A problem in the Theory of Groups and a question related to Fibonacci-Like sequences

Serena Siani

Abstract

Questa tesi si compone di 4 capitoli, di cui gli ultimi due contengono risultati originali. All'interno del primo capitolo, sono richiamati risultati elementari e sono stabilite le notazioni e la terminologia che sono utilizzate nel seguito. Ad esempio, sono richiamati alcuni risultati sulla classe di gruppi X che sono isomorfi ai loro sottogruppi non abeliani. Risulta che ogni gruppo di tale classe è infinito e 2-generato. Questa classe è stata studiata da H. Smith e J. Wiegold([34]). Essi hanno provato che ogni gruppo non risolubile in X è centrale-per-finito e hanno fornito una caratterizzazione completa dei gruppi risolubili in X. In seguito vengono mostrati alcuni risultati sui gruppi finitamente generati che sono isomorfi ai loro sottogruppi normali non banali. In particolare, è stato usato un risultato provato da J.C. Lennox, H. Smith e J. Wiegold in [17], per il quale se G è un gruppo infinito finitamente generato che è isomorfo ai suoi sottogruppi normali non banali e che contiene un sottogruppo proprio normale di indice finito, allora $G \simeq \mathbb{Z}$.

Dato un gruppo G, un sottogruppo K di G si dice *sottogruppo derivato* in G se $K = H'$ dove H' è il sottogruppo derivato di H, con H sottogruppo di G. Recentemente, molti autori si sono interessati a studiare l'insieme dei sottorgruppi derivati all'interno del reticolo dei sottogruppi.

Si denoti con $C(G)$ l'insieme dei sottogruppi derivati in G, cioè:

$$C(G) = \{H' | H \leq G\}.$$

L'influenza di $C(G)$ sulla struttura di G è stata studiata da molti autori. Per esempio, F. de Giovanni e D.J.S. Robinson in[8] e M. Herzog, P. Longobardi e M. Maj in[14], hanno studiato i gruppi G per cui $C(G)$ è finito. In particolare, essi hanno provato che se G è localmente graduato, allora $C(G)$ è finito se e solo se G' è finito.

Sia n un intero positivo e si denoti con D_n la classe dei gruppi con al più n classi di isomorfismo di sottogruppi derivati. Chiaramente D_1

è la classe dei gruppi abeliani e un gruppo G appartiene alla classe D_2 se e solo se G non è abeliano e $H' \simeq G'$ per ogni H sottogruppo non abeliano di G. P. Longobardi, M. Maj, D.J.S. Robinson and H. Smith in [18] hanno posto la loro attenzione sui gruppi in D_2 e hanno descritto in maniera precisa alcune classi larghe di gruppi in D_2.

Nel Capitolo 2 si richiamano alcuni risultati sui gruppi in D_2.

Al centro di questo lavoro di tesi vi è un problema duale. Si denoti con $B(G)$ l'insieme dei fattori centrali dei sottogruppi di un gruppo G:

$$B(G) = \{\frac{H}{Z(H)} | H \leq G\}$$

e si denoti con B_n la classe dei gruppi per cui gli elementi di $B(G)$ ricadono in al più n classi di isomorfismo, dove n è un intero positivo. Banalmente B_1 coincide con la classe dei gruppi abeliani e G è un B_2-gruppo se e solo se G è abeliano oppure non lo è e ogni sottogruppo di G è abeliano oppure se H è un suo sottogruppo non abeliano, segue che $\frac{H}{Z(H)} \simeq \frac{G}{Z(G)}$.

Nel Capitolo 3 della tesi sono studiati i gruppi in B_2. Per esempio, si può vedere che se G è un gruppo con $\frac{G}{Z(G)}$ abeliano elementare di ordine p^2, con p primo, allora G è in B_2. Inoltre, se G è un gruppo con $\frac{G}{Z(G)} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, allora $G \in B_2$. I gruppi in B_2 possono essere molto complicati, infatti un gruppo non abeliano a sottogruppi propri abeliani appartiene alla classe B_2 e quindi i Mostri di Tarski, gruppi semplici infiniti a sottogruppi propri tutti abeliani, la cui esistenza fu provata da A.Yu. Ol'shankii nel 1979, si trovano in B_2. Innanzitutto sono stati provati alcuni risultati elementari per i gruppi in B_2. Per esempio si può vedere che la classe B_2 è chiusa per sottogruppi ma non è chiusa per quozienti. Se però G è un gruppo nilpotente in B_2 allora $\frac{G}{S} \in B_2$, per ogni $S \leq Z(G)$. Inoltre, risulta che $\frac{G}{Z(G)}$ è 2-generato per ogni G in B_2 e se in più G è nilpotente, allora $\frac{G}{Z(G)}$ risulta abeliano.
Successivamenete vengono analizzati i gruppi in B_2 e si prova che se G è non abeliano, allora G è un gruppo nilpotente di B_2 se e solo se o $\frac{G}{Z(G)}$ è abeliano elementare di ordine p^2, dove p è un primo, oppure $\frac{G}{Z(G)}$ è prodotto diretto di due gruppi ciclici infiniti. Sono studiati anche i gruppi localmente finiti in B_2 e viene mostrato che se G è localmente finito, allora G è in B_2 se e solo se $G = Z(G)H$ dove H è finito, minimale non abeliano.
Sono poi analizzati i gruppi risolubili in B_2. Si prova che se G è un gruppo risolubile non nilpotente in B_2, allora G è metabeliano e in queste ipotesi si mostra che $Z(\frac{G}{Z(G)}) = 1$, $G = A < x >$, per un certo x in G e un sottogruppo normale A di G, e ogni sottogruppo non abeliano di $\frac{G}{Z(G)}$ è isomorfo a $\frac{G}{Z(G)}$.

Infine, il caso dei gruppi non risolubili in B_2 è analizzato e si prova che tali gruppi non soddisfano la *Tits alternative*, i.e. gruppi risolubili-per-finiti oppure gruppi che contengono un sottogruppo libero di rango 2. Fino a questo punto nessuna tra le particolari classi di gruppi in B_2 ha coinvolto i *gruppi di Tarski*. In quest'ultimo caso invece si prova che se G è un gruppo non risolubile in B_2 e G' soddisfa la condizione minimale sui sottogruppi, allora $\frac{G}{Z(G)}$ è semplice, minimale non abeliano, ogni sottogruppo risolubile di G è abeliano e se N è un sottogruppo normale di G, allora o $N \leq Z(G)$ oppure $G' \leq N$. In particolare $\frac{G}{Z(G)}$ è un gruppo di Tarski.

Nel Capitolo 4 si prova un risultato sulle successioni di tipo Fibonacci e i triangoli di Pascal generalizzati, ottenuto in collaborazione col Professore Giovanni Vincenzi. Tale risultato è stato pubblicato in un articolo, *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangle.* Nello specifico sono state studiate le proprietà concernenti le diagonali del triangolo di Pascal generalizzato $T(k_1, k_2)$ costruito a partire da due numeri complessi qualsiasi k_1 e k_2. Inoltre abbiamo introdotto una particolare successione di tipo Fibonacci $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i cui semi iniziali sono i due numeri complessi considerati. Analogamente al caso del triangolo di Pascal, è stato trovato un legame tra le successioni di tipo Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e la successione delle diagonali $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che abbiamo costruita.

In particolare è stato provato che la successione $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle diagonali del triangolo di Pascal generalizzato $T(k_1, k_2)$ è ricorsiva e in più vale la seguente relazione:

Teorema Siano k_1 e k_2 numeri complessi. Sia $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di diagonali associata al triangolo di Pascal generalizzato $T(k_1, k_2)$ e sia $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di tipo Fibonacci di semi iniaziali k_1 e k_2. Allora vale la seguente identità:

$$H_n - D_n = F_{n-3}(k_2 - k_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

References

[1] M. AKBULAK, D. BOZKURT *On the order-m generalized Fibonacci k-numbers.* Chaos Solitons Fract. (3) 42 (2009), 1347-1355.

[2] O. ARAUJO, D.A. MORALES, M. RANDIC *Higher-order Fibonacci numbers.* J. Math. Chem. 20 (1996), 79-94.

[3] B.A. BONDARENKO *Generalized Pascal triangles and pyramids their fractals, graphs and applications.* Tashkent: Izdatel'stvo FAN RUz, 1990. ISBN 5-648-00738-8.

[4] B.A. BONDARENKO *Generalized Pascal triangles and pyramids their fractals, graphs and applications.* http://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/bondarenko.pdf.

[5] B. BRUNO, R.E. PHILLIPS *Groups with restricted non-normal subgroups.* Math. Z. 176 (1981), 199-221.

[6] M.S. COHEN, J.J. FERNANDEZ, A.E. PARK, K. SCHMEDDERS *The Fibonacci sequence: relationship to the human hand.* J. Hand Surg. 28A(1) (2002), 157-160.

[7] J.H. CONWAY, R.K. GUY *The book of numbers.* Singapore: World Scientific, 2008.

[8] F. DE GIOVANNI, D.J.S. ROBINSON *Groups with finitely many derived subgroups.* Journal of London Mathematical Society (2) 71 (2005), 658-668.

[9] R.A. DUNLAP *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* Copernicus, Springer Verlag New York, 1995.

[10] S. FALCON, A. PLAZA *The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle.* Chaos Solitons Fract. 33 (2007), 38-49.

[11] A. FIORENZA, G. VINCENZI *Limit of ratio of consecutive terms for general order-k linear homogeneous recurrences with constant coefficients.* Chaos Solitons Fract. 44 (2011), 147-152.

[12] A.J. FLEMING *Plant mathematics and Fibonaccis flowers.* Nature (2002), 418, 723.

[13] R. GÖBEL, A.T. PARAS, S. SHELAH *Groups isomorphic to all their non-trivial normal subgroups.* Israel J. Math. 129 (2002), 21-27.

[14] M. HERZOG, P. LONGOBARDI, M. MAJ *On the number of commutators in groups.* Ischia Group Theory 2004, 181-192, Contemp. Math. 402, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006).

[15] L. HODGKIN *A history of mathematics.* Oxford University Press, 2005.

[16] H. HOSOYA *Fibonacci triangle.* Fibonacci Quart. 14 (1976), 173-179.

[17] J.C. LENNOX, H. SMITH, J. WIEGOLD *A problem about normal subgroups.* Journal of Pure and Applied Algebra 88 (1993), 169-171.

[18] P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON, H. SMITH *On groups with two isomorphism classes of derived subgroups.* Glasgow Math. J. (2013), 55 (03).

[19] P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON *Recent results on groups with few isomorphism classes of derived subgroups.* Contemp. Math., 611 (2014), 121-135.

[20] P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON *Locally finite groups with finitely many isomorphism classes of derived subgroups.* Journal of Algebra, 393 (2013), 102-119.

[21] V.D. MAZUROV, E.I. KHUKRHO *Unsolved problems in group theory.* The Kourovka Notebook. arXiv: 1401.0300v5, 2014.

[22] G.A. MILLER, H.C. MORENO *Non-abelian groups in which every subgroup is abelian.* Trans. Amer. Math. Soc., 4 (1903), 398-404.

[23] V.N. OBRAZTSOV *On a problem of P. Hall about groups isomorphic to all their non-trivial normal subgroups.* Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), 79-98.

[24] A.YU. OL'SHANSKII *Geometry of Defining Relations in Groups.* Nauka, Moscow (1989).

[25] B. PASCAL *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Ouvres completes de Blaise Pascal T3 (1909), 433-593.

[26] J.N. RIDLEY *Packing efficiency in sunflower heads.* Math. Biosci 58 (1982), 129-139.

[27] D.J.S. ROBINSON, *A course in the theory of groups.* Springer-Verlag, 1996.

[28] D.J.S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups, 2 vols.* Springer-Verlag, 1972.

[29] J. SANA *Lucas triangle.* Fibonacci Quart. 21 3 (1983), 192-195.

[30] L.W. SHAPIRO *A Catalan triangle.* Descrete Math. 14 1 (1976), 83-90.

[31] S. SIANI *On Groups with Two Isomorphism Classes of Central Factors.* Submitted.

[32] S. SIANI, G. VINCENZI *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles.* Int. Journal of Math. Education in Science and Technology 45 4 (2014), 609-614.

[33] H. SMITH *On homomorphic images of locally graded groups.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 91 (1994), 53-6.

[34] H. SMITH, J. WIEGOLD *Groups which are isomorphic to their nonabelian subgroups.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 97 (1997).