Abstract

Nello studio di vari problemi ellittici con soluzioni in spazi di Sobolev $S(\Omega)$ (con o senza peso) definiti su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, non necessariamente limitato o regolare, spesso risulta necessario stabilire risultati di regolarità e stime a priori per le soluzioni di tali problemi. Questi risultati si basano molte volte sulla limitatezza e l'eventuale compattezza dell'operatore di moltiplicazione

$$u \longrightarrow g\,u \qquad (i)$$

definito su uno spazio di Sobolev $S(\Omega)$ e a valori in uno spazio di Lebesgue $L^p(\Omega)$ con un opportuno $p \in [1, +\infty[$ e dove g è un'assegnata funzione definita in uno spazio normato V. È necessario, quindi, ottenere una stima del tipo

$$\|g\,u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \cdot \|g\|_V \cdot \|u\|_{S(\Omega)}\,, \qquad (ii)$$

dove la costante $c \in \mathbb{R}_+$ dipende dalle proprietà di regolarità di Ω, dagli esponenti di sommabilità e la funzione g soddisfa opportune condizioni.

Se L è l'operatore differenziale associato al problema ellittico, stime del tipo (ii) permettono, ad esempio, di provare immediatamente la limitatezza dell'operatore, dove

g rappresenta uno dei coefficienti dell'operatore stesso.

Tuttavia, altri tipi di risultati non si riescono ad ottenere direttamente per l'operatore L, a causa della natura non necessariamente regolare dei suoi coefficienti. Risulta dunque necessario introdurre una classe di operatori L_h, i cui coefficienti, più regolari, approssimano i coefficienti dell'operatore L. Questa " deviazione " dei coefficienti di L_h da quelli di L, deve essere fatta controllando le norme dei coefficienti approssimanti con quelle dei coefficienti dati. Dunque, è necessario ottenere stime dove la dipendenza dai coefficienti è espressa solo in termini delle loro norme (in tal caso, per esempio, non ci sono problemi nel passaggio a limite).

In altre parole, se g rappresenta un coefficiente di L e g_h un coefficiente più regolare della classe approssimante, è necessario avere un " buon controllo " sulla differenza $g - g_h$.

L'introduzione delle decomposizioni per funzioni appartenenti ad opportuni spazi funzionali, che rappresentano l'ambiente dei coefficienti dell'operatore differenziale L, gioca un ruolo molto rilevante in questo processo di approssimazione.

Nel presente lavoro, si costruiscono decomposizioni per funzioni appartenenti ad opportuni spazi funzionali, la cui introduzione è legata alla risolubilità di alcuni problemi ellittici del tipo sopra menzionato. Come applicazione, si ottengono risultati di limitatezza e compattezza per un operatore di moltiplicazione definito in uno spazio di Sobolev (con o senza peso) .

L'idea della decomposizione consiste nello scrivere una funzione g, appartenente ad un opportuno spazio funzionale, come somma di una funzione g_h, più regolare, e di una rimanente funzione $g - g_h$, la cui norma è controllata dal modulo di continuità della funzione g. Nella prima parte del lavoro si approfondisce lo studio di alcuni spazi funzionali pesati, la cui introduzione è legata alla risolubilità di problemi di Dirichlet per equazioni differenziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico, in domini non regolari, con soluzioni in spazi di Sobolev con peso. Come applicazione, usando le decomposizioni per funzioni appartenenti a tali spazi funzionali pesati, si provano risultati di immersione e compattezza sull'operatore (i), definito in uno spazio di Sobolev con peso.

La struttura espositiva del Capitolo 1 e del Capitolo 2 rispecchia la progressione delle considerazioni svolte.

Nel Capitolo 1 si studiano alcune proprietà e applicazioni degli spazi di Sobolev con peso.

Siano Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$ e σ il vettore peso le cui componenti σ_α sono funzioni misurabili su Ω. Lo spazio di Sobolev con peso $W^{k,p}(\Omega; \sigma)$ è l'insieme delle funzioni $u = u(x)$ definite *a.e.* su Ω, le cui derivate (nel senso delle distribuzioni) $\partial^\alpha u$, di ordine $|\alpha| \leq k$, sono tali che:

$$\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \sigma_\alpha(x)\, dx < +\infty \,.$$

Nel Capitolo 2, si considera una classe di funzioni peso, denotata con $\mathcal{A}(\Omega)$, e si definiscono i corrispondenti spazi di Sobolev con peso $W^{k,p}_s(\Omega)$ su aperti Ω di $\mathbb{R}^n$. Precisamente, una funzione peso $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ appartiene alla classe $\mathcal{A}(\Omega)$ se e solo se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}_+$, indipendente da x and y, tale che :

$$\gamma^{-1}\,\rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma\,\rho(y)\,, \qquad \forall\, y \in \Omega, \quad \forall\, x \in \Omega \cap B(y, \rho(y)),$$

Per $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq +\infty$, si denota con $W_s^{k,p}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\rho^{s+|\alpha|-k}\, \partial^\alpha\, u \in L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \leq k$, munito della seguente norma :

$$\|u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\rho^{s+|\alpha|-k}\, \partial^\alpha\, u\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

dove la funzione peso ρ appartiene alla classe $\mathcal{A}(\Omega)$.

Nel Capitolo 2 si approfondisce, inoltre, lo studio degli spazi funzionali pesati K_t^r ($r \in [1, +\infty[$, $t \in \mathbb{R}$) e di alcuni suoi sottospazi.

Sia $r \in [1, +\infty[$ e $t \in \mathbb{R}$, si denota con $K_t^r(\Omega)$ la classe delle funzioni g, appartenenti a $L_{loc}^r(\Omega)$, tali che :

$$\sup_{\Omega} \left(\rho^{t-\frac{n}{r}}(x)\, \|g\|_{L^r(\Omega\,\cap\, B(x,\rho(x)))}\right) < +\infty\,,$$

dove la funzione peso ρ appartiene alla classe $\mathcal{A}(\Omega)$. Si prova, facilmente, che gli spazi $L_t^\infty(\Omega)$ e $C_o^\infty(\Omega)$ sono sottoinsiemi di $K_t^r(\Omega)$ (lo spazio $L_t^\infty(\Omega)$ è costituito dalle funzioni g tali che $\rho^t\, g \in L^\infty(\Omega)$). Si possono, pertanto, definire le chiusure di $L_t^\infty(\Omega)$ e di $C_o^\infty(\Omega)$ in $K_t^r(\Omega)$ (denotate rispettivamente con $\widetilde{K}_t^r(\Omega)$ e $\overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$).

Si costruiscono, inoltre, opportune decomposizioni per funzioni $g \in \widetilde{K}_t^r(\Omega)$ e per funzioni $g \in \overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$, da cui si ottengono risultati di immersione sull'operatore di moltiplicazione (i), definito su uno spazio di Sobolev con peso $W_s^{k,p}(\Omega)$ e a valori in $L^q(\Omega)$ e dove il fattore moltiplicativo g appartiene ad un opportuno sottospazio di $K_t^r(\Omega)$. L'utilizzo delle decomposizioni in tali risultati consente di evidenziare come la parte meno regolare $(g - g_h)$ della funzione g in $\widetilde{K}_t^r(\Omega)$ o in $\overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$, influenzi la stima. Infine, uno studio approfondito degli spazi $\overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$ ha condotto all'introduzione di

un nuovo sottospazio di $K_t^r(\Omega)$, denotato con $\overset{*}{K}{}_t^r(\Omega)$. Si sono esaminate le relazione che intercorrono tra $\widetilde{K}{}_t^r(\Omega)$, $\overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$ e $\overset{*}{K}{}_t^r(\Omega)$ ed in particolare si sono individuate opportune condizioni sulla funzione peso $\rho \in \mathcal{A}(\Omega)$ affinchè si abbia $\overset{*}{K}{}_t^r(\Omega) = \overset{\circ}{K}{}_t^r(\Omega)$.
Nel Capitolo 3 si approfondisce lo studio degli spazi di tipo Morrey. Anche in questo caso, utilizzando le decomposizioni per funzioni appartenenti ad opportuni sottospazi di tipo Morrey, si ottiene un risultato di compattezza per l'operatore (i), definito su un classico spazio di Sobolev.
Sia Ω un aperto non limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Per $p \in [1, +\infty[$ e $\lambda \in [0, n[$, si considera lo spazio $M^{p,\lambda}(\Omega)$ costituito dalle funzioni g in $L^p_{loc}(\overline{\Omega})$ tali che:

$$\|g\|^p_{M^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{\tau \in]0,1] \\ x \in \Omega}} \tau^{-\lambda} \int_{\Omega \cap B(x,\tau)} |g(y)|^p \, dy < +\infty,$$

dove $B(x, \tau)$ è la sfera aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio τ.
Lo spazio di tipo Morrey $M^{p,\lambda}(\Omega)$ rappresenta una generalizzazione del classico spazio di Morrey $L^{p,\lambda}$ e contiene strettamente lo spazio $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se $\Omega = \mathbb{R}^n$. La sua introduzione è legata alla risolubilità di problemi di tipo ellittico con coefficienti discontinui su domini non limitati.
Nella prima parte del Capitolo 3, si rivolge l'attenzione alle proprietà di densità degli spazi di tipo Morrey. Si forniscono, infatti, utili lemmi di caratterizzazione per funzioni appartenenti alle chiusure di $L^\infty(\Omega)$ e $C_o^\infty(\Omega)$ in $M^{p,\lambda}(\Omega)$ (denotate rispettivamente con $\widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M_0^{p,\lambda}(\Omega)$). Utilizzando tali lemmi di caratterizzazione, si costruiscono decomposizioni per funzioni in $\widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e in $M_0^{p,\lambda}(\Omega)$ che consentono di provare un

risultato di compattezza sul seguente operatore di moltiplicazione

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \to g\,u \in L^q(\Omega)$$

con $q \in [p, +\infty[$ e g appartenente ad un opportuno sottospazio di $M^{p,\lambda}(\Omega)$.

Infine, un'attenta disamina degli spazi $M^{p,\lambda}(\Omega)$ e dei suoi sottospazi conduce all'introduzione di un nuovo spazio funzionale pesato di tipo Morrey $M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega)$, dove il peso appartiene ad una classe di funzioni peso, denotata con $\mathcal{G}(\Omega)$.

Precisamente, fissato $d \in \mathbb{R}_+$, una funzione peso $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ appartiene alla classe $\mathcal{G}(\Omega,\, d)$ se e solo se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}_+,$ indipendente da x and $y,$ tale che

$$\gamma^{-1}\,\rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma\,\rho(y)\,, \qquad \forall\, y \in \Omega, \quad \forall\, x \in \Omega(y,d).$$

Si pone

$$\mathcal{G}(\Omega) = \bigcup_{d>0} \mathcal{G}(\Omega, d).$$

Siano $\rho \in \mathcal{G}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e d un numero reale positivo tale che $\rho \in \mathcal{G}(\Omega, d).$ Fissato un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue E di Ω, per $p \in [1, +\infty[$ e $\lambda \in [0, n[$ si denota con $M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $g \in M^{p,\lambda}(\Omega)$ tali che

$$\lim_{h \to +\infty} \Bigg(\sup_{\substack{E \in \Sigma(\Omega) \\ \sup\limits_{\substack{x \in \Omega \\ \tau \in]0,d]}} \tau^{-\lambda} \rho(x) |E(x,\tau)| \leq \frac{1}{h}}} \| g\,\chi_{E} \|_{M^{p,\lambda}(\Omega)} \Bigg) = 0,$$

Un'attenta analisi delle relazioni che intercorrono tra $M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega)$, $\widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M^{p,\lambda}_{0}(\Omega)$, ha consentito di provare le seguenti inclusioni

$$M^{p,\lambda}_{0}(\Omega) \subset M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega) \subset \widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega) .$$

In particolare si sono individuate opportune condizioni sulla funzione peso ρ affichè si abbia $M^{p,\lambda}_{0}(\Omega) = M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega)$.

Si precisa che i risultati ottenuti nel Capitolo 2 possono trovare applicazione nello studio di problemi al contorno per equazioni ellittiche su domini non regolari (ad esempio, domini con frontiera singolare), con soluzioni in spazi di Sobolev pesati $W^{k,p}_{s}$, per provare che gli operatori differenziali associati al corrispondente problema ellittico (i cui coefficienti di ordine inferiore appartengono ad opportuni spazi K^{r}_{t}) hanno rango chiuso o sono semi-fredholmiani. I risultati contenuti nel Capitolo 3, invece, possono essere utili, per esempio, nello studio di problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche su domini non limitati (la cui frontiera è sufficientemente regolare), con soluzioni in classici spazi di Sobolev, per stabilire stime a priori sul corrispondente operatore differenziale associato al problema ellittico, i cui coefficienti di ordine inferiore appartengono a spazi di tipo Morrey $M^{p,\lambda}$. Si precisa, inoltre, che gli spazi $\widetilde{K}^{r}_{t}(\Omega)$ e $M^{p,\lambda}_{\rho}(\Omega)$ possono essere utilizzati nello studio di alcuni problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico con coefficienti discontinui appartenenti a tali spazi.