Componendo due qualsiasi di queste simmetrie, ossia applicandole in successione, si ha come risultato una simmetria ancora appartenente all'insieme, come si può osservare dalla seguente tabella:

\square	e	$m1$	$m2$	r
e	e	$m1$	$m2$	r
$m1$	$m1$	e	r	$m2$
$m2$	$m2$	r	e	$m1$
r	r	$m2$	$m1$	e

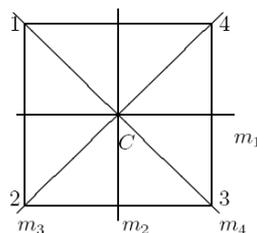
Composizioni delle simmetrie di un rettangolo

La composizione è quindi un'operazione nell'insieme delle simmetrie del rettangolo, per cui sono valide le proprietà associative e commutative; ed esistono inoltre l'elemento neutro (identità) e l'inverso per ogni elemento dell'insieme.

L'insieme delle simmetrie del rettangolo è dunque un gruppo commutativo S_4 .

3.3.2 Le simmetrie del quadrato

È un gruppo anche l'insieme delle simmetrie che mutano in sé un quadrato, costituito dalle tre rotazioni intorno al centro, rispettivamente di 90° , 180° e 270° , dall'identità e dalle riflessioni rispetto alle due rette passanti per i punti medi dei lati e rispetto alle due rette delle diagonali.



Simmetrie del quadrato

Tale gruppo di simmetria non è però commutativo, infatti, cambiando l'ordine di applicazione di due simmetrie, si possono ottenere due risultati differenti. Per vedere in modo più semplice l'azione delle simmetrie, si identificano i vertici del quadrato con i numeri da 1 a 4 come in figura; ogni simmetria può allora essere descritta come una permutazione.

Per esempio, una rotazione antioraria di 90° e una riflessione rispetto alla retta $m1$, equivalgono alle permutazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Eseguendo la rotazione antioraria di 90° seguita dalla riflessione rispetto a $m1$, si ottiene come risultato una riflessione rispetto alla retta $m4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

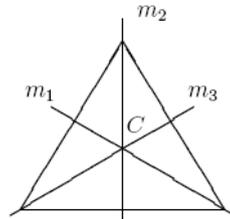
La riflessione rispetto a $m1$, seguita dalla rotazione antioraria di 90° , equivale invece ad una riflessione rispetto alla retta $m3$ la permutazione risultato in questo caso è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Il gruppo delle simmetrie del quadrato è pertanto un sottogruppo di ordine 8 del gruppo simmetrico S_4 . Notiamo che, coerentemente col Teorema di Lagrange, 8 è un divisore di 24.

3.3.3 Le simmetrie di un triangolo equilatero

Anche l'insieme delle simmetrie che mutano in sé un triangolo equilatero è un gruppo non commutativo. Esso è costituito dalle tre riflessioni rispetto ai tre assi di simmetria, dalle due rotazioni intorno al baricentro, rispettivamente di 120° e 240° e dall'identità.



Simmetrie del triangolo

Anche in questo caso, etichettando i vertici del triangolo con i numeri 1, 2 e 3, le sue simmetrie corrispondono a permutazioni. Poiché il triangolo equilatero ammette 6 simmetrie distinte, il suo gruppo delle simmetrie coincide con l'intero gruppo S_3 .

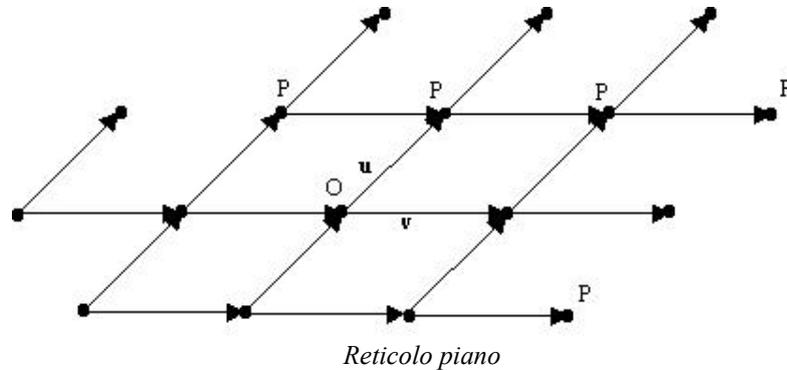
Questi e altri poligoni regolari, diventano così le figure di base da iterare, in funzione delle proprie simmetrie, secondo un andamento lineare oppure piano su una struttura modulare, dando origine al motivo ornamentale.

Le strutture modulari a sviluppo piano trovano il principio ordinatore nella tassellatura, ripartizione continua della superficie attraverso l'individuazione di reticoli, reti geometriche di base generate da un insieme di linee, generalmente rette in direzione orizzontale, verticale o inclinata, che si intersecano secondo un certo passo. I reticoli geometrici più diffusi hanno maglia isometrica, restituendo trame costruite mediante opportune traslazioni di poligoni regolari la cui peculiarità risiede nella proprietà geometrica di coprire interamente una superficie piana senza sovrapposizioni e lacune; si genera così, una configurazione a tasselli regolari in virtù del fatto che attorno a ogni punto d'intersezione della maglia si compone un certo numero di poligoni regolari tale che la somma dei rispettivi angoli al vertice è pari all'angolo giro.

La configurazione geometrica del motivo e il suo trattamento formale (cromatico o alternanza di chiaro-scuro) definiscono poi la trama del sistema reticolare (pattern).

3.4 Classificazione dei reticoli piani

Un reticolo è un insieme di punti del piano "indotto" dal gruppo generato da due traslazioni associate a vettori indipendenti.



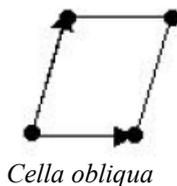
Dunque ogni punto P del reticolo piano è ottenibile a partire da un punto O , fissato a piacere, dello stesso reticolo, mediante traslazioni successive associate ai vettori τ_1 e τ_2 . I punti di un reticolo sono detti nodi del reticolo.

Le simmetrie di un reticolo piano dipendono dalla forma del parallelogramma di base, o cella elementare.

Esistono cinque possibili tipi di simmetrie per un reticolo in relazione a cinque forme di celle elementari diverse. Quattro di queste celle sono dette primitive, poiché non contengono nodi al loro interno (e vengono denotate dalla lettera p), mentre la rimanente viene detta centrata, poiché dotata di un nodo nel suo baricentro (e viene adottata la lettera c).

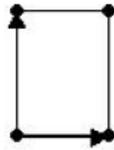
Tenendo presente che per simmetria di rotazione di ordine n , in riferimento a uno specifico punto, si intende una rotazione di angolo pari a $360^\circ/n$ (180° , 120° , 90° , 72° , 60° , ecc.), se τ_1 e τ_2 rappresentano i vettori generatori del reticolo, tali celle sono:

- **Cella obliqua** (a forma di parallelogramma, $|\tau_1| \neq |\tau_2|$);
Il reticolo corrispondente si dice obliquo e presenta solamente simmetrie di traslazione e simmetrie di rotazione di ordine 1 e 2.



- **Cella rettangolare** (τ_1 ortogonale τ_2 , $|\tau_1| \neq |\tau_2|$);

Il reticolo si dice rettangolare e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2 e riflessioni.



Cella rettangolare

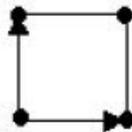
- **Cella rettangolare centrata** (il triangolo di lati τ_1 e τ_2 è isoscele, $|\tau_1| \neq |\tau_2|$). Il reticolo presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2, riflessioni e glissoriflessioni.



Cella rettangolare centrata

- **Cella quadrata** (τ_1 ortogonale τ_2 , $|\tau_1| = |\tau_2|$);

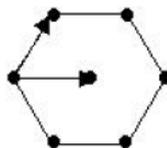
Il reticolo si dice quadrato e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2 e 4 e riflessioni.



Cella quadrata

- **Cella esagonale** (rombo con angoli di 120° e 60° , $|\tau_1| = |\tau_2|$);

Il reticolo si dice esagonale e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2, 3 e 6, riflessioni e glissoriflessioni.



Cella esagonale

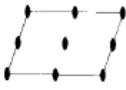
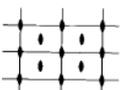
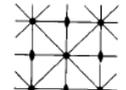
Oltre ai punti di rotazione, i reticoli possono ammettere assi di riflessione e/o glissoriflessione.

L'asse di riflessione è una retta m rispetto alla quale per ogni nodo del reticolo esiste lo speculare rispetto a m .

L'asse di glissoriflessione, invece, è una retta g rispetto alla quale per ogni nodo del reticolo esiste lo speculare traslato di metà periodo d'identità dei filari paralleli alla retta g .

Di seguito sono elencate le principali caratteristiche di un reticolo:

- Ogni reticolo ammette infiniti assi di traslazione: ogni retta che passa per due nodi qualsiasi del reticolo è, infatti, un possibile asse di traslazione.
- Qualunque asse di traslazione è detto filare del reticolo e la minima distanza tra due nodi lungo un filare è detto periodo di identità.
- In un reticolo tutti i filari tra loro paralleli hanno lo stesso periodo di identità.
- Dato un reticolo, due punti del piano sono detti equivalenti rispetto al reticolo se possono essere ottenuti l'uno dall'altro per traslazione parallela a un filare del reticolo e la loro distanza è un multiplo del periodo di identità del filare.
- Un reticolo può possedere anche simmetrie per rotazione. Gli angoli γ delle rotazioni che sono simmetrie di un reticolo ammettono sempre multipli interi $n\gamma$ coincidenti con multipli interi dell'angolo giro.
- Ciascun nodo del reticolo, o punto medio dei lati, o baricentro di qualunque maglia è il centro di una simmetria rotazionale di ordine 2. Ciò deriva dal fatto che ciascun nodo del reticolo è sempre affiancato, in ogni filare che lo contenga, da due nodi equidistanti.
- Se un punto P del piano è centro di una simmetria rotazionale di ordine n compatibile con un reticolo, allora ogni punto equivalente rispetto al reticolo è anch'esso centro di una simmetria rotazionale di ordine n .
- Le combinazioni possibili dei vettori di traslazione con gli altri elementi di simmetria possono generare gruppi discreti di isometrie piane.

Reticolo	Cella	Parametri	
obliquo P	parallelogrammo	$\tau_1 \neq \tau_2; \gamma \neq 90^\circ$.	
retto P	rettangolo	$\tau_1 \neq \tau_2; \gamma = 90^\circ$.	
retto C	rettangolo	$\tau_1 \neq \tau_2; \gamma = 90^\circ$	
quadrato P	quadrato	$\tau_1 = \tau_2; \gamma = 90^\circ$	
esagonale P	rombo	$\tau_1 = \tau_2; \gamma = 120^\circ$	

Classificazioni dei reticoli piani

In generale un gruppo di movimenti si dice discreto se per ogni punto, in una regione finita, esiste solo un numero finito di punti equivalenti rispetto al gruppo.

E nello specifico si ha il gruppo dei fregi quando la traslazione segue una sola direzione indefinitamente in entrambi i versi e il gruppo dei mosaici quando le traslazioni seguono due direzioni indipendenti, non parallele, per riempire ordinatamente tutto il piano.

I criteri di classificazione in entrambi i casi tengono conto della compatibilità fra le simmetrie locali dell'elemento di simmetria, ovvero del modulo, e la simmetria globale della figura piana, che permette di individuare la forma dei possibili reticoli piani lungo i quali il modulo può muoversi per traslazione (restrizione cristallografica).

Infine, se non sono presenti nella trasformazione né traslazioni né glisso riflessioni, ma solo rotazioni e/o riflessioni si ha il gruppo dei rosoni.

3.5 Gruppo dei mosaici

Si definisce, dunque, mosaico, un gruppo infinito di motivi ripetuti che contiene due traslazioni indipendenti. Esistono solo diciassette tipi di composizioni planari che corrispondono alle combinazioni dei cinque reticoli con gli elementi di simmetria 1, 2, 3, 4, 6, m , g (Teorema di Federov).

A ogni gruppo sarà associata una specifica notazione che sfrutta caratteri e numeri per indicare il tipo di cella unitaria del reticolo e le rispettive simmetrie.

Il primo simbolo è una lettera, p o c , che individua il tipo di cella del reticolo riferendosi rispettivamente a una cella primitiva o centrata; il secondo è un numero n che sta ad indicare l'ordine massimo del punto di rotazione associato al reticolo; il terzo, invece, denota una simmetria assiale normale e il suo simbolo è uno dei seguenti:

- m indica un asse di riflessione o di glissoriflessione o entrambi;
- g indica che non ci sono assi di riflessione ma esiste un'asse di glissoriflessione;
- 1 indica che non ci sono assi di simmetria.

Infine abbiamo un quarto carattere e anche per esso viene adottato uno dei tre simboli precedentemente descritti, a differenza, che denota un asse di simmetria posto ad un angolo $\alpha = 180^\circ$ se $n = 1$ oppure $n = 2$, $\alpha = 45^\circ$ se $n = 4$, $\alpha = 60^\circ$ se $n = 3$ oppure a 6.

Al reticolo obliquo primitivo è possibile associare soltanto punti di rotazione di ordine 1 e 2. Si ottengono così i gruppi spaziali indicati simbolicamente con $p1$ e $p2$ (dove in $p1$ è presente la sola operazione identità e quindi un punto materiale viene ripetuto soltanto dai vettori di traslazione del reticolo).

Al reticolo rettangolare, che può essere primitivo o centrato, è possibile associare riflessioni e glissoriflessioni. Si prendono dunque in esame le seguenti notazioni: pm , pg , cm , pmm , pmg , pgg , cmm .

Nel reticolo quadrato al punto di rotazione di ordine quattro è possibile associare una linea di riflessione o glissoriflessione; i gruppi spaziali sono quindi: $p4$, $p4m$, $p4g$.

Il reticolo esagonale primitivo è compatibile con i punti di rotazione 3 e 6, combinati o no con una riflessione; si hanno quindi i seguenti gruppi spaziali: $p3$, $p3m1$, $p31m$, $p6$, $p6m$.

Dunque i 17 gruppi spaziali bidimensionali sono:

$$\begin{aligned}
 & p1, p2; \\
 & pm, pg, cm, pmm, pmg, pgg, cmm; \\
 & p4, p4m, p4g; \\
 & p3, p3m1, p31m, p6, p6m.
 \end{aligned}$$

Esempi famosi e spettacolari di tassellazioni piane si possono ammirare nelle decorazioni della residenza moresca dell'Alhambra di Granada (XIII e XIV secolo), così come nelle illustrazioni dell'artista olandese M.C. Escher (1898-1972) che nelle sue opere riuscì ad unire in modo affascinante arte e matematica.

L'interesse di Escher per le tassellazioni iniziò proprio nel 1936, durante un soggiorno in Spagna, dopo aver visitato il palazzo trecentesco di Granada e aver visto le sue splendide decorazioni.

Più tardi egli stesso dichiarerà che i mosaici moreschi dell'Alhambra sono stati la più ricca fonte di ispirazione che egli avesse mai incontrato. Inizia a lavorare esclusivamente sulle tassellazioni del piano e sul suo riempimento mediante figure isometriche.

In seguito egli sostituì i motivi geometrici con motivi di fantasia (angeli, diavoli, fantasmi, rettili, animali immaginari). Come scrisse più tardi: *“Per quanto mi riguarda, il limitarmi a figure geometriche mi risulta inammissibile, dato che la possibilità di riconoscere le figure è il motivo principale del mio permanente interesse per questa materia”*.

A partire da una griglia triangolare, rettangolare, esagonale ecc. egli pensò di modificare il contorno del poligono base in modo da ricavarne immagini di esseri viventi che sembrano prender vita e muoversi all'interno della composizione.

L'artista stesso scrive per una delle sue opere (*Rettili*): *“Uno di questi animali allunga una zampa al di là del bordo del quaderno e si distacca per entrare nella vita reale. Si arrampica per procedere, con fatica, su una salita scivolosa di una squadra da disegno, fino all'apice della sua esistenza. Dopo un breve riposo torna verso il basso sulla superficie piatta della carta da disegno, dove, ubbidiente, si inserisce fra i suoi vecchi compagni e riprende la sua funzione di elemento della divisione del piano”*.

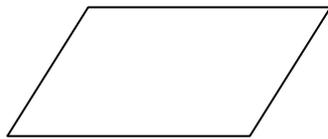
Di seguito sono riportati alcuni lavori dell'artista individuando in essi, quali e di che ordine sono i punti di rotazione e quali simmetrie compaiono per risalire, così, al tipo di cella unitaria usata e quindi a quale gruppo cristallografico esso appartiene. Ogni disegno di Escher sarà difatti preceduto dalla cella elementare di cui si compone.

Nelle figure prese come esempio sia per la classificazione dei gruppi dei mosaici che dei fregi, rappresenteremo con un triangolino il punto dove viene a trovarsi un 3-centro, con un quadratino il punto dove viene a trovarsi un 4-centro e per i 2-centri ed i 6-centri verranno utilizzati rispettivamente un cerchietto ed un piccolo esagono.

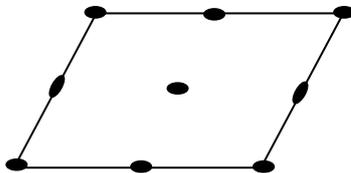
Rappresenteremo, infine, con una linea continua l'asse di riflessione e con una linea tratteggiata l'asse di glissoriflessione.

Nel disegno di Escher qui riportato, l'elemento di base prende forma dalle otto teste che si riproduce su un reticolo obliquo verticalmente o orizzontalmente ricoprendo così l'intera composizione.

Tale illustrazione rientra nel gruppo $p1$ e difatti non compaiono centri di rotazione e le uniche operazioni di simmetria sono quelle di traslazione.



Composizione appartenente al gruppo $p1$

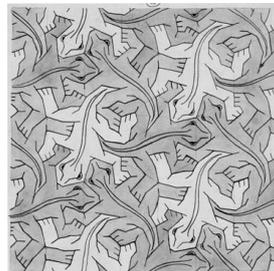
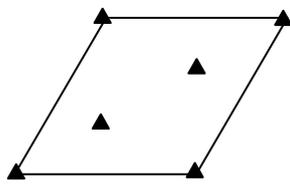


Composizione appartenente al gruppo $p2$

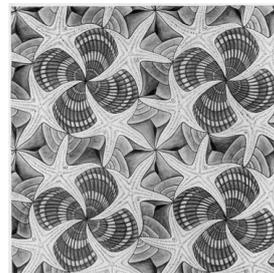
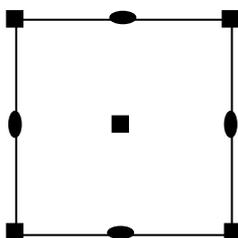
Nel disegno *Pesce Volante/Uccello* la simmetria è riconducibile al gruppo spaziale $p2$: punti di rotazione di ordine due si trovano rispettivamente nell'intersezione delle pinne anteriori destre dei pesci più scuri, delle teste dei pesci bianchi e delle code dei pesci di entrambi i colori.

La figura *Lucertola* è riconducibile a un gruppo cristallografico $p3$ essendoci solo simmetrie rotazionali di 120° e traslazionali. Il reticolo che si viene a formare è esagonale. I punti di rotazione di ordine tre si ottengono dall'intersezione delle tre teste di lucertola, individuando in questo modo i vertici della cella unitaria rombica contenente al suo interno due punti di rotazione dello stesso ordine, quali punti d'incontro delle zampe inferiori destre dei rettili e delle loro zampe sinistre.

L'opera *Conchiglie e stelle di mare* rientra nel gruppo spaziale $p4$ ove la cella unitaria è un quadrato i cui vertici, individuati dai punti di incontro delle 4 conchiglie, sono centri di rotazione di ordine quattro. I lati della cella sono bisecati da centri di rotazione di ordine due, che si trovano all'interno dei paguri e al centro si trova un punto di rotazione di ordine quattro individuato dal punto di contatto delle quattro stelle di mare.



Composizione appartenente al gruppo $p3$



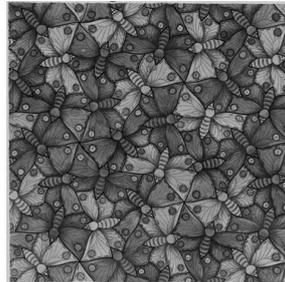
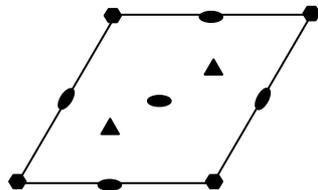
Composizione appartenente al gruppo $p4$

L'immagine *Farfalla* appartiene al gruppo spaziale $p6$ e, infatti, in essa è possibile individuare centri di rotazione di ordine due, tre e sei; il reticolo è esagonale. I vertici del parallelogramma di base sono i punti di contatto della parte superiore delle ali sinistre delle farfalle. I punti medi dei lati del parallelogramma sono centri di rotazione di ordine due e sono dati dall'intersezione della parte superiore delle ali destre. All'interno della cella si trova un punto di rotazione di ordine due, dato dal punto di contatto delle ali superiori destre e due punti di rotazione di ordine tre ottenuti dall'intersezione delle ali inferiori destre delle farfalle. Quest'ultimi vengono a trovarsi sulla diagonale della cella unitaria rombica.

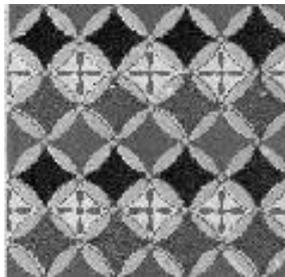
Si possono ora considerare i gruppi spaziali contenenti, oltre alle rotazioni, anche operazioni di riflessione rispetto a una retta.

Tra questi i più semplici sono quelli in cui a un reticolo rettangolare è associata una linea di riflessione m oppure una linea di glissoriflessione g e vengono rispettivamente indicati con i simboli pm e pg .

Per il primo, non abbiamo a disposizione alcun disegno di Escher.



Composizione appartenente al gruppo $p6$

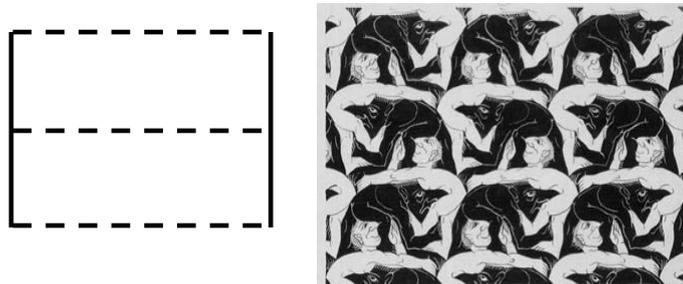


Composizione appartenente al gruppo pm

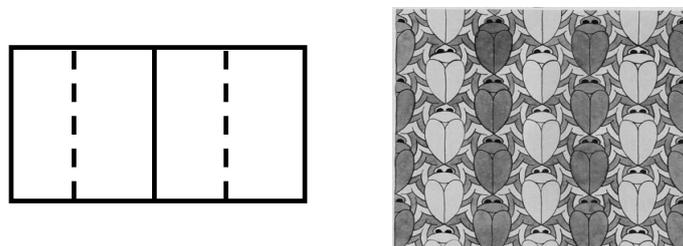
Per il gruppo pm si ha una cella unitaria primitiva e oltre alle rotazioni, la lettera m , ci indica che vi sono riflessioni di assi perpendicolari al lato della cella unitaria.

La figura *Pessimista/Ottimista* rientra nel gruppo cristallografico pg , e la cella elementare rettangolare è individuata dagli omini neri messi verticalmente l'uno rispetto all'altro e rivolti verso direzioni opposte. Applicando una glissoriflessione con asse verticale, di modulo pari alla metà del vettore di traslazione verticale e passante per il punto medio del lato orizzontale della cella, la figura viene mandata a coincidere con un'altra.

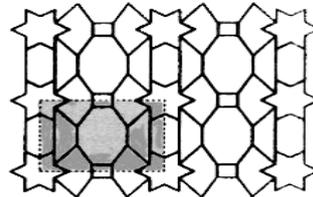
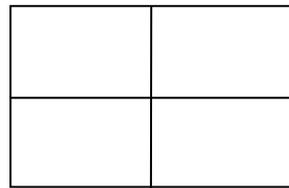
Nella figura *Scarabeo*, appartenente al gruppo cristallografico cm i vertici della cella rettangolare sono i punti di contatto testa-coda degli insetti e, per diagonale, l'asse di simmetria dello scarabeo. L'intera composizione si ottiene per traslazione, rispetto ai due vettori generatori, della cella ricavata.



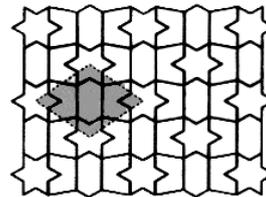
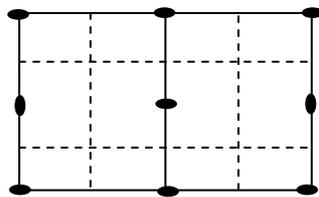
Esempio di mosaico appartenente al gruppo pg



Esempio di mosaico appartenente al gruppo cm



Esempio di mosaico appartenente al gruppo pmm



Esempio di mosaico appartenente al gruppo cmm

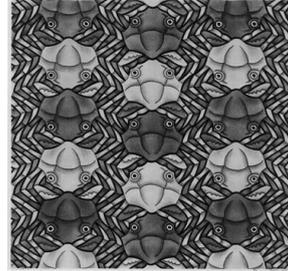
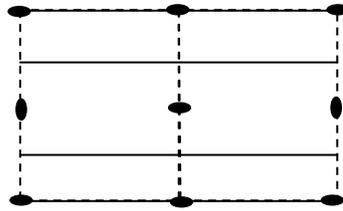
Anche per i gruppi pmm e cmm , non si sono riscontrati disegni escheriani. Nel gruppo pmm la cella è primitiva e l'ordine massimo di rotazione è pari a due, cioè di 180° . La lettera m , al secondo posto e al terzo posto, sta a indicare che ci sono riflessioni e i cui assi sono perpendicolari a un lato della cella; e quindi le riflessioni saranno perpendicolari tra di loro.

Differentemente dal gruppo pmm , nel gruppo cmm la cella è centrale.

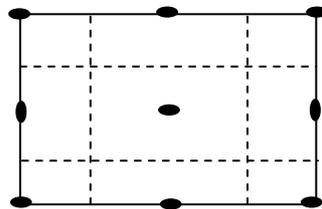
Nella figura *Granchi*, la cella rettangolare è generata da due vettori indipendenti: il vettore verticale pari alla lunghezza dei due granchi e quello orizzontale di modulo pari alla larghezza di due granchi.

I centri di rotazione di ordine due si trovano in corrispondenza delle zampe dei granchi. Tale lavoro rientra nel gruppo pmg , presentando due linee di riflessione perpendicolari al lato orizzontale della cella e due rette di glissoriflessioni di asse perpendicolare al lato verticale.

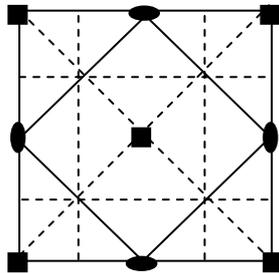
Nel disegno *Due pesci*, che rientra nel gruppo cristallografico pgg i vertici della cella rettangolare sono centri di rotazione di ordine due che si hanno in corrispondenza dei punti d'incontro dei due pesci. Altri centri di rotazione dello stesso ordine si hanno in corrispondenza dei punti medi dei lati del rettangolo. Si ha il moto di glissoriflessione con assi perpendicolari ai lati della cella unitaria.



Composizione appartenente al gruppo pmg



Composizione appartenente al gruppo pgg



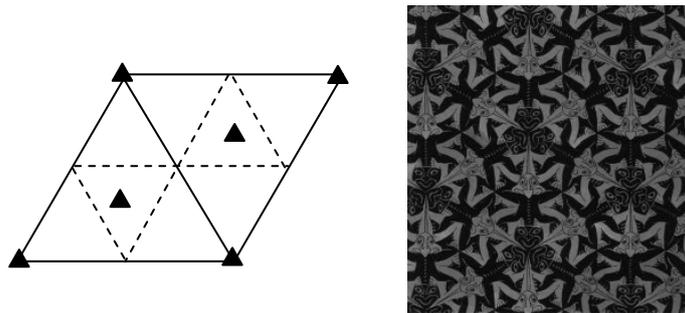
Composizione appartenente al gruppo p4g

Nell'immagine *Cimice*, i vertici della cella unitaria quadrata con lati di lunghezza pari a due volte l'insetto sono centri rotazionali di ordine quattro che si hanno nell'intersezione delle zampette delle quattro cimici. Un punto sempre di ordine quattro si trova anche all'interno del quadrilatero. Nel punto medio dei lati della figura geometrica individuata, si trovano dei centri di rotazione di ordine due, dati dall'intersezione delle teste degli insetti.

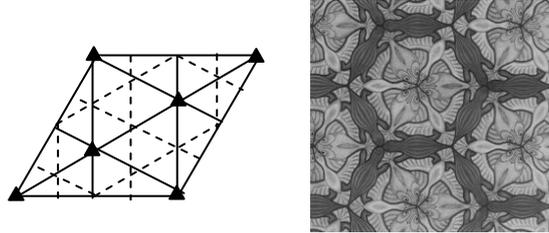
In tale composizione gli assi di riflessione si ottengono unendo i punti medi di due lati consecutivi della cella unitaria. Inoltre la sovrapposizione di un insetto in un altro si ottiene anche tramite glissoriflessione traslando la cella (verticalmente o orizzontalmente) e poi riflettendo, rispetto ad un'asse parallelo al vettore di traslazione. Ed è per questo che tale disegno appartiene al gruppo cristallografico $p4g$.

Nella rappresentazione *Clown*, i vertici della cella unitaria rombica sono centri di rotazione di ordine tre e si hanno in corrispondenza dei punti di incontro delle teste nere dei clown. All'interno del parallelogramma, compaiono due centri di rotazione dello stesso ordine, ottenuti rispettivamente nei punti d'incontro delle ginocchia sinistre e destre degli omini neri. La diagonale della cella unitaria rombica è un'asse di riflessione avente un'inclinazione di angolo pari a 60° rispetto a un lato della cella. Tale composizione rientra difatti nel gruppo $p31m$.

Il disegno *Pesce-anatra-lucertola*, presenta soltanto centri di rotazione di ordine tre, ottenuti dai punti d'incontro delle bocche dei tre pesci, i quali individuano i vertici di una cella unitaria rombica. All'interno della cella ricavata, si trovano due punti rotazionali dello stesso ordine, ottenuti rispettivamente dal punto in comune delle tre teste e delle tre code della tartaruga. Gli assi di simmetria sono perpendicolari ai lati della cella individuata e dividono a metà pesci, oche e tartarughe. Traslando parallelamente rispetto ai lati del parallelogramma, si ottiene l'intero disegno. Possiamo così attribuire a quest'opera il gruppo cristallografico $p3m1$.



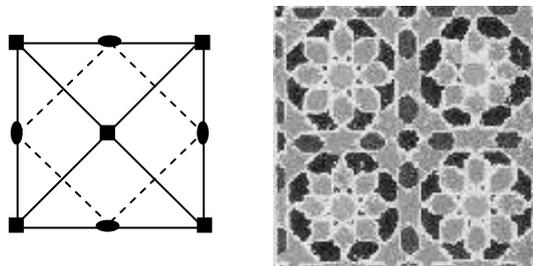
Composizione appartenente al gruppo $p31m$



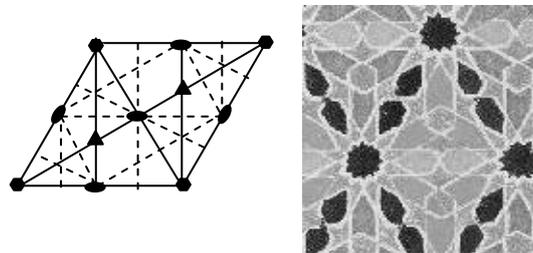
Composizione appartenente al gruppo $p3m1$

Il gruppo $p4m$ indica la presenza di centri di rotazione di ordine quattro in una cella primitiva; le lettere m nell'ultima posizione della sigla rappresenta, rispettivamente, la presenza di riflessioni e glissoriflessioni aventi assi normali ad un lato della cella, e la presenza di riflessioni e glissoriflessioni aventi assi inclinati, di un angolo pari a 45° rispetto ad un lato della cella.

Infine il gruppo $p6m$, ci informa che siamo in presenza di una cella primitiva avente centri di rotazione massimo pari a sei. Le lettere m nelle ultime due posizioni, invece, rendono nota la presenza di riflessioni e glissoriflessioni di assi normali a un lato di una cella e la presenza delle stesse simmetrie di assi inclinati di un angolo di 60° rispetto al lato opposto della cella stessa.



Composizione appartenente al gruppo $p4m$



Composizione appartenente al gruppo $p6m$

Riassumiamo nella tabella seguente le principali caratteristiche dei diciassette gruppi dei mosaici:

GRUPPO	RIFLESSIONI	GLISSORIFLESSIONI	ROTAZIONE			
			Ordine 2	Ordine 3	Ordine 4	Ordine 6
<i>p1</i>	0	0	0	0	0	0
<i>pg</i>	0	2	0	0	0	0
<i>pm</i>	2	0	0	0	0	0
<i>cm</i>	1	1	0	0	0	0
<i>p2</i>	0	0	4	0	0	0
<i>pmm</i>	4	0	4	0	0	0
<i>pmg</i>	2	2	4	0	0	0
<i>pgg</i>	0	4	4	0	0	0
<i>cmm</i>	2	2	3	0	0	0
<i>p3</i>	0	0	0	3	0	0
<i>p31m</i>	3	3	0	2	0	0
<i>p3m1</i>	3	3	0	3	0	0
<i>p4</i>	0	0	2	0	2	0
<i>p4m</i>	6	2	2	0	2	0
<i>p4g</i>	2	6	2	0	2	0
<i>p6</i>	0	0	3	2	0	1
<i>p6m</i>	9	3	3	2	0	1

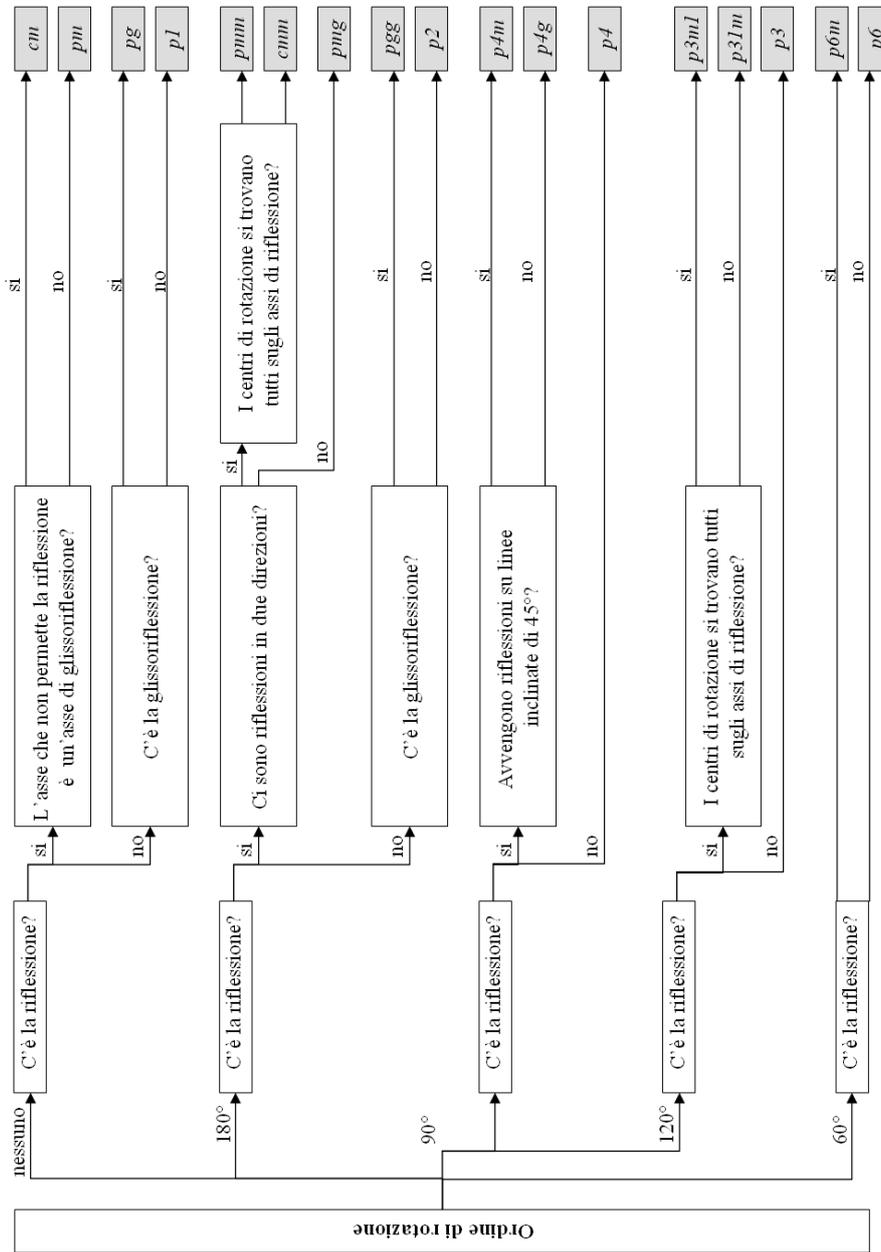


Diagramma di flusso per l'identificazione del gruppo dei mosaici

3.6 Gruppo dei fregi

Si definisce fregio, un gruppo infinito di motivi ripetuti che contiene due traslazioni in un'unica direzione.

Vi sono sette possibili gruppi di simmetria per un fregio. Anche per questi si è ricorso a una specifica notazione composta da 4 caratteri:

- il primo segno è sempre una *p*;
- il secondo segno può essere 1 o *m*: è una *m* (che sta per *mirror* = specchio) se il gruppo di simmetria della figura contiene riflessioni (simmetrie assiali) rispetto a rette verticali, altrimenti è un 1;
- il terzo segno può essere 1 o *m* o *g*: è una *m* se il gruppo di simmetria della figura contiene una riflessione rispetto ad una retta orizzontale, è una *g* se il gruppo di simmetria della figura contiene una glissoriflessione rispetto ad una retta orizzontale, altrimenti è un 1;
- il quarto segno può essere 1 o 2: è 2 se il gruppo di simmetria della figura contiene rotazioni di 180°, altrimenti è un 1.

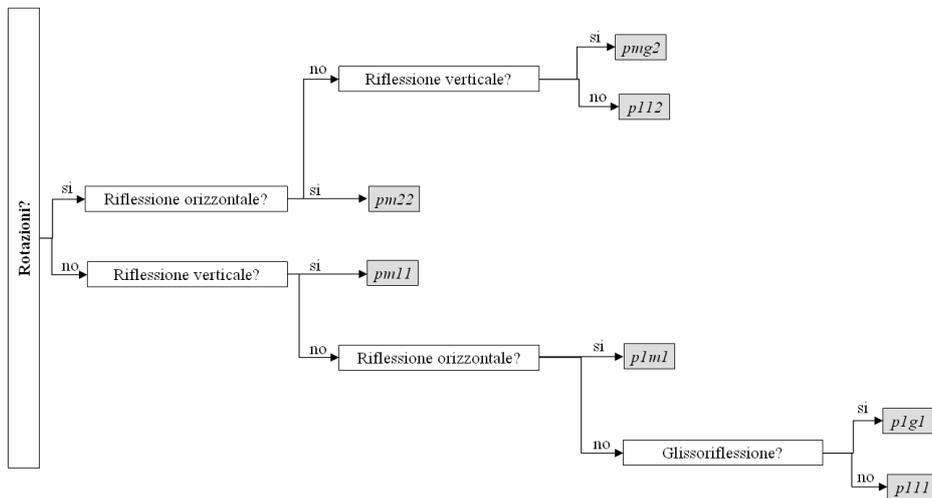


Diagramma di flusso per l'identificazione del gruppo dei fregi



Il fregio p1 contiene solo la traslazione



Il fregio p1g1 contiene traslazioni e glissoriflessione



Il fregio p112 contiene la traslazione e rotazioni di 180°



Il fregio pm11 contiene riflessioni con asse verticale



Il fregio p1m1 contiene riflessioni con asse orizzontale



Il fregio pmg2 contiene traslazioni, glissoriflessioni e rotazioni di 180°



Il fregio pmm2 contiene la traslazione e la rotazione con assi tra di loro perpendicolari

3.7 Gruppo dei rosoni

Il gruppo dei rosoni, o gruppo finito di isometrie, non può contenere traslazioni, né glissoriflessioni, giacché la composizione di queste trasformazioni, che si può ripetere indefinitamente, deve ancora essere un elemento del gruppo.

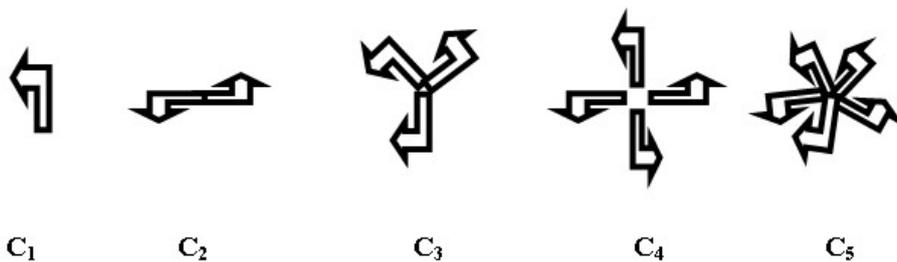
Il modulo geometrico di base della figura che, presa singolarmente, permette di riprodurre l'intera figura attraverso le rotazioni (o le simmetrie assiali) del gruppo è chiamato dominio fondamentale.

Ogni gruppo di rosoni ha almeno un punto fisso ed è un gruppo diedrale oppure ciclico finito (Teorema di Leonardo).

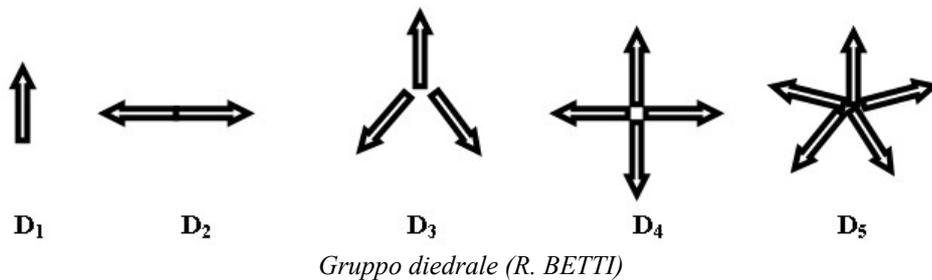
Un **gruppo ciclico** contiene solo rotazioni di centro O di angoli sottomultipli dell'angolo giro ($2\pi/n$); vengono classificati con la lettera C , seguita dal numero di rotazioni.

Un **gruppo diedrale** contiene tante rotazioni di centro O di angolo sottomultiplo dell'angolo giro ($2\pi/n$), quante simmetrie assiali in rette passanti per O ; sono classificati con la lettera D seguita dal numero di rotazioni (o di simmetrie assiali).

Di conseguenza, il gruppo $D1$ è formato dalla sola trasformazione identica; $D2$ è il gruppo di quattro elementi costituito dalle riflessioni rispetto alle due diagonali, dal prodotto di queste (che è un mezzo giro o simmetria centrale) e dall'identità; il gruppo $D3$ di 8 elementi contiene le riflessioni rispetto agli assi dei lati e alle diagonali del quadrato e le rotazioni (composizioni delle riflessioni precedenti) di 90° , 180° , 270° , 360° (che coincide con la trasformazione identità) intorno al centro del quadrato; il gruppo $D5$ di 10 elementi contiene le riflessioni rispetto ai cinque assi dei lati del pentagono e le rotazioni di 72° , 144° , 216° , 288° e 360° attorno al centro del pentagono.



Gruppo ciclico (R. BETTI)



Generalizzando possiamo quindi dire che il gruppo D_n (diedrale su n elementi) è generato dalla riflessione rispetto all'asse di un lato e dalla rotazione di $(360/n)^\circ$ attorno al centro: esso contiene $2n$ isometrie, tra cui n riflessioni distinte, che nel caso di n dispari hanno come asse la retta che passa per il punto medio di un lato e per il vertice opposto, nel caso di n pari hanno assi che passano per coppie di vertici opposti oppure per i punti medi di lati opposti.

Se la simmetria di riflessione invece manca, il gruppo ha un unico movimento generatore ed è formato solo da rotazioni. In questo caso si avrà un gruppo ciclico.

4. L'ESGRAFIADO

4.1 Introduzione

Si è deciso di analizzare i mosaici murali (*esgrafiados*), tipici dell'architettura *mudéjar*¹, in quanto presentano un vasto repertorio di applicazioni che interessano tanto episodi decorativi puntuali, e spesso isolati, quanto elementi di maggiore estensione areale (soglie, bordi, fasce, cornici), fino a coinvolgere l'intera superficie.

Questo studio sui disegni ornamentali a matrice geometrica delle tassellazioni *mudéjares* nasce anche con l'obiettivo di costruire un sistema interattivo e informatizzato, in grado di consentire all'osservatore di orientarsi rispetto alla vastità del tema e di conoscere non soltanto i singoli tipi esistenti, ma di poterli visionare per comparazione attraverso categorie che li raggruppano in funzione delle simmetrie geometriche ivi presenti.

Riguardo a tale tipologia di decorazione, l'attuale stato di conservazione, gli stili della decorazione, la storia delle maestranze locali ampiamente documentata da fonti bibliografiche, le informazioni relative al progetto ancora presenti sotto forma di incisioni sulle superfici scabre dell'edificio hanno consentito di poter trarre delle conclusioni sui procedimenti della standardizzazione dei metodi e delle tecniche di produzione.

4.2 L'*esgrafiado*: rivestimento murale

L'*esgrafiado* è un particolarissimo esempio di rivestimento murale che rientra in un gruppo ben più ampio denominato *revocos* o *revoques*, la cui natura, anche se meno resistente rispetto ad altri materiali da costruzione, li ha preservati fino ai giorni nostri.

Esteticamente il *revoco* può presentarsi:

- liscio o lucido: frutto dell'azione della *llana* o della *paletta* che danno luogo a una superficie continua;
- rugoso: parti ruvide in contrasto con la restante superficie liscia. Tale effetto si può ottenere o con un particolare cucchiaio o con strumenti detti *bavieras* o *tirolesas*, tramite i quali il composto

¹ Quest'architettura è stata inserita nel processo dell'arte Mozarabica, diffusasi in Spagna intorno al XVII secolo quale sintesi di elementi costruttivi e ornamentali, cristiani e musulmani.

viene gettato sulla parete senza essere successivamente spianato, creando così un effetto granuloso;

- battuto: tramite la battitura di un martello, il *revoco* mostra una particolare impronta e prende il nome di *revoco a la martellina* (bocciardatura);
- graffiato: in questo caso il *revoque* prende il nome di *esgrafiado*. Tale categoria è la più svariata sia dal punto di vista stilistico che tecnico.

Dunque quando si parla di *esgrafiado* non si può pensare solo a un semplice processo decorativo destinato ad abbellire le facciate, ma si è portati a parlare di un vero e proprio procedimento tecnico.

Gli attrezzi che si utilizzano nell'esecuzione di un *esgrafiado* possono dividersi in due gruppi: nel primo rientrano quelli comuni a tutti i *revocos* come la *paleta*, la *llana*, la *talocha*; nel secondo attrezzi specifici, utilizzati per effettuare le decorazioni come la *cuchilla* e la *plantilla*.

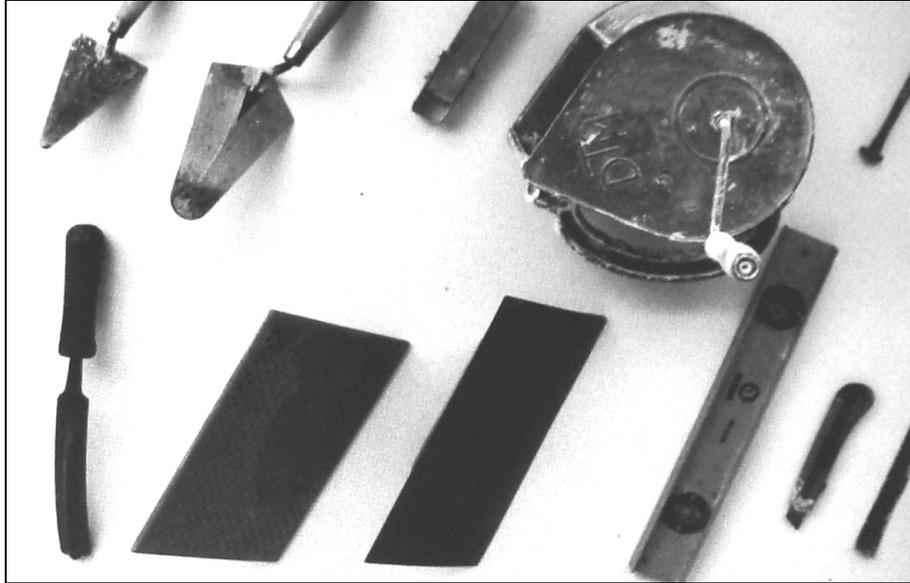
La *llana* (frattazzo) è una tavoletta di legno o metallica, di forma rettangolare, munita di impugnatura, usata per stendere e spianare la pasta del *revoco* o l'intonaco.

La *paletas* (cazzuola) è un attrezzo in ferro a forma di triangolo con il quale si getta, energicamente, la calcina sul muro, per ottenere una buona presa e aderenza.

La *talocha* è una piccola tavola di legno utilizzata per render la superficie liscia e uniforme (per una verifica della planarità si ricorre ad un livello).

La *cuchilla* o il *vaciador* sono gli attrezzi tipici dell'arte dell'*esgrafiado* ed hanno una forma variabile; sono utilizzati per raspare e scavare nella pasta e individuare così il motivo della decorazione richiesta. Infine, la *plantilla* e l'*estarcido* sono disegni realizzati sopra tavole di legno, cartone o carta, seguendo i quali si realizza poi la decorazione: si parla di *plantilla* se il motivo decorativo è tracciato su un supporto di legno o di cartone, in caso di supporto cartaceo, si parla di *estarcido*.

Nel seguito sono esaminati i possibili motivi decorativi, anche in funzione degli strumenti a cui si ricorre per realizzarli (tramite-mezzo), della posizione in facciata a cui sono destinati (dove), delle regole compositive su cui si basano (come) e soprattutto delle figure geometriche elementari che li caratterizzano (geometria compositiva).



Attrezzi utilizzati per l'esecuzione dell'esgrafiado

4.3 Procedimento e tecniche di esecuzione

Realizzato il lavoro preliminare, si eseguiva una prima mano di *enfoscado*, attraverso listoni di legno detti regoli. L'*enfoscado* in tale fase prende l'attributo *maestrado* dal nome delle linee ausiliari, tracciate dagli operai, dette appunto linee maestre. Per questa fase si ricorreva a composti di calce e arena, gesso e arena, o gesso, calce e arena.

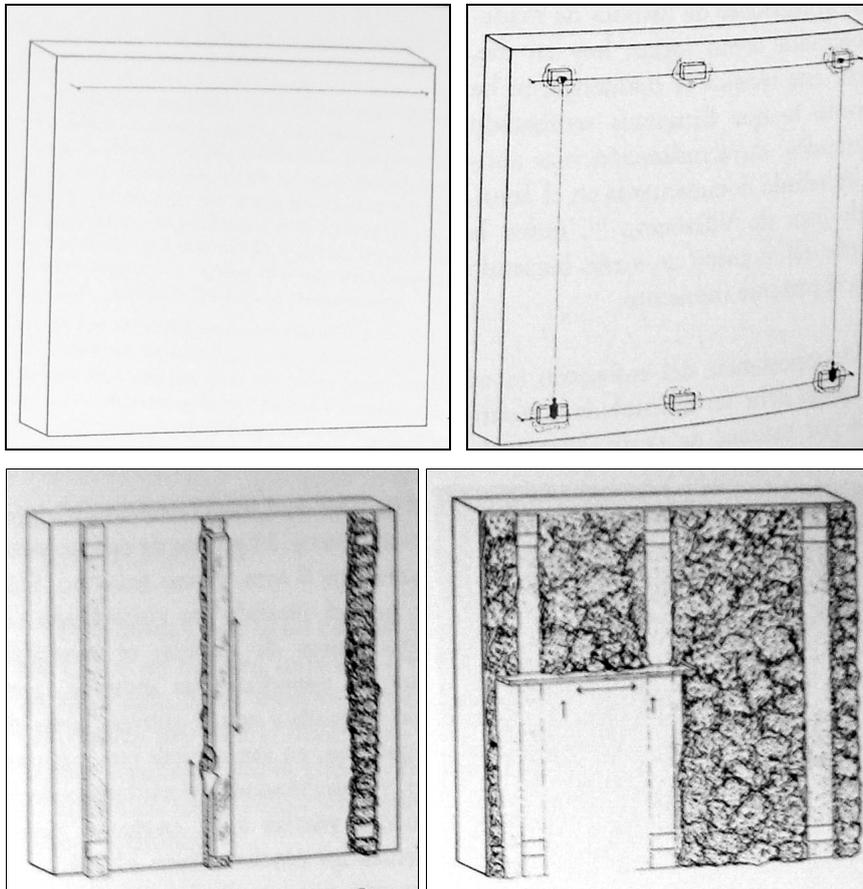
Esistevano diversi modi per realizzare le linee maestre, ma la più utilizzata risultava essere la seguente. Dopo aver ben bagnato il muro, si fissavano chiodi agli estremi superiori della superficie da *enfoscare*: si avevano così i primi due punti di riferimento, chiamati *toques*. Ai chiodi si fissava una corda ben tirata che serviva come riferimento per disporre orizzontalmente, a intervalli più o meno regolari, altri *toques*. Analogamente, con l'aiuto di un livello si individuavano altri due punti di riferimento come estremi inferiori, e poi altri verticali intermedi.

Lo spazio tra ciascuna coppia di punti in direzione verticale, veniva ricoperto di malta, fino ad ottenere una linea spessa; al disopra si applicava un listone di legno, spinto fin quando i suoi estremi non venivano a contatto con i *toques* e rimuovendo l'impasto che fuoriusciva; il risultato era una perfetta striscia di malta.

Conveniva aspettare che le linee maestre si indurivano prima di passare alla messa in opera dell'*enfoscado*. Tale fase consisteva nel riempire gli spazi tra le linee maestre, gettando energicamente malta di cemento con la *paleta* da una distanza di circa 50 cm.

Coperti tutti gli spazi, si toglieva la malta in eccesso, passando con un ulteriore listello di legno, che appoggiandosi alle linee maestre permetteva il totale livellamento; si otteneva così una superficie uniforme su cui veniva lavorato l'*esgrafiado*.

Attualmente il procedimento eseguito è lo stesso, e differisce solo per i materiali adoperati, sostituendosi ai composti di gesso, calce e arena, malta di cemento grigio o malta bastarda.



Realizzazione delle linee maestre

L'esecuzione del *revoco* (intonaco) è il momento più delicato della tecnica dell'*esgrafiado*, dal momento che rappresenta il rivestimento finale. Prima di stendere l'impasto sopra l'*enfoscado*, è necessario inumidirlo; più umido risulta il *revoco*, maggior sarà il tempo a disposizione per lavorarlo, "graffirlo". Per questo è necessario tener conto delle condizioni climatiche; difatti, una rapida perdita di acqua nell'impasto, data dalle alte temperature, può pregiudicare gravemente il *revoque* conferendogli un aspetto rugoso. Anche temperature molto basse comportano altri effetti disastrosi come la formazione di polveri e macchie in facciata fino all'esfoliazione.

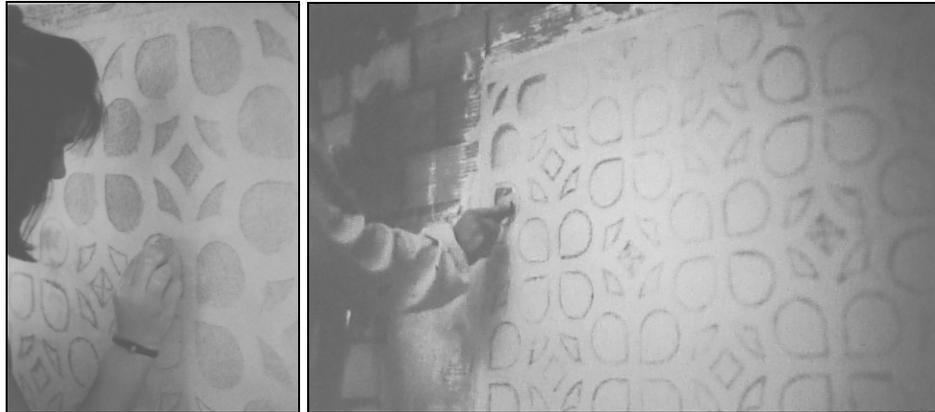
Il risultato del lavoro dipenderà dalle diverse tecniche eseguite.

L'*Esgrafiado a un tendido* risultava essere la tipologia più semplice; per eseguirla, era necessario applicare soltanto una passata di *revoco*, che al termine veniva lucidata risultando così liscia (lo spessore non superava i 6 mm). Una volta che l'impasto aveva raggiunto una determinata durezza, si segnava il motivo decorativo; successivamente, parte di tale decorazione era raschiata mentre parte restava non lavorata, ovvero liscia, producendo così un contrasto di tessitura grazie al quale si evidenziava la decorazione. Si trattava, dunque, di un graffito senza rilievo dal momento che si raschiava solo la superficie.

È facile osservare un contrasto di tono nel colore del *revoco*; infatti, la zona raschiata, e quindi rugosa, presenta sempre un colore più scuro della zona liscia.

L'*Esgrafiado a dos tendidos* era la tecnica più comune in tutta la Spagna. Come già indica il nome, i motivi decorativi di tale *esgrafiado* si disponevano su due piani diversi per creare particolari effetti di tessitura, di colore e di rilievo, così come contrasti di luce e ombra. Sopra l'*enfoscado* inumidito, si eseguiva una prima passata di intonaco, lavorato in modo tale che il risultato finale presentasse una superficie rugosa e un colore scuro; quando questa aveva raggiunto una determinata consistenza, si effettuava un'ulteriore passata, solitamente di diverso colore, che veniva poi lucidata.

Una volta che anche la seconda stesa aveva raggiunto la durezza idonea, si procedeva col tracciare il disegno, per poi terminare con la fase di raschiatura dei motivi decorativi, eseguita fino a raggiungere il *tendido* inferiore.



Tecnica di esecuzione dell'esgrafiado a un tendido e a dos tendidos



Raschiatura del motivo decorativo

L'*Esgrafiado con acabado en cal* è ancora una tipologia composta da due passate, solo che lo strato più esterno è rappresentato da un rivestimento in calce. La prima stesa, che andava a ricoprire l'*enfoscado*, era un miscuglio di calce, arena e paglia che conferiva un colore grigio scuro; successivamente si gettava della calce liquida, che

era ben stesa con un pennello. Si passava, poi, al disegno del motivo decorativo richiesto raschiando la calce nelle zone scelte. Tale modalità permetteva un graffito ricco di decorazioni in quanto lo strato di calce era molto sottile e facile da lavorare; allo stesso tempo, però, si mostrava molto meno resistente alle intemperie.

L'*Esgrafiado embutido* era la tecnica meno utilizzata. Si componeva di uno strato di *revoco* di circa 1.5 cm, su cui venivano disegnati i motivi decorativi. In un secondo momento si raschiavano queste zone fino allo strato di *enfoscado*: i vuoti venivano successivamente riempiti con uno o più strati di malta di diverso colore. Quando tutta la superficie presentava la consistenza richiesta si procedeva col raschiarla per conferire un aspetto rugoso.

L'uso della *plantilla* per tracciare il motivo decorativo non è l'unico metodo che si è riscontrato nei diversi esempi di *esgrafiado* presenti nell'architettura *mudéjar*, che sinteticamente possiamo così schematizzare: decoro libero, decorazione con disegni regolari o regolarizzati, decori misti (fusione dei due precedenti motivi).

Normalmente si iniziava tracciando le direttrici che governavano l'ordine esterno, definendo così il reticolo, e scegliendo il modulo di base (quadrati, rettangoli, rombi o circonferenze); solo una volta disegnato il bozzetto delle decorazione, si decideva se l'atto del graffire doveva essere eseguito in positivo o in negativo. I motivi decorativi vanno a esaltare determinate parti dell'edificio, e proprio rispetto alla loro posizione è possibile classificare questi "ornamenti di protezione" in due distinti gruppi. Le *cenefas* – fregi – presentano uno sviluppo longitudinale, orizzontale o verticale; potevano essere adottate per diverse parti della facciata, ma normalmente erano utilizzate per rimarcare le linee principali dell'edificio, negli angoli, come marcapiano, per delimitare superiormente la zoccolatura, per circoscrivere le zone graffite dalle zone lisce o in particolari zone con presenza di decorazione atipica. Il decoro generale o di ripieno – mosaico –, invece, è la decorazione che occupa la maggior parte del paramento murario, terminando in parti lisce o proprio nelle *cenefas*.

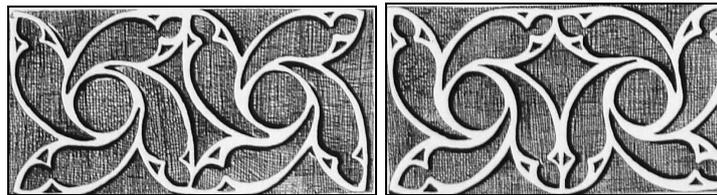
Ad accezione dei motivi singolari (che non si ripetono mai, rendendo così unica la facciata su cui sono scolpiti), le altre decorazioni si basano sulla reiterazione in serie dello stesso disegno geometrico.

4.4 Regole compositive dei motivi decorativi

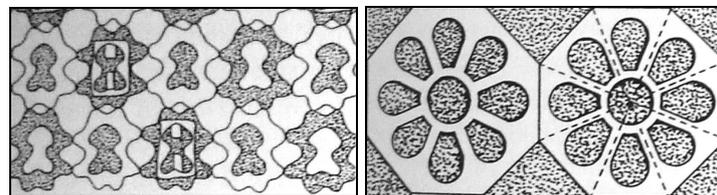
L'*esgrafiado*, segue norme concrete di organizzazione, e quando si osserva una facciata graffita si ritrovano in essa una serie di forme il cui sviluppo non è altro che l'elaborazione, la permutazione di forme geometriche elementari. Dalla forma iniziale al risultato finale, il motivo decorativo risente di notevoli cambiamenti apportati dalle condizioni del materiale, dal procedimento seguito, dalla continua ricerca di una forma sempre più gradevole da adattare allo spazio da decorare, dalla funzione che deve svolgere, dalla perizia di un artigiano più o meno esperto. Analizzando i diversi graffiti nella regione di Segovia (dove si trova anche la torre di Codorniz, oggetto di studio) è stato possibile, effettuando una serie di semplificazioni geometriche, risalire ai meccanismi utilizzati per ottenere i differenti motivi decorativi. Alcuni motivi ornamentali, specialmente i disegni simmetrici permettono lo sviluppo di differenti movimenti del decoro, di cui di seguito riportiamo solo i più comuni da noi riscontrati.

Simmetria ordinata (di traslazione): ripetizione dello stesso motivo nell'identica posizione lungo tutto il paramento.

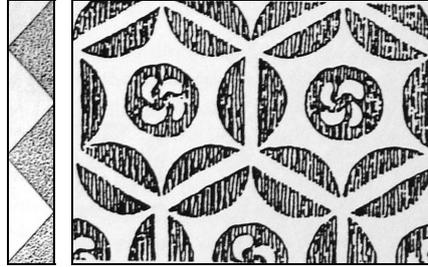
Simmetria disordinata (reciproca, inversa, speculare): ripetizione dello stesso motivo, però in forma concatenata, dando vita a una soluzione meno monotona e più ricca, impreziosendo, così, l'effetto totale.



Simmetria bilaterale, inversa o speculare; simmetria traslativa



Regola compositiva dell'alternanza e della radiazione



Esempio di intercambio e di inclusione di forme subordinate

Alla simmetria come regola compositiva, se ne aggiungono altre meno popolari, ma non per questo meno interessanti.

L'alternanza: si presenta come ripetizione di uno stesso disegno alternato a spazi vuoti; oppure l'alternanza di uno stesso disegno, una volta in negativo, "graffito", e una volta in positivo, in rilievo; infine, intesa come una o più unità di decoro che si ripetono dopo un determinato intervallo.

Matrice polare: prendendo come assi della simmetria i raggi di un cerchio o le diagonali e le trasversali di un quadrilatero, è possibile costruire modelli composti, che successivamente si possono ripetere nelle composizioni.

Intercambio o inversione: si tratta di un sistema di compensazione, nel quale un'unità nell'essere ripetuta, mostra nel suo intorno una figura di forma e di colore uguale o opposto.

Inclusione di forme subordinate: quando si vuole arricchire o apportare una variante a un motivo decorativo, si suole aggiungere determinate figure quali punti, cerchi, rosette. Questi nuovi elementi, quindi, risultano subordinati alla decorazione iniziale e per lo più sostituiscono i suoi vuoti.

Sovrapposizione: forme distinte si incontrano nel piano. Un singolare disegno si sovrappone a un fondo decorato con motivi di carattere generale, interrompendo così il suo sviluppo.

Contrapposizione: successione di forme opposte a creare una sorta di equilibrio e dinamismo.

Si passa ora a esaminare le figure geometriche elementari la cui composizione è alla base dei differenti motivi decorativi.

4.5 Figure geometriche di base dei motivi decorativi

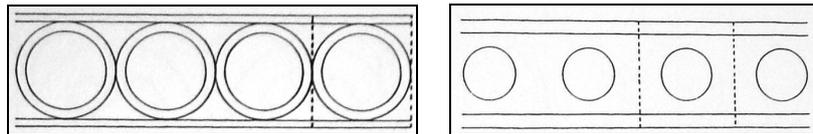
Il *cerchio* con le sue possibilità decorative, attraverso differenti giochi, appare la forma maggiormente utilizzata nei motivi ornamentali dell'*esgrafiado*. Ed è proprio il cerchio che, opportunamente combinato, dà vita alla decorazione presente sulla facciata sud della torre di Codorniz.

Il cerchio, come unità della decorazione, si presenta con una superficie interna scavata e rugosa, segnata da un anello di uno-due centimetri di spessore, in rilievo e liscio. La successione di questi cerchi origina un motivo ornamentale utilizzato soprattutto per le *cenefas*.

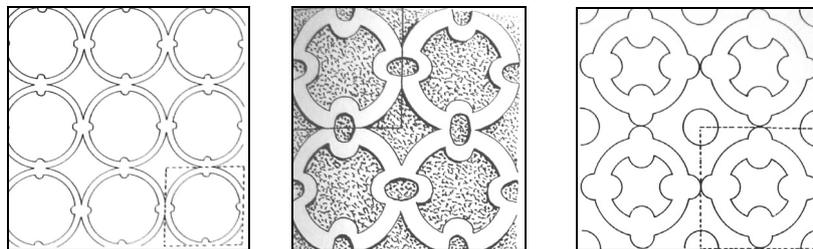
Uno schema così semplice non può non subire differenti evoluzioni: così, per esempio, sono state riscontrate strisce, dove si è preferito isolare un cerchio dall'altro, eliminando l'effetto di tangenza a creare un nuovo ritmo nel quale si alterna la forma circolare con lo spazio vuoto.

I cerchi secanti, alle volte, si uniscono dando luogo a una sorta di allaccio curvo, trecce, cerchi annodati, decorazioni che si riscontrano tanto nelle *cenefas* quanto come motivi generali. I punti di tangenza spesso sono stati segnati con diverse figure; una delle soluzioni consisteva nell'evidenziare questi luoghi con piccoli semicerchi verso l'interno, creando così un incatenamento di archi opposti con raggi alternati.

Questo modello continua a evolversi fino a includere i semicerchi esterni, obbligando così i cerchi elementari a separarsi (lo spazio tra di questi si riempirà con dei punti).



Fregi il cui modulo di base è il cerchio

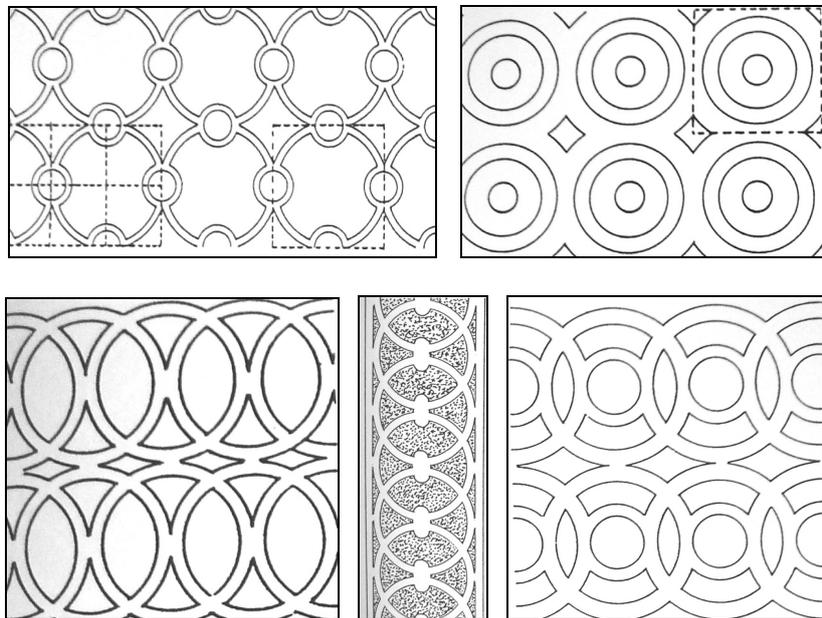


Tassellazioni murarie il cui modulo di base è il cerchio

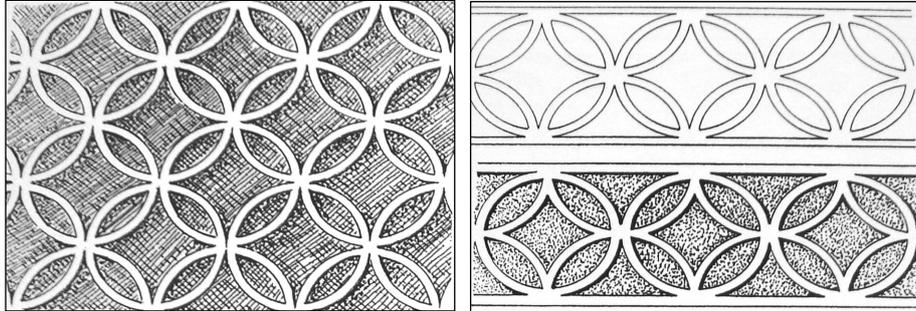
Di frequente, appaiono negli ornamenti dell'*esgrafiado*, cerchi di diverso raggio uniti in differenti forme: i punti di tangenza sono sostituiti da cerchi di minor dimensione che servono da vincolo ai cerchi maggiori; la presenza di cerchi di raggio minore obbliga la trama reticolare che sostiene il motivo a suddividersi ulteriormente per dar vita ai nuovi centri. Una variante di tale modello racchiude in se delle stelle a quattro punte situate nei centri dei cerchi maggiori.

Un'altra possibilità compositiva è la ripetizione di un modulo composto da più circonferenze concentriche, alternando superfici lisce e rugose: lo spazio tra le circonferenze maggiori viene occupato da ulteriori cerchi o da figure differenti quale ad esempio il rombo.

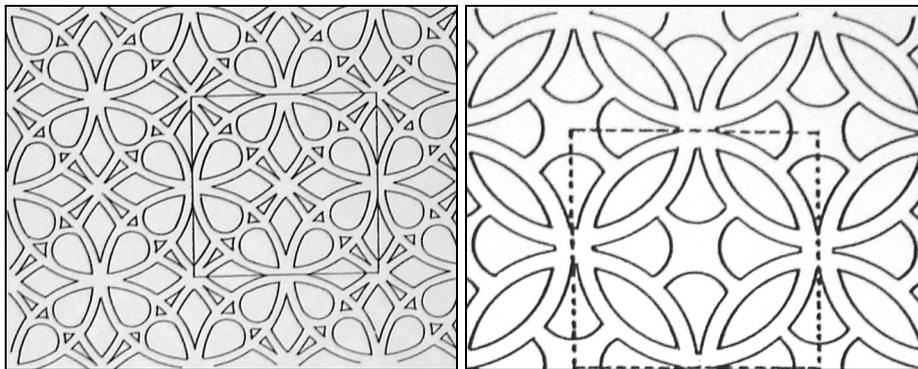
Si ritrovano, inoltre, decorazioni realizzate tramite la combinazione di tre cerchi secanti, ottenendo diverse varianti: la prima si origina sovrapponendo su due cerchi tangenti un terzo, il cui centro coincide con il punto di contatto dei cerchi sottostanti; il secondo e il terzo motivo decorativo si differenziano dal primo in quanto i cerchi sottostanti non sono tangenti ma si legano tra di loro rispettivamente tramite piccole semicirconferenze e cerchi di raggio minori.



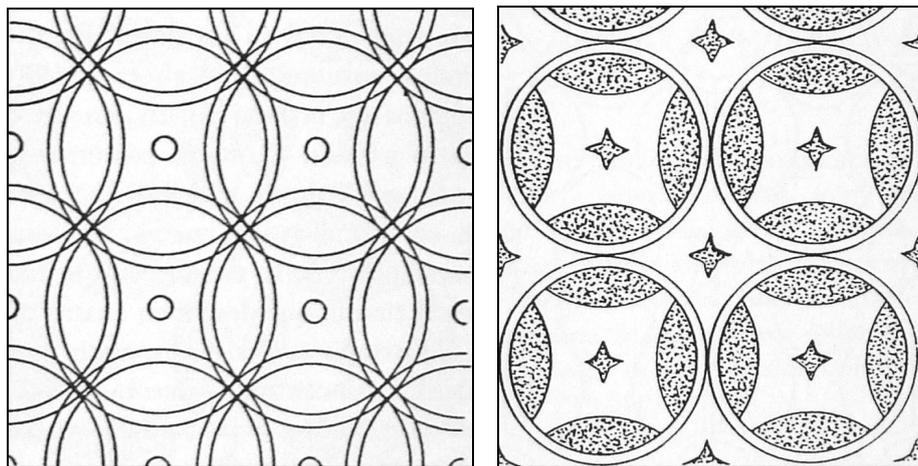
Composizioni decorative prodotte dalla reiterazione del cerchio



Esempi di mosaici e fregi originati dal modulo cerchio



Varianti delle composizioni che danno origine a fiori con quattro petali



Decoro realizzato in positivo e in negativo

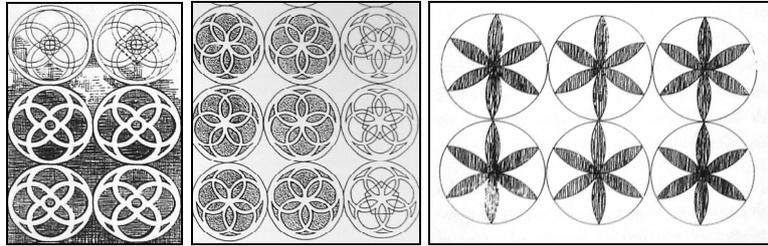
I fiori a quattro petali, ottenuti tramite cinque cerchi secanti di ugual dimensione, sono uno dei motivi decorativi maggiormente riscontrati nei graffiti ritrovati. Tale esecuzione risulta abbastanza semplice e si basa su un allineamento di cerchi di ugual dimensione, tangenti o minimamente secanti; al di sopra e al di sotto di quest'ultimo si dispongono ulteriori allineamenti che, sovrapponendosi al precedente, utilizzano come centri dei diversi cerchi i punti medi di quelli compresi nel primo allineamento. Se si ripete il precedente procedimento, ma con un'inclinazione di 45° , i cerchi secanti danno vita a fiori con quattro petali a croce. I cerchi secanti che danno origine a stelle con quattro punte, sono molto diffusi, essendo di facile esecuzione: per la realizzazione si parte da una trama quadrettata che nel risultato finale scompare.

Un cerchio inscritto in un quadrato viene tagliato da altri otto di ugual diametro, originando quattro stelle – ognuna delle quali è racchiusa in un quarto del quadrato iniziale – che si incontrano nel centro della circonferenza attraverso le punte.

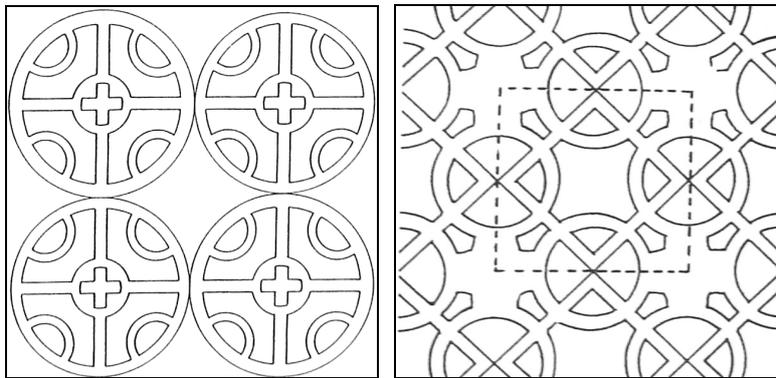
Le decorazioni nelle quali i cerchi secanti danno origine a fiori di tre petali, si realizzano su di una trama a base di rombi, dai cui vertici, considerati come centri, si tracciano le circonferenze, ognuno delle quali intersecandosi con altre sei, origina un esagono dai lati curvi che circonda sei fiori a tre petali. Si sono riscontrati, poi, motivi circolari il cui interno è occupato da composizioni di cerchi secanti che originano forme floreali. Un esempio si ottiene inscrivendo in un primo cerchio, altri quattro di raggio minore, originando così un fiore di quattro petali che al centro presenta un cerchio di dimensioni minori (le restanti rosette – appartenenti a questo gruppo – utilizzano come base il pentagono i cui vertici sono i centri delle cinque circonferenze di uguale dimensione inscritte in una di dimensione maggiore).

La costruzione di rosette di sei petali consiste semplicemente nel dividere un cerchio in sei parti, tracciando archi di circonferenza, di raggio uguale al cerchio dato, che originano così un fiore a sei petali.

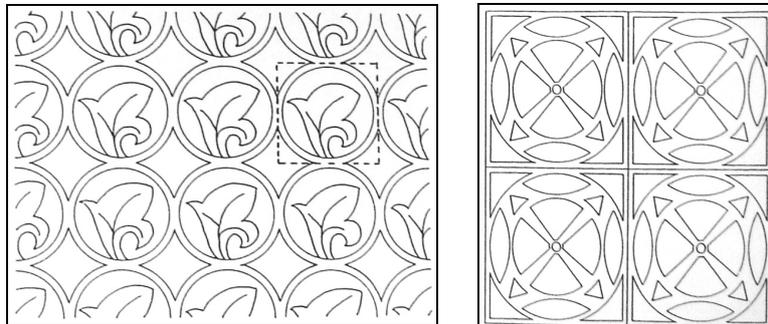
Quasi sempre le reti, le maglie sulle quali si impostava tutta l'organizzazione compositiva del disegno, scompariva nel risultato finale; tuttavia non sono pochi i casi in cui tali schemi ausiliari permangono dando luogo ad un'unione di forme geometriche, tra cui le più comuni risultano il centro e il quadrato.



Fiori a 4 petali; fiori a 5 petali; fiori a 6 petali



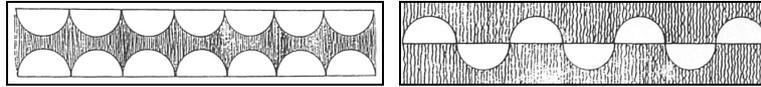
Reti di quadrati e cerchi tangenti; reti di quadrati e cerchi indipendenti



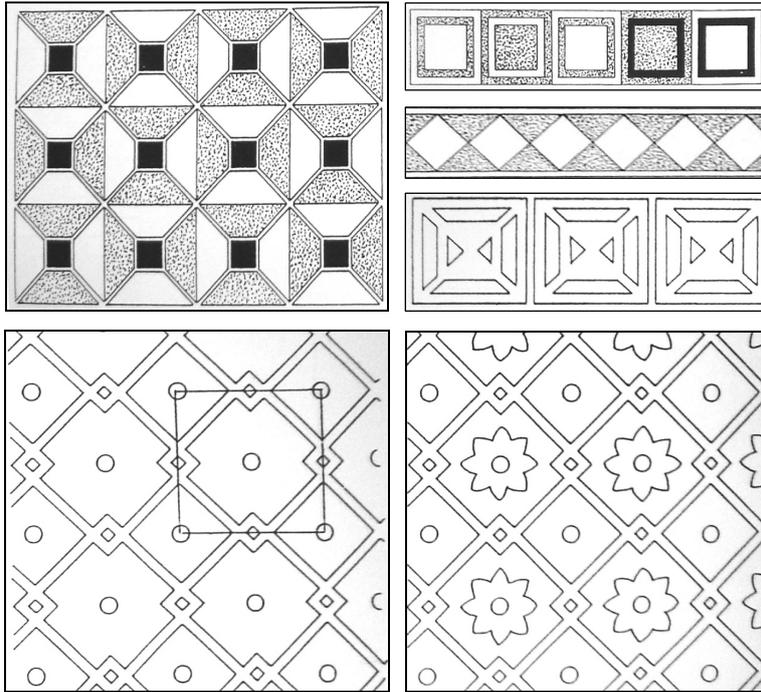
Cerchi che racchiudono figure indipendenti o motivi radiali

Vi sono motivi decorativi che vedono cerchi che racchiudono figure indipendenti, ovvero forme che non derivano dalla possibile scomposizione geometrica del cerchio: un esempio molto diffuso è il cerchio che racchiude una foglia con tre punte.

Talvolta, invece, raggi e diametri sono stati utilizzati per formare motivi decorativi: un tipico esempio è quando un numero di raggi parte dal centro per dividere il cerchio in parti uguali.



Esempi di cenefas il cui modulo di base è il semicerchio



Esempi di decorazioni (mosaici e fregi) il cui modulo di base è il quadrato

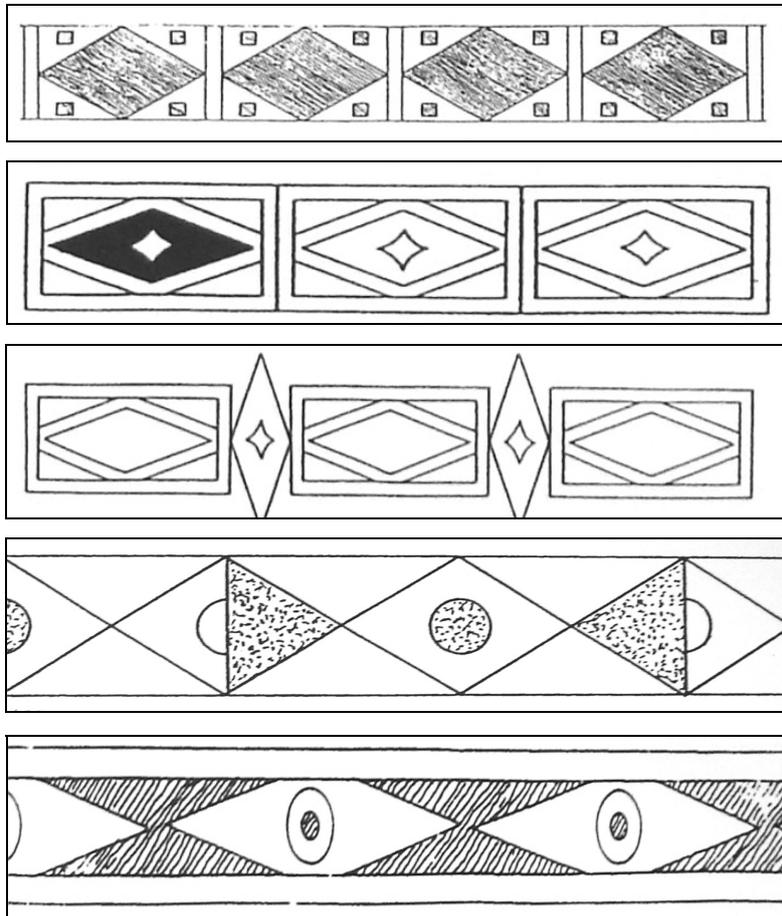
Anche il **semicerchio** ha dato vita a un proficuo numero di motivi ornamentali. Come nel caso dei cerchi le possibilità compositive offerte sono molto semplici, dando vita a decorazioni che si basano sulla ripetizione della sua stessa forma. Moltissimi sono gli esempi di fregi prodotti con semicerchi secanti e concentrici.

I **quadrilateri** sono comuni negli ornamenti dell'*esgrafiado*, e si riscontrano soprattutto nelle *cenefas* e nei motivi di ripieno. Il ricorso continuo al quadrato è dovuto a due diverse ragioni: la semplicità esecutiva, del tutto priva di complessità; la forma quadrata delle *plantilla*, utilizzata, quasi sempre, per tracciare il disegno della facciata. Molte volte il quadrato che si vede nel motivo decorativo finale altro non è che il contorno dello stampo utilizzato per effettuare tale ornamento.

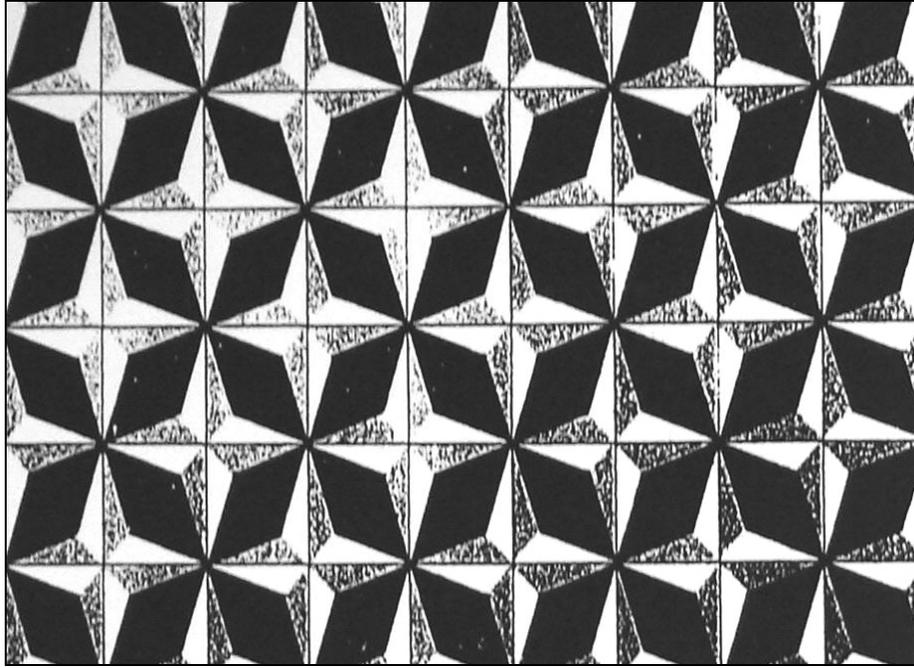
Vi è un numero notevole di esempi dove compaiono quadrati e loro diagonali, accompagnati da altri motivi decorativi, quali quadrati più piccoli, cerchi e semicerchi nei vertici o nei punti medi dei rispettivi lati. Una notevole quantità di decorazioni si basa su quadrati che entrano in contatto, si intersecano, si intrecciano, fino a sovrapporsi.

Una successione di **rombi**, molto frequente nei fregi, è spesso arricchita con cambi di dimensioni e trattamento della superficie o con altre figure quali cerchi e quadrati.

Sono stati ritrovati, inoltre, esempi di notevole bellezza, dove i rombi sono stati raggruppati in modo tale da formare stelle di quattro punte.



Esempi di fregi il cui modulo di base è il rombo



Composizione decorativa dove la combinazione di rombi origina stelle di 4 punte

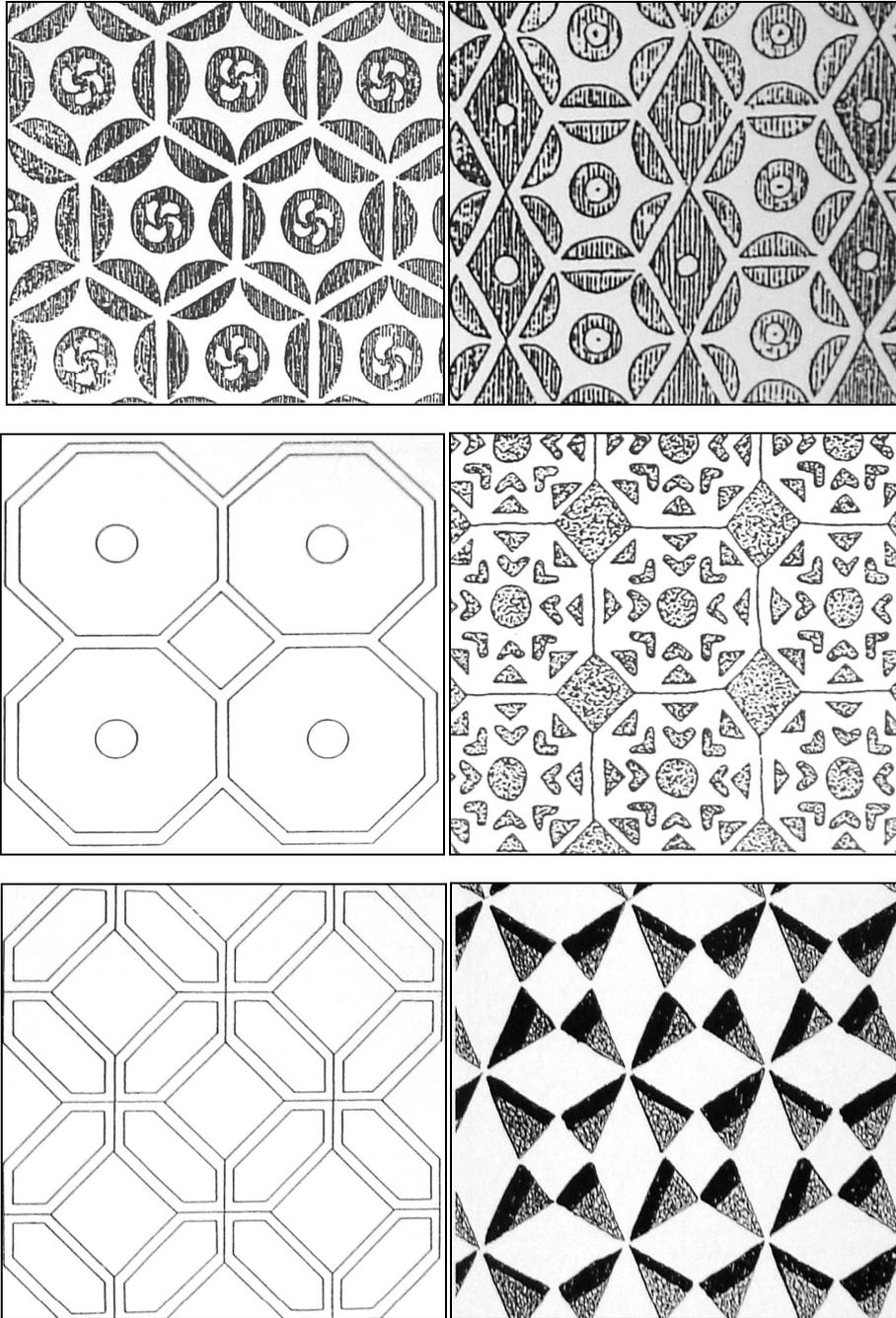
Poligoni di sei lati si riscontrano nelle decorazioni dell'*esgrafiado*, soprattutto nelle tassellazioni.

La maggior parte di questi si basa su due trame di **esagoni** differenti: esagoni regolari perfettamente incastrati l'uno nell'altro, ed esagoni regolari, che nel ripetersi, lasciano spazi liberi di forma romboidale.

Quasi sempre all'interno degli esagoni vengono inserite ulteriori forme. Differentemente dall'esagono, l'**ottagono** non può incastrarsi perfettamente nel successivo senza lasciare uno spazio vuoto di forma quadrangolare; è possibile, però, affiancando ai lati dell'ottagono dei rombi, a formare delle stelle a quattro punte.

Un'altra trama che è stata spesso riscontrata relazione gli ottagoni attraverso la formazione di spazi stellati con quattro punte.

Spesso, infine, ottagoni e quadrati si incontrano, si intrecciano per formare altri disegni elementari; un'altra tipica figura che si incontra soprattutto nei fregi e nei motivi di carattere generale è la stella a 4, 6, 8 e 9 punte.



Tassellazioni in cui ottagoni e quadrati si intrecciano a formare stelle a più punte

4.6 La geometria della torre di Codorniz

Quando si è osservato, “al microscopio”, la facciata della torre di Codorniz, sono state ritrovate una serie di forme il cui sviluppo è risultato essere la permutazione di forme circolari elementari, che sembrano giocare, toccarsi, intrecciarsi e combinarsi per dar vita ad una facciata arricchita da motivi quasi floreali cinti da *cenefas*. Questo ci ha spinto a disegnare e quindi conoscere anche quello che più non appariva.^{II}

L'esigenza di ricercare e di evidenziare tutti gli aspetti della costruzione (la sua forma, i rapporti dimensionali tra le parti, i materiali e le tecniche costruttive impiegate, ecc.) e, quindi, di verificare tali elementi in maniera scientifica e razionale, ci ha portato a programmare un'accurata campagna di rilievo, in quanto “[...] è proprio durante il processo di rilevamento infatti, che l'opera si dischiude alla conoscenza del rilevatore, il quale compie certo un lavoro di misurazione, ma anche e soprattutto un'operazione di lettura, orientata verso la conoscenza critica dell'opera da rilevare”.^{III}

Infatti, il rilievo si pone come strumento prioritario di conoscenza delle geometrie dello spazio costruito e, come tale, deve fornire quelle informazioni metriche indispensabili per la conoscenza non solo delle parti superficiali visibili, ossia di quelle che forniscono l'immagine dell'opera, ma soprattutto delle parti non percepibili direttamente.

Una lettura e un'elaborazione ragionata dei dati numerici rilevati ha portato alla comprensione della costruzione, del suo stato, della sua forma, delle trasformazioni subite e delle tecniche costruttive utilizzate: *un rilievo del materiale e dell'immateriale*. La torre di Codorniz si è così svelata molto interessante sotto il profilo della ricercatezza architettonica, per la presenza sulla facciata Sud, di un notevole *esgrafiado* segno dell'influenza islamica nelle costruzioni cristiane.

Sono stati presi diversi fotogrammi, in modo da avere una documentazione completa dell'opera; le fotografie d'insieme sono state integrate da altre di

^{II} BARBA S., *Consideración sobre el levantamiento para la conservación del patrimonio construido*, in Memorias, Resúmenes y Ponencias, 12a Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura (Comunicazione al 40° Aniversario della Cujae), Ministerio de Educación Superior, La Habana (Cuba) 2004.

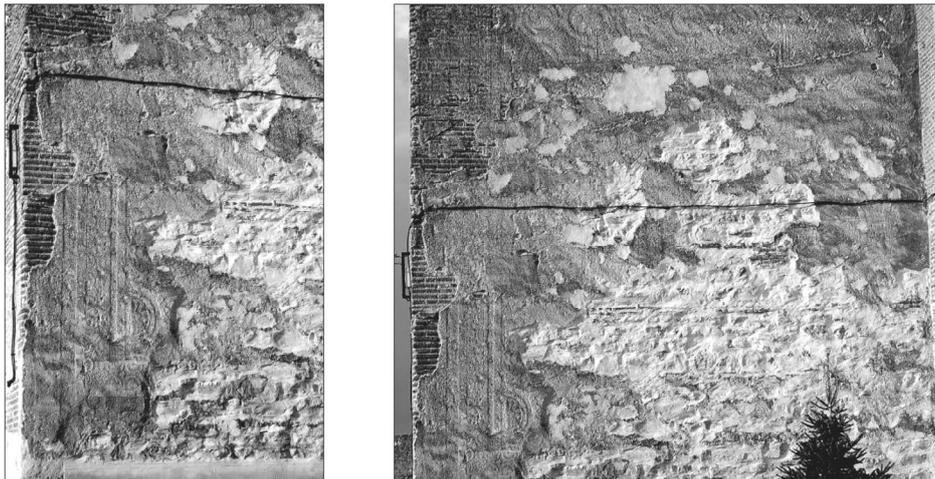
^{III} DOCCI M., MAESTRI D., *Il rilevamento architettonico*, in Storia, metodi e disegno, Laterza, Roma - Bari 1987.

dettaglio per evidenziare eventuali particolarità architettoniche e documentare i decori di maggior complessità (dimostrandosi, infatti, di grande aiuto nelle successive operazioni di restituzione prospettica).

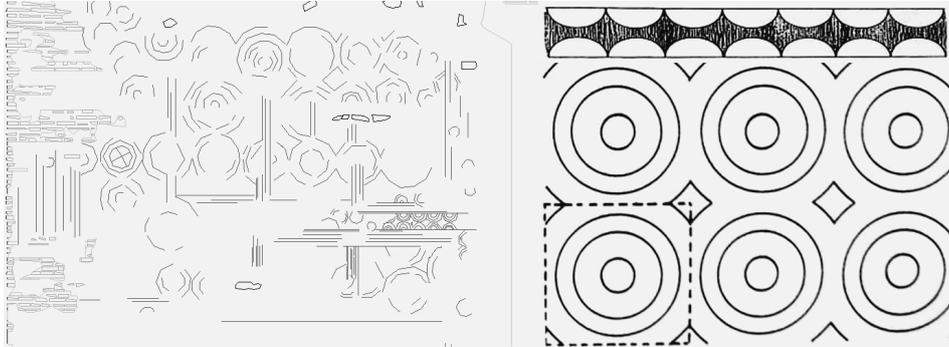
Si è cercato di registrare dettagliatamente i momenti d'imperfezione e le anomalie riscontrate nelle forme e nelle dimensioni, facendo attenzione a riportare anche nella restituzione grafica le deviazioni riguardanti non solo i tratti più generali, ma anche aspetti particolari come: forme e dimensioni dei conci, geometrie degli innesti e dei raccordi, sagome e profili di cornici, omogeneità e ripetitività degli elementi formali.

Le rappresentazioni verso cui si intende spingere questi studi, sfruttando le potenzialità offerte dall'infografia, sono volte ad essere sempre più riproduzione che inganno o illusione: sempre più modello grafico che geometrico.

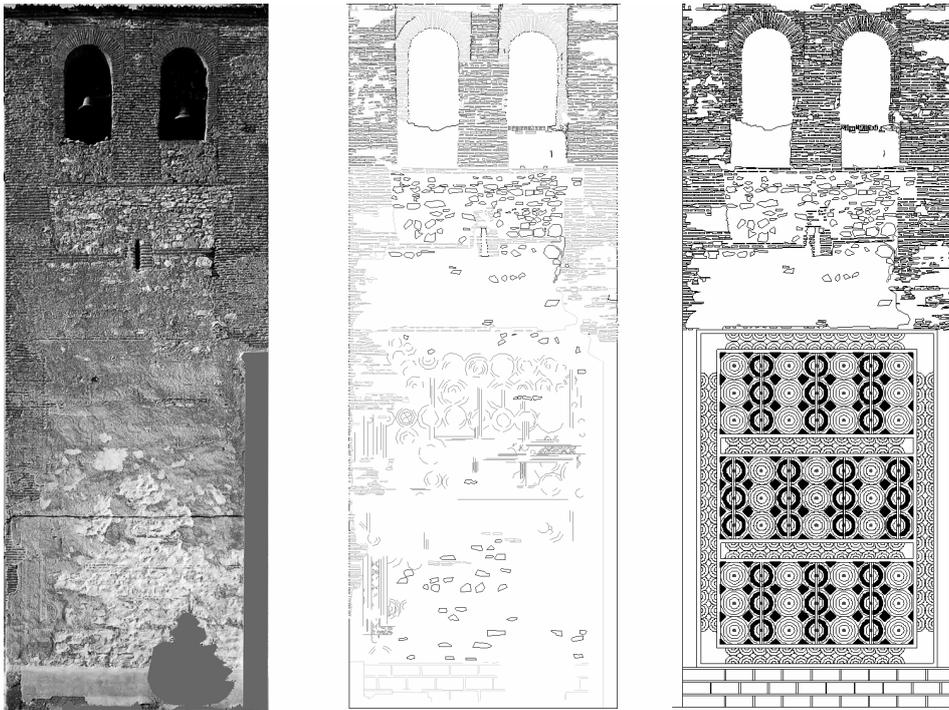
Miriammo a filtrare l'informazione, stabilire relazioni, sintetizzare modelli in modo da esaltare e mettere alla luce il reale significato di quanto rilevato e rappresentato. Tale logica rivela e spiega quello che è nascosto, crea una rappresentazione virtuale dell'informazione, che non è semplicemente la somma di quello che si legge e di quello che si vede, poiché, disegnare è operazione ben più complessa del semplice osservare.



Un esgrafiado originato dalla combinazione di più circonferenze



Particolare ottenuto per rettificazione fotografica e vettorializzazione



Fotopiano, stato attuale e ipotesi sullo stato originario

5.IL RILIEVO DI DETTAGLIO

5.1 Generalità

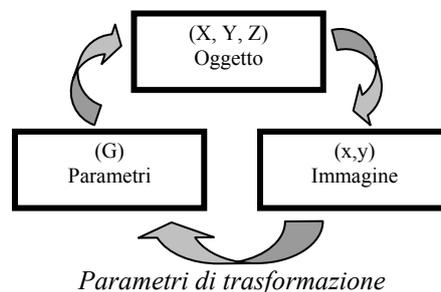
Negli ultimi anni la fotogrammetria ha subito notevoli cambiamenti che hanno riguardato sia le strumentazioni di misura, sia le metodologie di elaborazioni dati e di restituzione. Tuttavia restano inalterati i principi matematici che sono alla base di questo metodo di rilievo e che regolano le tre fasi di **presa, orientamento e restituzione**.

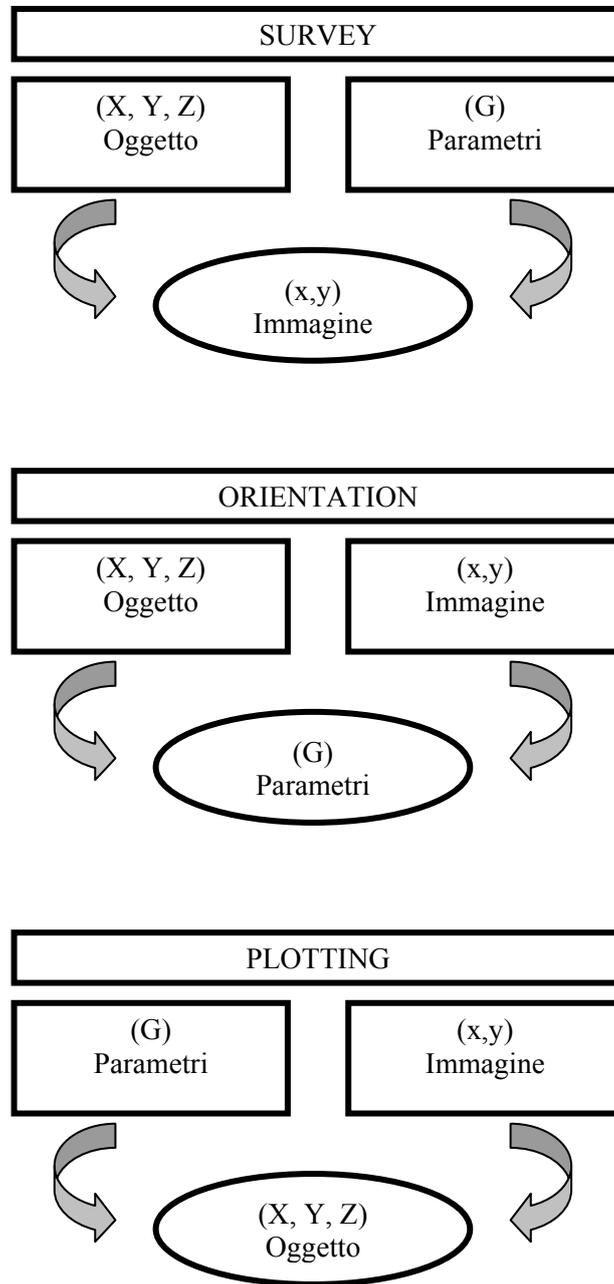
È una tecnica che si basa sui principi della geometria proiettiva e che restituisce un insieme di punti, chiamati *punti oggetto*, a partire da una coppia di fotogrammi ritratti da due diverse posizioni relative. Attraverso i parametri di trasformazione è possibile passare così dalle coordinate 2D (x,y) dell'immagine alle coordinate 3D (X,Y,Z) dell'oggetto da rilevare.

Le fasi in cui interagiscono i parametri di trasformazione, le coordinate dei punti oggetto e le coordinate immagine sono:

- **fase di presa (survey)**, è la fase in cui, dato l'oggetto da rilevare e i parametri di trasformazione, si ricavano le coordinate immagine;
- **fase di orientamento (orientation)**, è la fase in cui, data la coppia di fotogrammi e determinate le coordinate immagine di alcuni punti di cui si conoscono le coordinate oggetto, si risale ai parametri di trasformazione;
- **fase di restituzione (plotting)**, è la fase in cui si ottengono le coordinate oggetto, dati i parametri di trasformazione e le coordinate immagine di qualsiasi punto.

Quindi i “gruppi di trasformazione” in gioco sono tre: *coordinate immagine*, *i parametri di trasformazione* (che dipendono dalle caratteristiche della camera e dalle posizioni dei fotogrammi nello spazio) e le coordinate *dei punti oggetto*.



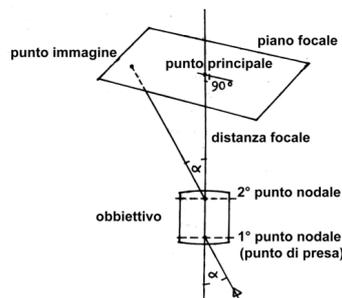


Al variare delle tre combinazioni possibili si ottiene una delle tre fasi

5.2 Fase di presa

L'immagine impressa su un fotogramma risponde alle leggi della geometria proiettiva, implicando una trasformazione da uno spazio 3D (spazio oggetto) ad uno 2D (spazio immagine), e in particolar modo può essere approssimata ad una proiezione centrale. In tal caso il piano di proiezione è assimilabile al piano della emulsione fotografica, il centro di proiezione ad un punto dell'obiettivo della camera fotografica, le rette proiettanti ai raggi luminosi che hanno formato l'immagine fotografica in questione. In un sistema ottico complesso, qual è nella realtà un obiettivo fotografico, non esiste un unico centro. Tuttavia lo schema può comunque semplificarsi, infatti, poiché dal punto di vista pratico la reale duplicazione dei centri di proiezione non comporta nessuna conseguenza pratico/grafica per ciò che si riferisce alle considerazioni di carattere geometrico, è possibile considerare nulla la distanza fra i due punti nodali e assimilarli a un unico centro di proiezione, ovvero il punto dello spazio in cui la fotografia è stata acquisita (punto di presa).

Per piano focale si intende il piano, perpendicolare all'asse dell'obiettivo, sul quale le immagini dei punti dell'oggetto si formano nella migliore condizione di focatura. La distanza fra il punto nodale dell'obiettivo e tale piano, detta distanza focale, varia in funzione della distanza dell'oggetto dalla camera fotografica e in corrispondenza della quale i punti immagine di un oggetto, posto a distanza infinita dal punto di presa, siano a fuoco sul piano focale. Spesso nelle prese fotogrammetriche la distanza dell'oggetto è quasi sempre molto grande rispetto alla distanza focale, normalmente, più grande della distanza iperfocale, distanza limite oltre la quale l'immagine fotografica si forma sempre a fuoco sul piano focale.



La focale è la distanza tra il centro di proiezione e il piano focale (A. TORTORA)

Per tale ragione, nella maggior parte dei rilievi fotogrammetrici, la focale è posta all'infinito (cioè a distanze superiori alla distanza iperfocale).

La distanza focale, inoltre, determina l'ampiezza del cono dei raggi proiettanti, così come il punto principale individua la posizione del piano di proiezione (il piano focale) rispetto al centro di proiezione.

La scala del fotogramma dipende dalla distanza dell'oggetto dall'obbiettivo: gli oggetti posti più vicino sull'immagine saranno più grandi rispetto a quelli posti a profondità maggiori, con evidente non conservazione delle proprietà metriche.

In base a quest'ultima considerazione è necessario definire un parametro importante di un fotogramma: la sua scala, meglio nota come **scala media del fotogramma** (dimensione sul fotogramma/dimensione reale).

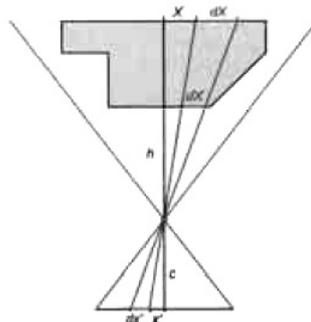
Il relativo rapporto di riduzione tra oggetto reale e la sua immagine può essere definito come:

$$Scala = 1:m \quad \text{dove } m = h/c = X/x$$

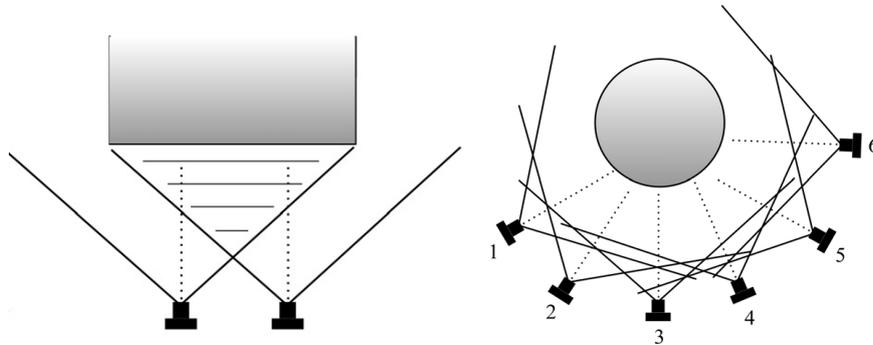
dove c è la distanza principale ed h è la distanza dell'oggetto, o di una sua porzione dal centro di proiezione.

Questo fattore di scala costituisce un possibile parametro per una stima approssimativa dell'accuratezza raggiungibile e della propagazione dell'errore, che si ottiene differenziando l'equazione precedente $dX = m \cdot dx'$.

L'incertezza lineare dx' (valore misurato in pixel) nello spazio immagine genera un errore dX nello spazio oggetto direttamente proporzionale al denominatore della scala m (in condizioni favorevoli e con l'uso di target artificiali si può arrivare ad un'accuratezza dell'ordine dei sub pixel).



Propagazione dell'errore (S. DEL PIZZO)



Configurazione stereo; configurazione multi-immagini convergenti (V. A. GIRELLI)

Assume notevole importanza, per l'accuratezza della ricostruzione, anche la configurazione delle prese che cambia in funzione della tipologia di rilievo: **configurazione stereo** (assi paralleli) e **configurazione multi-immagini convergenti** (utilizzata maggiormente nei rilievi *close-range*). Prima di passare alla fase di orientamento, è necessario definire un sistema di riferimento, il cosiddetto *sistema immagine* (per le immagini digitali, essendo queste formate da matrici di pixel, il sistema di riferimento di default è fissato nel primo pixel in alto a sinistra e l'asse y' è l'asse che percorre l'altezza dell'immagine, mentre l'asse x' è l'asse che percorre la larghezza dell'immagine).

5.3 Fase di orientamento

La fase di orientamento in cui si ricostruirà la posizione e l'orientamento delle camere al momento della presa, consta di due momenti: orientamento interno e orientamento esterno.

5.3.1 Orientamento interno

L'orientamento interno ricostruisce il fascio proiettivo rispetto al sistema di riferimento. La fotografia tuttavia non risulta essere una perfetta proiezione centrale in quanto, come accennato, non caratterizzata da un unico centro di vista. Per ovviare a tale fatto è possibile misurare gli effetti del passaggio dei raggi ottici attraverso l'obiettivo, in altre parole studiarne le conseguenze, avendo come input i seguenti parametri: le coordinate del punto principale; la distanza focale; le distorsioni a cui è sottoposta l'immagine (tutti parametri che risultano noti se la camera possiede un certificato di calibrazione).



Possibili distorsioni ottiche

Possiamo definire, quindi, distorsione $dp = (P' - P'')$, sul piano dell'immagine, la distanza fra il punto immagine effettivo P' e il punto che si avrebbe se il raggio ottico non avesse subito deviazioni P'' . La distorsione può essere espressa da due componenti: *radiale* e *tangenziale*, quest'ultima perpendicolare alla prima.

5.3.2 Orientamento esterno

Una volta ricostruiti i fasci proiettivi, si devono riposizionare le camere nella stessa posizione tridimensionale che avevano all'atto della presa.

Noti i parametri di orientamento interno, si definisce una terna cartesiana $O'x'y'z'$, dove O' è il centro prospettico, $x'y'$ il piano parallelo a quello immagine e z' l'asse coincidente con quello ottico (rivolto verso l'immagine negativa). È necessario quindi individuare un sistema di riferimento oggetto, in modo da riposizionare tutti i fotogrammi; per fare ciò bisogna conoscere le coordinate del centro prospettico e gli angoli che il sistema $O'x'y'z'$ forma con il sistema di riferimento.

L'operazione viene scomposta in due fasi: nella prima, detta di orientamento relativo, si determina la posizione reciproca tra due fotogrammi e così facendo si ricostruisce il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi (in pratica una ricostruzione in scala dell'oggetto reale); nella seconda, detta di orientamento assoluto, si ruota e si scala il modello precedentemente ottenuto, collimando punti osservati sul modello con le rispettive coordinate oggetto.

5.3.2.1 Orientamento relativo

Nell'orientamento relativo si determina la posizione di un fascio proiettivo rispetto a un altro considerato fisso, determinando la posizione

di una camera rispetto a un'altra; invece di esaminare un sistema di riferimento assoluto si considera un sistema di riferimento che coincida con quello di una prima camera.

In questo modo le incognite sono ridotte a sei: movimenti di traslazione dei centri di proiezione paralleli alle tre direzioni X , Y , Z ; movimenti di rotazione intorno ad assi paralleli alle direzioni X ed Y ed intorno all'asse del fascio. È facile comprendere che variando la distanza tra i centri di proiezione delle due prese (base di presa) varierà la scala del modello.

Con l'orientamento relativo avviene la formazione del modello fotogrammetrico attraverso l'intersezione delle rette proiettive omologhe. Una retta nello spazio è individuata da due equazioni, che sono le equazioni dei piani la cui intersezione fornisce la retta in questione. Quindi le due rette proiettive saranno individuate da quattro equazioni; si ottiene quindi un sistema di quattro equazioni in tre incognite.

Queste equazioni, dette di *collinearità*, funzione dei parametri di orientamento interno e dei parametri di orientamento esterno di un fotogramma, descrivono dunque la trasformazione dalle coordinate oggetto nelle corrispondenti coordinate immagini.

5.3.2.2 *Bundle adjustment*

Nel caso in cui i fotogrammi sono più di due (*blocco fotogrammetrico*) si formano tanti modelli quante sono le coppie di fotogrammi che sono orientate. Grazie al riconoscimento di punti omologhi su più modelli è possibile concatenare i diversi modelli indipendenti che formeranno un unico modello in scala dell'oggetto da restituire.

Il *bundle adjustment* (triangolazione a stelle proiettive) segue un percorso diverso da quello precedentemente descritto: è indispensabile il riconoscimento di più punti in diverse immagini e che i raggi proiettivi si incontrino nel punto oggetto con un determinato angolo, in modo da rendere minime le incertezze ed assicurare un migliore modello stocastico. Questo procedimento ben si adatta alle condizioni di prese convergenti.

Il relativo processo prevede in ingresso la misura di coordinate immagine di alcuni punti notevoli, cioè facilmente riconoscibili in altre immagini; scelti manualmente o automaticamente. In quest'ultimo caso è possibile effettuare le misure attraverso l'impiego di *marker* codificati che andranno posizionati sull'oggetto da restituire, oppure attraverso

algoritmi di *interesting point*, che individuano dei punti specifici per determinate caratteristiche come la luminosità, il contrasto, il gradiente ecc. Noti i valori approssimati delle coordinate dei punti di presa, degli orientamenti e delle coordinate dei punti di passaggio, i risultati del calcolo del *bundle adjustment*, ricavati dalle equazioni di collinearità, sono le coordinate tridimensionali dei punti corrispondenti ai punti immagine di controllo, i parametri di orientamento esterno di ciascuna camera e i parametri di orientamento interno della camera utilizzata.

È possibile verificare i risultati ottenuti ricalcolando le coordinate immagine, quindi i residui, e individuare la presenza di eventuali errori grossolani.

5.3.2.3 Orientamento assoluto

Al termine di queste operazioni i due fasci di raggi avranno nello spazio un orientamento relativo, assumendo la posizione del momento di presa. In queste condizioni tutte le coppie di raggi omologhi dei due fasci si intersecheranno correttamente e l'insieme dei punti di intersezione riprodurrà, come si è precedentemente detto, un modello dell'oggetto fotografato. Tuttavia questo modello è simile (similitudine geometrica) all'oggetto fotografato; ancora non saranno note quali relazioni sussistano fra le sue dimensioni e i rapporti di scala né sarà noto il suo orientamento nello spazio reale.

Per poter definire la scala, occorre conoscere alcuni elementi dimensionali e di orientamento dell'oggetto fotografato che possano essere confrontati con i corrispondenti elementi del modello. Ed è proprio quest'azione, attraverso la quale il modello ricostruito con l'orientamento relativo viene confrontato con l'oggetto fotografato e ad esso riferito, che viene definita operazione di orientamento assoluto. Sarà così possibile determinare i valori delle rotazioni che occorre imprimere ai fasci, e le traslazioni che è necessario imprimere ai centri di proiezione per ripristinare la corretta posizione spaziale del modello e restituirne la scala desiderata.

5.4 Digital Image Processing

Il processo dell'*image processing* permette di estrarre informazioni da un'immagine. Una delle relative operazioni fondamentali, richieste nel processo di elaborazione delle immagini digitali, è la *convoluzione* che,

attraverso specifici algoritmi, permette operazioni di filtraggio lineare come *smoothing*, *denoising*, *edge detection*, *corner detection*. I filtri di convoluzione sono utilizzati per modificare la visibilità dei dettagli: nello specifico i filtri *passa-basso* tendono a sfocare l'immagine; invece i filtri *passa-alto* esaltano il dettaglio ma anche il rumore. Nel primo caso il generico pixel di un'immagine è sostituito con un altro, che presenta intensità pari alla media delle intensità dei pixel che ricadono all'interno della maschera centrata nel pixel in questione. Si ottiene così un'immagine maggiormente ammorbidita, dove è possibile rimuovere alcuni dettagli portando in risalto gli oggetti di maggior interesse.

Con il filtro gaussiano di *smoothing* è possibile sfocare le immagini e ridurre il rumore (è preferibile avere una sfumatura controllata, soprattutto se l'immagine deve subire ulteriori elaborazioni). In generale questi filtri tendono a ridurre i salti di intensità luminosa dell'immagine caratteristica tipica del rumore random.

Se è vero che applicando un filtro *passa-basso* a un'immagine, il rumore presente viene attenuato, è altrettanto vero che i bordi (*edge*) di un oggetto (che sono anch'essi caratterizzati da un salto di intensità) vengono smussati, apparendo come sfocati.

I contorni sono molto importanti, perché sostanzialmente in base ad essi ha luogo la percezione visiva dell'oggetto, e risultano addirittura fondamentali nel caso di estrazione di un elaborato di tipo vettoriale che restituisce la scena reale.

Per estrarre queste informazioni sarà necessario elaborare l'immagine ricorrendo ad altri tipi di filtri detti *passa-alto*.

5.5 Le features

L'*image matching* è l'operazione fondamentale e cruciale di molte procedure: permette la ricostruzione di un oggetto o di una scena in 3D da una serie di immagini, attraverso l'estrazione e il riconoscimento di features omologhe. Le features sono descrittori degli oggetti presenti nell'immagine, invarianti rispetto ai cambiamenti di scala, rotazione e parzialmente invarianti ai cambiamenti di illuminazione, che possono classificarsi di livello zero (zone uniformi), di primo livello (contorni), e di secondo (punti).

Le regioni uniformi (*regions*) normalmente corrispondono a pezzi di superfici *smoothed*, caratterizzate da variazioni "dolci" dell'intensità.

Gli *edge*, o contorni, si hanno in corrispondenza di significative variazioni monodirezionali dell'intensità luminosa; invece i *point features*, o *corner*, sono punti notevoli dell'immagine posizionati in corrispondenza di discontinuità bidirezionali dell'intensità luminosa. I *corner* sono in genere localizzabili accuratamente e ricorrono in immagini successive, cosa che li rende esplicitamente adatti per scopi fotogrammetrici; sono inoltre abbondanti, in questo modo è possibile avere un numero di equazioni tale da poter risolvere il *bundle adjustment* in maniera ottimale. Attraverso un database che contiene i descrittori delle features estratte da un oggetto, gli algoritmi di *corner detection* riescono ad individuare quello stesso oggetto in una scena diversa e posto in posizione diversa, semplicemente confrontando le *features* in esso presenti con quelle presenti nel database.

Il *matching* viene effettuato attraverso la ricerca della minore distanza euclidea tra i descrittori, rispettando – per risultati migliori – dei prefissati requisiti: i punti estratti dovranno essere visibili almeno in due immagini che ritraggono la stessa scena secondo due viste diverse; le prese di partenza dovranno essere ricche di informazioni per permettere l'operazione di *matching* automatica.

I diversi algoritmi che permettono l'estrazione di *point of interest*, si possono classificare in due categorie: il primo gruppo si basa su algoritmi di *edge detection*. Dopo aver determinato i contorni, si passa all'estrazione di punti particolari, che possono essere quelli in cui si ha massima curvatura, oppure punti ottenuti da intersezioni di linee; il secondo gruppo estrae direttamente i punti in base a caratteristiche radiometriche dei pixel (nel prosieguo di questo lavoro di tesi si darà conto soltanto di determinati software sviluppati secondo algoritmi che ricadono in quest'ultimo gruppo). Nello specifico, attraverso i casi studio di seguito esaminati e in funzione del sistema decorativo in essi presente, si sono testate e confrontate differenti tecniche di photo scanning ritenute idonee ad esplicitare il processo geometrico di base al fine di facilitare la successiva fase di replica sia in ambiente digitale che fisico e di favorire una funzionale sistematizzazione dell'ornato.

Il confronto tra le diverse tecniche di rilevamento sperimentate è stato condotto in riferimento al Duomo di Salerno, complesso ecclesiale del XII sec. dotato di un quadriportico, all'interno del quale sono ospitati alcuni sarcofagi di personaggi illustri della storia cittadina.

La scelta operata, avendo la possibilità di agire sia a livello architettonico sia a livello di particolari di singoli elementi (i rosoni e i bassorilievi dei sarcofagi), ha consentito non solo di verificare la efficacia di ciascuna metodologia, ma anche di verificarne la coerenza ed integrazione con i metodi di rilievo basati sull'uso del laser scanner.

5.6 Rilievo delle facciate con il software Allplan Photo

Le prime visualizzazioni riportate si riferiscono ai risultati ottenuti adottando tecniche di fotogrammetria non convenzionale: attraverso l'utilizzo di una sola fotografia eseguita con opportune precauzioni, e attraverso il rilievo diretto di alcuni elementi dell'edificio, è stato possibile ricavare per via indiretta, tutte le misure dell'edificio, ottenendo i fotopiani delle diverse facciate. In questi casi non sono necessarie informazioni preliminari sulla calibrazione della fotocamera e tutte le informazioni saranno restituite a partire da immagini 2D.

Esistono numerosi software specificatamente dedicati a questo genere di applicazioni e tutti funzionano seguendo modalità simili, principalmente: acquisizione e importazione dell'immagine nel programma, eliminazione della deformazione prospettica dell'area selezionata, definizione della risoluzione dell'immagine, mosaicatura, restituzione grafica, salvataggio. Nel caso specifico, il software utilizzato, Allplan Photo della Nemetschek, effettua una restituzione da singolo fotogramma, di facciate unipiani tramite una modalità "geometrica", secondo cui le informazioni metriche si possono ottenere con la conoscenza di solo due distanze (una orizzontale e l'altra verticale).



Raddrizzamento digitale fotogrammetrico

Specifici algoritmi, rappresentativi di una trasformazione prospettica di tipo affine, individuano una corrispondenza tra i punti dell'oggetto rappresentato e quelli dell'immagine digitale: in questa fase l'immagine digitale subisce una variazione di scala anisotropa e disomogenea dettata da una relazione omografica e va determinarsi il rapporto pixel-oggetto che rende possibile le successive operazioni di misura sull'immagine stessa e di mosaicare diverse porzioni dello stesso oggetto.

Si può risalire poi alla restituzione degli elementi appartenenti ai piani paralleli, essendo questi legati a quello principale da una relazione omotetica, che difatti subiranno una deformazione caratterizzata da una diversa scala di restituzione (dipendente dalla profondità rispetto al centro di presa); passaggio fondamentale per restituire così un solo elaborato di prospetto, in un'unica scala grafica.

5.7 Rilievo dei rosoni con i programmi ZScan e Z-Map Laser

Per il rilievo di maggior dettaglio dei rosoni del Duomo di Salerno si è ricorso al software ZScan 3.4.4 e Z-Map Laser 3.6.42 della Menci.

In tal caso, la fase di rilievo ha richiesto la codifica della relativa procedura metodologica, che si è articolata nelle seguenti fasi: *progetto delle stazioni* anche in funzione del contesto ambientale; *realizzazione delle prese fotografiche* con camera digitale calibrata; *ricostruzione dell'orientamento interno/esterno* dove, con procedure semiautomatiche o automatiche, si sono correlate le diverse immagini in un prefissato sistema di riferimento; *generazione del modello tridimensionale* tramite specifici algoritmi (*matching area based/feature based*), visualizzabile come nuvola di punti in modalità *wireframe* o con mappatura di *texture*; *generazione delle ortofoto e DEM*; *editing delle immagini georiferite* e, infine, l'*ortofotomosaicatura* con l'esportazione dei risultati ottenuti.



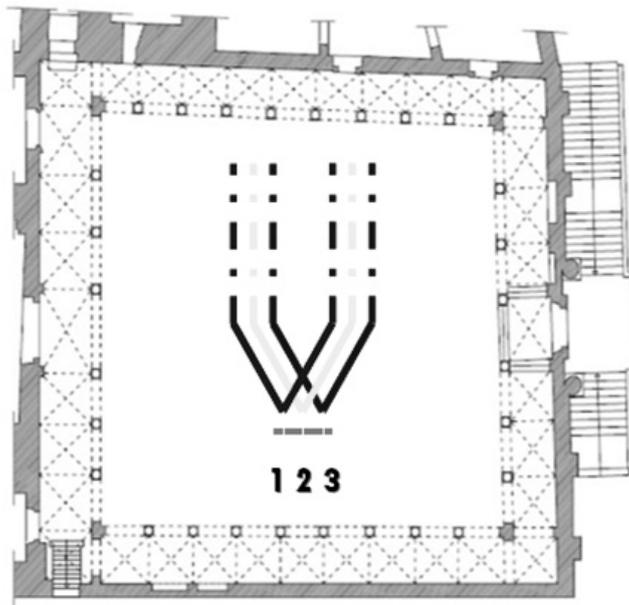
Hardware: treppiedi, barra micrometrica, camera digitale calibrata

5.7.1 Il progetto delle stazioni di presa delle triplette

La metodologia implementata per l'acquisizione simultanea di nuvole di punti e di texture, ha richiesto l'utilizzo di una camera fotografica reflex digitale ad alta risoluzione con ottica fissa calibrata, una base di 90 cm, e il programma ZScan della MenciSoftware progettato su un algoritmo di analisi multifocale dell'immagine.

Le informazioni relative alle caratteristiche del colore sono ottenute contemporaneamente alle coordinate 3D dei punti, e automaticamente associate ad esse.

Un momento saliente è risultato la scelta dei punti di ripresa, che variano in funzione dell'ottica utilizzata, del livello di dettaglio che si vuole ottenere e delle dimensioni dell'architettura da rilevare.



Esempio di tripletta

Per ogni stazione, lasciando invariata l'inclinazione dell'asse principale della camera fotografica, devono essere effettuate tre prese (*tripletta*) ordinate da sinistra verso destra, simmetriche rispetto al punto di mezzo della base fotogrammetrica (*Baseline*). Spesso è necessario acquisire, per ogni punto di stazione, più di una tripletta, in funzione dell'altezza da rilevare; in tal caso è opportuno – sia per una maggiore facilità operativa in fase di restituzione, sia per ridurre l'incidenza di eventuali errori accidentali – mantenere costante l'inclinazione dell'asse della camera nel traslare il centro di presa da una stazione all'altra.

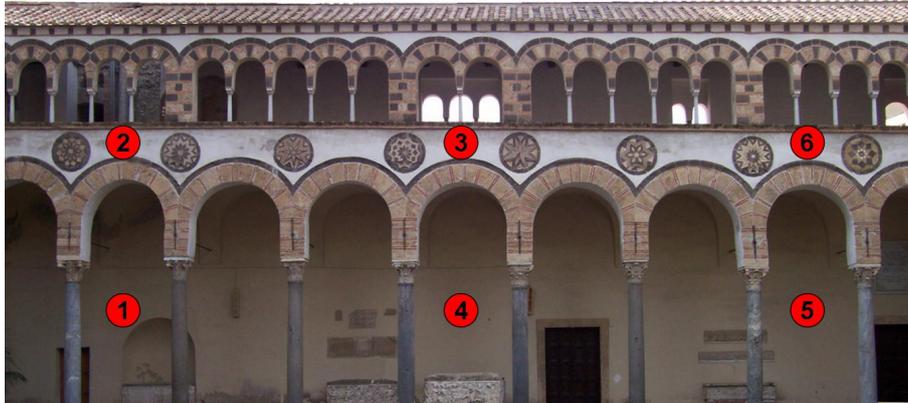
L'algoritmo di base del programma ZScan elabora soltanto le porzioni di immagini presenti simultaneamente nei tre fotogrammi; è pertanto fondamentale, per ovviare a problemi di disparità eccessiva o di insufficiente informazione spaziale, scegliere la *Baseline*, che rappresenta la distanza tra la prima e la terza presa, in modo da assicurare una zona di sovrapposizione di circa il 60% fra questi due scatti. Logicamente, a distanze minori, creandosi ampie aree di sovrapposizione si ottiene un maggior livello di dettaglio, ma anche la necessità di realizzare più triplette fotografiche per coprire l'intera superficie da rilevare.

I principali limiti di applicazione di questa strumentazione sono dovuti alla distanza di messa a fuoco (che definisce la cosiddetta 'distanza minima' da cui è possibile operare), alla focale, e quindi al campo visivo della camera (che stabilisce la 'distanza teorica ottimale' delle stazioni di presa), all'ottica e alla lunghezza della barra che determina la 'distanza massima' da cui si potrà rilevare (si è ritenuto accettabile un valore di 10÷12 m). A distanze minori, creandosi ampie aree di sovrapposizione, si ottiene un maggior livello di dettaglio, ma anche la necessità di realizzare più triplette per coprire l'intera superficie da rilevare; i valori di accuratezza, ovvero la massima precisione in profondità, sono tabellati in relazione alla *Baseline* e alla distanza di presa.

Tabulated values of DEPTH ACCURACY are expressed in mm and are PURE THEORETICAL. Real values depend strongly on job conditions.

Baseline	100 mm	200 mm	300 mm	500 mm	750 mm	1000 mm	2000 mm	3000 mm	5000 mm	7500 mm	10000 mm			
Baseline 20 mm	0.04	0.16	0.37											
Baseline 50 mm			0.15	0.41	0.92	1.64								
Baseline 100 mm				0.20	0.46	0.82	3.27							
Baseline 150 mm					0.31	0.55	2.18	4.91						
Baseline 200 mm						0.41	1.64	3.68						
Baseline 300 mm							1.09	2.46	6.82					
Baseline 400 mm							0.82	1.84	5.12	11.51				
Baseline 500 mm								1.47	4.09	9.21	16.37			
Baseline 600 mm									1.23	3.41	7.67	13.64		
Baseline 700 mm										2.92	6.58	11.69		
Baseline 800 mm											2.56	5.76	10.23	
Baseline 900 mm												2.27	5.12	9.10

Accuratezza, funzione della distanza di presa e della *Baseline*



Schema di acquisizione delle triplete

Sebbene tale tecnica non necessiti teoricamente di alcun punto di controllo o misurazione preliminare, un rilievo diretto di appoggio, utilizzando target naturali o artificiali, può facilitare le successive operazioni di registrazione e di mosaicatura, oltre che essere un utile strumento di supporto e di verifica geometrica del modello. Ad esempio, operando con marche è possibile spingere l'impiego della strumentazione fino a 16 m (anche 20 m, nel caso di prese con asse quasi orizzontale).

5.7.2 Il trattamento dei dati

Durante la fase di acquisizione per ogni facciata si sono rese necessarie 4 stazioni, e quindi 8 triplete per un totale di 24 prese fotografiche.

Le prese sono state effettuate a una distanza media di circa 6-7 metri dalle facciate, e utilizzando l'intera lunghezza della *Baseline* pari a 90 cm. Le immagini riprese, vengono acquisite nella finestra di elaborazione del software *Z-Scan*, e visualizzate secondo l'ordine con cui sono state effettuate.

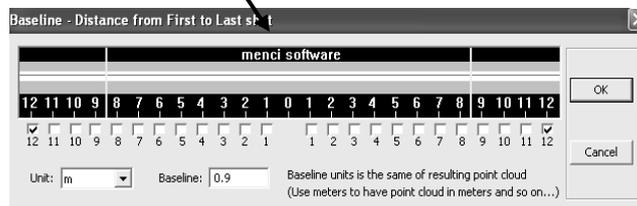
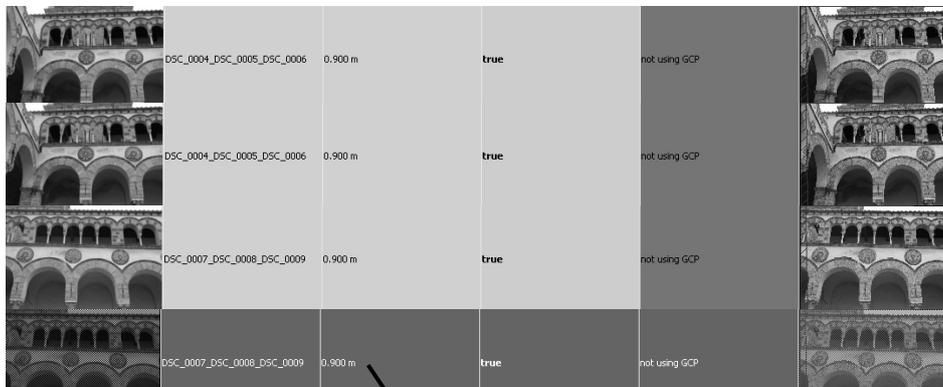
Il procedimento di rettifica iniziale, basata su un processo di *image-matching*, ha permesso per ogni tripletta la ricostruzione degli orientamenti interni dei fotogrammi, eliminando le imperfezioni dovute a micro spostamenti del cavalletto o della barra (questo nonostante le prese siano state tutte eseguite in modalità autoscatto).

Sebbene il sistema consente di ottenere una buona qualità ricostruttiva sia della forma sia del colore, come avviene anche con i più tradizionali laser scanner, molteplici fattori, quali la distanza di presa, la tipologia di

superficie, l'illuminazione e, non ultimo, l'errore sistematico della strumentazione possono determinare la presenza di punti con un'errata elevazione (*rumore*). Tuttavia, se la superficie da documentare presenta una certa continuità e regolarità, come nel caso in studio, si può ipotizzare che le coordinate 3D di un generico punto della nuvola siano fortemente correlate ai valori dei punti limitrofi.

Pertanto, è possibile ridurre il rumore, in altre parole eliminare eventuali dati sporchi, agendo sul comando *Noise Reduction* e stabilendo l'ampiezza dell'intorno con cui ogni punto deve relazionarsi nella generazione del modello tridimensionale; in presenza di superfici piane, tale range sarà ampliato per privilegiare l'uniformità e la pulizia del modello finale.

In funzione dell'*Area of Interest - AOI*, si assegna un diverso passo di risoluzione (*Step*), che rappresenta il numero di pixel sufficiente a generare un punto tridimensionale nello spazio digitale: al diminuire di tale valore, si riduce il *Ground Sample Distance - GSD*, ovvero la distanza media dei punti 3D sul modello generato, e la nuvola di punti colorati risulterà più fitta e definita, anche se più pesante da gestire in termini di dimensione dei file generati, nonché di capacità di elaborazione hardware.

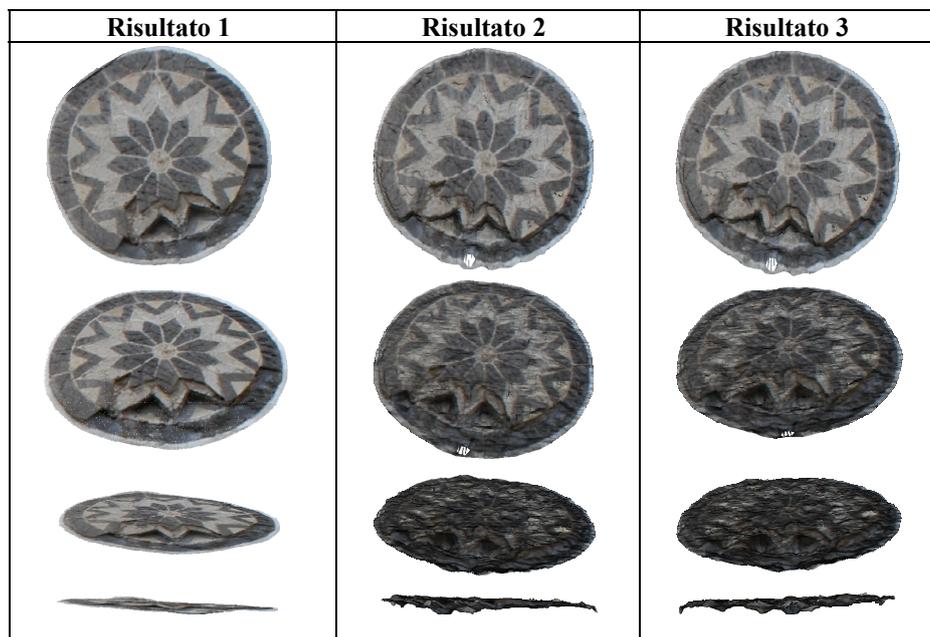


Definizione della Baseline

Si è comunque preferito generare modelli 3D molto densi, per garantire, anche in assenza di texture, la comprensibilità, la verosimiglianza e il grado di definizione adeguato alle scale di dettaglio.

Si è prestabilito, per ogni tripletta, un passo di risoluzione (*Step*) pari a 1: volendo produrre elaborati in scala 1:10, è stato necessario individuare empiricamente un valore dello *Step* tale che il relativo *GSD* fosse inferiore al grado di risoluzione relativo che in tal caso risulta pari a 0,05 cm. Così facendo è possibile non rappresentare la distanza tra i punti del modello 3D e quindi apprezzare la nuvola di punti come continua.

TABELLA 1			
Parametri	Risultato 1	Risultato 2	Risultato 3
Step	1	1	1
GSD	0,004	0,004	0,004
Alpha	0,04	0,04	0,04
N.R.	Flat	High	Medium



Risultati ottenuti in funzione dei parametri riportati in tabella 1

Per poter poi associare la texture al modello è necessario passare alla successiva fase di triangolazione e generazione della mesh. Nella definizione del modello poligonale andrà stabilito un valore di soglia *Alpha*, che rappresenta il diametro massimo della circonferenza che circoscrive il triangolo della *mesh*: verranno così interpolati solamente i punti tra loro più vicini rispetto al limite così fissato. Se si definisce un *Alpha* molto piccolo, si determinerà una mesh fitta con presenza di molti fori; viceversa, un valore troppo grande genererà poligoni non complanari, anche se con pochi ‘vuoti’ di informazione. Il tempo impiegato per generare ogni nuvola di punti varierà quindi in funzione dei valori di *Step*, della dimensione e del numero delle *AOI* definite, delle qualità cromatiche della superficie modellata, del valore di *Noise Reduction* e della presenza o meno del calcolo di triangolazione.

TABELLA 2		
Parametri	Risultato 1	Risultato 2
STEP	1	1
GSD	0,004	0,004
N.R.	medium	medium
Alpha	0,04	0,02



Risultati ottenuti in funzione dei parametri riportati in tabella 2

Il modello ottenuto può essere esportato per le successive fasi di editing per la generazione, anche con procedure automatizzate, di piante, sezioni, profili, curve di livello, DEM, ecc. Si può ricorrere a Z-Map Laser, come anticipato, per le operazioni di allineamento delle varie nuvole, la correzione degli errori, la generazione delle ortofoto e la successiva ed eventuale vettorializzazione.

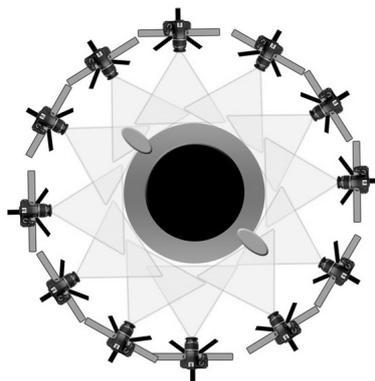
5.7.3 Il processamento dei dati

Caricato il modello 3D in Z-Map Laser, si ottiene un'unica entità importata su uno specifico layer che, a seconda delle necessità, può essere visualizzata in differenti modalità (a punti, a superficie, a “fil di ferro”). Individuato un modello di riferimento, si definisce su di esso l'*UCS*, ovvero il piano di lavoro, dove verranno proiettate tutte le entità restituite. La successiva fase di registrazione permette la georeferenziazione di modelli contigui attraverso la collimazione di punti omologhi, ottenendo così una nuova entità rototraslata rispetto al precedente modello; tale elaborazione può essere agevolata attraverso le informazioni che si ottengono dalle texture, soprattutto per gli oggetti che presentano particolarità cromatiche piuttosto che geometriche.

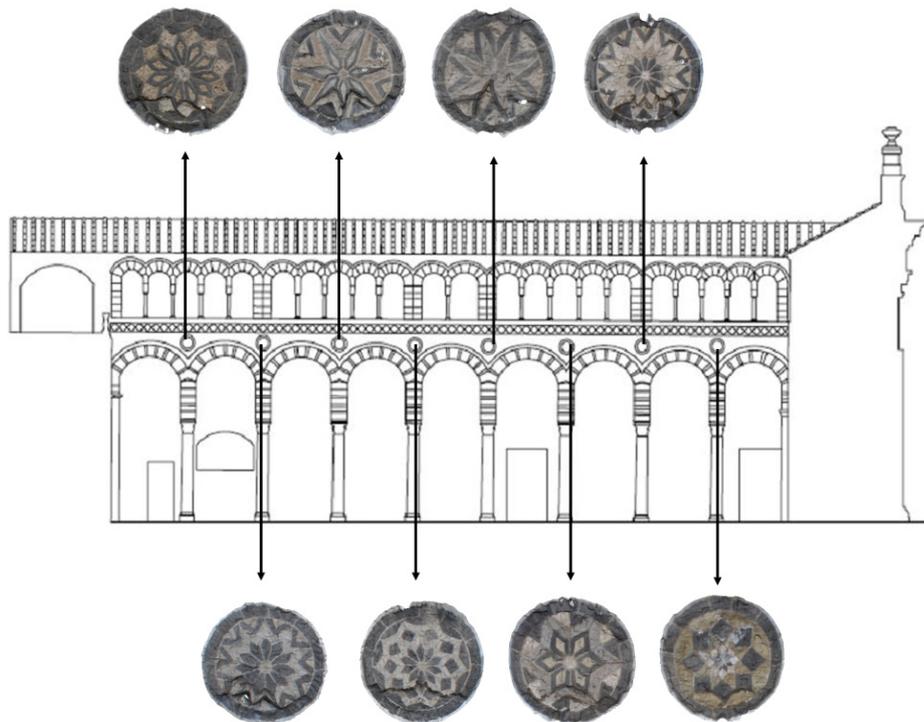
Terminata la georeferenziazione manuale, è possibile affinarla attraverso una procedura automatica basata sull'algoritmo *ICP (Iterative Closest Point)*, che applica iterativamente una rototraslazione rigida alla nuvola di punti, considerata mobile, per migliorare la sovrapposizione con la nuvola considerata fissa. Il metodo segue la procedura “punto-punto”, che si contrappone al metodo “punto-piano”: in entrambi i casi, la registrazione avviene tramite la ricerca del minimo di una funzione obiettivo. Nel primo caso la funzione è data dalla somma dei quadrati delle distanze dei punti corrispondenti delle nuvole: a ogni punto della nuvola da registrare, e quindi mobile, l'algoritmo associa il punto più vicino tra quelli della nuvola fissa contenuti all'interno di una sfera di raggio dato. Reiterata la procedura per tutti i punti della nuvola mobile, e sommati i quadrati delle distanze relative, si ottiene il valore da minimizzare spostando, con delle rototraslazioni rigide, la nuvola mobile. Nel secondo metodo a ogni punto della nuvola mobile vengono associati i punti della nuvola fissa più vicini alla normale uscente dal punto stesso: punti che individuano un piano detto di *best-fit*. La funzione obiettivo, in questo caso, è minimizzare la somma dei quadrati

delle distanze tra i punti della nuvola mobile e i corrispondenti piani *best-fit* passanti per i punti della nuvola fissa. Tale algoritmo permette una convergenza con un numero minore di iterazioni, poiché il minimo della funzione relativa sarà determinato nel piano. Ultimata la registrazione, e selezionato un determinato numero di punti, è possibile risalire all'errore quadratico medio e alla deviazione standard del riposizionamento. Un set minimo di punti molto vicini, benché comporti un errore quadratico medio trascurabile, non è efficace in quanto la georeferenziazione non risulterebbe valida per l'intera immagine; viceversa ad un set eccessivamente corposo di punti, se non opportunamente scelti, corrisponderà un significativo incremento dell'errore quadratico medio. Dunque, al fine di minimizzare tale errore è opportuno scegliere i punti in modo che risultino distribuiti il più uniformemente possibile sull'intera immagine, partendo dai quattro vertici e procedendo via via secondo una maglia regolare; così facendo si evita che l'immagine possa risultare disomogenea nella rettificazione finale.

Il software Z-Map Laser, nella fase di registrazione, non prevede la fusione automatica in un unico modello tridimensionale delle singole nuvole di punti; all'occorrenza, si potrebbe anche valutare la convenienza di eseguire l'operazione di *merge* con software specifici di reverse engineering, come Polyworks o Geomagic. Tuttavia, negli ultimi mesi, è stato elaborato un modulo di estensione, Z-Block, per il montaggio dei modelli 3D precedentemente georeferiti. Per poter implementare questo modulo è necessario acquisire triplette di immagini che abbiano almeno il 50% di sovrapposizione (tra una tripletta e la successiva).



Triplette di immagini per il modulo Z-Block



Restituzione dei rosoni della facciata Sud del quadriportico del Duomo di Salerno

La fase finale del lavoro ha visto la generazione di ortofoto: queste restituzioni permettono di trattare i risultati con svariati *tools* correttivi tipici dell'informatica grafica, in modo veloce e immediato, correggendo ad esempio gli errori originati nella fase di scansione/acquisizione.

Una volta georeferiti tutti i modelli, e generate le singole ortofoto, potrebbe risultare necessario mosaicarle per ottenere un unico elaborato grafico finale.

Per la mosaicatura automatizzata di immagini, il software implementato dispone di due algoritmi per il calcolo del percorso ottimale delle linee di giunzione, dette *Linee di Taglio - LT: Percorsi mediante Programmazione Dinamica*, in genere usato per le ortofoto aeree, e *Luogo dei Punti Vicini*, più indicato per ortofotomosaici. Quest'ultimo, basato sui *Diagrammi di Voronoi*, permette di modificare manualmente l'andamento delle *LT*, al fine di sfumare le aree di sovrapposizione tra un'ortofoto e l'altra.

5.8 Rilievo dei sarcofagi con il software Photomodeler Scanner

Con un ulteriore rilievo, effettuato sui sarcofagi del Duomo di Salerno, si è valutata l'efficacia della tecnica di photo scanning prescindendo dal software utilizzato – nello specifico si è fatto ricorso al programma Photomodeler Scanner 6.4.0.821 della Eos Systems – e, di conseguenza, di sperimentare la metodologia proposta anche su superfici più ampie e complesse, analizzando se dai risultati ottenuti sia possibile individuare, qualora esista, la legge armonica che governa l'intera composizione anche in casi in cui le regole compositive non risultino essere sempre di tipo geometrico.

Diversamente da come operato finora si è impiegata una camera Nikon D50 non calibrata, dovendo, quindi, necessariamente implementare un preventivo processo di calibrazione manuale della stessa.

In sintesi la procedura metodologica proposta si è composta delle seguenti fasi: calibrazione della camera fotografica; progetto delle scansioni, acquisizione dei dati, postprocessamento (fase di editing e trattamento dei dati); restituzione grafica e analisi geometrico-dimensionali.

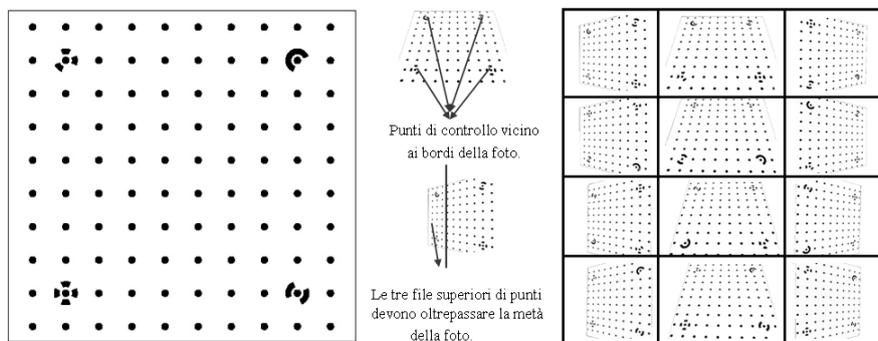
5.8.1 La calibrazione

Il processo di calibrazione è consistito nel determinare le caratteristiche ottiche e geometriche della camera per far sì che possa essere utilizzata come uno strumento di misura (mediante la ricostruzione del cosiddetto orientamento interno). È stato così possibile determinare la distanza focale dell'obiettivo utilizzato, la misura del sensore CCD, il punto principale di presa e tutti i parametri relativi alla distorsione della lente.

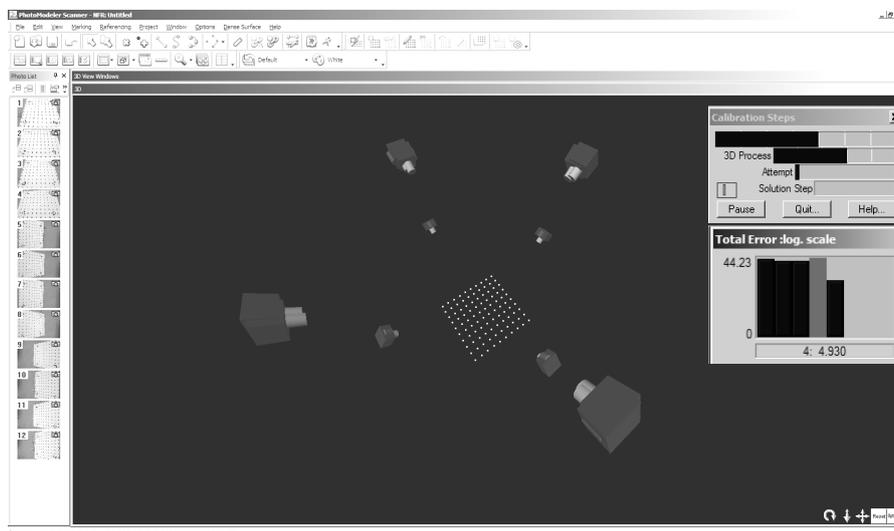
A tal fine sono state effettuate 12 prese fotografiche impiegando un treppiede e uno specifico foglio di calibrazione (preferibilmente di dimensione A2 e posizionato orizzontalmente sul piano di calpestio). È altrettanto importante che le condizioni di luminosità siano abbastanza uniformi e che non si creino zone d'ombra sul foglio di calibrazione. Gli altri parametri della camera sono così impostati: ISO impostato su 100-200; messa a fuoco automatica al primo scatto e poi fissata sul valore suggerito; apertura del diagramma compresa tra F11/F16; tempo di esposizione, scelto in funzione dell'istogramma, tale che le prese risultino leggermente sovraesposte.

Le stazioni risultano in minimo di 4, una in corrispondenza di ogni lato

del foglio di calibrazione; per ogni stazione vengono effettuate tre prese, di cui due si ottengono ruotando la camera di 90° una volta verso destra e una volta verso sinistra (con i 4 punti di controllo estremi sempre ben presenti). Per le prese 'frontali' è importante che i punti marginali siano il più possibile vicino ai bordi del fotogramma, invece per le prese 'ruotate' è necessario che i punti di controllo inferiori siano il più possibile vicino al bordo inferiore e che due/tre file dei punti superiori si collochino oltre la metà del fotogramma. È quindi possibile, tramite un algoritmo di riconoscimento di punti omologhi, individuare la posizione di presa e le caratteristiche ottiche e geometriche della camera fotografica.



Calibrazione della camera



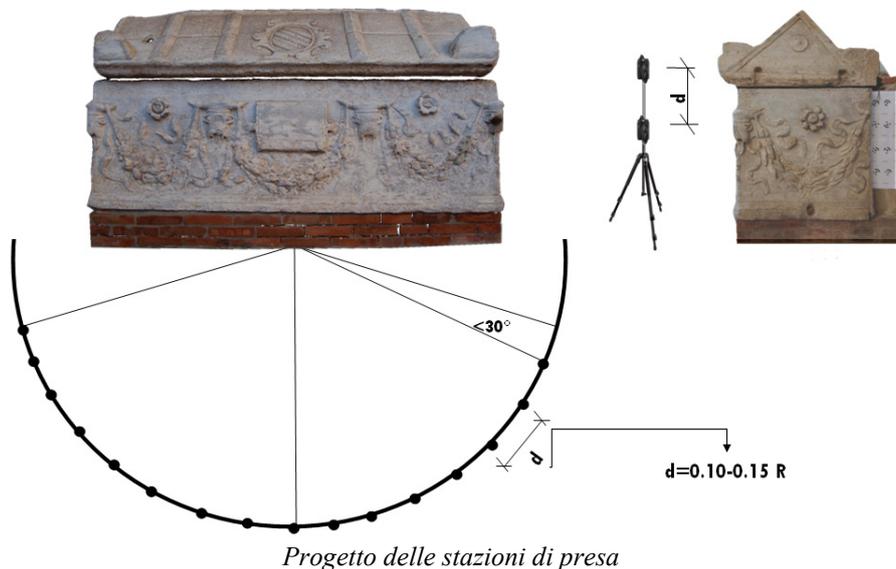
Processo di calibrazione e individuazione della posizione di presa

5.8.2 Progetto delle stazioni fotografiche

L'acquisizione della presa frontale e la relativa distanza rispetto all'elemento che si vuole restituire sono i parametri che condizionano le successive stazioni fotografiche; la distanza dall'oggetto, infatti, rappresenta il raggio dell'ipotetica circonferenza lungo la quale verranno individuati i punti di stazionamento da cui effettuare le prese fotografiche. L'accuratezza del rilievo finale è funzione della precisione con cui si determina questo raggio e la successiva distanza tra le stazioni.

I passi da seguire sono così schematizzati:

- individuazione della distanza frontale da dove si scatta la foto (R);
- eventuale collocazione di marche artificiali a terra e sull'oggetto da rilevare;
- ad intervallo di circa $0,1-0,15R$ si dispongono le marche a terra lungo l'ipotetico arco di circonferenza; qualora in una stazione sia necessario effettuare più prese in verticale è comunque sconsigliabile alzare e abbassare ripetutamente il tripode in ogni stazione;
- gli scatti fotografici vengono acquisiti eseguiti mantenendo le stesse condizioni di luminosità e stessa distanza focale.



5.8.3 Acquisizione dati

Se durante la fase di rilievo si sono utilizzate delle marche, il progetto viene aperto seguendo la modalità *Automated Coded Target Project*: le immagini saranno così importate ed automaticamente riconosciute le relative marche dal software.

Se invece non sono stati utilizzati *targets*, allora le immagini andranno importate secondo la modalità *Points Based Project* e la ricerca dei punti omologhi avverrà in modo manuale solamente nella successiva fase di registrazione.

5.8.4 Il processamento dei dati

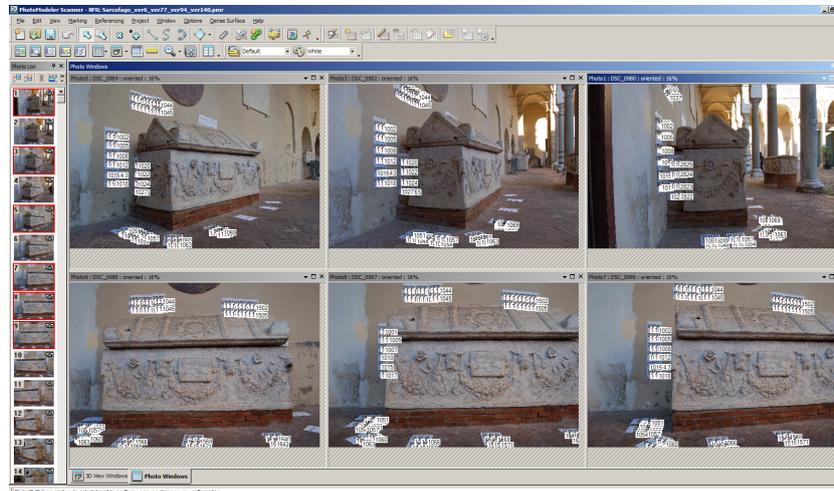
Una volta caricate le immagini nel software, è preferibile individuare in modo manuale 10-15 punti corrispondenti, ugualmente distribuiti, in tutte le fotografie. Noti i parametri della camera fotografica, precedentemente calibrata, il software ci permetterà di effettuare un primo calcolo di registrazione.

Il primo processo di registrazione ci aiuta nella collimazione dei punti successivi, consigliando con intersezioni di linee la posizione del punto omologo. Se l'oggetto da rilevare presenta una texture particolare che suggerisce molti *targets* naturali è possibile, tramite uno specifico algoritmo, individuare automaticamente punti addizionali.

Collimati manualmente i punti omologhi si prosegue con la registrazione dei diversi modelli, valutandone la qualità del processo attraverso l'errore medio globale dell'intero progetto: infatti, verrà restituito il punto che presenta l'errore massimo e la presa in cui è presente. Così è possibile diminuire il valore dell'errore ottenuto ri-individuando questo punto e ripetendo tutto il processo di registrazione.

Alla fine di questo primo processo si sono ottenuti come dati di output diverse nuvole di punti tra di loro georeferenziate; prima di processare questi diversi modelli conviene individuare la cosiddetta area di restituzione.

È possibile sul modello così ottenuto – ancora formato a sua volta da differenti modelli –, definire l'origine degli assi, il sistema di riferimento e il valore della distanza tra due punti, in modo da poter scalare l'intero progetto. Così, specificando le coppie di immagini da processare secondo la modalità stereoscopica, la distanza in *mm* tra due punti, oltre l'altezza al di sopra e al di sotto del piano di riferimento individuato che si vuole restituire, si ottiene un unico modello triangolato.

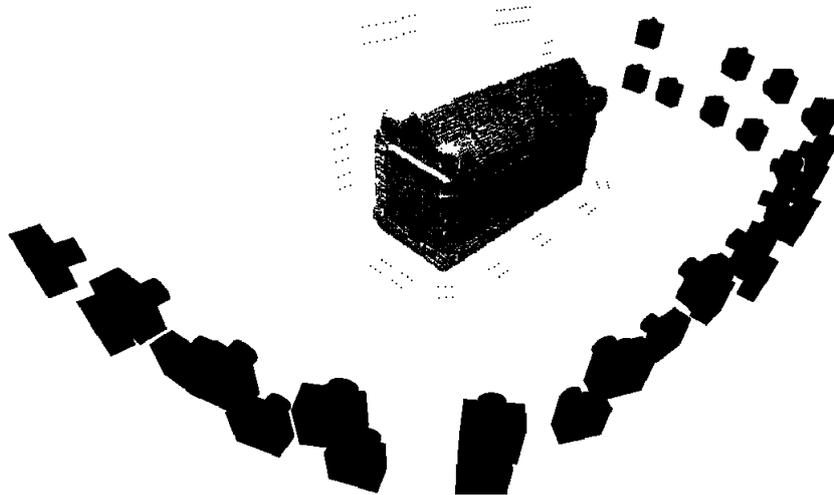


Collimazione dei punti omologhi

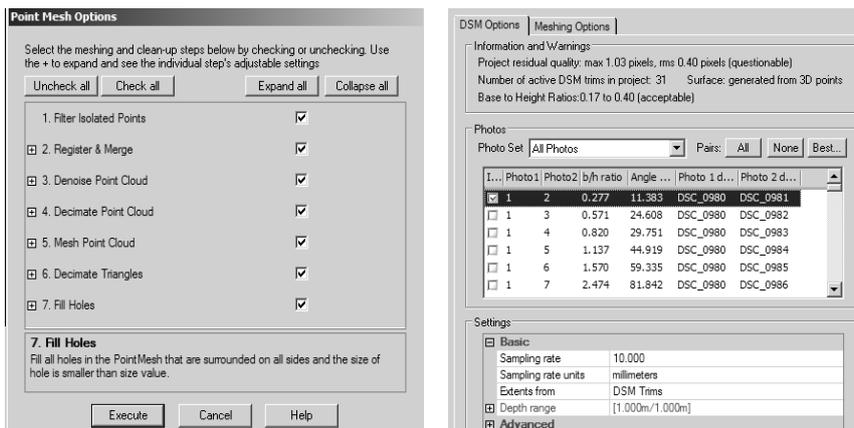


Individuazione dell'area da processare e restituire

Prima di ottenere la *mesh* conviene eseguire diverse operazioni di *editing* quali: rimozione di punti isolati o eventuali scie di punti; riduzione dei punti nelle zone di sovrapposizione; riduzione del rumore; *merge*; triangolazione della nuvola di punti; riduzione dei triangoli che non alterino la geometria; chiusura dei vuoti.



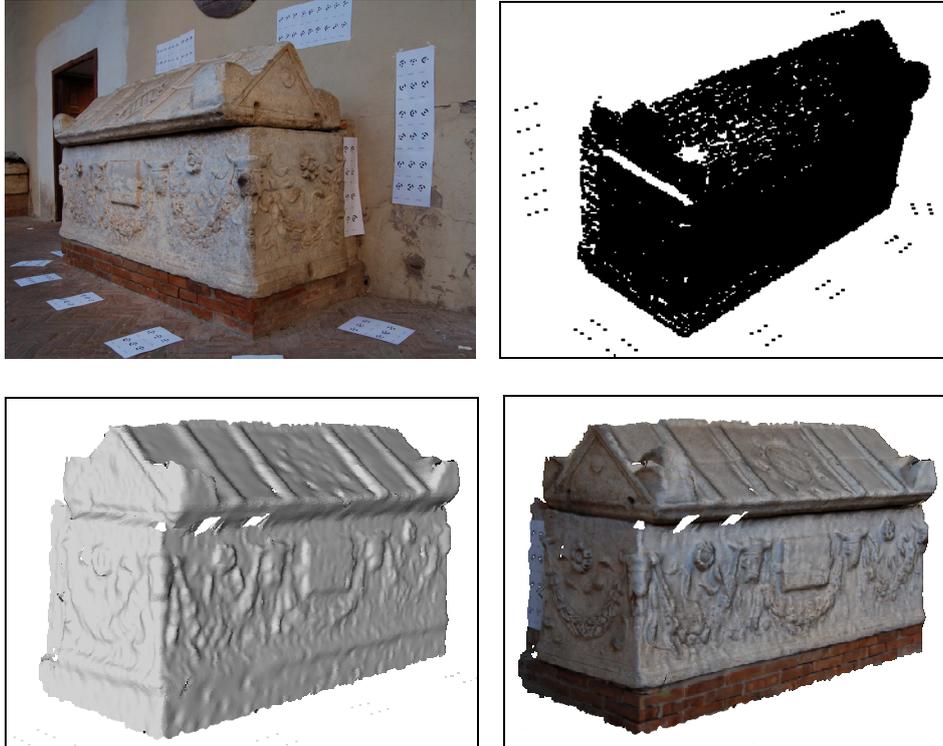
Orientamento relativo



Editing e individuazione delle coppie di immagini per generare il modello triangolato

Solo così si ottiene un unico modello unito con la *mesh* che si sovrapporrà alla nuvola di punti (allo scopo conviene inserire uno specifico layer che all'occorrenza può essere sempre spento).

Una volta trasformato il modello in una *mesh* è possibile visualizzarlo in differenti modalità: *wireframe*, superficie o con *texture*. In quest'ultimo caso è possibile specificare la foto da cui vogliamo prendere la texture e/o creare uno specifico materiale da associare al modello.



Dall'immagine fotografica al modello tridimensionale mappato della propria texture

Accuratezza del rilievo						
	Risoluzione fotocamera	Calibrazione fotocamera	Angolo di convergenza	Punti corrispondenti	Foto con punti omologhi	Marche
Bassa Accuratezza 1/100	640 x 480	senza calibrazione ↓ calibrazione inversa	60° - 90°	meno di 15 punti: low coverage	2	senza marche
Media Accuratezza 1/5000	5-6 megapixel	↓ camera calibrata	30° - 60°	15 - 25 pti/foto: 60% coverage	3 - 8	marche naturali
Alta Accuratezza 1/30000	11 megapixel	camera calibrata in loco	15° - 30°	35 - 50 pti/ foto: 80% coverage	più di 8	marche artificiali

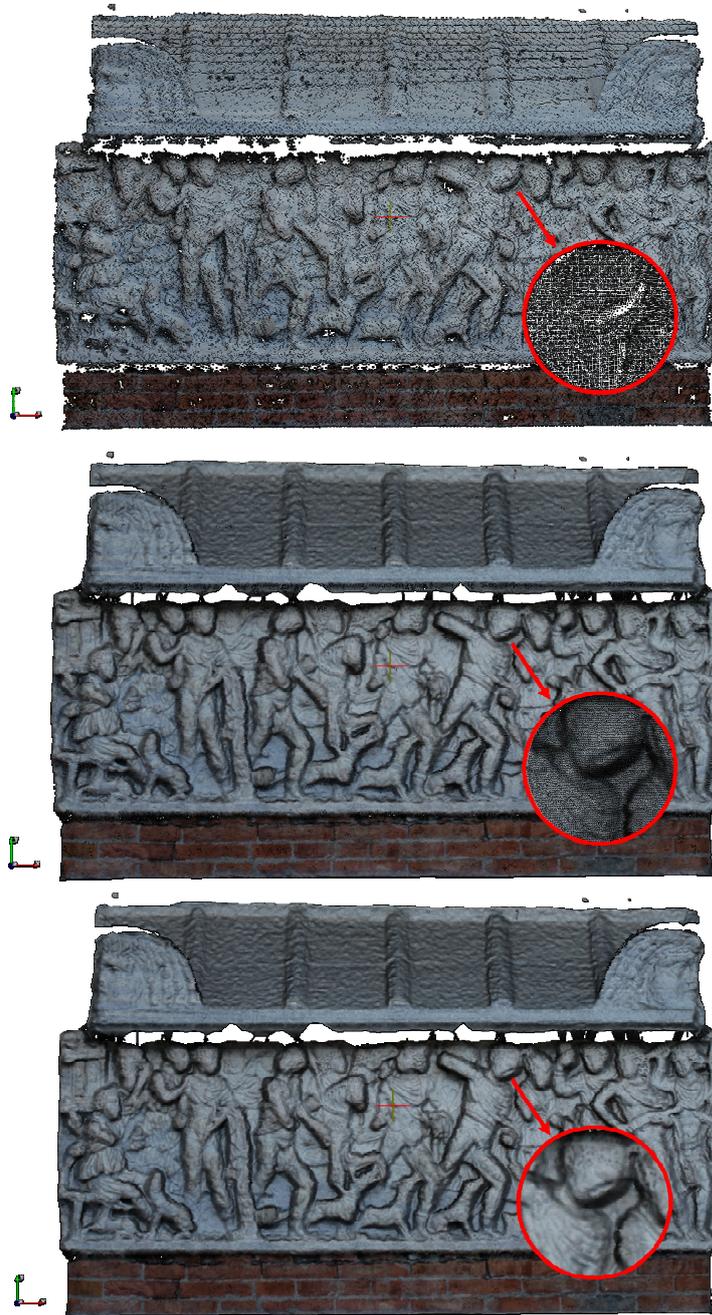
Accuratezza

L'accuratezza del rilievo dipenderà dalla risoluzione e dalla calibrazione della camera fotografica, dall'angolo di convergenza tra le foto, dal numero di punti collimati, dalla loro distribuzione sull'immagine e su quante fotografie sono presenti, dal ricorso a marche artificiali o naturali. Nel valutare se tale metodologia può essere utilizzata in modo soddisfacente per la restituzione grafica delle composizioni decorative, è stato necessario tener conto oltre che della complessità della procedura implementata (in alcuni casi, ad esempio, le condizioni meteorologiche avverse, la variazione della luminosità che si ha durante il giorno o semplicemente le ombre portate o autoportate comportano un sensibile aumento del grado di difficoltà), del livello di accuratezza del modello tridimensionale finale e del costo della tecnologia

Nello specifico, la precisione ottenuta – confrontando le misure digitali con quelle su alcuni punti di controllo – è risultata caratterizzata da un valore della deviazione standard inferiore ai 2 mm (anche se la distribuzione dei punti non è omogenea ma particolarmente densa nelle regioni che presentano texture particolarmente variegate). Direttamente correlata alla posizione e alla densità dei punti collimati sarà anche la qualità del DEM.



DEM texturizzato



Diverse modalità di visualizzazione: per punti, wireframe e con texture

Il risultato finale è stato un modello tridimensionale fotorealistico ad alta risoluzione, visualizzabile in ambiente PMS o esportabile nei più diversi formati cad: 3DS (3D Studio), 3DM (Rhino), DXF, KMZ (Google Earth) OBJ (Wavefront), STL (Stereo-lithography), VRML, ecc.

La possibilità di osservare il modello ombreggiato, senza texture, è risultato molto utile per analizzare il rilievo del decoro, senza l'influenza delle variabili cromatiche; specifiche sezioni trasversali possono contribuire allo studio della morfologia delle incisioni.

5.9 Rilievo di dettaglio con il laser VIVID 910

Per la restituzione digitale di oggetti di piccole dimensioni, così come nel caso di rilievi di dettaglio, trovano largo impiego anche i laser scanner a triangolazione ottica, che operano su distanze minori – fino a 5 m – ma offrono una precisione cosiddetta sub-millimetrica, ovvero dell'ordine dei decimi di millimetro. La tecnologia laser scanner offre l'opportunità di un'acquisizione 'continua', diversamente da un più tradizionale rilievo strumentale in cui si è portati a discretizzare la realtà, potendo acquisire solo un numero contenuto di punti. Tuttavia, la mole di informazioni acquisita può rappresentare una non conoscenza se non sottoposta a un'attenta analisi geometrica. Come qualsiasi strumento di rilievo nella successiva restituzione grafica si deve selezionare l'informazione, scegliendo solo gli elementi di volta in volta necessari per il modello geometrico, senza lacune o ridondanze. Un eccesso di informazione, come la mancanza di dati, è estremamente negativo, in quanto pretendendo di comunicare troppo o tutto a un tempo, si corre il rischio di non riuscire a comunicare nulla o di fornire un messaggio equivoco e distorto. Ed è per questo che acquista notevole importanza la fase di postprocessamento, ossia l'estrapolazione di informazioni fruibili dalla nuvola di punti, non essendo sufficiente né esaustiva la mera esecuzione/acquisizione delle scansioni. Tale fase di *editing* e trattamento dei dati, si può articolare secondo i seguenti step operativi:

- visualizzazione diretta dei dati acquisiti, su postazione mobile, nella rappresentazione a nuvola di punti, per la verifica di ciascuna scansione;
- pulizia primaria delle scansioni, rimozione in maniera manuale di elementi appartenenti al campo di presa ma non d'interesse per il rilievo e di eventuali scie di punti;

- registrazione, fusione delle differenti scansioni in un unico sistema di riferimento; l'allineamento delle scansioni è da implementare prima manualmente utilizzando riferimenti naturali, o eventualmente specifici target e successivamente ne sarà migliorata la precisione in maniera automatica con l'impiego di algoritmi iterativi;
- riduzione e omogeneizzazione nella distribuzione dei punti; la nuvola viene eventualmente 'ridotta' al fine di avere una densità di punti uniforme;
- generazione del modello a *mesh* poligonali e *merge*;
- esportazione in CAD o in STL e generazioni delle sezioni che posso essere estrapolate sia dalla nuvola dei punti, sia dal modello poligonale, definendo più piani di sezioni secondo passi prefissati.

La codifica di queste fasi rappresenta un primo risultato di una più generale ricerca per l'individuazione di un iter processuale che definisca gli *step* di avanzamento di un rilievo laser scanner, in modo da garantire la minimizzazione dei tempi di analisi, progettazione e trattamento dei dati. In corrispondenza di ciascuna fase operativa illustrata precedentemente, è associata la possibilità di implementare uno o più software, spesso con funzioni alternative, a seconda delle particolari condizioni al contorno.



Hardware: laser scanner Vivid 910

Nello specifico, per il rilievo di dettaglio di una metopa si è deciso di testare il laser scanner VIVID 910 e il PET (*Polygon Editing Tool*) un programma a corredo della strumentazione laser della Konica Minolta; mentre, *Geomagic Studio* (della InnovMetric) è uno strumento per l'*editing* di nuvole di punti e le applicazioni di *reverse engineering*.

5.9.1 Acquisizione dati

Il VIVID 910, laser scanner 3D della Konica Minolta, utilizzato per acquisire informazioni geometriche e colorimetriche, si basa sul principio di misurazione a triangolazione. La superficie è scansionata dall'alto in basso con un fascio laser: i raggi riflessi sono focalizzati sul sensore CCD, posto a una distanza nota e calibrata rispetto all'emettitore (in questo modo si determineranno tanti triangoli quanti i punti che saranno acquisiti).

Il sistema di acquisizione è caratterizzato da una componente hardware, lo scanner collegato via SCSI ad un pc, e da un software, il *PET - Polygon Editing Tool* che, oltre al completo controllo del VIVID 910, può agire su una piattaforma girevole motorizzata collegata attraverso la porta seriale allo stesso computer, impiegata per rilievi di dettaglio a 360° di piccoli oggetti (vasi, fregi, statuette, decorazioni, reperti archeologici, ecc.).

Il programma consente di gestire i parametri di acquisizione dello scanner, quali la messa a fuoco manuale o automatica, la qualità dei colori, e anche di impostare l'angolo di rotazione della tavola; inoltre, in tempo reale, permette di controllare la qualità dei dati 3D rilevati sulla schermata di anteprima, e di registrare eventuali scansioni multiple che possono essere così ricomposte in un unico modello poligonale. Una volta acquisita e restituita la nuvola di punti, sarà possibile eseguire, già in ambiente PET, tutta una serie di operazioni preliminari quali la registrazione delle differenti scansioni, la pulizia automatica per eliminare i punti ridondanti, le operazioni di *smoothing* (riduzione del rumore) e di *merging* (fusione).

Per avviare le operazioni di scansioni, si utilizzerà il comando *One Scan* o *Step Scan* (senza o con tavola girevole), visualizzando una schermata con l'anteprima dell'area di scansione.

Dal comando *Option*, organizzato nelle tre differenti sezioni *Scan Parameter*, *Convert Parameter* e *Stage Parameter*, è possibile gestire i

parametri di scansione. In particolare, queste le opzioni disponibili dal pannello *Scan Parameter*:

- *Mode*: permette di selezionare tra la modalità *Fast* (tempo di input – o tempo di scansione puntuale – di 0,3 secondi) e *Fine* (vengono effettuate tre scansioni con differenti potenze laser con un tempo di input di 2,5 secondi, garantendo sulla carta una maggior precisione, fino a $\pm 0,008\text{mm}$, con un'accuratezza di $\pm 0,10\text{mm}$ per l'asse Z).
- *Use Color*: cattura una foto dell'oggetto scansionato, permettendo in seguito di associare la texture al modello triangolato (la *mesh*).
- *Log* e *Dark*: agiscono sulle condizioni di luminosità; *Dark* va selezionato in ambienti molto scuri per aumentare la luminosità; *Log*, attenuando i cambi netti di colore, è da utilizzare in presenza di toni molto contrastanti.

È possibile poi caricare le impostazioni relative agli ultimi parametri utilizzati (*Load*) e salvare i nuovi settaggi (*Save*). Invece, nella sezione *Convert Parameter* si interviene sulle seguenti variabili:

- *Scan Raw Data*: se attiva, crea file nel formato nativo dello scanner CDM (*Camera Data Memory*) e dati grezzi RAW per la camera fotografica, creando così un backup di dati non manipolati.
- *Reduction Rate*: nella fase di triangolazione, permette di stabilire se selezionare tutti o solo alcuni dei punti della matrice come vertici del modello poligonale.
- *Filter*: attivando la modalità *Noise* si effettuerà un leggero *smoothing* iniziale, ammorbidendo il rumore artificiale delle scansioni, ma conservando intatti gli spigoli.
- *Fill Holes*: chiude i vuoti interpolando i dati in maniera automatica (operazione non consigliabile).
- *Remove*: riduce l'angolo di apertura del cono visuale.

Infine, nel pannello *Stage Parameter* andranno, eventualmente, definiti i dati relativi alla tavola rotante, specificando l'angolo di rotazione – *Rotation Step* – ovvero ogni quanti gradi andrà effettuata la scansione.

Una volta stabiliti questi parametri, che si possono definire come le variabili infografiche del disegno di rilievo, è possibile procedere con la scansione effettuando in sequenza i comandi: *AF* (per la messa a fuoco automatica), *Scan* e *Store* (per il salvataggio dei dati).

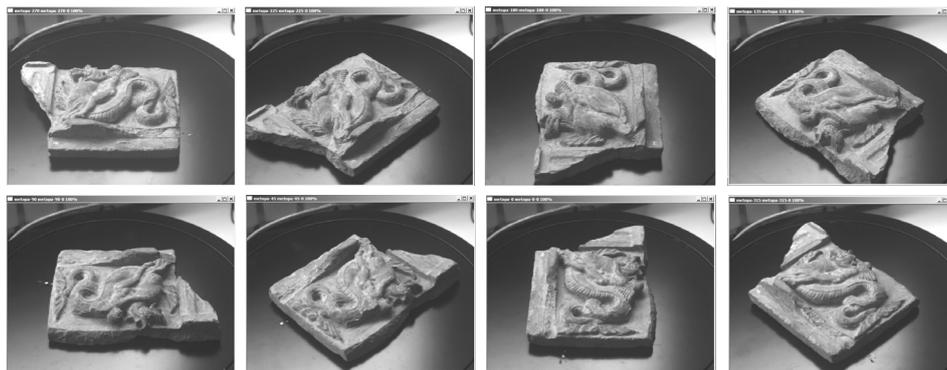
Selezionando la modalità *Pitch* sarà possibile visualizzare, nella finestra di anteprima, le scansioni a gradazioni di colori: con la gamma calda saranno rappresentati i punti più vicini e con quella fredda i punti più distanti dal piano passante per la stazione di presa. Il modello geometrico è visualizzabile – dall’alto, in vista frontale, laterale e assonometrica – secondo le classiche modalità per *points*, *wireframe* e *texture*, e in rappresentazione *shading* (ad ogni scansione viene associato una superficie colorata).

5.9.2 Il processamento dei dati

Solitamente risulta necessario, per ottenere una restituzione 3D completa, effettuare più scansioni da diverse angolazioni, e procedere quindi con il successivo allineamento. Per registrare due scansioni, è sufficiente collimare tre coppie di punti omologhi; il software può anche tentare un primo allineamento già dopo aver determinato una sola coppia di punti corrispondenti, e in caso di mancato successo, richiederà l’individuazione di ulteriori coppie di punti omologhi fin quando la trasformazione non risulterà univocamente definita.

Per migliorare la registrazione, si esegue l’algoritmo di “*Best Fit*” (*Build>Registration>Fine>Element*) che tramite diverse iterazioni distribuisce uniformemente l’errore risultante tra le diverse scansioni, calcolando, inoltre, la deviazione standard.

Con i comandi *Select by Bezier* (curve libere) – oppure *Select by Rectangle* (aree rettangolari) – si selezioneranno, per poi cancellarli con il comando *Delete Points*, quegli elementi appartenenti al campo di presa ma non d’interesse per il rilievo, come le eventuali scie di punti.



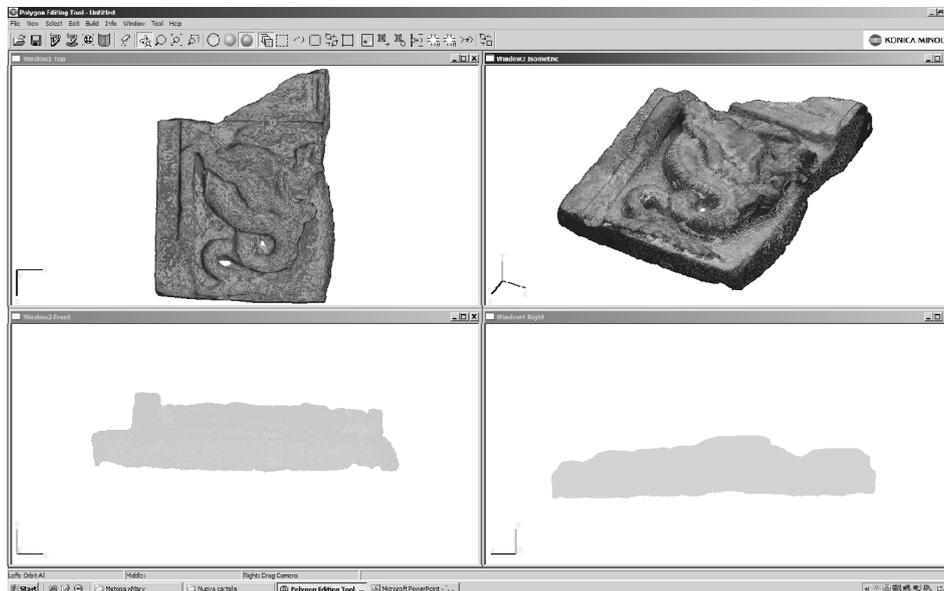
Fotogrammi ottenuti con l’utilizzo della tavola girevole (S. BARBA)

L'applicativo è, inoltre, dotato di diversi comandi di editing che consentono di intervenire nella fase di trattamento dei dati, fondendo più scansioni (*Merge*), rendendo una superficie più o meno liscia (*Smooth*), chiudendo eventuali 'vuoti' di dati (*Fill holes*).

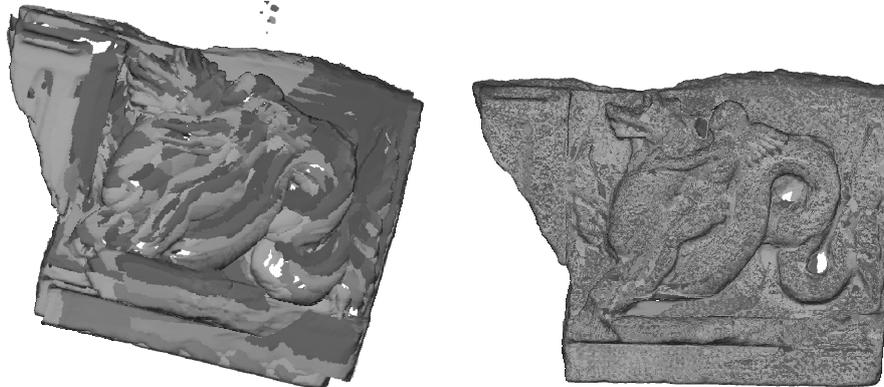
In particolare, il comando *Merge* fonde le scansioni e, utilizzando un algoritmo di zipping (cucitura), elimina le zone di sovrapposizione. Il comando *Fill Holes Auto/Manual*, invece, chiude tramite interpolazione i 'vuoti' del modello poligonale.

Prima di eseguire la chiusura automatica conviene agire manualmente, riducendo le dimensioni dei 'vuoti' eccessivamente grandi, in quanto il software non è in grado di chiudere automaticamente quelli che presentano notevoli dimensioni o che si trovano in corrispondenza di superfici complesse.

È possibile effettuare una riduzione automatica dei punti (*Build>Subsample>Adaptively>Element*) stabilendone un valore preciso in *Number of Points* o fissando un valore di soglia in *Range of Errors*: punti con dettagli minori del limite predeterminato verranno eliminati (di default il software fissa come *Range of Errors* il valore dell'errore medio calcolato durante la registrazione).



Viste e stili di visualizzazione (S. BARBA)



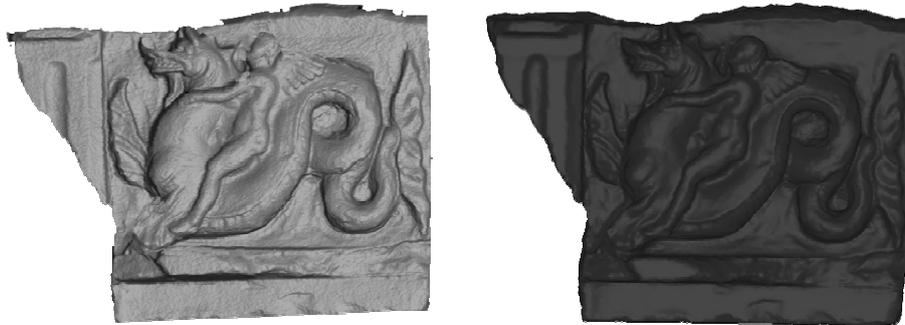
Prima e dopo la registrazione delle scansioni (S. BARBA)

Il risultato finale potrà essere esportato direttamente sottoforma di *mesh* poligonali, di *ground-shading* di immagine a colori o di *texture* nei più comuni formati come DXF, VRML, OPEN INVENTOR, ASCII e STL. Spesso è più conveniente che le operazioni di *editing* siano eseguite con software specifici – e a volte più complessi – di *reverse engineering*, come *PolyWorks* (come già anticipato, capace di gestire una gran mole di dati e di raggiungere risultati di notevole precisione in fase di registrazione), *Geomagic* (per rilievi di contatto) o anche *RapidForm* (che mostra un'interfaccia molto semplice sebbene risulta problematica la gestione di *texture* provenienti da immagini per la creazione di superfici).

5.9.3 Reverse engineering con il software Geomagic Studio 10

Geomagic Studio 10 è un programma di *reverse engineering* che permette di gestire dati provenienti da scansioni 3D, trattare nuvole di punti, generare modelli *mesh*, progettare ed esportate superfici CAD e creare automaticamente superfici NURBS per la modellazione. Le applicazioni e le relative funzioni possono essere schematizzate in quattro flussi di lavoro: scansione ed elaborazione dati, editing, progettazione superfici CAD, modellazione tridimensionale.

In pratica è possibile partire dal modello reale, eseguirne la scansione e generare automaticamente il modello digitale che rappresenterà accuratamente l'oggetto, chiudendo questo ciclo con la prototipazione rapida. Il software consente di importare numerosi formati di dati tridimensionali (*File>Import*), fra i quali sia i file non trattati con estensione .cdm, sia i file .vvd elaborati in ambiente PET.



Merge con differenti valori di smoothing in modalità shaded (S. BARBA)

Sul layout iniziale sono presenti differenti piani lavoro: *Model Manager*, contiene le scansioni importate; *Primitives Manager*, permette di selezionare gli elementi da visualizzare (fori, punti, spigoli, triangoli, ecc.), e in particolare *Model Colors* mostra i colori originali della scansione, per cui visualizza la texture applicata al modello se ne è stata acquisita la relativa immagine, mentre *Object Color* differenzia le scansioni con diversi colori; *Textures Manager*, dà accesso alla gestione delle texture esterne; *Display Manager*, permette di intervenire sulle variabili di rappresentazione. La scheda *Dialog Manager* mostrerà le variabili relative del comando attivato.

Le operazioni di allineamento delle scansioni sono gestite attraverso due funzioni: *Manual Registration* che apporta una serie di adattamenti alle relative posizioni spaziali, sulla base di coppie di punti corrispondenti definite dall'utente, e *Global Registration* che invece effettua l'allineamento di due o più scansioni in maniera automatica in funzione della distribuzione dei punti.

Alla voce *Mode* della finestra di dialogo *Manual Registration*, è possibile stabilire il numero di punti omologhi – collimati manualmente dal disegnatore – per effettuare l'allineamento, secondo due opzioni *1-point Registration* (è sufficiente definire una sola coppia di punti corrispondenti) e *n-point Registration* (con *n* variabile fra 3 e 9). L'allineamento avverrà nel sistema di riferimento della cosiddetta scansione *fixed* rispetto al cui orientamento si registreranno le altre scansioni, definite perciò *floating*.

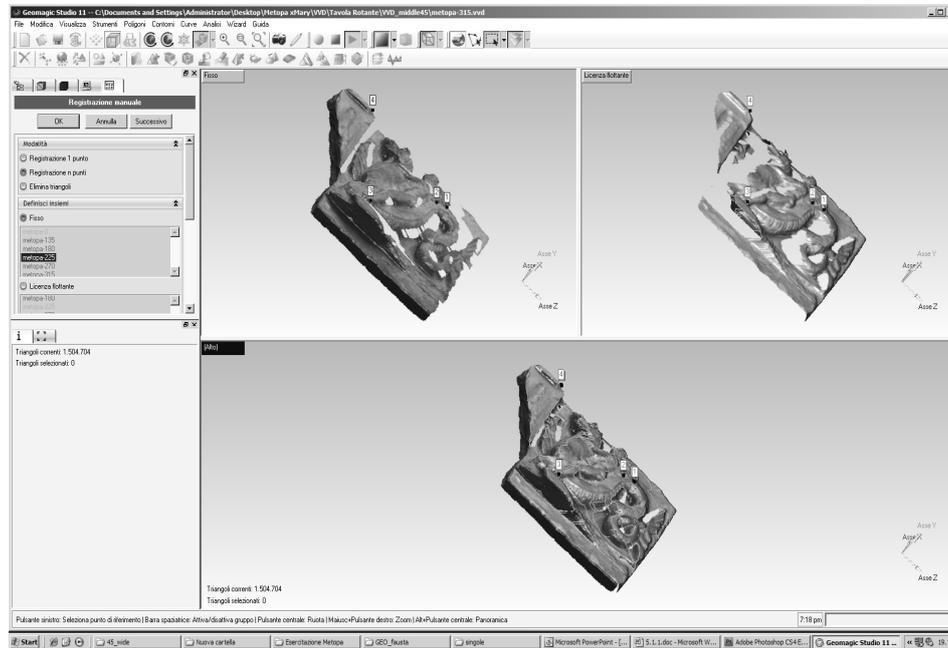
Compiuta la registrazione manuale risulta indispensabile affinare la precisione dell'allineamento in maniera automatica. In alcuni casi, la registrazione manuale può non essere necessaria se si è già provveduto a un pre-allineamento fra le scansioni lavorando direttamente nel software di interfaccia: come il *PET* per gli strumenti della Konica Minolta. Allo stesso modo, il risultato di un'acquisizione a 360° con il *VIVID* e la piattaforma girevole (gestita in ambiente *PET*) è un insieme di scansioni già allineate fra loro tali da ricomporre digitalmente l'oggetto.

Per completare un rilievo di dettaglio potrebbe essere necessario eseguire più di una scansione a 360°, variando la posizione dell'oggetto, in modo da catturare dati relativi alle parti inizialmente nascoste o in ombra. In questi casi, conviene prima creare gruppi associati alle relative posizioni assunte dall'oggetto scansionato, e in seguito allineare manualmente il primo gruppo con i successivi; la creazione di gruppi permette, infatti, di traslare e/o ruotare contemporaneamente tutte le scansioni già registrate.

I dati acquisiti possono essere ottimizzati mediante comandi per l'eliminazione dei punti marginali e la riduzione del rumore di fondo. Nello specifico, per una prima pulizia, il comando *Make Manifold Open* elimina i punti (o i triangoli, nel caso di mesh) non appartenenti alla superficie dell'oggetto.

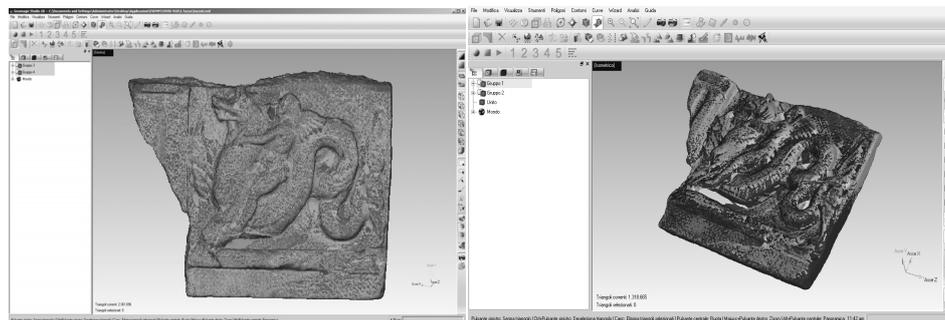
In genere, prima delle successive operazioni di *editing*, è opportuno implementare l'algoritmo *Reduce Noise* per compensare gli errori sistematici della fase di scansione (definiti, appunto, come 'rumore'), riducendo così la dispersione dei punti per una distribuzione più uniforme della nuvola. Si parla di 'rumore locale' se riferito alle scansioni prima dell'allineamento, o di 'rumore globale' quando associato al modello finale registrato.

Nella stessa fase di *editing* è possibile fondere, con operazioni di *merging* (comando *Merge*) più nuvole di punti in un unico modello poligonale; inoltre, lo stesso strumento permette di eseguire automaticamente la riduzione del rumore, il campionamento uniforme di punti e la generazioni di superfici. Per migliorare la qualità della mesh sono implementabili, insieme ad alcune operazioni tipiche per i modelli a punti, diversi applicativi, quali: *Decimate*, che riduce il numero di triangoli, senza compromettere i dettagli di superficie o di colore; *Relax*, trasformazione proiettiva per livellare la rete poligonale; *Sandpaper*, per rimuovere le imperfezioni locali; *Fill Holes*, che colma le lacune di dati.

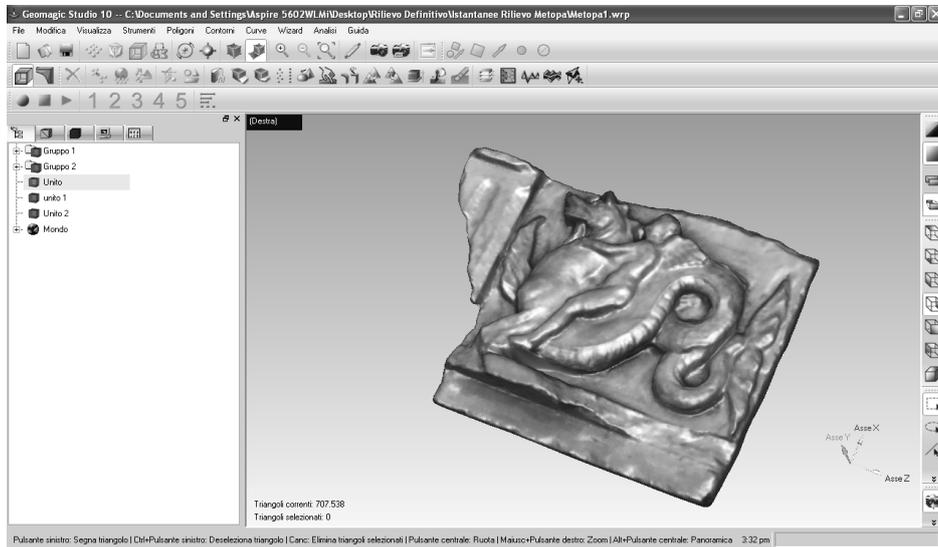


Registrazione manuale a n punti di un gruppo di scansioni (S. BARBA)

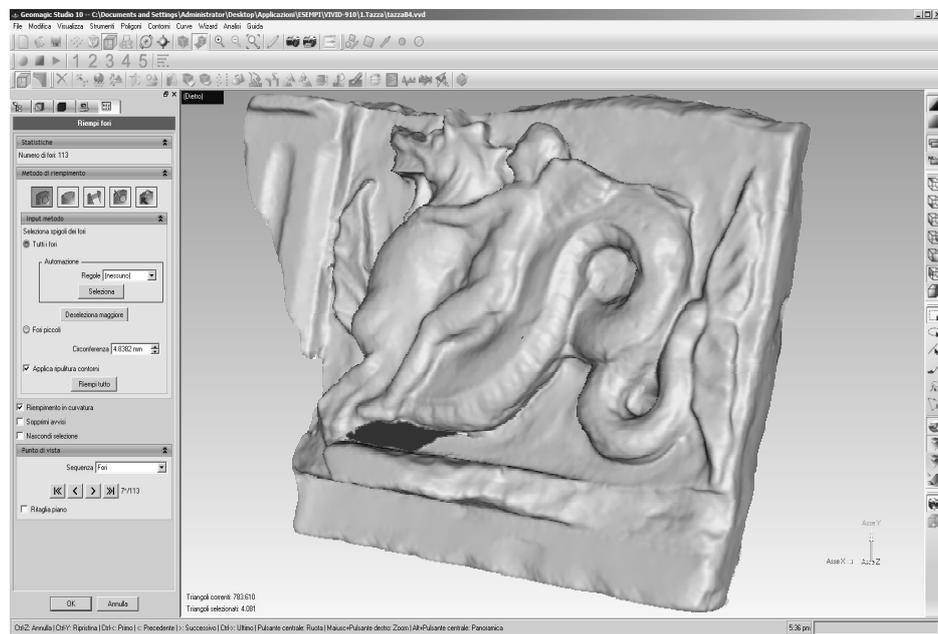
Quest'ultima funzione, rilevata la presenza di vuoti (di cui viene anche riportato il numero totale), permette di generare delle *patch*, ricostruendo così la maglia poligonale, secondo le modalità relative alle condizioni al contorno (*Fill Method*): *Fill*, *Fill Partial*, *Create Bridges*, *Clean Up*.



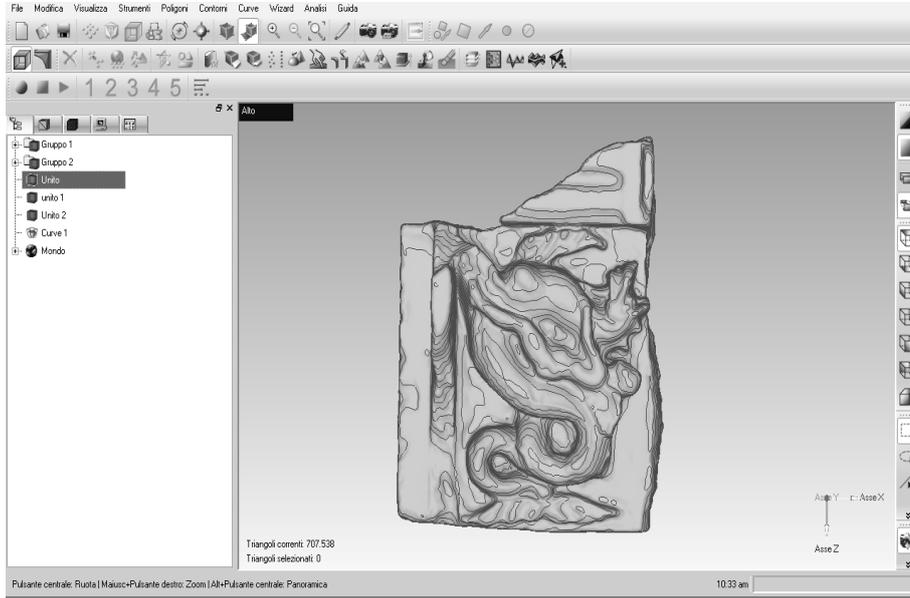
Registrazione globale: punti, wireframe (S. BARBA)



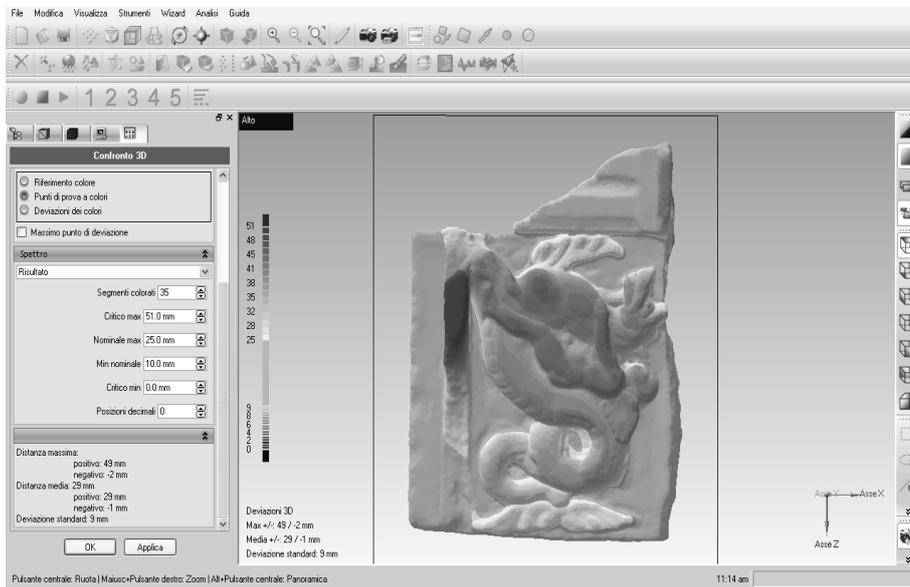
Modello shaded (S. BARBA)



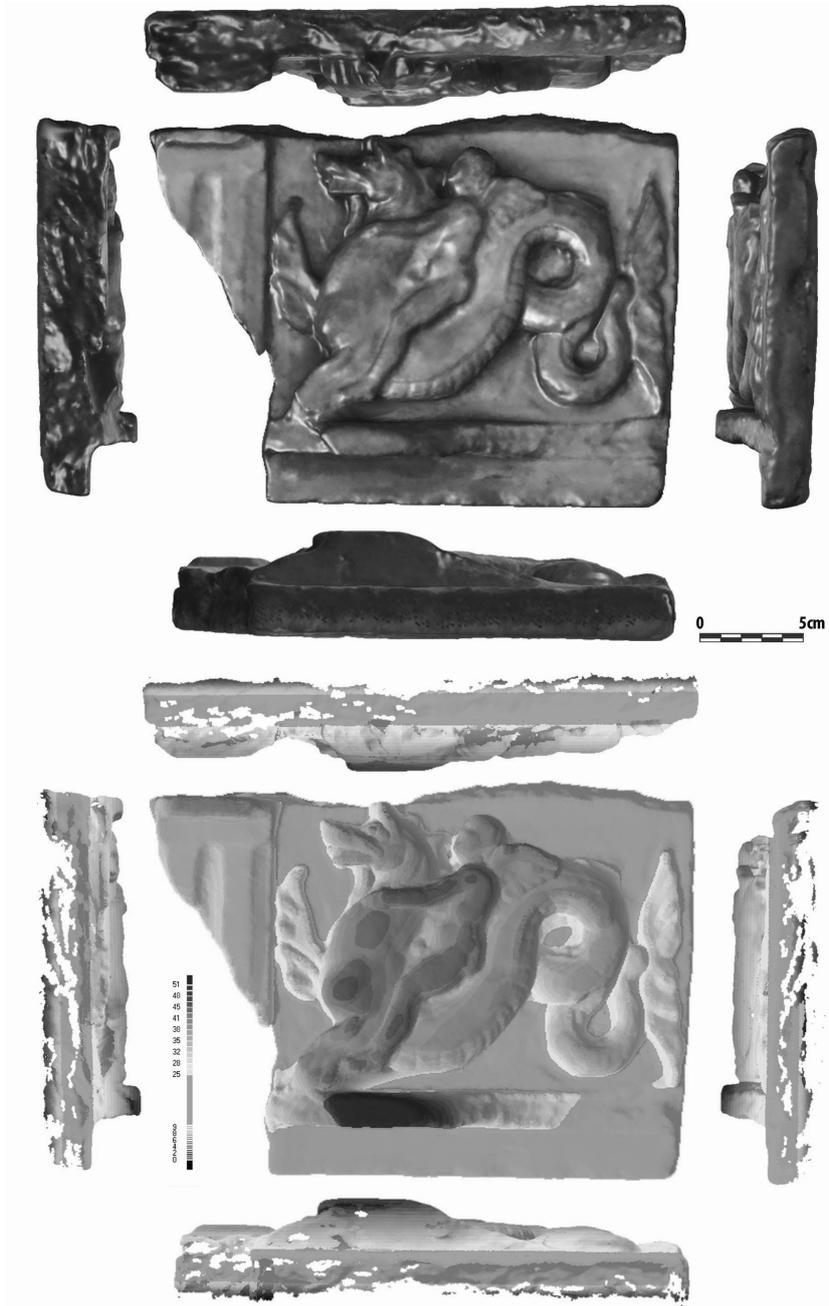
Individuazione e riempimento dei "fori" presenti nel modello poligonale (S. BARBA)



Rappresentazione a curve di livello (S. BARBA)



DEM (S. BARBA)



Risultati: modello 3D e DEM (S. BARBA)

5.10 Rilievo architettonico con il laser scanner Iris 3₆D

Un'ulteriore esperienza condotta con il laser scanner, per il rilievo del quadriportico del duomo di Salerno, si è avvalsa di una strumentazione Iris 3₆D, laser scanner 3D della Optech, che si basa sul principio di misurazione a tempo di volo.

Come è sempre buona norma, si è pianificato in anticipo il posizionamento d'ogni punto di ripresa e, nel caso specifico, valutando le opportune aree di sovrapposizione, è stato necessario eseguire scansioni – di campo visivo 40° x 40° – da differenti stazioni di presa, in modo da poter, nella successiva fase di allineamento, integrare aree prive di informazioni e zone d'ombra create dalle occlusioni prospettiche ed ottenere così una restituzione quanto più fedele alla realtà.



Rilievo del quadriportico del duomo di Salerno con il laser scanner Iris 3₆D

Direttamente sul campo si sono visualizzati i dati acquisiti, verificando, nella rappresentazione a nuvola di punti, ciascuna scansione ed effettuando una pulizia primaria delle scansioni, con lo scopo di eliminare manualmente elementi non di interesse per il rilievo ed eventuali scie di punti. Ogni singola scansione presenta un proprio sistema di riferimento, pertanto, per ottenere un modello tridimensionale completo, è necessario orientare tutte le scansioni secondo un unico sistema.

L'allineamento delle scansioni implementato prima manualmente tramite l'individuazione di tre punti omologhi presenti all'interno di due scansioni adiacenti, la cui posizione è nota nei rispettivi sistemi di riferimento, ha permesso, nella fase iniziale, un primo avvicinamento delle due scansioni; successivamente è possibile migliorare la precisione in maniera automatica con l'impiego di algoritmi iterativi, che effettuano una ricerca automatica di tutti i punti omologhi, eseguendo una rototraslazione spaziale senza variazione di scala rispetto al sistema di riferimento della scansione adiacente. E' in questa fase che vengono stimati i parametri di orientamento e generata la matrice di rototraslazione applicata alla scansione allineata rispetto a quella di riferimento. Registrate tutte le scansioni si è eseguita una pulizia delle nuvole di punti anche in maniera automatica al fine di ottenere uno sfoltimento e un'omogeneizzazione della distribuzione dei punti.

5.11 Conclusioni

L'analisi delle tecniche di photo scanning per il rilievo digitale, applicate alla restituzione del dettaglio, porta ad esprimere alcune considerazioni sui limiti di applicazione e, in particolare, sulla precisione, dovuti principalmente ai seguenti due fattori: qualità fotografica, adeguatezza della scelta dei punti che definiscono la trasformazione.

Il rilievo grafico di un decoro architettonico permette di ottenere elaborati in una determinata scala di dettaglio. In funzione del grado di risoluzione, la restituzione sarà adeguata in tutti quei casi in cui l'errore medio sarà inferiore a questo valore che si assumerà come funzione della tolleranza.

Ritenere che queste tecniche digitali abbiano di per sé la capacità di migliorare la qualità delle rappresentazioni architettoniche, è un errore, così come considerare che queste nuove tecniche, in generale, siano

strumenti incapaci di generare nuove forme di rappresentazione. È il caso delle ortofoto, che riproducono la realtà con maggiore ricchezza di dettagli, di precisione e senza quella sorta di gelo, dove le forme perdono il loro incerto apparire e si cristallizzano in fredde superfici regolari.

A differenza di quanto accade nelle rappresentazioni convenzionali, nelle nuove forme di restituzione infografiche si conservano tutte le importanti informazioni non metriche come il colore, i diversi tipi di lavorazione del paramento, le caratteristiche fisiche delle superfici.

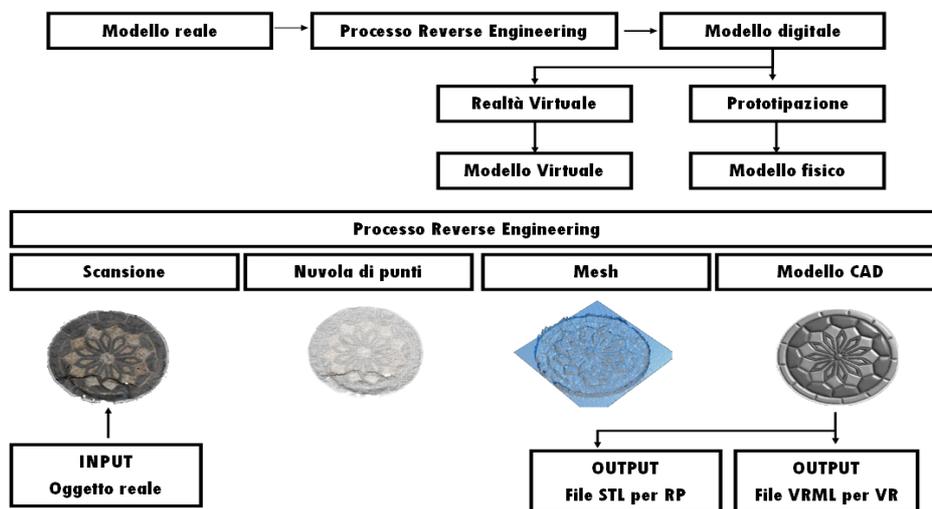
Lo sviluppo di queste ultime tecnologie ha suscitato in questi ultimi anni un notevole interesse, che non deve però implicare, in nessun caso, una preferenza della metodologia rispetto ai contenuti del rilievo stesso. Si devono, invece, esaltare questi ultimi con un uso scrupoloso delle nuove attrezzature, da impiegare con un approccio sempre più scientifico, e giungere a una loro integrazione e, se possibile, ad una rappresentazione dei risultati per mezzo di una semplice interfaccia grafica. Come accennato, si deve considerare il rilievo come una vera e propria azione di conservazione, quindi, come un'operazione che non può trovare una sua conclusione: più correttamente si dovrà parlare di un *rilievo dinamico*. La strada da intraprendere è quella che porterà sempre più verso il *rilievo integrato*, per una contaminazione di strumenti, metodologie, esperienze e conoscenze.

6. PROCESSI CAD/CAM PER LA PRODUZIONE IN SERIE DEL DECORO ARCHITETTONICO CON MACCHINE CNC

6.1 Generalità

L'insieme dei processi che, a partire da un qualsiasi manufatto consente di ricreare il progetto iniziale sotto forma di disegno o rappresentazione 2D-3D è definito *Reverse Engineering*; RE è una metodologia che consente, partendo dal modello fisico, di risalire alla sua descrizione matematica, ottenendo così una nuvola di punti, dalla cui discretizzazione è possibile ottenere un modello digitale e generare un file STL idoneo alla successiva prototipazione.

Il modello così ottenuto consente di verificare le soluzioni più adatte ai relativi problemi di restauro, conservazione e documentazione, e porta verso una nuova e più completa modalità di fruizione. La realizzazione del modello digitale è un buon punto di partenza per analizzarne la geometria, per studiare il problema della ricomposizione delle parti deteriorate e valutarne, infine, una possibile ricostruzione. Inoltre, studiando e analizzando il prototipo, si evita di sottoporre l'originale al rischio di eccessive prove, necessarie per mettere a punto l'intervento di ricomposizione.



Processo di Reverse Engineering

Il modello digitale può essere difatti utilizzato per costruire prototipi in scala ridotta, esportando i file nel formato STL in sistemi automatici di lavorazione a controllo numerico (CNC) e ottenere dei modelli fisici per un riscontro ancora più diretto del progetto di intervento.

La RE e la procedura di prototipazione sono intrinsecamente legate dal modello matematico dell'oggetto, che mentre per la prima tecnica è l'obiettivo da raggiungere, per la seconda diventa il punto di partenza.

Nel capitolo precedente si è chiarito come la modellazione degli oggetti analizzati può avvenire semplicemente attraverso specifiche applicazioni software per il rilievo del dettaglio, risultando così uno *step* della procedura metodologica individuata: dal sistema di presa alla prototipazione.

In questo capitolo, invece, tratteremo della modellazione tridimensionale ricorrendo a specifici software di sviluppo per una rappresentazione matematica di oggetti tridimensionali. Prima di proseguire con la descrizione delle procedure utilizzate, è importante specificare che un modello digitale può essere restituito secondo diverse approssimazioni matematiche:

- **Modello poligonale:** i punti, vertici dello spazio 3D, sono connessi da segmenti a formare un insieme di poligoni piani che possono solo approssimare le superfici curve; è una modellazione non precisa, ma anche non rigida e quindi molto versatile, adatta a ri-generare oggetti *visivamente* perfetti, idonei per i contesti dove non è necessaria una verifica millimetrica (Stenza, 3D Studio).
- **NURBS:** le superfici sono definite da curve – le *Non-Uniform Rational B-Spline* – controllate con marker, che seguono, ma non interpolano, necessariamente i punti (aumentando il peso di un punto vorrà dire far avvicinare di più la curva a quel punto); le superfici così generate sono particolarmente adatte a ri-creare modelli esatti al fine di una loro prototipazione (Rhino, Maya).
- **Splines & Patches:** linee curve definiscono la superficie visibile; in termini di flessibilità e semplicità risultano una soluzione di compromesso.
- **Primitive:** questa procedura impiega figure geometriche primitive come sfere, cilindri, coni o cubi per costruire modelli più complessi, con le forme definite matematicamente; sono adatte ad applicazioni tecniche e meno alle forme organiche.

In questa stessa fase si è lavorato anche sulla ricostruzione di alcune parti del rosone – completamente staccate o deteriorate da processi corrosivi –, ottenendo così un nuovo modello 3D nella sua configurazione di restauro, conforme all'originaria composizione.

Le possibili alternative da seguire per ottenere il prototipo del rosone, oggetto di studio, sono state due. Una volta modellato in ambiente CAD, e definita la strategia di lavorazione attraverso processi CAM, il rosone è stato riprodotto in fase di prototipazione e successivamente verranno verniciate le parti colorate, per rendere in un unico modello anche gli effetti cromatici.

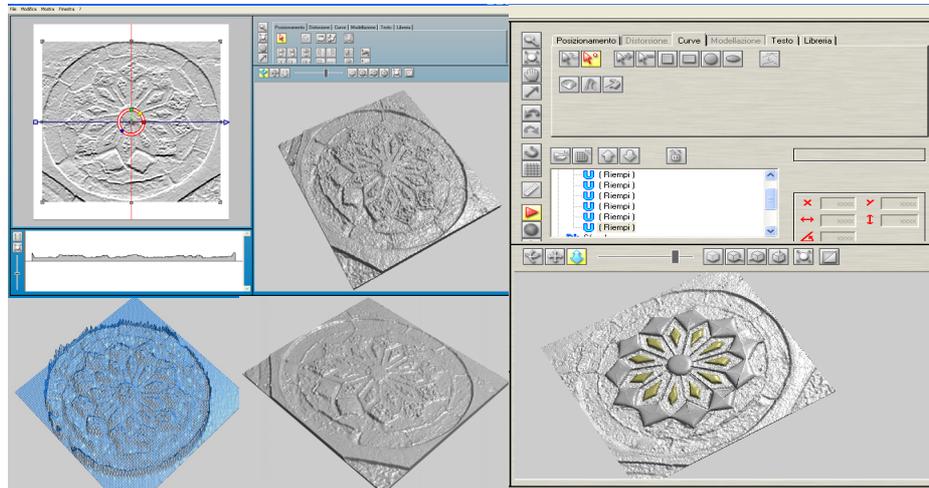
Nel caso di produzione in serie di decorazioni, sarebbe opportuno creare in ambiente CAD non la ricostruzione fedele del rosone, ma lo stampo in cui versare una prima colata di materiale (gesso o argilla in funzione delle dimensioni stabilite), e ottenere la struttura geometrica della composizione; quest'ultima a sua volta sarà lo stampo per la seconda colata di materiale di differente colore.

Di seguito saranno analizzate le diverse soluzioni a seconda dei diversi software implementati: nello specifico, si è ricorso a Stenza 6.0 della Picasoft e poi al più noto Rhinoceros 4.0.

È banale osservare come la fase di modellazione è strettamente collegata alla fase di prototipazione, e viceversa: quindi, è importante prima di realizzare il modello, sia digitale che fisico, programmare l'intera procedura al fine di evitare errori, o solo, ritardi di elaborazione.

6.2 Stenza

È un programma di modellazione cosiddetta artistica 3D, che grazie a una vasta tipologia di strumenti di modellazione (*spline, pennelli, selezioni, filtri di sfocatura, operazioni booleane, ecc.*) permette di creare modelli tridimensionali e di trattarli con una procedura rapida e intuitiva. È anche possibile ottenere modelli tridimensionali a partire da immagini fotografiche rappresentate in tonalità di grigio: ciascun pixel dell'immagine è trasformato in punti, le cui coordinate X e Y sono definite dalla posizione del pixel sull'immagine e la quota Z è stabilita dalla tonalità di grigio del pixel (la scala delle altezze sarà definita dall'operatore). Convienne allo scopo importare solamente un tracciato bidimensionale e individuare su di esso il contorno del modulo di base.



Modellazione tridimensionale a partire da un'immagine a livelli di grigi

Nel caso specifico della ricostruzione di decorazioni geometriche, tale software è risultato particolarmente efficace per la presenza della serie di comandi rappresentativi delle isometrie del piano: *copia per rotazione*; *copia per traslazione*; *simmetria assiale*, ecc.

Così, nota la legge armonica che governa l'intera composizione, definita dal movimento rigido di un modulo predefinito su di un reticolo piano, la decorazione può essere facilmente riprodotta partendo dalla semplice unità quale entità che può essere reiterata meccanicamente.

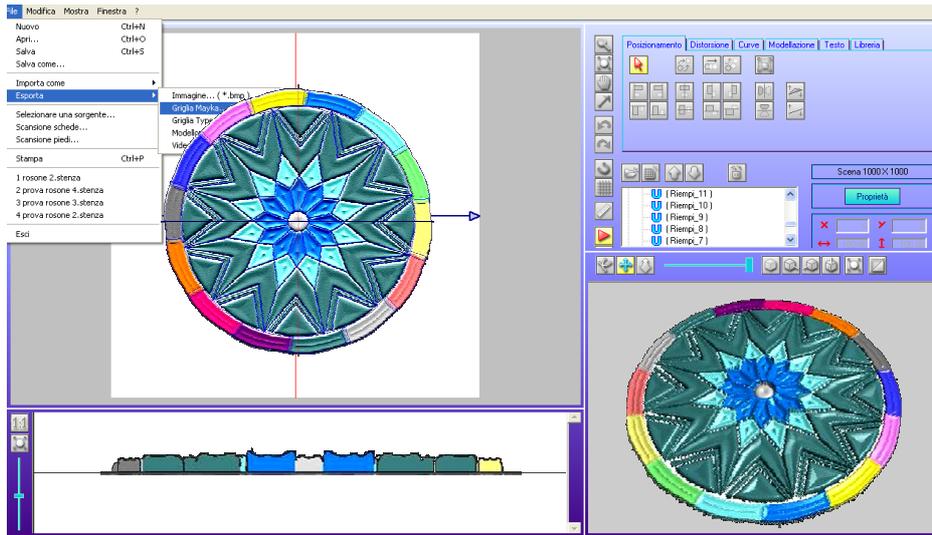
Prima di replicare la forma geometrica elementare secondo l'isometria caratteristica dell'intera composizione, è necessario che questa venga opportunamente lavorata.

Per regolare differenzialmente gli spessori automatici ottenuti – ritocandone nel caso la forma finale – e verificare lungo *Z* ogni operazione, bisogna agire nella finestra *Vista di profilo*.

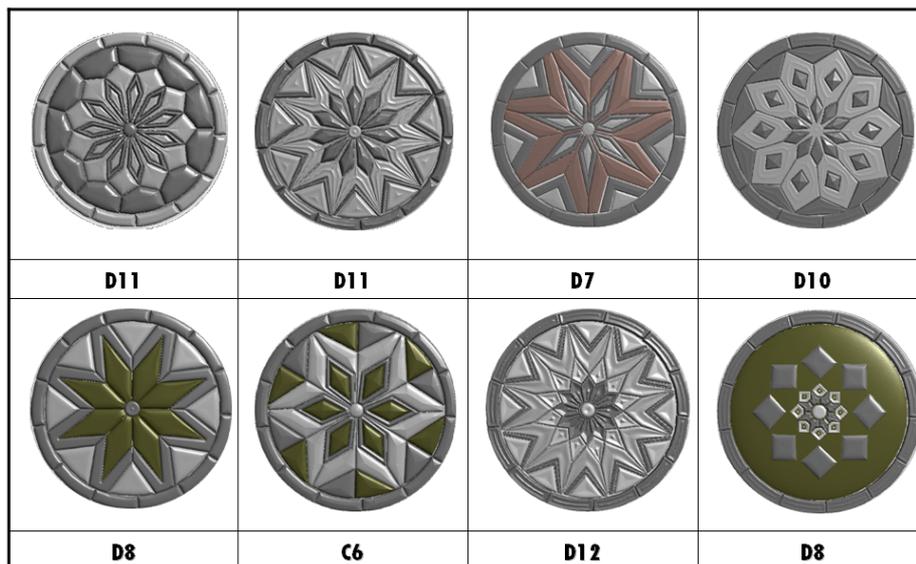
I volumi così realizzati andranno successivamente fusi, utilizzando lo strumento *sfocatura* per attenuare gli spigoli vivi ed ottenere così una forma della giusta plasticità; solo con il modulo perfettamente lavorato è stato possibile, attraverso l'implementazione del comando di isometria della composizione, dar origine all'intero modello tridimensionale.

La restituzione finale non è il semplice il dettaglio così come ci appare, ma la precedente scomposizione teorica dell'opera ha permesso di

individuare, nella successiva ricomposizione grafica, la natura e la posizione di ogni singolo elemento: uno sguardo critico che guida a una corretta e realistica riproduzione.



Modellazione tridimensionale di un rosone in Stenza



Risultati ottenuti con il programma Stenza

Questi modelli formali tendono così a divenire modelli geometrici, simbolo di una struttura più profonda, che è possibile cogliere con l'aiuto di precisi schemi topologici.

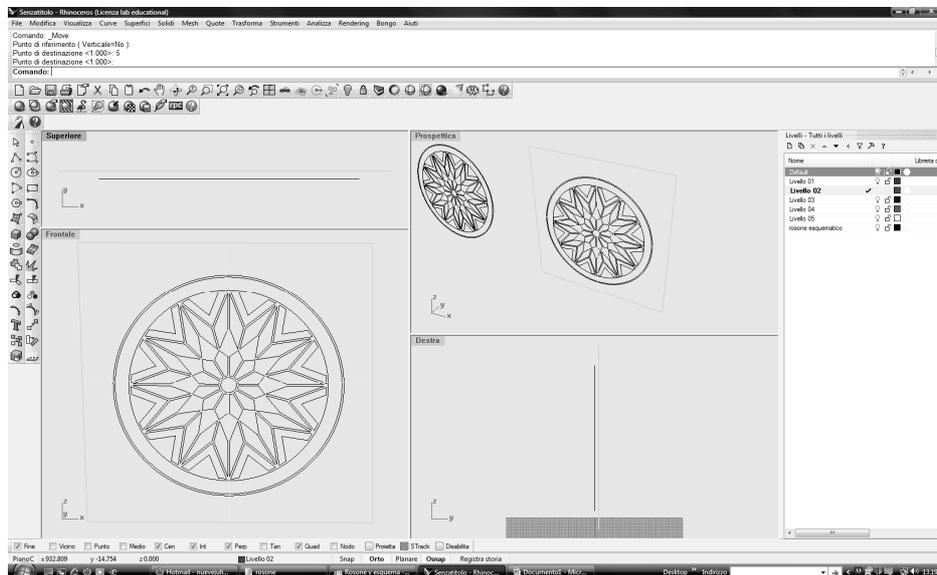
6.3 Rhinoceros

Prima di iniziare la modellazione in Rhinoceros è stato opportuno considerare la strategia da adottare per esplicitare il modello che potrà risultare composto da superfici con spigoli vivi o da morbide forme organiche, o essere una combinazione di entrambi. In base a ciò possiamo decidere se lavorare tramite NURBS, secondo modelli poligonali o entrambi i metodi.

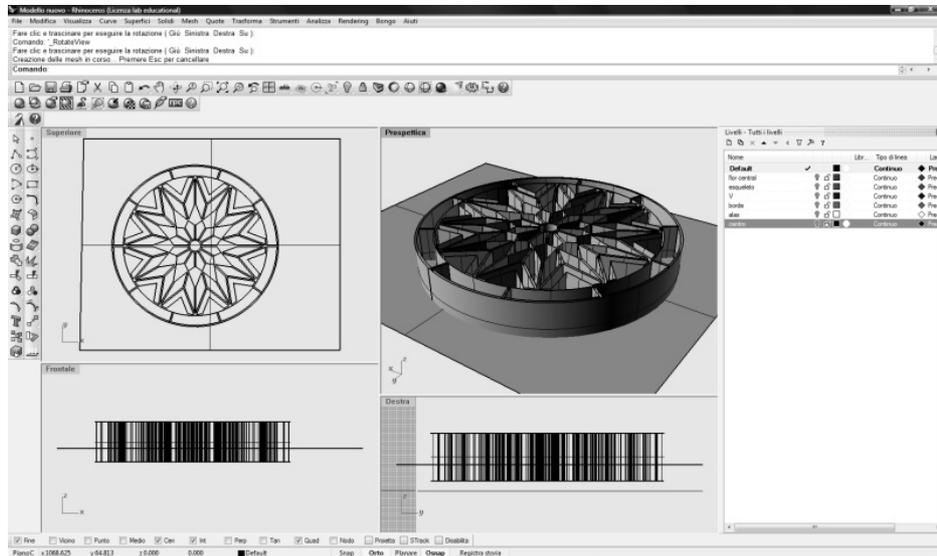
Come strategia di modellazione si è optato di ricostruire il modello in NURBS, ottenendo così un solido formato da 868 superfici.

Partendo dal modulo di base, si è proceduto con il disegnare il tracciato 2D, per poi generarne il volume; al modulo si applica l'operazione di *Serie polare* specificando il centro del rosone come centro di rotazione.

Si effettua poi l'estrusione lineare dello schema geometrico fino a che non viene superata la superficie precedentemente creata.

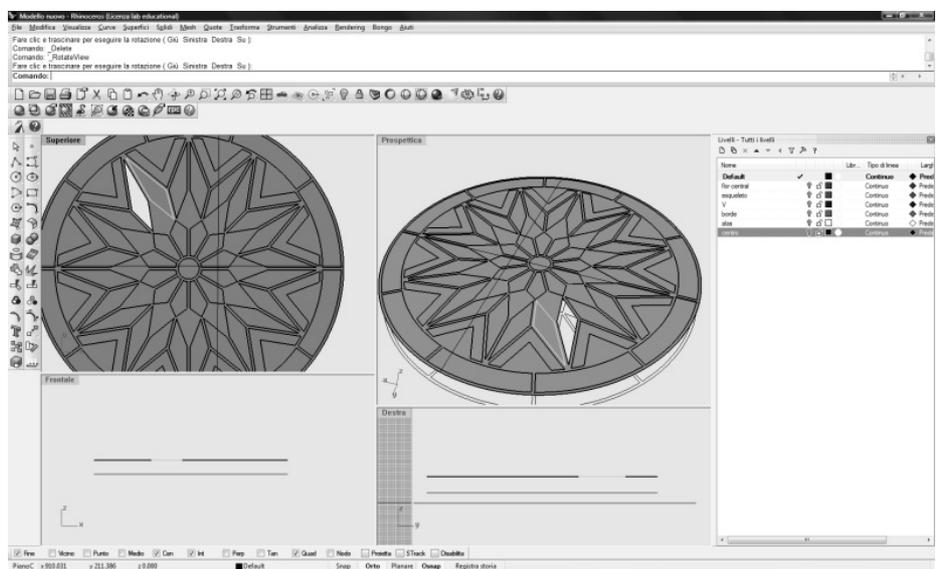


Tracciato bidimensionale sovrapposto ad una superficie

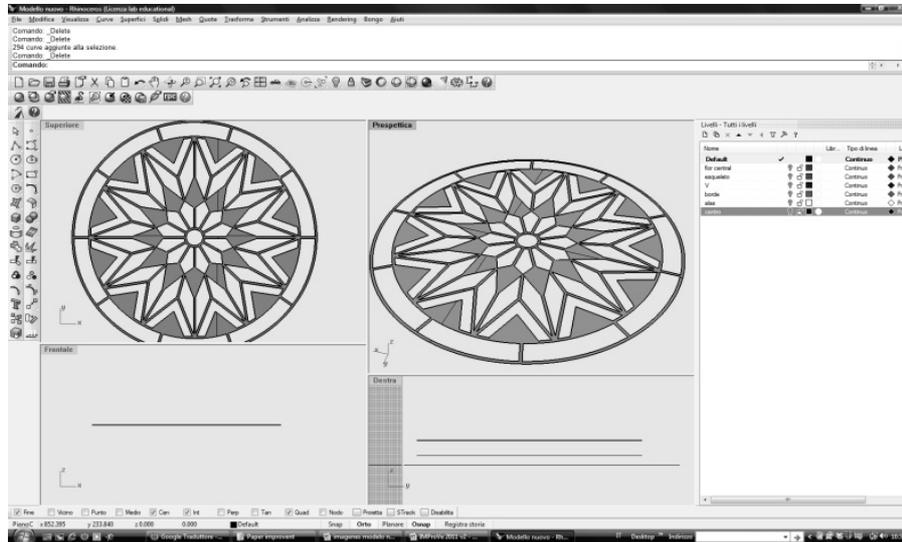


Estrusione lineare dello schema geometrico di base

Si prosegue eliminando le parti che non rappresentano il corpo principale del rosone, suddividendo la necessaria superficie di appoggio dalla superficie principale estrusa.

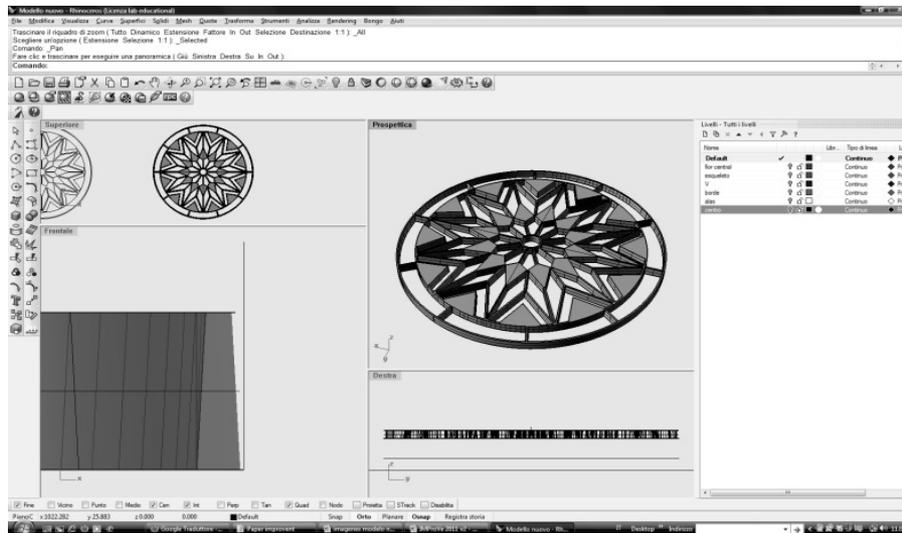


Intersezione della superficie di estrusione con la superficie di sfondo

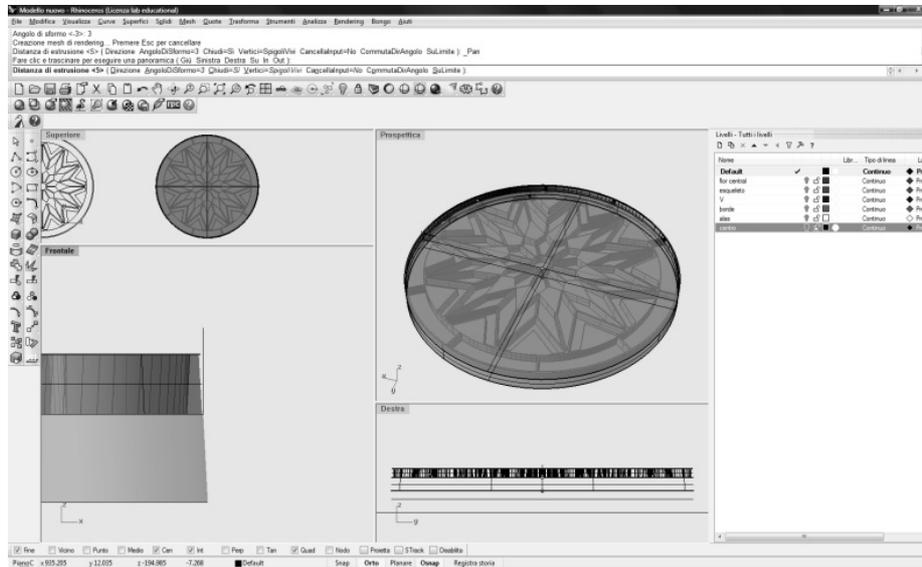


Superficie geometrica del rosone

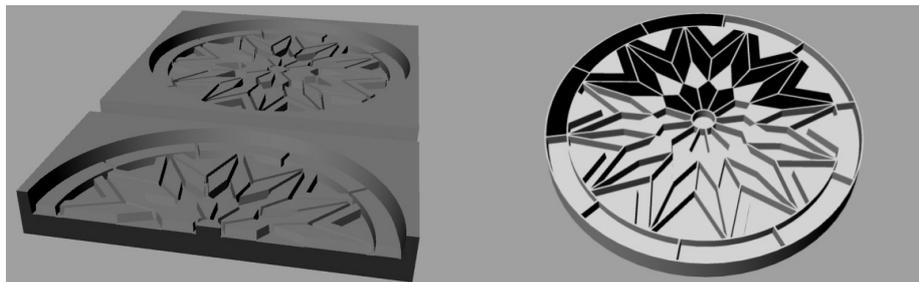
Dando un volume alla superficie di estrusione si è considerato uno spessore di 5 mm e un angolo di 3° , necessario per evitare la rottura del pezzo, in fase di rimozione dallo stampo; ora estrudiamo semplicemente un'area circolare alla base del modello imponendo un'altezza di 7 mm e un angolo di 3° .



Primo volume ottenuto estrudendo la superficie geometrica di 5 mm e un angolo di 3°



Secondo volume ottenuto estraendo un'area circolare di 7 mm e un angolo di 3°



Modello finale per lo stampo del rosone

Infine, con una semplice unione booleana dei due volumi è possibile ottenere il corpo del rosone.

6.4 Processi CAM e prototipazione

Dalla definizione di un modello virtuale in ambiente CAD si è passato alla fabbricazione digitale attraverso processi CAM - *Computer Aided Manufacturing*.

Il processo CAM traduce il modello geometrico ottenuto in CAD in un linguaggio adatto alla macchina CNC e nello specifico, permette il calcolo dei parametri tecnologici di lavoro, la definizione del percorso

utensile e delle aree di svuotamento attraverso la selezione dei profili, fori, ecc., per terminare così la verifica di lavorazione mediante la simulazione grafica.

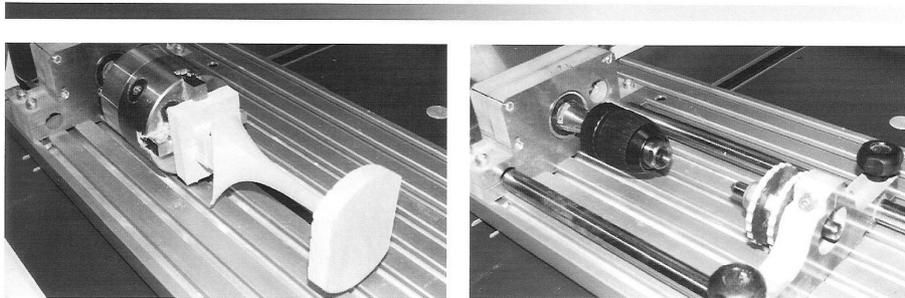
In funzione del tipo di software e della fresatrice, si distinguono diverse strategie di lavoro:

- **CAM a 2 assi e mezzo:** calcolano il percorso utensile parallelo al piano di lavoro della macchina lavorando con i contorni geometrici del modello CAD; l'utensile è posto a una data altezza sull'asse Z, definita dall'operatore, e si muove simultaneamente su due assi.
- **CAM a 3 assi:** si calcola il percorso 3D lavorando con superfici 3D e contorni geometrici; i tre assi della macchina X, Y, Z possono muoversi allo stesso tempo e spostarsi da un punto all'altro del percorso, con l'altezza Z che viene calcolata automaticamente.
- **CAM a 4 assi:** l'utensile può ruotare attorno ad un'asse oltre che traslarlo lungo gli altri tre, questo consente di fresare forme a "tutto tondo".
- **CAM a 5 assi:** c'è la possibilità di ruotare l'utensile attorno a due assi ortogonali tra di loro oltre che traslarlo lungo tutte e tre le direzioni.

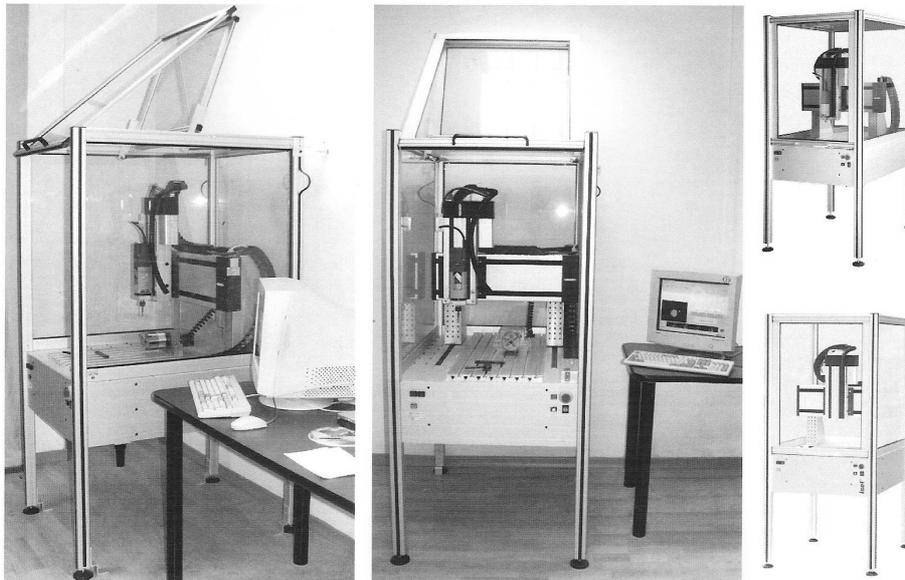
Il software Mayka distribuito dalla Abacus Systems, utilizzato per questa esperienza, offre diverse modalità per gestire macchine utensili multi-asse. Per questo, prima di iniziare una qualsiasi lavorazione è necessario stabilire il driver per la corretta gestione della macchina.

CAM: Computer Aided Manufacturing								
	CAM a 2,5D		CAM a 3D		CAM a 4D		CAM a 5D	
	Trasl.	Rot.	Trasl.	Rot.	Trasl.	Rot.	Trasl.	Rot.
x	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	SI
y	SI	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI
z	NO	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO

Strategie di lavoro CAM



NOTE TECNICHE				
Corse utili	AbaMill 2015	AbaMill 3020	AbaMill 4030	AbaMill 4433
Asse X	200 mm	300 mm	400 mm	440 mm
Asse Y	150 mm	200 mm	300 mm	330 mm
Asse Z	90 mm	90 mm	140 mm	160 mm
Altri valori				
Luce in Z	100 mm	115 mm	170 mm	210 mm
Passo Vite	4 oppure 10 mm	4 oppure 10 mm	4 oppure 10 mm	5 oppure 10 mm
Velocità Max	da 18 a 45 mm/sec.	da 18 a 45 mm/sec.	da 18 a 45 mm/sec.	da 25 a 50 mm/sec.
Dim. Tavola Portapezzo	250 x 400 mm	250 x 500 mm	375 x 600 mm	375 x 900 mm
Dim. Esterne L x P x H	535 x 600 x 690 mm	610 x 650 x 715 mm	780 x 850 x 810 mm	760 x 1010 x 1590 mm



ABACUS
SISTEMI CAD-CAM

Abacus Sistemi Cad-Cam srl - Via C. Colombo, 101 - 29100 Piacenza
Tel. 0523 590640 - Fax 0523 591474 - www.abacus.it - info@abacus.it

Scheda tecnica delle fresatrici compatte della serie Abamill

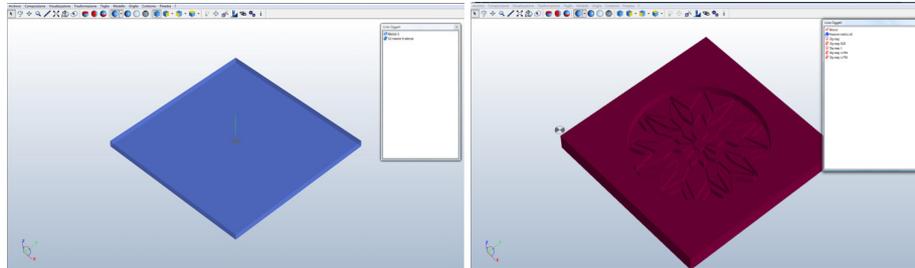


Fresatrice a 4 assi Abamill serie Flatcom

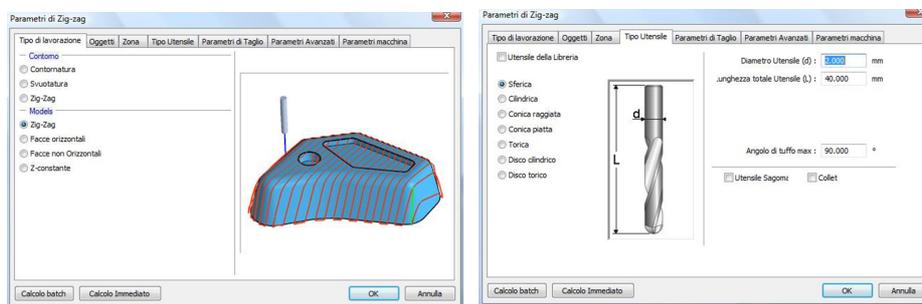
La stampante 3D utilizzata è una fresatrice a 4 assi della ABAMILL serie FLATCOM, che permette lavorazioni di dimensioni fino a 700 (X) x 900 (Y) x 250 (Z) mm, e integra il software di gestione RemoteWin, utilizzando come postprocessore il modello *NCP Euromod 3 axis*.

Il primo *step*, in ambiente CAM, è definire le dimensioni del blocco (*Definire blocco*) sul quale realizzare il prototipo e decidere come disporlo rispetto all'origine degli assi con il comando *Allinea all'origine*. Una volta importato il modello digitale in formato STL, andrà stabilito come posizionarlo rispetto al blocco precedentemente definito. Sotto la voce *Metodo di taglio* è possibile scegliere la migliore strategia di taglio che si adatta alla tipologia di modello da produrre, specificando tutti i parametri che servono per definire il percorso utensile.

Nello specifico il software Mayka offre due modalità di fresatura: lavorare in 2D i contorni estratti dal modello digitale, o lavorare in 3D direttamente sul modello STL. Il primo caso implica l'individuazione di un percorso lineare, rettilineo o curvo, dove la coordinata Z si mantiene invariata. Questa lavorazione andrà ripetuta più volte variando la coordinata Z manualmente ma mantenendo inalterato il percorso lungo X e Y; invece lavorando direttamente in 3D l'intero oggetto si riproduce secondo un unico percorso lungo X, Y, Z.



Definizione del blocco e importazione dello stampo



Tipologie di lavorazioni e libreria utensili

Nell'applicazione si è optato per quest'ultima strategia di taglio che contiene al suo interno differenti tipologie di lavorazioni:

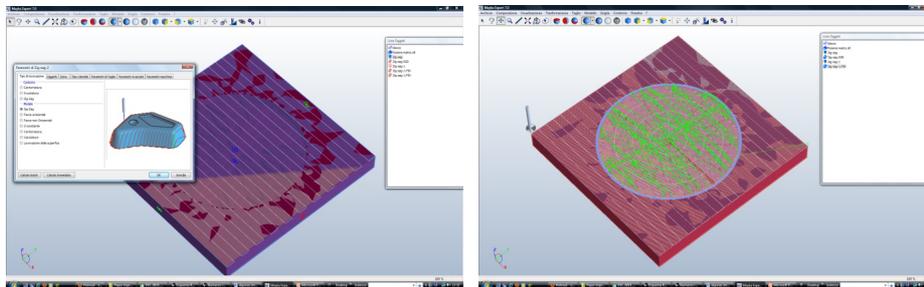
- **il metodo a zig zag** comporta passate successive lungo X , utilizzata soprattutto per rifinire precedenti strategie;
- **il metodo con facce orizzontali** prevede che la fresa lavori solamente le facce del modello parallele al modello cartesiano;
- **il metodo con facce non orizzontali** si tratta di un metodo a Zig Zag limitato all'insieme delle sole facce non orizzontali del modello;
- **il metodo a Z costante** muove l'utensile ad altezza costante sull'asse Z e rimuove tutto il materiale di quel livello, basandosi sui contorni calcolati di sezioni successive.

Fissato il tipo di lavorazione, è necessario stabilire, nella voce *Oggetti*, quali tra gli elementi presenti nella relativa *Lista* si desidera includere nella lavorazione, sotto il campo *Zona* il volume su cui l'utensile dovrà a lavorare e in *Tipo utensile* la forma e la dimensione dell'utensile che si vuole utilizzare (ogni utensile è accompagnato da una rappresentazione grafica che permette una migliore identificazione riguardo i parametri da inserire).

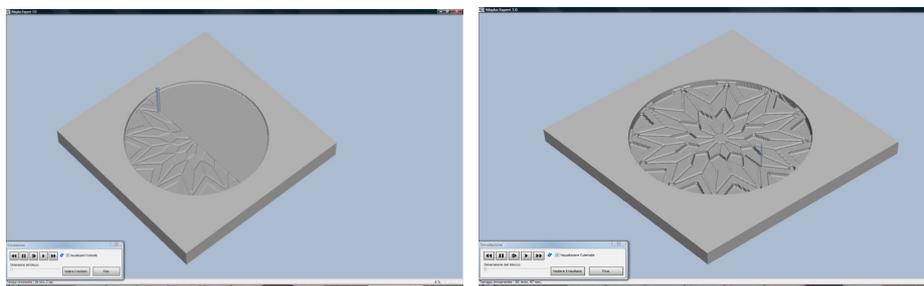
ROSONE					
Strategia Taglio		Parametri Utensile		Parametri Taglio	
N.	Tipo di lavorazione	Punta	Diametro	Lavorazione	Percorso
1	ZigZag	Sferica	Ø3mm	Sgrossatura	Cartesiana
2	ZigZag	Sferica	Ø1mm	Finitura	Polare

Parametri di taglio utilizzati per il processo CAM del rosone

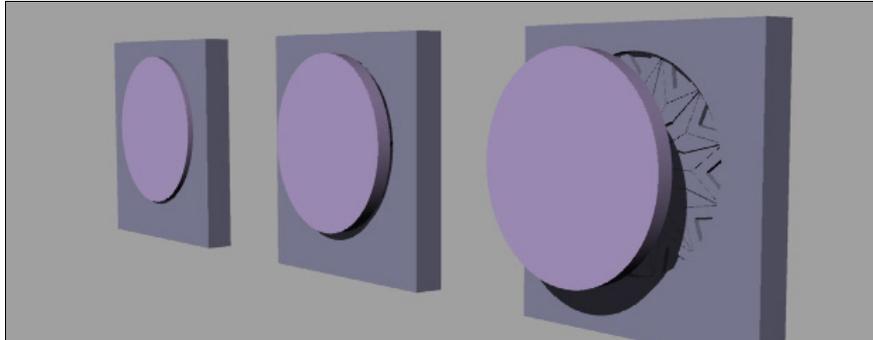
Infine, in *Parametri di taglio* andranno stabiliti la finitura e/o la sgrossatura del taglio; in entrambi i casi andrà definito il valore del *Sovrasspessore* (spessore di sicurezza sulla parte da fresare in previsione di ulteriori passate di finitura), la *Cresta* (altezza delle onde generate da ogni passata di taglio) e la *Distanza tra le varie passate* (calcolata automaticamente in funzione del valore di *Cresta*).



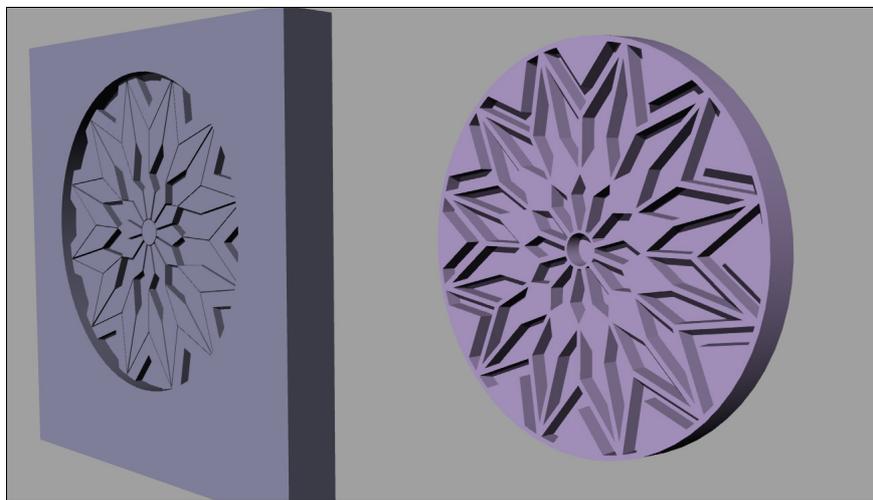
Fase di sgrossatura e finitura del rosone



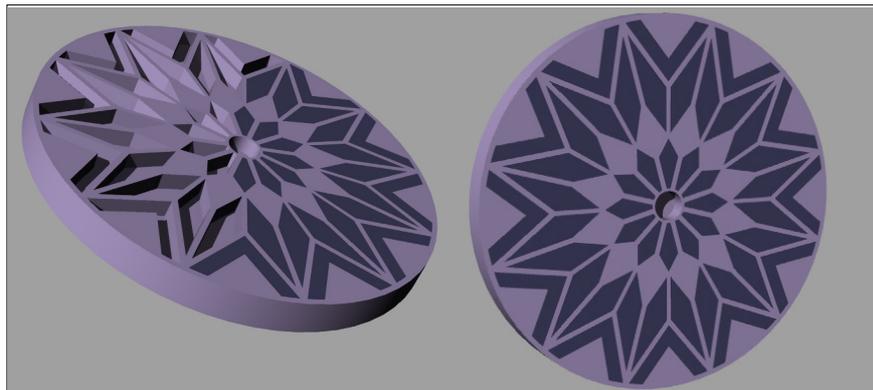
Simulazione della lavorazione di sgrossatura del rosone



Prima colata di gesso nello stampo ottenuto



Confronto stampo con struttura geometrica ottenuta dalla prima 'colata' di gesso



Risultato parziale e totale in seguito alla seconda 'colata' di gesso

Mayca offre tre tipologie di “tuffi”: *normale*, discesa della fresa direttamente sul primo punto di traiettoria; *scarico*, discesa della fresa direttamente sul primo punto di traiettoria con foratura; *rampa*, la fresa scende seguendo una pendenza lungo il percorso.

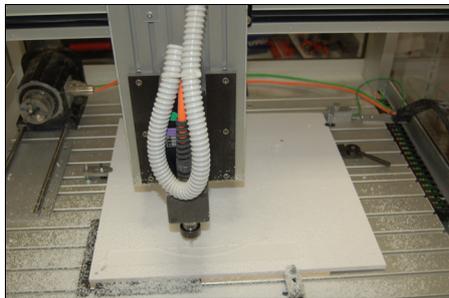
Prima di procedere alla fase finale di prototipazione conviene procedere alla simulazione del processo di lavorazione in cui è possibile verificare se i parametri settati portino al risultato atteso.

Una volta ottenuto il modello in CAM si passa alla successiva fase, e ottenuto lo stampo, proseguire con le colate di gesso o argilla per ottenere la struttura geometrica del rosone con i dovuti effetti cromatici.

Prima di posizionare il blocco grezzo sopra il piano della fresatrice è opportuno predisporre sul piano di lavorazione, a protezione dello stesso, una tavola di legno. Si posiziona poi l’utensile, una punta sferica da Ø3mm, nel mandrino e si impostano le coordinate che il braccio della fresatrice deve avere nelle seguenti posizioni:

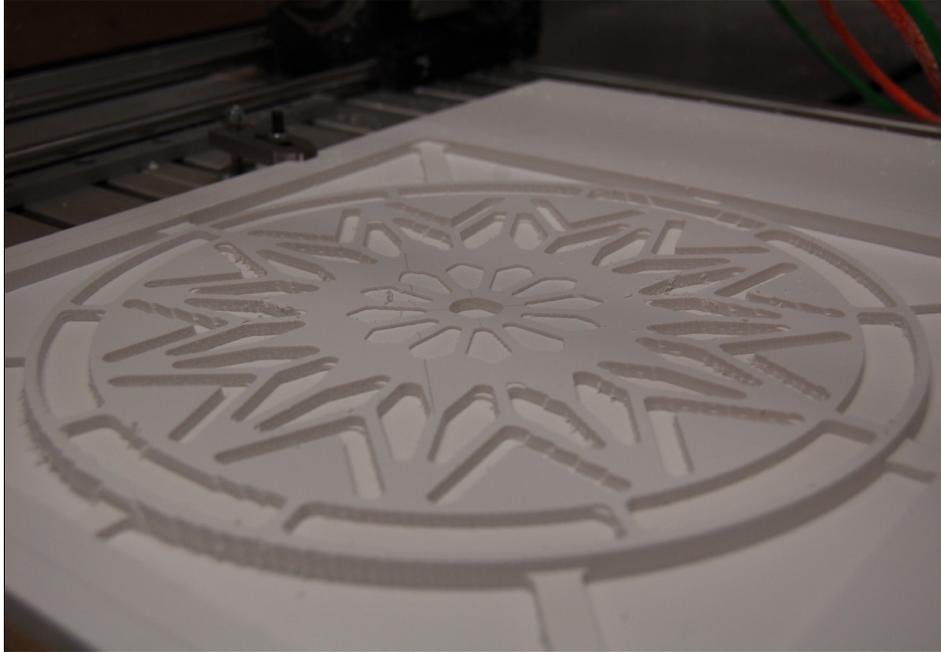
- **home**: corrisponde alla posizione di riposo della macchina, quando il valore delle coordinate lungo tutti e tre gli assi è nullo.
- **work**: posizione iniziale del ciclo di lavorazione, possibilmente in corrispondenza di un vertice del blocco.
- **Z alto**: richiama la posizione di lavoro, ma con un valore di spostamento lungo l’asse Z costantemente nullo (risulta essere una posizione di sicurezza intermedia fra le due stazioni precedenti).

È stato così caricato il file NCP e quindi iniziata la lavorazione secondo la strategia di taglio individuata. Quando dalla fase di sgrossatura si è passati alla finitura, è stato opportuno cambiare l’utensile con una punta sferica di Ø 1mm. Di seguito vengono riportate alcune immagini relative al processo di taglio eseguito con la fresatrice a 4 assi Abamill della serie Flatcom.









Ottenuto infine il prototipo, si può proseguire con la colata in gesso. La procedura applicata a casi studi idonei per analizzare i principi della ripetibilità in serie e delle operazioni di laboratorio, ha consentito, grazie alla ri-progettazione digitale e alla produzione con gli strumenti della tecnologia a controllo numerico, di codificare la riproducibilità tecnica, immateriale e materiale, del decoro architettonico.

7. II SISTEMA INFORMATIVO MULTIMEDIALE

Le procedure e le strumentazioni descritte possono essere un potente metodo per il controllo, la verifica e il monitoraggio di manufatti architettonici, permettendo di realizzare *database* metrici interattivi in grado di fornire in qualsiasi momento informazioni sull'oggetto rilevato. La precisione, la velocità di acquisizione dei dati, gli elevati livelli di automazione, la riproducibilità delle operazioni di rilevamento e le possibilità di implementazione e di interrelazione nel tempo di dati di diversa natura, per la costruzione critica di modelli geometrici e prototipi, sono caratteristiche che comportano vantaggi innegabili e aprono nuove frontiere per uno sviluppo rigoroso di metodologie integrate di rilievo e analisi dei manufatti.

Così facendo è possibile creare un vero e proprio Sistema Informativo per il Rilevamento, basato su mappe elettroniche e su banche dati multimediali contenenti immagini, video, riprese fotogrammetriche, misure automatiche, rilievi architettonici, informazioni sullo stato di conservazione e, ovviamente, disegni.

Durante lo sviluppo della ricerca è nata, infatti, la necessità di realizzare una banca dati che consentisse, attraverso un approccio più sistematico, la gestione di una documentazione in continuo aumento.

Il presupposto da cui si è partiti è duplice: da un lato considerare la decorazione in se stessa, cercando di creare una griglia informativa utile alla sua classificazione; dall'altro, inserirla nel suo contesto monumentale di riferimento, ricontestualizzandola nell'originario ambiente architettonico e quindi urbanistico di origine, approdando così ad una migliore conoscenza topografica del luogo di provenienza.

Impostare un modello di schedatura dei rivestimenti geometrici costituisce uno strumento di catalogazione funzionale sia alla tutela e alla fruizione del bene immobile, sia alla definizione di un metodo di approccio allo studio dei gruppi di simmetria in grado di stabilire l'origine degli schemi decorativi, i percorsi di distribuzione, lo sviluppo di tendenze locali.

Nel predisporre la scheda modello, si è cercato di allinearsi con gli standard istituzionali indicati dalla normativa vigente in materia di catalogazione di Beni Mobili dell'Istituto Centrale per il Catalogo e la Documentazione (ICCD).

La scheda, creata mantenendo una suddivisione in finestre, è sostanzialmente divisa in due sezioni, la prima volta a fornire tutte le informazioni di contesto, relative all'*Edificio* e all'*Ambiente* di provenienza; la seconda, invece, dedicata al *Rivestimento* in sé, e quindi alle caratteristiche tecniche, compositive, e tipologico – stilistiche, corredate da immagini, informazioni relative allo stato del ritrovamento e allo stato di conservazione.

La struttura gerarchica ad albero che regola queste sezioni, con schede di partenza a livello degli edifici e schede di maggiore approfondimento costituite da informazioni molto più dettagliate della decorazione, mira oltre che alla catalogazione in sé, punto di partenza per qualsiasi ulteriori analisi, a tre possibili obiettivi:

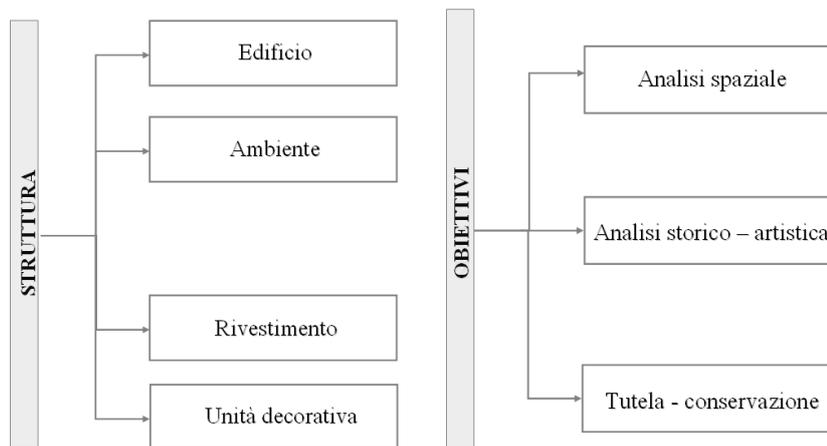
- *Analisi spaziale*: facendo dialogare i dati bidimensionali forniti dai rivestimenti e i dati relativi ai contesti e agli ambienti, si possono ottenere indicazioni per una migliore conoscenza topografica del sito cui tali decorazioni appartengono; associando le ricorrenze tipologiche con la funzione degli ambienti si possono ricavare informazioni sul rapporto tra l'apparato decorativo e la destinazione dell'ambiente.
- *Analisi storico - artistica*: dall'interazione fra le informazioni contenute nei livelli specificatamente riguardanti il rivestimento e le parti di cui si compone, in particolare dall'analisi tipologica e tecnica delle singole unità compositive, si può giungere, attraverso la successiva ricomposizione, al riconoscimento del "quando" e del "dove" schemi e motivi che compongono la decorazione sono stati creati, entro quali siti è possibile incontrarli e quindi a quali maestranze o botteghe è possibile attribuire la paternità di tali creazioni.
- *Tutela, valorizzazione e conservazione*: con le informazioni sul luogo e lo stato di conservazione del manufatto, la banca dati fornisce un importante sostegno alla valorizzazione dei rivestimenti, non solo come patrimonio storico - artistico di un luogo, ma anche in vista di future ulteriori ricerche. Infatti, nell'ottica attuale di gestione dei beni archeologici, l'esistenza di una scheda specifica per la catalogazione di composizioni decorative, in cui compaiono tutti i dati relativi alla loro collocazione, allo stato di conservazione, all'esistenza di restauri

antichi e moderni, rappresenta un utile strumento ai fini della tutela degli stessi. La gestione informatizzata, poi, oltre che rappresentare un sistema più sicuro di protezione dei dati dalle ingiurie del tempo rispetto ai supporti cartacei, consente una più completa e diretta fruizione degli stessi, facilitando la ricerca delle informazioni.

L'obiettivo è di realizzare un sistema informatico innovativo che consenta l'archiviazione di informazioni sulle decorazioni geometriche utilizzabile anche in rete. Tale database aspira a raccogliere tutte le tipologie di decoro architettonico senza alcun limite cronologico o geografico, fornendo informazioni e indicando percorsi conoscitivi il più possibile esaustivi, tenendo conto delle diverse fasce d'utenza che interrogheranno il sistema, dagli studenti ai ricercatori, e fornendo più livelli di approfondimento e interfacce.

Gli strumenti che consentono un'analisi approfondita dei dati contenuti nel database multimediale sono *Visualizza Lista Record* e *Ricerca*.

Grazie al *tool Ricerca* si mette a disposizione un metodo rapido per individuare un decoro geometrico di cui si conoscono le caratteristiche fondamentali, quali il comune in cui è situato, il gruppo di simmetria a cui appartiene, la denominazione o alcune informazioni sull'edificio e l'ambiente che lo contengono.



Struttura e obiettivi del database multimediale

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

Home Visualizza lista record

EDIFICIO

Provincia
 Provincia
 Comune
 Località
 Ubicazione
 Tipologia
 Fascia cronologica di riferimento

AMBIENTE

Tipologia
 Fascia cronologica di riferimento

RIVESTIMENTO

Denominazione
 Gruppo
 Fascia cronologica di riferimento

UNITA' DECORATIVA

Unità decorativa
 Reticolo
 Cromia
 Simmetria compositiva
 Tecnica esecutiva

Critero di ricerca per sezioni

In tale schermata occorre inserire nelle apposite caselle uno o più criteri di ricerca e cliccare sul pulsante *Invio*. Così facendo si visualizzerà una lista contenente i decori che soddisfano le caratteristiche inserite: cliccando su una delle righe di tale lista si otterrà l'immediata visualizzazione della composizione.

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

Home Visualizza lista record Ricerca

ROSONI			DECORAZIONI MISTE		FREGI	MOSAICI	
	PROVINCIA	COMUNE	LOCALITA'	TIPOLOGIA EDIFICIO	TIPOLOGIA AMBIENTE	RIVESTIMENTO	IMMAGINE
1	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D11	
2	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D11	
3	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D7	
4	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D10	
5	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D8	
6	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	C6	
7	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D12	
8	Salerno	SA	Centro	Edificio religioso	Quadriportico	D8	

Visualizza lista record

Oppure con lo strumento *Visualizza Lista Record* è possibile visualizzare tutte le decorazioni, ordinate per gruppo, presenti in un determinato ambiente, in ordine cronologico o alfabetico.

Individuata la composizione decorativa, è possibile studiarla, conoscerla analizzarla, in ogni suo aspetto navigando attraverso le schede di cui si compone, che seguono la struttura ad albero precedentemente illustrata.

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL'EDIFICIO			
STATO	ITALIA	REGIONE	CAMPANIA
		PROVINCIA	SALERNO
LOCALITA'	CENTRO STORICO	UBICAZIONE	Via DUOMO, 1, 84121

La cattedrale fu fondata da Roberto il Guiscardo. Nel Marzo del 1081 venne inaugurata la cripta e nel luglio del 1084, la chiesa venne consacrata dal papa Gregorio VI in persona, a Salerno. Il Duomo è esemplare del modello dell'abazia di Ruvo o Montecassino con una pianta di tipo basilicale composta da tre navate longitudinali, un transetto e un quadripartito. L'aspetto attuale corrisponde per ampia parte alla ristrutturazione barocca, avviata dopo il terremoto del 3 giugno 1688 su progetto dell'architetto napoletano Arcangelo Guglielmelli modificata e completata dall'architetto romano Carlo Buratti. L'ingresso attuale ha modificato quello medievale con la coppia scultorea del leone e della leonessa. L'atrio è circondato da un portico retto da 28 colonne di spoglio con archi a tutto sesto voltati, che rischeggiano tipologie islamiche. Esso è arricchito su tutti i lati da una serie di sarcofagi romani, riutilizzati in epoca medievale, configurandosi come una specie di Pantheon della città. Sul lato meridionale sorge un cinescopio della metà del XII secolo. L'ingresso principale della chiesa, quantificata da una porta di bronzo bizantina, inserita in un portale marmoreo medievale. Le cappelle laterali risentono soprattutto della cultura barocca con quadri settecenteschi di buona fattura come il San Donato di Francesco Solimena e la Pentecoste di Francesco De Mura.

TIPOLOGIA: EDIFICIO RELIGIOSO
FASCIA CRONOLOGICA: XI SECOLO

Scheda Edificio

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL'AMBIENTE			
TIPOLOGIA	QUADRIPORTICO, ATRIO	ALTEZZA	15 metri, 52 piedi
LARGHEZZA	36 metri, 124 piedi	LUNGHEZZA	33 metri, 114 piedi

L'ATRIO presenta una forma quasi quadrata con una dimensione di 36 metri per 33, mentre il distico è circondato da un portico retto da 28 colonne di spoglio con archi a tutto sesto agli angoli. Avvicinandosi verso il centro del quadripartito si giunge ad una fontana a vasca circolare che in origine era il fonte battesimale della Cattedrale. Seguendo la spoglia sul lato meridionale del quadripartito si osserva il monumentale campanile normanno della metà del XII secolo. Questo si eleva in altezza per quasi 52 metri con una base di circa 10 metri per lato. Il rilievo costituisce la parte più interessante del campanile in quanto presenta una decorazione ad archi a tutto sesto intrecciati con alternanza regolare di diversi materiali. L'atrio è arricchito da una balaustra su cui sono collocate le statue di S. Matteo, S. Basilio e S. Grammatico. Il Duomo di Salerno, come testimonia la scritta della facciata della cattedrale, fu ultimata da Roberto il Guiscardo nel 1084. In epoca normanna, cioè la sacra spoglia dell'apostolo Matteo, il patrono della città di Salerno, fu il corpo del Papa Gregorio VII. Quando nel 1079, il Vescovo di Salerno Alfano I, ricevette l'ordine del grande Evangelista Matteo, il Papa Gregorio VII, chiesa proprio a Roberto il Guiscardo, conquistatore di Salerno, di costruire un tempio per accogliere i resti del santo. L'aspetto attuale corrisponde a più interventi avvenuti in diversi periodi.

FASCIA CRONOLOGICA: XI secolo

Scheda Ambiente

In queste schede è possibile reperire informazioni storico - bibliografiche del contesto in cui il decoro è situato, con collegamenti a immagini fotografiche e a file vettoriali contenenti piante, prospetti e sezioni dell'edificio; visualizzazione del luogo in Google Map.

Nella scheda *Rivestimento* è possibile visualizzare il modello del decoro in differenti modalità: ortofoto, nuvola di punti, modello poligonale, NURBS, e poter scaricare il file corrispondente.

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

EDIFICIO AMBIENTE **RIVESTIMENTO** UNITA' DECORATIVA

DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO

ROSONI FREGI MOSAICI

LUNGHEZZA LARGHEZZA

DIAMETRO 50 cm RETICOLO RETICOLO GEOMETRICO

MODELLI 3D FOTO MESH NURBS

FASCIA CRONOLOGICA XI secolo

Scheda Rivestimento

Sistema per la Catalogazione informatizzata degli elementi di decoro architettonici
Dottorato in Ingegneria delle Strutture e del Recupero Edilizio ed Urbano

EDIFICIO AMBIENTE RIVESTIMENTO **UNITA' DECORATIVA**

DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO

MODULO ROMBO GRUPPO DIEDRALE D11 Info

ISOMETRIE RIFLESSIONE, ROTAZIONE CROMIA BICROMIA: GRIGIO, SABBIA

SIMMETRIA COMPOSITIVA

FASCIA CRONOLOGICA XI secolo

La scelta dei gruppi si può utilizzare condurre attraverso i suoi "generatori", vale a dire attraverso alcune isometrie particolari componendo le quali si ottengono tutte le isometrie del gruppo. Per esempio, è utile mettere in evidenza che i gruppi finiti di isometrie non possono contenere traslazioni, né gliscoltraslazioni, ma si possono generare con la sola rotazione e riflessione. Se la simmetria di riflessione invece manca, il gruppo ha un unico generatore ed è formato solo da rotazioni; in questo caso si dice che è un "gruppo ciclico".
L'esempio riportato appartiene al gruppo diedrale in quanto il rosone può comparsi cioè mediante la riflessione interna o il rosone che la rotazione interna al centro di un angolo pari a 360°/11. Es è per questo che tale rosone risulta essere di categoria D11.

Scheda Unità decorativa

Invece nella scheda *Unità decorativa* la legge geometrica che governa l'intera composizione è stata poi animata digitalmente in modo da consentire sia all'utenza di settore, che a un pubblico più vasto, di cogliere con maggiore immediatezza il compiersi del disegno ornamentale e, dunque, favorire nell'utente la cognizione di un processo in divenire della forma evidenziando le geometrie nascoste.

Facendo riferimento, come esempio del sistema informativo implementato, alle decorazioni dei rosoni e dei sarcofagi del Duomo di Salerno, nelle pagine seguenti vengono riportate tutte le aree del sito a cui è possibile collegarsi dalle differenti schede principali:



EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL'EDIFICIO			
STATO	ITALIA	REGIONE	CAMPANIA
		PROVINCIA	SALERNO
LOCALITA'	CENTRO STORICO	UBICAZIONE	Via DUOMO, 1, 84121



PIANTA LOCALITA'

FOTO

PIANTA EDIFICIO



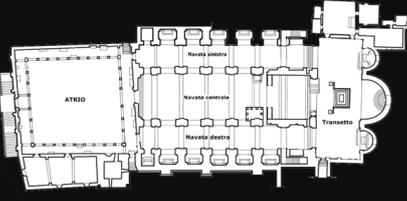
EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL'EDIFICIO			
STATO	ITALIA	REGIONE	CAMPANIA
		PROVINCIA	SALERNO
LOCALITA'	CENTRO STORICO	UBICAZIONE	Via DUOMO, 1, 84121



PIANTA LOCALITA'

FOTO

PIANTA EDIFICIO



EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL'AMBIENTE			
TIPOLOGIA	QUADRIPORTICO, ATRIO	ALTEZZA	15 metri
LARGHEZZA	36 metri	LUNGHEZZA	33 metri



PIANTA AMBIENTE

FOTO



EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL' AMBIENTE			
TIPOLOGIA	QUADRIPORTICO, ATRIO	ALTEZZA	15 metri
LARGHEZZA	36 metri	LUNGHEZZA	33 metri

FOTO

PIANTA AMBIENTE

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL' AMBIENTE			
TIPOLOGIA	QUADRIPORTICO, ATRIO	ALTEZZA	15 metri
LARGHEZZA	36 metri	LUNGHEZZA	33 metri

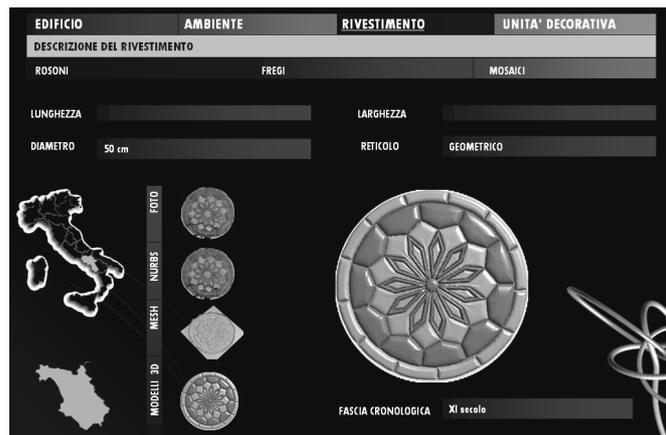
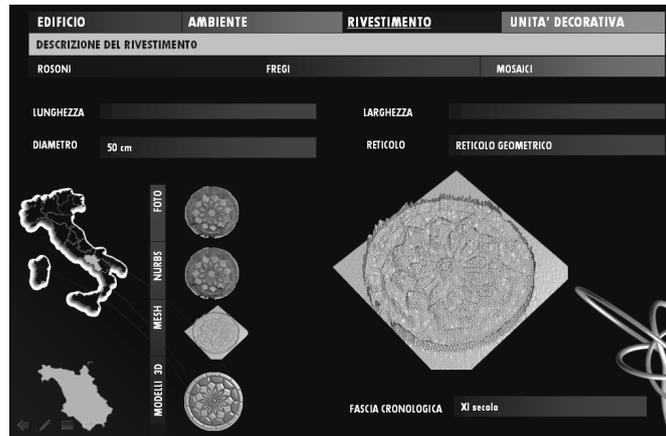
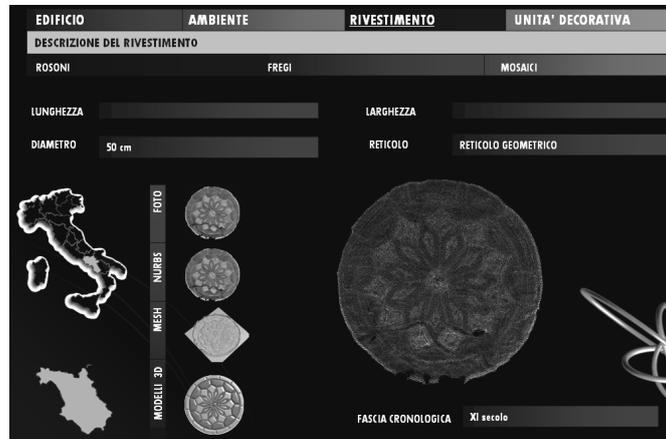
FOTO

PIANTA AMBIENTE

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DELL' AMBIENTE			
TIPOLOGIA	QUADRIPORTICO, ATRIO	ALTEZZA	15 metri
LARGHEZZA	36 metri	LUNGHEZZA	33 metri

FOTO

PIANTA AMBIENTE



EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO			
ROSONI	FREGI	MOSAICI	
LARGHEZZA	150 cm	SPESSORE	70 cm
ALTEZZA	100 cm	RETICOLO	
			<p>ULTIMO RESTAURO</p> <p>FASCIA CRONOLOGICA XI secolo</p>

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO			
ROSONI	FREGI	MOSAICI	
LARGHEZZA	150 cm	SPESSORE	70 cm
ALTEZZA	100 cm	RETICOLO	
			<p>FASCIA CRONOLOGICA XI secolo</p>

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO			
ROSONI	FREGI	MOSAICI	
LARGHEZZA	150 cm	SPESSORE	70 cm
ALTEZZA	100 cm	RETICOLO	
			<p>FASCIA CRONOLOGICA XI secolo</p>

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO			
ROSONI		FREGI	
MOSAICI			
LARGHEZZA	150 cm	SPESSORE	70 cm
ALTEZZA	100 cm	RETICOLO	
<p>FOTO</p> <p>NUBBIS</p> <p>MESH</p> <p>MODELLI 3D</p>		<p>FASCIA CRONOLOGICA</p> <p>XI secolo</p>	

EDIFICIO	AMBIENTE	RIVESTIMENTO	UNITA' DECORATIVA
DESCRIZIONE DEL RIVESTIMENTO			
MODULO	CERCHIO, RETTANGOLO	GRUPPO	MISTO Info
ISOMETRIE	RIFLESSIONE	CROMIA	
<p>SIMMETRIA COMPOSITIVA</p> <p>Precedendo verso la porta di bronzo, si trova il sarcofago di Giugis de Vicaris, morto nel 1296. La cassa presenta una composizione rigorosamente simmetrica intorno ad un medaglione centrale dove è scolpita la stanza del corone retto da due eveti d'oro, mentre ai lati sono raffigurati due amonini.</p>		<p>FASCIA CRONOLOGICA</p> <p>XIII secolo</p>	

Il ricorso a innovativi strumenti infografici per l'analisi, la catalogazione, la comunicazione e l'interrogazione ha consentito, quindi, sia di organizzare i dati raccolti e poterli variamente investigare, che di rappresentare il processo dinamico della configurazione geometrica dei motivi ornamentali catalogati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ANDREOZZI L., *Il laser scanner nel rilievo di architettura*, Il Lunario, Catania 2003.

ANGELELLI C., *Atti del IX Colloquio dell'Associazione Italiana per lo Studio e la Conservazione del Mosaico*, Edizioni del Girasole, Ancona 2004.

ANGELELLI C., *Atti dell'XI Colloquio dell'Associazione Italiana per lo Studio e la Conservazione del Mosaico*, Edizioni Scripta Manent, Tivoli 2006.

BARBA S., *La geometria dell'esgrafiado*, in Roberto Corazzi e Barbara Aterini (a cura di), in *Atti del Convegno Geometria tra didattica e ricerca*, Firenze, 17-19 aprile 2008, Tipografia Area - Editore DPPRAR, Firenze 2008, pp. 194-197.

BARBA S., *Tecniche digitali per il rilievo di contatto*, Cues, Salerno 2008.

BARBA S., FIORILLO F., SÁNCHEZ RIVERA J. I., *La propagazione dell'errore medio della media nei fotopiani*, in *Atti del XIII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica 'Nuevos medios gráficos, nueva arquitectura'*, Editorial de la Universitat Politècnica de València 2010.

BARTOLI M.T., *Le ragioni geometriche del segno architettonico*, Alinea, Firenze 1997.

BARTOLUCCI D., *Principi di laser scanning 3D*, Dario Flaccovio Editore, Palermo 2009.

BELLINGERI P., DEDÒ M., DI SIENO S., TURRINI C., *Il ritmo delle forme*, Ed. Mimesis, Milano 2001.

BRANDINELLI P., *Architetture digitali*, Università di Firenze, 2002.

CAGLIOTI G., *Strutture numeriche, autoorganizzazione e senso del bello*, Bollettino U.M.I., *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie VIII, Vol.IV – A, 2001.

CARDONE V., *From Descriptive Geometry to CAD*, in M. Emmer *Mathematics, Art, Technology and Cinem*, p. 67-76, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003.

CARDONE V., *Modelli grafici dell'architettura e del territorio*, nuova edizione, CUES, Salerno 2008.

CARDONE V., GIORDANO M., *Computer vision and photo scanning*, The 2011 World Congress on Computer Science and Information Technology, Cairo 2011.

CASTELLANI E., *Simmetria e natura . Dalle armonie delle figure alle invarianze delle leggi*, Laterza, 2000.

CECCARONI F., *ZScan: generazione di modelli 3D per la ricognizione metrica e radiometrica dei beni culturali tramite immagini*, Technologies Exploitation for the Cultural Heritage Advancement (TECHA), Cangemi Editore, Roma 2008.

CUNDARI C., *Fotogrammetria architettonica*, Edizioni Kappa, Roma 1983.

DEDÒ M., *Trasformazioni geometriche*, Decibel Editrice, Padova 1996.

DEDÒ M., *Forme: simmetria e topologia*, Decibel Editrice, Padova 1999.

DOCCI M., MAESTRI D., *Il rilevamento architettonico*, in Storia, metodi e disegno, Laterza, Roma-Bari 1987.

DI ROMA A., *La produzione in serie dell'ornato architettonico: dall'industria ellenistica alla prototipazione con processi cad-cam*, Aracne Editrice, Roma 2008.

FLAMIGNI F., VITI E., *Fotogrammetria digitale, Appunti di Fotogrammetria*, Galileo Siscam, in AA.VV., Lavori di fotogrammetria architettonica, Dei Roma.

GALIANI M., a cura di, *La rappresentazione riconfigurata. Un viaggio lungo il processo di produzione del progetto di disegno industriale*, Edizioni POLI.Design, Milano 2006.

GARAGNANI S., *Architetture in pixel*, Patron Editore, Bologna 2009.

GHEDINI E., RINALDI F., KIRSCHNER P., TOGNON M., *TESS. La banca dati on line dei rivestimenti a mosaico*. Archeologia e calcolatori, vol. 18; p. 13-43, 2007.

GHEDINI E., CLEMENTI T. (2001). *Proposta di scheda informatizzata per una banca dati sul mosaico*, in: Atti del VII Colloquio AISCOM Palermo 2000, p. 661-672.

GHEDINI E., *Il mosaico romano. Storia degli studi e prospettive della ricerca: spunti di riflessione*, in Storia dell'arte antica nell'ultima generazione: tendenze e prospettive, vol. 1, 2004, p. 171-179.

GHEZZI M., SANTARSIERO D., *ZScan: scansione tridimensionale digitale*. Archeomatica, Novembre 2009, N° 0, p. 38-40.

GIORDANO M., BARBA S., LOPRESTI L. A., DEFRANCO G. H., *New CAD/CAM Process: an elaboration of rosette's geometrical matrices*, International Conference on Innovative Methods in Product Design, Venezia 2011.

GIORGOLO B., *Da Pollicino ad Esher. La geometria e le immagini delle carte strutturate*, Edizioni Junior, Azzano San Paolo 2004.

IANNIZZARO V., *Considerazioni sul rilievo per l'architettura*, Cues, Salerno 2003.

IANNIZZARO V., *I beni culturali e le nuove metodiche del rilevamento digitale*. L'ingegneria per i beni culturali, I Farella, Napoli 2007.

IANNIZZARO V., BARBA S., GIORDANO M., *Nuvole di punti vs Nuvole di pixel*, Le vie dei mercanti. Rappresentare la conoscenza, La scuola di Pitagora editrice, Napoli 2010.

IANNIZZARO V., GIORDANO M., *Rilievo e modelli tridimensionali*, X Congresso International de Expresion Grafica aplicada a la Edificacion, Alicante (Spagna) 2010.

KEMP M., *Un universo di simmetrie*, "Il sole 24 ore", 21 agosto 2005.

KNIFFITZ L., GRIMALDI E., MAINO G., STEFANO F., *Per una base di dati multimediale in rete dedicata al mosaico*, in Atti dell'XI Colloquio dell'Associazione Italiana per lo Studio e la Conservazione del Mosaico, Edizioni Scripta Manent, Ancona 2006.

MAFFEI A., *Razionalità delle forme organiche*, "Casabella", n. 752, pag 38, 2007.

MANTERO A.M., FERRARI A., *La magia dei gruppi di simmetria. I gruppi dei magnifici rosoni*, Alinea Editrice, Firenze 2009.

MENCI L., NEX F., RINAUDO F., *Zscan Menci software: un nuovo strumento per le elaborazioni foto-grammetriche multimmagine*, in AA. VV, Atti della 11a Conferenza Nazionale ASITA, Torino 6-9 novembre 2007.

MUNARI B., *Codice ovvio*, Einaudi, Torino 1971.

MUNARI B., *Design e comunicazione visiva*, Editori Laterza, Bari 2005.

ROLANDO A., *Forma, geometria, struttura*, De Agostini Scuola Spa, Novara 2008.

SALA N., CAPPELLATO G., *Architettura della complessità*, Franco Angeli, Milano 2004.

STEWART I., *L'eleganza della verità. Storia della simmetria*, Einaudi, Torino 2008.

ZERLENGA O., SPURIA L., SCHIAVONE A., *Dynamic geometry for the roman mosaic floors in Pompei*, The 14th International Conference on Geometry and Graphics, Kyoto 2010.

