ABSTRACT (IT)

In questa Tesi mi occupo di azioni di gruppi su strutture geometriche discrete. Il suo risultato principale è attualmente in fase di stampa [**6**]. Sia allora $G := (G, \cdot)$ un gruppo "astratto", nel senso che G non ha alcuna struttura aggiuntiva, come potrebbe essere una topologia, e non è neanche, a priori, realizzato come gruppo di trasformazioni di qualche oggetto di altra natura. Classicamente, un tale gruppo si specifica mediante una sua presentazione: $G = \langle S, R \rangle$, dove $S \subseteq G$ è un insieme di generatori ed R sono le relazioni. Verso la fine dell'Ottocento, Arthur Cayley introdusse un grafo ad archi colorati $\Gamma(G, S)$, che è funtorialmente associato alla coppia gruppo–generatori (G, S), e che oggi porta il suo nome. Il grafo $\Gamma(G, S)$ è il primo e forse il principale esempio di una struttura geometrica discreta su cui un gruppo (in questo caso proprio G) agisce in modo libero e transitivo. Inoltre, esso gioca un ruolo fondamentale nel cosiddetto *word problem*, che è il problema, in molti casi ancora aperto, di stabilire se due parole in una presentazione corrispondono o meno allo stesso elemento del gruppo. L'introduzione del grafo di Cayley ha anche permesso di attribuire ad un gruppo $G = \langle S, R \rangle$ una proprietà tipicamente geometrica, quella del genere: esso è il minore fra i generi di tutte le superfici su cui $\Gamma(G, S)$ si può rappresentare (nel senso che gli archi devono diventare segmenti di geodetiche). Sebbene sia evidente che G agisce liberamente e transitivamente su $\Gamma(G, S)$, l'inverso è una questione più sottile e per certi versi meno ovvia: è stato osservato nel 1958 che $\Gamma(G, S)$ è l'unico grafo ad archi colorati, a meno di automorfismi, sul quale G agisce liberamente e transitivamente [**7**].

Una classe interessante di gruppi infiniti, discreti, e non risolubili, è data dai cosiddetti gruppi Fuchsiani, che sono i sottogruppi discreti e finitamente generati del gruppo di Lie tridimensionale $\mathrm{PSL}(2)$ delle isometrie del piano iperbolico $\mathbb{H}$, dette anche trasformazioni di Möbius. Un esempio di gruppi in questa classe è dato dai gruppi di von Dyck $D(n, n, n)$, che sono le isometrie orientate di una tesellazione regolare T_n di $\mathbb{H}$, fatta da triangoli equilateri di angolo interno $\frac{\pi}{n}$. Introdotti alla fine dell'Ottocento da Walther von Dyck, tali gruppi hanno una presentazione assai semplice: per esempio, $D(n, n, n) = \langle x^n, y^n, (xy)^n \rangle$, dove x ed y corrispondono alle rotazioni di angolo $\frac{\pi}{n}$ attorno a due vertici fissati (e distinti) della tassellazione T_n.

D'altra parte, ho notato che ad ogni coppia gruppo–generatore (G, S), con S finito, è possibile associare la cosiddetta geometria dei laterali $T(G, S)$, che è un esempio di geometria di Tits–Buekenhout di rango uguale all'ordine di S. A tale geometria—che è molto simile agli spazi di tolleranza ed agli spazi di prossimità—si associa in modo naturale il cosiddetto grafo d'incidenza, che è proprio il duale (nel senso della dualità vertice–arco) del grafo di Cayley $\Gamma(G, S)$. Questa associazione è il risultato principale della mia tesi ed è un corollario abbastanza immediato del sopra citato teorema di G. Sabidussi [**7**]:

COROLLARIO 1. *Sia $T(k, l, m) := T(D(k, l, m), \{H, K\})$ la geometria di laterali di $D(k, l, m)$ corrispondente ad $H := \langle x \rangle$ e $K := \langle y \rangle$.*

(1) L'azione naturale di $D(k, l, m)$ sul grafo colorato $T(k, l, m)$ è libera e transitiva sugli archi.
(2) C'è una biiezione $D(k, l, m)$–equivariante b tra $V_{\Gamma(k,l,m)}$, l'insieme dei vertici di $\Gamma(k, l, m)$, ed $E_{T(k,l,m)}$, l'insieme degli archi di $T(k, l, m)$.
(3) Se $I(k, l, m) \subseteq E^2_{T(a,b,c)}$ è l'insieme delle coppie di archi incidenti di $T(k, l, m)$, allora c'è una mappa $\psi : I(k, l, m) \longrightarrow H \cup K$ tale che i vertici d_1 e d_2 di $\Gamma(k, l, m)$ sono connessi da un arco orientato con etichetta x (risp., y) se e solo se $\psi(b(v_1), b(v_2)) = x$ (risp., $= y$).
(4) Ci sono tassellazioni uniformi $\mathcal{T}(k, l, m)$ e $\mathcal{T}'(k, l, m)$ di una superficie a curvatura costante, tale che lo scheletro 1–dimensionale della prima, con la naturale colorazione dei vertici, coincide con $T(k, l, m)$ e lo scheletro 1–dimensionale del secondo, con la naturale etichettatura ed orientazione degli archi, si identifica con $\Gamma(k, l, m)$.

Studiando questo argomento, e specialmente l'associazione di strutture geometriche ai gruppi, ho ottenuto altri risultati originali marginali, che sono serviti per arrivare a quello principale.

Per esempio, il teorema qui sotto mostra come certe proprietà topologiche del grafo $\Gamma_\sim$, che è il grafo associato alla tolleranza $\sim$, riflettono le relazioni tra due partizioni di un insieme X. Sia allora X un insieme, $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{K} = \{K_j\}_{j \in J}$ due partizioni finite di X. Si consideri la tolleranza $\sim$ generata da tali partizioni, ed il bi–grafo $\Gamma_\sim = (V, E)$ che corrisponde a $\sim$.

TEOREMA 1. *$\Gamma_\sim$ è disconnesso se e solo se esiste un sottoinsieme di X che contemporaneamente è unione di elementi di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{K}$, cioè*

$$G_\sim \textit{ disconesso} \Leftrightarrow \exists A \subsetneq X \ : \ A = \bigcup_{m \in M} H_{i_m} = \bigcup_{l \in L} K_{j_l}.$$

Il prossimo risultato originale è una specializzazione del teorema precedente nel caso della geometria dei laterali. La prima cosa che devo sottolineare è che la geometria dei laterali $T = T(G, \{G_i, i \in I\})$ è connessa se e solo se l'unione della famiglia $\{G_i, i \in I\}$ genera tutto il gruppo G. Sia allora G un gruppo ed H, K due suoi sottogruppi. Allora $T(G, \{H, K\})$ è anche un spazio di tolleranza e si può considerare il suo grafo di incidenza Γ.

TEOREMA 2. *Γ è disconnesso, cio è esiste un $X = \bigcup_{i \in I} Hg_i = \bigcup_{j \in J} K\bar{g}_j \subsetneq G$, se e solo se X è un insieme di laterali destri del sottogruppo $S = < H, K >$.*

Il risultato principale (Corollario 1) porta con se molte prospettive. Consideriamo il seguente corollario.

Corollario 2 (Cliques enumeration algorithm). *Esiste una bijezione $d : \mathbb{N}_0 \to D(n, n, n)$, che si può definire ricorsivamente.*

Quest'ultimo corollario diventa più interessante quando scende ai fattori di $D(n, n, n)$, per esempio, $B(2, n)$. È ben noto che quest'ultimo può essere ottenuto fattorizzando il primo rispetto alla n–esima potenza del sottogruppo $K_n := D(n, n, n)^n$. Nel 1986 è stato proposto un algoritmo che controlla la finitezza dei gruppi di Burnside $B(2, n)$ di tipo Fuchsiano, cio è quelli con $n > 3$, basato sul calcolo di un dominio fondamentale per K_n nel piano iperbolico [**9**].

Un'altra conseguenza del Corollario 2 è la seguente. Un risultato del 1983 sul genere dei fattori di $D(n, n, n)$ dovuto a Thomas W. Tucker [**8**] può essere riformulato in un modo geometrico assai trasparente, che permette una dimostrazione quasi immediata.

ABSTRACT (EN)

This thesis contains a theoretical result in the field of group actions on combinatorial structures, which is an important area of research, bringing forth some thirty publications per year. Besides its applications, mostly found in cryptography and image–recognition, such a discipline casts interesting bridges between the abstract theory of groups and more "visible" objects, like the graphs. On the theoretical side, in the last three decades, the deepest contributions have been given, among others, by M. D. E. Conder and his collaborators (see, e.g., [**1**] and references therein).

But what is the advantage of associating a geometric structure to a given group G? If G is of a "tamed" kind, i.e., it is either finite, Abelian, solvable, or equipped with some additional structure like, e.g., that of a Lie group, then there are no advantages at all. In this thesis I will rather consider a class of groups, which is rather "wild", in the sense that it comprises infinite, discrete and solvable groups and it was allegedly introduced by W. von Dyck at the turn of the eighteenth century [**10**], and I will study some natural combinatorial geometric structures they act upon. My purpose is to show that even extremely elementary structures can play a nontrivial role in the understanding of such groups.

I would like to stress, from the very beginning, that all the theoretical reasonings in this thesis are carried out in terms of abstract groups. By an "abstract group" I mean a group without any additional structure whatsoever which is not, a priori, realised as the transformation groups of some other mathematical entity. Such kind of groups are classically introduced through a *presentation*. In symbols, a presentation looks like $G = \langle S \mid R\rangle$, and it means that G can be obtained from the *free group* over the set S, i.e., the "largest"—so to speak—group admitting S as a set of generators, by factoring out the elements belonging to the normal subgroup generated by R.

In spite of its rather formal and abstract flavour, the notion of a presentation is heavy with geometrical implications. At the end of the eighteen century, A. Cayley introduced a combinatorial geometric structure, which nowadays is known to be a *coloured graph*, associated, in a functorial way, to a given presentation $G = \langle S \mid R\rangle$ of the group G. Such a graph, which I will denote by $\Gamma(G, S)$, goes under the name of *Cayley graph*, and it has the remarkable property of being *regular* (or *homogeneous*) with respect to G, i.e., the original group G act freely and transitively on it. It is a true marvel that such a rudimentary construction can be put at the foundations of some straightforward yet far–reaching observations:

- the so–called *word problem* (a still open problem) for a group $G = \langle S \mid R\rangle$ is equivalent to the constructability (i.e., the possibility of defining it through a recursive function) of $\Gamma(G, S)$ [**4**];
- if $\Gamma(G, S)$ can be embedded into a *surface*, then it makes sense to attach to the group G a typical geometric property, namely, that of the *genus* [**11**];
- the geometric properties of the surface (e.g., its *compactness*) $\Gamma(G, S)$ is embedded into may be used to check the *finiteness* of G [**9, 2**].

In this thesis, I basically discovered a link—a *duality*, to be more precise—between such a classical construction as the Cayley graph and another interesting (though perhaps less known) way of linking a graph to a group, which is the *incidence graph* [**5**] associated with the so–called *coset geometry*.

Its main result stems from a subtle yet unfairly forgotten theorem, formulated by G. Sabidussi in 1958, establishing that $\Gamma(G, S)$ is the unique, up to isomorphisms, edge–coloured graph on which the original group G acts vertex–transitively [**7**]. So, since the incidence graph of the coset geometry of G carries a natural edge–transitive G–action, and it is naturally vertex–coloured, I was led to suspect that the incidence graph of the coset geometry is, in fact, the same thing as the Cayley graph, provided that—roughly speaking—"vertices are replaced with edges". This thesis contains a rigorous proof of such a result, complemented by all the necessary preliminaries, and some (envisaged) applications and perspectives.

The role played herewith by the von Dyck group $D(n, n, n)$ is that of a tool to better explain such a vertex–to–edge duality. Indeed, for $n > 3$ the von Dyck groups $D(n, n, n)$ belong to a class of (infinite, discrete and not solvable) groups known as *Fuchsian groups*, which are the discrete and finitely generated subgroup of the three–dimensional Lie group $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ of the isometries of the hyperbolic plane $\mathbb{H}$. The Fuchsian groups naturally act on a tangible geometric entity such as $\mathbb{H}$. Moreover, $D(n, n, n)$ is generated by the orientation–preserving transformations of a regular–triangular *tessellation* $\mathcal{T}_n$, which, once again, is a rather elementary structure of combinatorial character, being essentially a triangulation by regular triangles.

The vertex–to–edge duality, which is a quite general result, admits a nice transparent geometric formulation: in the case of von Dyck groups $D(n,n,n)$ both the Cayley graph and the incidence graph of the coset geometry of $D(n,n,n)$ are inscribed into $\mathcal{T}_n$. More precisely, the latter is the 1–skeleton of $\mathcal{T}_n$, while the former is the 1–skeleton of the so–called *derived tessellation* of $\mathcal{T}_n$. In other words, the groups of von Dyck allow to visualise the vertex–to–edge duality in terms of the most elementary geometric shapes: triangles on a surface.

Let me describe some of the applications and perspectives of the vertex–to–edge duality.

First of all, it makes it evident that the Cayley graph of the von Dyck group is a planar one, which, to my best knowledge, has never been observed before, though a very similar result can be found in [**9**].

Then, the vertex–to–edge duality immediately allows to recast, in a transparent geometric way, a result proved in 1983 by T.W. Tucker [**8**], concerning the genus of the factors of $D(n,n,n)$. I must mention that among the factors of $D(n,n,n)$ there are the famous free Burnisde groups with two generators $B(2,n)$, whose importance also pushed me to look for a recursive way to enumerate the elements of $D(n,n,n)$.

This is probably the most important consequence of the vertex–to–edge duality I have managed to discover so far: it allows to recursively enumerate the edges (called *cliques*, as in the theory of coloured graphs) of the incidence graph of the coset geometry and, hence, the elements of $D(n,n,n)$. I dubbed this procedure "cliques enumeration algorithm", and there are indications that it may be useful for attacking the celebrated Burnside problem in the still unsolved cases with two generators. Indeed, in view of the natural surjection between $D(n,n,n)$ and $B(2,n)$, which makes it possible to associate to the latter some of the geometric features of the former, the finiteness of $B(2,n)$ can be a consequence of the finiteness of a suitable "quotient tessellation" of $\mathcal{T}_n$, with respect to the kernel of the projection $D(n,n,n) \to B(2,n)$.

Incidentally, this solves the word problem for the Burnisde groups with two generators.

I must stress that, in one form or another, any existing algorithm to check the finiteness of $B(2,n)$ implements a mechanism to enumerate words, and, due to the presence of relations, the lexicographic way is not necessarily the cheapest one (see [**3**] and references therein). On the other hand, the cliques enumeration algorithm I proposed allows to "avoid" relations and to produce exactly once each element of the group, so that it may be computationally more advantageous. I have written the cliques enumeration algorithm by using the Wolfram Mathematica$^{\mathrm{TM}}$computer algebra software, but, due to the unavoidable computational complexity, I have managed to test it only for $n \leq 4$. Nevertheless, it seems that, especially in comparison with the existing techniques, the cliques enumeration algorithm has the "aesthetic" merit of providing an unified approach to the problem of the finiteness of $B(2,n)$, for arbitrary n, in sharp contrast with the methods applied so far to each particular situation.

Bibliografia

[1] Conder, M. D. E. Some results on quotients of triangle groups. *Bull. Austral. Math. Soc. 30*, 1 (1984), 73–90.

[2] Fazio, N., Iga, K., Nicolosi, A., Perret, L., and III, W. E. S. Hardness of learning problems over burnside groups of exponent 3. Cryptology ePrint Archive, Report 2011/398, 2011.

[3] Havas, G., and Newman, M. F. Application of computers to questions like those of Burnside. In *Burnside groups (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1977)*, vol. 806 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1980, pp. 211–230.

[4] Magnus, W., Karrass, A., and Solitar, D. *Combinatorial group theory*, second ed. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations.

[5] McKee, T. A., and McMorris, F. R. *Topics in intersection graph theory*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

[6] Moreno, G., and Stypa, M. E. On the vertex–to–edge duality between the cayley graph and the coset geometry of von dyck groups. *Mathematica Slovaca*, 66 (2016).

[7] Sabidussi, G. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc. 9* (1958), 800–804.

[8] Tucker, T. W. Finite groups acting on surfaces and the genus of a group. *J. Combin. Theory Ser. B 34*, 1 (1983), 82–98.

[9] Vinogradov, A. M. Why is space three-dimensional and how may groups be seen? *Acta Appl. Math. 5*, 2 (1986), 169–180.

[10] Wang, K. S., and Grove, L. C. A note on Von Dyck groups. *Exposition. Math. 9*, 3 (1991), 285–288.

[11] White, A. T. On the genus of a group. *Trans. Amer. Math. Soc. 173* (1972), 203–214.