UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA
XIV Ciclo – Nuova Serie

TESI DI DOTTORATO IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Il paradigma della programmazione logica per supportare lo sviluppo di abilità deduttive attraverso l'uso di un artefatto

TUTOR
Prof. *Giangiacomo Gerla*

CANDIDATA
Dott.ssa *Laura Lombardi*

COORDINATRICE
Prof.ssa *Patrizia Longobardi*

Anno Accademico 2015/2016

INDICE

INTRODUZIONE

Questa tesi vuole essere un contributo allo studio delle potenzialità della logica formale nella didattica della matematica. In particolare, essa ha lo scopo di analizzare i processi cognitivi messi in atto dagli allievi fin dai primi livelli scolastici, anche in ambito non matematico, per supportare lo sviluppo di abilità deduttive. L'ipotesi è che le capacità logiche acquisite in ambito non matematico possano poi essere trasferite anche in ambito matematico.

La ricerca fa riferimento al particolare ruolo che da tempo il linguaggio viene ad assumere nella matematica. Infatti, nello sviluppo storico della matematica, si può osservare come il linguaggio sia passato dall'essere solo strumento di comunicazione e concettualizzazione del pensiero ad oggetto di manipolazione. In questo modo, esso viene ad essere un vero e proprio "artefatto matematico", nel senso tecnico che la ricerca in didattica della matematica assegna a tale parola, accanto ad artefatti come gli abachi, la riga, il compasso ed altri oggetti della tradizione matematica. Accettando tale punto di vista, è possibile utilizzare i risultati delle numerose ricerche sul ruolo degli artefatti matematici che a livello nazionale e internazionale sono state effettuate negli ultimi anni in didattica della matematica (si vedano ad esempio Normann, 1993 e Bartolini Bussi & Mariotti 2009).

Il lavoro di ricerca esposto in questa tesi è di tipo sperimentale e si basa su una serie di attività svolte in alcune classi della scuola primaria e secondaria di primo grado. Lo strumento teorico alla base di tali attività è costituito dal paradigma della programmazione logica, un frammento della logica del primo ordine che sembra essere adeguato a scopi didattici per la sua semplicità e per la sua vicinanza alle forme comuni di ragionamento. Questa scelta è anche coerente con il fatto che non si vuole vedere la logica come strumento per dimostrare teoremi di matematica ma come strumento per elaborare informazione su fatti di vita quotidiana.

L'attività si inserisce nell'ambito di una serie di ricerche sullo stesso tema svolte dal gruppo di ricerca in didattica della matematica dell'Università di Salerno (si veda Gerla, 1988; Gerla *et al*. 1990; Coppola *et al*., 2007). L'idea parte dalla costatazione che la logica matematica nella scuola, se presente, viene introdotta principalmente in relazione al calcolo proposizionale. Ci si è posti pertanto il problema di capire se le sue potenzialità didattiche non si possano cogliere anche in altri suoi aspetti. In particolare, si è posta l'attenzione alla dimensione deduttiva della logica del primo ordine che, rispetto al calcolo proposizionale, si avvicina di più alla struttura del linguaggio quotidiano.

L'idea generale in cui ci si muove è che le potenzialità della logica matematica nell'ambito della didattica possano emergere solo se la logica non viene intesa come strumento universale con pretese di fondazione della matematica. Piuttosto debba essere intesa come strumento locale capace di rappresentare momenti dell'attività deduttiva, anche in contesto non matematico. Questo permette l'utilizzazione di frammenti della logica classica sufficientemente semplici da poter essere introdotti a partire dalla scuola primaria.

L'obiettivo specifico che ha guidato questa ricerca è stato quello di indagare se attività di manipolazione concreta di "oggetti linguistici" possano contribuire a sviluppare negli allievi la capacità di padroneggiare semplici processi deduttivi con strategie di tipo problem-solving. Inoltre, si è voluto stimolare negli allievi una riflessione sulla deducibilità come attività legata alle sole informazioni esplicitate in un testo e quindi non coinvolgente credenze o preconcetti.

La ricerca si caratterizza tra l'altro per l'idea di ridurre un linguaggio del primo ordine ad un artefatto in senso stretto, cioè ad un oggetto materiale con le opportune regole di manipolazione. Tale artefatto, appositamente ideato e fatto costruire, è costituito da tessere magnetiche di legno sulle quali è possibile scrivere e cancellare e da una serie di lavagne magnetiche su cui applicare tali tessere (una grande, rivolta alla classe, e una per ciascun gruppo di studenti). Questo permette di trasformare la struttura sintattica di un sistema di assiomi (informazione disponibile) in una configurazione di tessere su una lavagna magnetica ed una dimostrazione in un'attività di manipolazione di tali tessere.

Parlando in maniera più dettagliata, il primo capitolo è dedicato a discutere il rapporto tra la logica e la didattica della matematica, argomentando come la logica debba essere vista se si vuole che fornisca un apporto positivo alla didattica. In particolare, si vuole far notare come sia la motivazione fondazionale che quella strutturalista siano sorgenti di difficoltà per tale rapporto.

Nel secondo capitolo vengono richiamate nozioni elementari della programmazione logica, al cui paradigma fanno riferimento le attività sperimentali. Da notare, però, che nella sperimentazione si utilizzano semplici programmi che sono positivi (nessuna negazione nel corpo di una regola) ed in cui non sono presenti nomi di funzioni (*function-free*). Queste limitazioni appaiono enormi se si vede la logica come uno strumento per fondare settori della matematica. Tuttavia, se ci si riferisce alle forme di ragionamento che appaiono nella vita di tutti giorni, si vede come tali limitazioni non siano poi tanto rilevanti e che non impediscono di padroneggiare una grande varietà delle argomentazioni che si sviluppano nella vita quotidiana.

Infine, nel terzo capitolo vengono descritti gli esperimenti didattici realizzati: i primi in due scuole primarie, il terzo in una scuola secondaria di primo grado. Tali esperimenti riguardano gli aspetti assertivi del linguaggio e si basano sulla realizzazione di “sistemi di assiomi” e “catene deduttive” Alla fine vengono riportati i risultati ottenuti dall’analisi del materiale raccolto durante le diverse attività.

CAPITOLO 1

LA LOGICA E LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

INTRODUZIONE

L'inserimento della logica nei programmi scolastici ha da sempre mostrato diverse problematicità (si veda ad esempio Gentilini, 2005). Una ragione potrebbe risiedere nel fatto che, molto spesso, l'obiettivo dell'insegnamento matematico si riduce a sviluppare abilità di calcolo o a comprendere dimostrazioni già esistenti, invece il suo ruolo dovrebbe mirare allo sviluppo di capacità nella formalizzazione delle conoscenze, nell'elaborazione di strategie dimostrative e nella risoluzione di problemi.

In realtà, già nelle "Indicazioni del primo ciclo d'istruzione", pur non essendo citata esplicitamente la logica, viene posta l'attenzione all'attività di problem solving[1], allo scopo di stimolare negli allievi la capacità di affrontare nuove situazioni, piuttosto che riprodurre cose già fatte:

> "*Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo […] l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche […], congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive*".

Inoltre, tra i "traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria" è indicato:

> "*Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici*". [2]

[1] Naturalmente non può essere identificato il *problem solving* con la logica formale. Tuttavia entrambi gli argomenti hanno in comune, dal punto di vista cognitivo, svariati aspetti.

[2] Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, settembre 2012, p. 49.

Pertanto, l'educazione logica nell'insegnamento non dovrebbe essere considerata, come spesso avviene, un capitolo a parte da sviluppare nel corso di uno specifico momento dell'anno scolastico[3], ma piuttosto come un argomento che richiede una riflessione ed una cura continua da parte dell'insegnante. Compito dell'insegnante dovrebbe essere quello di guidare gradualmente l'allievo verso l'acquisizione di un linguaggio specifico e appropriato che passi attraverso la comprensione della differenza esistente tra il linguaggio comune e quello logico-matematico. Si pone, allora, il problema se la logica formale possa costituire uno degli strumenti utili al conseguimento dei "traguardi" espressi nelle *Indicazioni*. Questo lavoro di ricerca vuole dare una risposta positiva in tal senso.

1.1 LA LOGICA APPLICATA NON SOLO ALLA MATEMATICA

L'educazione al pensiero razionale, lo sviluppo delle capacità nel provare, confutare, risolvere problemi sono tra gli obiettivi principali da perseguire nell'insegnamento scolastico. Tali obiettivi vengono in larga parte assegnati alla matematica. Infatti, si fa notare che già nei Programmi scolastici per la scuola elementare del 1985 veniva affermato:

"*L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita*...".

Nonostante questo, i dati relativi ai risultati delle prove dell'indagine nazionale INVALSI e di quella internazionale OCSE-PISA sulle competenze matematiche dei quindicenni dimostrano, in modo drammatico, quanto sia lontano il raggiungimento di tali obiettivi. Anche i test di accesso ai corsi di laurea non fanno che confermare questo dato. Il motivo potrebbe risiedere nel fatto che a scuola si preferisce ancora alfabetizzare gli studenti sul "far di conto" senza preoccuparsi di rinforzare le strategie di ragionamento degli allievi.

[3] Il riferimento è, in particolare, alla scuola secondaria.

Se si fa riferimento all'attività di deduzione e verifica, è indiscutibile che tali attività se svolte in ambito geometrico ed algebrico costituiscano uno strumento formidabile per l'educazione al pensiero razionale. Tuttavia, esse sembrano essere possibili solo dopo che si sia sviluppata nel discente una adeguata familiarità con gli oggetti geometrici ed aritmetici. Questo ha comportato la tendenza a pensare che le dimostrazioni debbano essere introdotte solo dalla scuola secondaria in poi. Un tipico esempio è fornito dalla dimostrazione del teorema di Pitagora.[4]

Questa tesi si basa sul convincimento che tale idea sia sbagliata, che, in realtà, fin dalla scuola primaria siano possibili ed auspicabili attività logico-dimostrative e che frammenti di logica matematica siano utili a tale scopo.

Un punto fondamentale è l'idea che non si debba necessariamente legare la nozione di dimostrazione a quella di dimostrazione in ambito matematico. Se si accetta questo, allora emerge, in modo chiaro, che dimostrazioni e confutazioni siano possibili e, di fatto, esistono fin dai primi anni della vita di un bambino. Una teoria non è necessariamente una teoria matematica ed ogni bambino ha una sua teoria di come sia fatto e funzioni il mondo che lo circonda.[5] Una sua deduzione usualmente non mira a verità matematiche ma a fare le scelte giuste in ogni istante della giornata. Ad esempio, potrebbe essere in possesso di una teoria del tipo:

"*se un ombrello è bagnato allora fuori piove*";

"*se un ombrello gocciola allora è bagnato*";

a cui aggiungere osservazioni di fatti del tipo:

"*l'ombrello che ha la mamma in mano gocciola*".

Questo "sistema di assiomi" permette al bambino di dedurre che fuori piove e questa deduzione ha la stessa dignità di una dimostrazione in geometria euclidea.

[4] Non è un caso che tra i raggruppamenti disciplinari per l'insegnamento della matematica nei corsi di laurea per la formazione primaria viene escluso proprio quello della logica matematica, mentre vengono inseriti quelli di algebra, di geometria, di matematiche complementari e di probabilità.

[5] Ad esempio si veda il libro Gopnik, 2009.

È anche importante osservare che se, nella formazione primaria, ci si riferisce principalmente alle dimostrazioni che trattano situazioni di vita quotidiana, allora risultano essere utili frammenti della logica formale che, invece, per fare matematica risultano strumenti troppo deboli. Come si vedrà nel seguito, il frammento a cui ci si è riferiti nell'attività di sperimentazione è quello della programmazione logica. Tuttavia, sembrano promettenti per scopi didattici anche altri frammenti della logica come quello della logica monadica e della teoria dei sillogismi.

Infine, il rapporto difficile tra linguaggio naturale e linguaggio formale potrebbe essere facilitato se le parole usate a scuola nel maneggiare dimostrazioni fossero interpretabili nella realtà che circonda i bambini e non solo nelle strutture che interessano i matematici. Infatti, i ragionamenti comuni non avvengono mediante l'applicazione di regole astratte, bensì in contesti significativi. D'altra parte la logica matematica, pur avendo nella sua forma compiuta un carattere formale che richiede una forte capacità di astrazione, nasce comunque dalla formalizzazione del linguaggio naturale e dalle piccole forme di deduzione che accompagnano tutti nella vita quotidiana. Pertanto, si possono utilizzare tanti contesti significativi, dal punto di vista sociale e culturale, per svolgere attività deduttive che mostrino la funzione delle dimostrazioni, dal momento che esse rappresentano uno degli aspetti centrali della matematica:

> "*Non c'è matematica senza dimostrazione […] la dimostrazione segna il passaggio alla matematica vera e propria*" (Lolli, 2005).

Le idee qui esposte sono la base su cui poggia l'attività di ricerca svolta.

1.2 LA LOGICA VISTA DA UN'OPPORTUNA ANGOLAZIONE

I rapporti tra logica matematica ed insegnamento della matematica non sono mai stati molto facili (si veda ad esempio Gerla & Ferrari, 2015). Una delle possibili cause è il compito ambizioso che è stato assegnato alla logica matematica al momento della sua nascita: essere lo strumento per una fondazione sicura dell'intero edificio matematico. Ciò ha portato inevitabilmente a dare a parole come "assioma", "dimostrazione", "teorema" il sapore di verità assolute che vivono solo nel mondo accademico della matematica. In un certo senso, lo stesso sapore viene dato alla logica matematica vista come naturale evoluzione del metodo assiomatico in chiave strutturalista. Ad esempio, la teoria dei gruppi è una settore importante della matematica i cui assiomi sono considerati immutabili non meno di quelli della geometria euclidea. Tuttavia, se si vogliono evidenziare le potenzialità della logica nell'ambito della didattica della matematica, allora è opportuno vedere la logica in una prospettiva diversa. Di seguito si elencano alcuni punti che evidenziano che cosa si vuole dire con questo.

1.2.1 UNA DIVERSA SEMANTICA

Come si è già detto nel paragrafo precedente, è auspicabile, per le attività logiche, dare forte spazio ad una semantica delle situazioni quotidiane piuttosto che ad una semantica delle strutture matematiche. Un esempio è dato dalla "teoria", detta prima, relativa agli ombrelli bagnati, altri esempi possono essere le situazioni di tipo investigativo nei romanzi gialli. Se, infatti, si pensa ad un investigatore che deve risolvere un caso, egli ha delle informazioni a disposizione da cui partire, fa dei ragionamenti e dunque ricava nuove informazioni. Naturalmente in questi casi non ha molto senso una semantica di tipo Tarskiano, inoltre non è chiaro che tipo di differenza esiste rispetto a tale semantica.

Da notare che tale punto di vista si accorda con una visione del concetto di dimostrazione, inteso in senso ampio, come costruzione di un ragionamento che porta alla scoperta di nuove conoscenze a partire da conoscenze date. Si parla, infatti, di dimostrazione non solo in contesto matematico ma anche nella vita quotidiana, in generale quando si vuole convincere se stessi o gli altri della verità di una certa affermazione.

1.2.2 LOGICA COME MANIPOLAZIONE DI INFORMAZIONE

In accordo con quanto detto, conviene allora vedere la logica come strumento che permette di ottenere, a partire dalle informazioni disponibili su di una situazione reale, nuove informazioni relative alla stessa situazione. Per realizzare ciò, è opportuna una reinterpretazione di alcune parole chiave della logica (si veda ad esempio Coppola *et al.*, 2007). Esempi di reinterpretazioni sono dati dalla seguente lista:

Assioma → un "pezzo" di informazione disponibile;

Teoria o *sistema di assiomi* → informazione disponibile (in generale non completa) circa situazioni concrete di vita quotidiana;

Teorema → informazione che si può ricavare da quella disponibile;

Dimostrazione → processo di validazione di una ipotesi (a cui si deve aggiungere esplicitamente la nozione duale di *confutazione*);

Teoria completa → informazione sufficiente ad avere un quadro completo di una situazione, cioè in cui ogni fatto è dimostrabile o confutabile;

Modello di una teoria → situazione compatibile con l'informazione disponibile;

Asserzione logicamente indipendente → fatto che, in base alle informazioni disponibili, non si può né dimostrare né confutare.

Questa rilettura permette di ritrovare la logica sia nelle attività della vita quotidiana che in tutti i livelli dell'insegnamento scolastico.

1.2.3 CARATTERE LOCALE DELLE DIMOSTRAZIONI

La reinterpretazione di una teoria in termini di informazione disponibile non esclude la possibilità di affrontare dimostrazioni in aritmetica o geometria. In questo caso, tuttavia, non conviene riferirsi ad un sistema di assiomi su cui costruire tutto. Molto meglio riferirsi ad un modello privilegiato del quale si intuiscono le principali proprietà e porre il problema di ricavare proprietà non evidenti da proprietà che appaiono evidenti. Ovviamente, la nozione di "evidente" non ha senso in ambito matematico. Ad esempio, se si vuole dimostrare che un parallelogramma è equiscomponibile ad un rettangolo con stessa base e stessa altezza, allora si può dare come evidente il criterio di congruenza dei triangoli che viene utilizzato. Se si vuole dimostrare il teorema dell'angolo esterno, allora si possono dare come evidenti le proprietà degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Se si vuole provare la formula per il quadrato di un binomio, allora si può dare come evidente la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

1.2.4 DAL GENERALE AL PARTICOLARE

In logica matematica tutte le asserzioni sono poste allo stesso livello. Il problema di dimostrare un fatto (formula atomica priva di variabili) oppure quello di dimostrare una asserzione che esprime una regola generale si pongono allo stesso livello. Nelle forme di ragionamento presenti nella vita quotidiana non è esattamente la stessa cosa, poiché si tende a ritenere una teoria come qualcosa che sia il più generale possibile e a pensare che il compito di chi ragiona sia quello di trarre fatti particolari da una teoria. Come si vedrà nel capitolo successivo, il paradigma della programmazione logica si presta bene a rappresentare tale punto di vista.

1.2.5 LA RICERCA DI UNA DIMOSTRAZIONE

Proprio perché si tende a vedere la dimostrazione come qualcosa che si riferisce alla sola matematica, nella pratica didattica gli allievi sono abituati al più a ripetere una dimostrazione fatta dall'insegnante. Inventare una dimostrazione appare una impresa piuttosto difficile per la quasi totalità dei teoremi significativi della matematica. Viene pertanto considerato bravo uno studente capace di capire e ripetere i singoli passaggi di una dimostrazione inventata da altri.

Come si vedrà nel seguito, nelle semplici situazioni che si proporranno, che la programmazione logica è in grado di affrontare, non è impossibile chiedere persino ai bambini di trovare una dimostrazione. Questo significa che se in un "compito in classe" normalmente si pongono problemi in cui la risposta sia un numero, sarebbe auspicabile, invece, proporre situazioni problematiche in cui la risposta sia una dimostrazione.

1.2.6 Provare e confutare: la situazione mentale del dubbio

Quando l'insegnante espone l'enunciato di un teorema per poi dimostrarlo, sulla verità dell'enunciato non si nutre alcun dubbio. Nel mondo della scuola e anche dell'università, non si "cerca la verità" ma, per così dire, la si trova già fatta. Sarebbe opportuno, invece, che un enunciato si proponga come una congettura e che si assegni uguale valore al dimostrare ed al confutare. In tal caso verrebbe meno il ruolo passivo dello studente rispetto all'autorità dell'insegnante o del libro ed entrerebbe in gioco l'esperimento matematico, l'argomentazione, la simulazione al computer, la costruzione di un modello, la rappresentazione grafica.

Naturalmente, per la logica matematica classica non esiste una sostanziale differenza tra dimostrare e confutare. Confutare una asserzione coincide con il provare la sua negazione, provare una asserzione coincide con il confutare la sua negata. Tuttavia, per la didattica della matematica la differenza è enorme in quanto è forte la diversità di partecipazione emotiva che si manifesta nel proporre una congettura rispetto alla sola dimostrazione di un enunciato dato per vero.

1.2.7 Inadeguatezza della logica matematica classica

Nella logica matematica classica, quando si effettua una dimostrazione può essere utilizzata un'asserzione solo se tale asserzione sia stata già dimostrata o sia esplicitamente presente nel sistema di assiomi. Il sistema di assiomi è poi rigidamente fissato e non può essere integrato "in corso d'opera". Ancora, la semantica non può interagire con i processi deduttivi e tali processi non possono essere influenzati da conoscenze generali non esplicitate. Invece, nei processi deduttivi effettivi la situazione è molto più complicata. Ad esempio, se le informazioni non risultano sufficienti si è autorizzati a cercare altre informazioni e quindi, in un certo senso ad ampliare il sistema di assiomi disponibile. Inoltre, parte dell'informazione può essere ricavata dal contesto (implicature, a volte pregiudizi):

> "*Un'implicatura non ha il grado di certezza di una deduzione […] tuttavia le implicature sono forme di inferenza che utilizziamo continuamente nei processi di comunicazione*" (Ferrari, 2004).

Questo dovrebbe essere uno stimolo a rivolgersi anche ad altri tipi di logica. D'altra parte, come è ben noto, la logica matematica non risulta adeguata alle varie forme dell'argomentazione:

> *"i contesti in cui si sviluppano i ragionamenti "quotidiani" e quelli in cui si costruiscono le deduzioni, di cui (anche) si occupa la logica matematica, sono completamente diversi, con diversi criteri di accettabilità e di coerenza"* (Dapueto & Ferrari, 1988).

1.3 UNA NUOVA FUNZIONE DEL LINGUAGGIO

In generale, il linguaggio appare in relazione alla sua funzione comunicativa, ma se si amplia la sua prospettiva considerando, ad esempio, attività complesse come la soluzione di problemi, possono emergere altre funzioni del linguaggio. Una volta riconosciuta al linguaggio qualcosa di più che la mera funzione comunicativa, la complessità delle diverse situazioni rende necessario un ampliamento del termine "linguaggio" per includere e distinguere forme semiotiche diverse.

Nel caso particolare della matematica il linguaggio assume spesso un ruolo costitutivo in aggiunta a quello, che gli è proprio, di strumento di comunicazione e di organizzazione del pensiero. Il nuovo ruolo del linguaggio si manifesta principalmente nel processo di "oggettificazione" e di manipolazione formale. Ad esempio, risolvere un'equazione non è solo fare calcoli, ma piuttosto fare una serie di scelte intelligenti, che fanno riferimento alla forma degli oggetti-equazione e non al loro significato, all'interno di un albero di possibilità, cioè di regole rigorose che permettono alcune manipolazioni linguistiche e ne proibiscono altre.

D'altra parte, il linguaggio gioca un ruolo essenziale nello sviluppo delle capacità cognitive:

> "*Di fatto, la costruzione di un opportuno linguaggio per rappresentare delle situazioni permette di sostituire, a operazioni che s'intendono eseguire tra concetti, corrispondenti trasformazioni meccaniche tra le rispettive rappresentazioni, cioè trasformazioni sui segni, secondo opportune regole costruite allo scopo, permettendo un controllo e un'elaborazione molto più agevoli*" (Ferro, 2010).

In accordo con le idee di Vygotskij (1934), il linguaggio è un mediatore tra individuo e cultura e, dunque, può essere considerato l'artefatto culturale per eccellenza. Esso gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento e nelle pratiche di classe, come ampiamente riconosciuto in letteratura (Sfard, 2001).

Nelle ricerche in didattica della matematica si parla molto del ruolo degli artefatti ed in particolare degli artefatti matematici. Per artefatto matematico si intende un oggetto, costruito dall'uomo, che in qualche modo è portatore di cultura matematica. Ovviamente, un artefatto non è visto solo come un oggetto fisico e si caratterizza anche e principalmente per le sue regole d'uso:

> "*L'idea di artefatto è molto generale e comprende diversi tipi di "oggetti", prodotti dagli esseri umani nel corso dei secoli: suoni, gesti; utensili e strumenti; forme orali e scritte del linguaggio naturale* […]" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Sono esempi di artefatti la riga, il compasso, l'abaco, i software di geometria, ecc. Il motivo di questa attenzione è che sempre più ci si ispira alle idee di Vygotskij il quale, a differenza di Piaget, ritiene che lo sviluppo delle capacità cognitive di un bambino non segua tappe solo biologiche ma sia fortemente influenzato da fattori culturali. Tali fattori agiscono sia tramite l'interazione diretta con gli adulti, sia tramite il contatto con artefatti. A tal proposito Vygotskij sottolinea l'importanza degli artefatti culturali nello sviluppo cognitivo del bambino poiché è convinto che essi fungano da attivatori della mente. Ora, come afferma lo stesso Vygotskij, un artefatto non è necessariamente un oggetto fisico e quindi tra gli artefatti è compreso a pieno titolo il linguaggio:

> "[...] *l'invenzione e l'utilizzo dei segni come mezzi ausiliari per la risoluzione di un problema dato (ricordare, confrontare qualcosa, scegliere e così via) sono, sotto il profilo psicologico, analoghe all'invenzione e all'utilizzo di strumenti. I segni hanno funzione di strumento durante l'attività psicologica, analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro*" (Vygotskij, 1978).

Sulla base di queste idee, nell'attività di sperimentazione il linguaggio diventa un oggetto concreto sul quale applicare manipolazioni in accordo a date regole.

1.4 ARTEFATTI E SEGNI NELLA TEORIA DELLA MEDIAZIONE SEMIOTICA

Nel campo della pratica gli strumenti hanno da sempre rivestito un ruolo cruciale, non a caso, la costruzione e l'uso di artefatti rappresentano una caratteristica dell'attività umana. Secondo il ricercatore francese Rabardel (1995) è necessario distinguere tra artefatto e strumento. L'artefatto è l'oggetto materiale o simbolico indipendentemente da chi lo utilizza; lo strumento è invece un'entità duplice costituita dall'artefatto e dagli schemi di utilizzazione.
Come si è già detto nel paragrafo precedente, al di là dell'aspetto pratico vi è anche la possibilità che gli artefatti diano un contributo a livello cognitivo (Norman, 1991). Gli artefatti cognitivi possiedono una doppia natura:

"*L'aspetto pragmatico o esperienziale, cioè l'orientamento verso l'esterno, che permette di modificare l'ambiente circostante, e quello riflessivo, cioè l'orientamento verso l'interno, che permette ai soggetti di sviluppare l'intelligenza*" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Vygotskij ha posto in evidenza il fatto che, a livello pratico, gli individui utilizzano artefatti per pervenire a degli obiettivi altrimenti non raggiungibili, mentre i segni prodotti nei processi di interiorizzazione, che chiama strumenti psicologici, fanno da supporto alle attività mentali. Gli artefatti sono orientati verso l'esterno, mentre i segni sono orientati verso l'interno.

Secondo Vygotskij durante lo svolgimento di un compito avviene l'uso sociale di artefatti e si producono segni condivisi: essi sono dunque in relazione sia all'artefatto utilizzato sia al contenuto che deve essere mediato.

In ambito educativo è possibile servirsi delle potenzialità insite nel sistema di relazioni tra artefatto, compito e conoscenza matematica. In questo sistema l'artefatto è collegato sia ad un compito, a cui fornisce mezzi per trovare una soluzione, sia ad una specifica conoscenza matematica.

Tra una conoscenza e un artefatto esiste un doppio legame semiotico. Attraverso mezzi semiotici quali gesti, disegni o parole da queste relazioni nascono dei segni: la loro produzione può essere spontanea o esplicitamente richiesta dal compito.

I segni prodotti durante l'attività con gli artefatti possono essere usati dall'insegnante per sfruttare i processi semiotici, al fine di guidare l'evoluzione dei significati all'interno della classe: in particolare l'insegnante può guidare lo sviluppo verso ciò che è riconoscibile come matematica. Il nesso fra segni e artefatti si basa sulla funzione di mediazione[6] che entrambi hanno nello svolgimento di un compito.

L'artefatto, dunque, costituisce un mediatore semiotico ma questa sua funzione non è attivata automaticamente:

> "*La funzione di mediazione semiotica di un artefatto può essere utilizzata da un esperto (in particolare l'insegnante) che sia consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto sia in termini di significati matematici che in termini di significati personali. Tale evoluzione è favorita dall'azione dell'insegnante, che guida il processo di produzione e sviluppo dei segni centrati sull'utilizzo di un artefatto. L'insegnante agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti; egli*

[6] Il termine mediazione è molto comune all'interno della letteratura educativa ed è usato per riferirsi alla potenzialità di incoraggiare la relazione fra gli allievi e il sapere in relazione allo svolgimento di un compito.

utilizza cioè l'artefatto come strumento di mediazione semiotica" (Bartolini Bussi Bussi & Mariotti, 2009).

L'insegnante ha il ruolo cruciale di mediatore culturale, ovvero sotto la sua guida significati nuovi, legati all'utilizzo di uno strumento, possono essere generati e possono evolvere.

"*Così un artefatto diventa uno strumento di mediazione semiotica quando viene usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente*" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Sulla base di queste considerazioni, come si vedrà in seguito, uno dei punti chiave dell'attività di sperimentazione è proprio il ruolo giocato dall'uso dell'artefatto "tessere" come mezzo per realizzare un compito e come strumento di mediazione semiotica per raggiungere un obiettivo didattico.

CAPITOLO 2

ELEMENTI DI PROGRAMMAZIONE LOGICA

INTRODUZIONE

Come si è già detto nel capitolo precedente, una delle idee su cui si basa la ricerca è quella di considerare non l'intera logica matematica ma frammenti di logica che, per la loro semplicità, siano, se non proponibili integralmente nella scuola, utilizzabili dagli insegnanti come base teorica di riferimento. Un frammento della logica che si presta particolarmente bene a tale scopo è quello della programmazione logica. I motivi di tale scelta sono stati esposti nel primo capitolo. Si riassumono comunque i punti principali:

- Si presta bene a rappresentare situazioni di carattere non matematico. Inoltre, potendo essere vista come strumento per la costruzione di data-base intelligenti, è particolarmente adatta ad una visione della logica come elaborazione dell'informazione.
- Definisce un linguaggio di interrogazione che partendo dall'asserzione da dimostrare applica una strategia "all'indietro" in modo molto simile alle forme di ragionamento umano.
- Ha una semplice semantica che, nel caso delle attività sperimentali in cui non esistono nomi di funzioni, permette di riferirsi a un modello finito privilegiato[7] (cosa questa non toccata dalle sperimentazioni fatte ma che invece sarà oggetto di future sperimentazioni).

A questi motivi forse si può aggiungere anche il fatto che essa si presta a qualche forma di misurazione della complessità di una dimostrazione (intendendo per complessità quella che emerge dal punto di vista didattico).

Si ricorda, in proposito, che studi in psicologia cognitiva hanno evidenziato limiti nel pensiero ipotetico-deduttivo degli adulti (Wason, 1968) in

[7] Questa cosa non è stata realizzata nelle sperimentazioni svolte, ma ci si propone che diventi oggetto di future sperimentazioni.

opposizione alle idee di Piaget sullo sviluppo completo del pensiero logico in età adulta. Tali limiti sono principalmente inerenti alla difficoltà nello sviluppare la struttura di una dimostrazione al crescere della complessità della stessa. La formalizzazione proposta dalla programmazione logica si presta bene ad una sorta di misurazione di tale complessità. Ad esempio, si potrebbe considerare il numero di volte in cui è necessario utilizzare una regola oppure il numero di fatti presenti nel corpo di una regola o il massimo numero di variabili che compaiono nelle varie formule ed altro.

In questo capitolo vengono esposte, brevemente, alcune nozioni elementari di programmazione logica in modo da rendere la tesi leggibile anche a persone non esperte in logica. Tali nozioni costituiscono uno strumento essenziale alla ideazione ed alla realizzazione degli esperimenti didattici che saranno descritti nel capitolo successivo. Anche se nelle sperimentazioni fatte buona parte dei formalismi che verranno esposti in questo capitolo si semplificano enormemente, si preferisce dare una esposizione completa che comprende anche il caso di linguaggi con nomi di funzioni.

2.1 I LINGUAGGI FORMALI

Uno dei punti fondamentali delle ricerche in didattica della matematica del gruppo di Salerno è la distinzione di due ruoli che il linguaggio ha assunto da tempo: quello di mezzo per comunicare (ruolo che ha avuto in tutti i tempi) e quello di "oggetto" da manipolare. Il vedere il linguaggio in questo secondo senso porta ad esporre la nozione di linguaggio formale.

Un linguaggio naturale è frutto di un processo spontaneo all'interno di una comunità ed è in continua evoluzione. Tentativi di parziale formalizzazione sono sempre successivi alla sua costituzione e sempre affiancati da un numero non piccolo di eccezioni. L'apprendimento di un linguaggio naturale avviene per esperienza ed imitazione, cosa che comporta ambiguità, tuttavia, in positivo, i linguaggi naturali hanno un'enorme potenza espressiva.

Un linguaggio formale invece viene formulato ex–novo, stabilendo a priori le regole e le convenzioni sintattiche che lo costituiscono e questo indipendentemente dal significato che dovrà avere. Questo rende un linguaggio formale un oggetto matematico per il quale è possibile dare definizioni e provare teoremi.

La stessa matematica utilizza un linguaggio che non è formale ma in alcuni momenti (equazioni, polinomi, calcolo differenziale, rewriting systems, …) utilizza un linguaggio formale. Questi momenti sono particolarmente rilevanti e comprendere quando appaiono è fondamentale per un buon insegnamento.

Da notare che i linguaggi formali sono introdotti in matematica quasi sempre in modo informale senza cioè che si siano specificate le relative regole di produzione. Come si vedrà in seguito, dopo che sia stato definito un linguaggio formale, si passa a definire la relativa semantica in modo che il significato di ogni frase sia sempre privo di ambiguità.

Alla base di ogni costruzione linguistica vi è un insieme di segni grafici, o caratteri, che costituiscono l'alfabeto della lingua considerata. Successioni ordinate e finite di caratteri formano le differenti parole di una lingua, ma non vale sempre il viceversa. Infatti, dato un alfabeto, si possono formare stringhe di caratteri che non sono parole accettate in quel linguaggio. Per esempio, una parola non ammessa nella lingua italiana è "plsbbc", una parola non ammessa nel linguaggio dell'Aritmetica è "5 – = +". Le regole che guidano la costruzione delle parole, delle frasi e dei discorsi sono dette regole sintattiche, quelle che governano la corrispondenza tra parole, frasi e discorsi e i loro significati sono dette regole semantiche. Ad esempio, scrivere "matematica ho fatto compito il", oppure "3 +) – 5] =) (4 – : 2]", significa commettere errori di sintassi, invece la frase "la laguna di Venezia ama il formaggio parmigiano" non è semanticamente corretta in quanto non esprime, nel nostro linguaggio, un significato plausibile, anche se la struttura sintattica è corretta. Da notare che, specialmente nelle lingue naturali, si distingue tra "parole" (che usualmente sono in numero finito ed il cui significato è dato dai vocabolari), "frasi" e "discorsi". Una parola è una sequenza di caratteri dell'alfabeto iniziale *A*, una frase è una sequenza finita di parole separate da uno spazio vuoto. Un discorso è una sequenza di frasi separate da un punto. Questa distinzione non ha senso da un punto di vista teorico poiché, se si parte da un alfabeto A, si può ampliare tale alfabeto aggiungendo un nuovo carattere che rappresenta uno spazio vuoto (ad esempio il carattere "–"). Allora, una frase può essere considerata una parola nell'alfabeto che si ottiene aggiungendo ad A questo carattere. Se si aggiunge poi un carattere il cui ruolo è di rappresentare la fine di una frase (ad esempio il carattere "."), allora una parola nell'alfabeto può rappresentare un discorso. In definitiva, anche quanto scritto in un intero libro può essere considerato un'unica parola in un opportuno linguaggio.

2.1.1 DEFINIZIONE RIGOROSA

Volendo procedere in maniera più formale, viene data la seguente definizione.

Definizione 1.1.

- Un *alfabeto* A è un qualunque insieme finito, non vuoto i cui elementi sono detti caratteri o simboli;
- una *parola* o *stringa* di lunghezza n è un elemento del prodotto cartesiano A^n, si indica con A^+ l'insieme delle parole sull'alfabeto A, e quindi:

$$A^+ = \cup_{n \in N} A^n.$$

L'apparente stranezza di chiamare "parola" una ennupla di elementi dell'alfabeto deriva dalla scelta riduzionista di esprimere tutte le nozioni matematiche in termini insiemistici. In questo caso si doveva scegliere una definizione che tenesse conto dell'ordine e delle eventuali ripetizioni dei caratteri presenti in una parola. Tuttavia, d'ora in poi, per indicare una parola, invece di usare la notazione $(a_1, ..., a_n)$ si scriverà semplicemente $a_1 ... a_n$ come avviene nell'uso comune. Ad esempio, se $A = \{a, o, b\}$ allora per denotare la parole (b, o, a) si scriverà *boa*.

Si nota che l'insieme A^+ possiede una importante struttura algebrica che si ottiene introducendo l'operazione di *giustapposizione*. In termini insiemistici questa operazione consiste nell'associare a due parole $(a_1, \ldots, a_p)$ e $(b_1, \ldots, b_q)$ la parola $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$. In termini della notazione usuale, questa operazione consiste nell'"attaccare" due parole una dopo l'altra. Questa struttura è associativa (ma non commutativa) e prende il nome di *semigruppo libero su A*. Spesso è utile aggiungere a A^+ un simbolo che funga da elemento neutro. Ad esempio il simbolo "□" con la convenzione per cui, data una parola x, $x \cdot □ = □ \cdot x = x$. La struttura risultante sull'insieme $A^* = A^+ \cup \{□\}$ prende il nome di *monoide libero su A*.

Definizione 1.2. Si chiama *linguaggio formale* sull'alfabeto A ogni sottoinsieme $\mathcal{L}$ di A^+.

Se un linguaggio $\mathcal{L}$ è finito allora può essere dato semplicemente dall'elenco delle parole che ne fanno parte. Un esempio è l'insieme delle parole della lingua italiana il cui elenco può essere trovato in un qualunque vocabolario. Tuttavia, in generale un linguaggio è infinito e viene prodotto da un insieme di regole.

Esempi di questo tipo sono più frequenti nell'insegnamento scolastico secondario di quanto si pensi. Ad esempio, se si considera l'alfabeto $P = \{x, y, +, \cdot, (,)\}$ e le seguenti regole:

i) x ed y sono elementi di $\mathcal{L}$;

ii) se α e β sono elementi di $\mathcal{L}$ allora anche $(\alpha)(\beta)$, e $(\alpha)+(\beta)$ sono elementi di $\mathcal{L}$;

allora si può definire il linguaggio dei polinomi nelle variabili x ed y.

In altre parole, il linguaggio dei polinomi viene definito come il più piccolo sottoinsieme di P^+ contenente x ed y e chiuso rispetto la regola *ii*).

Anche la rappresentazione decimale degli interi è un linguaggio formale, questa volta nell'alfabeto: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, in cui la precauzione è solo quella di evitare che una parola inizi con 0.

Uno dei modi principali per generare linguaggi è mediante l'utilizzo di grammatiche[8].

Definizione 1.3. Una grammatica è una quadrupla $G = (VT, VN, P, s)$ dove:

- *VT* è un insieme finito di simboli *terminali* (caratteri o stringhe su un alfabeto *A*);
- *VN* è un insieme finito di simboli *non terminali* (variabili ausiliari);
- *P* è un insieme finito di produzioni, ossia di regole di riscrittura $\alpha \rightarrow \beta$ con α e β parole nell'alfabeto $V = VT \cup VN$, detto *vocabolario* della grammatica, con *VT* e *VN* insiemi disgiunti.
  Ogni regola esprime una trasformazione lecita che permette di scrivere, nel contesto di una frase data, una stringa β al posto di un'altra stringa α;
- *s* è un particolare simbolo prefissato di *VN*, non terminale, detto simbolo iniziale (*start symbol*) o scopo della grammatica.

Una grammatica stabilisce le regole di una sorta di "gioco" in cui tutte le "partite" iniziano dallo start symbol *s*. Il gioco si svolge nell'applicare le produzioni *P* per generare le frasi del linguaggio descritto dalla grammatica.
Si dice *forma di frase* (*sentential form*) una qualsiasi stringa comprendente sia simboli terminali che non, derivabile dallo start symbol *s*. Si dice *frase* una forma di frase comprendente solo simboli terminali.

[8] La nozione di grammatica non è nata in abito informatico. Essa è stata proposta per la prima volta dal linguista americano Noam Chomsky nel 1957. La questione affrontata da Chomsky è quella di capire l'origine della straordinaria capacità dei bambini di scoprire le "regole" che stanno alla base del linguaggio, a partire da un numero limitato di emissioni verbali dei genitori e delle persone che li circondano. Questa capacità è tanto più sorprendente quanto si consideri che da un numero finito di casi i bambini apprendono il modo di produrre un numero potenzialmente infinito di frasi. La nozione di grammatica fornisce in un certo senso una risposta a questioni di tale tipo, essendo una grammatica un "oggetto finito" capace di produrre, a partire da un numero finito di oggetti (le parole apprese dall'ambiente) un numero potenzialmente infinito di frasi. Gli studi sulle proprietà formali dei linguaggi hanno ricevuto un impulso fondamentale dalle ricerche svolte da Chomsky, che hanno aperto la strada alla formalizzazione dei linguaggi programmativi.

Formalmente se $G = (VT, VN, P, s)$ è una grammatica e α, β sono due stringhe di V^+, si dice che β *deriva direttamente da* α (e si scrive $\alpha \rightarrow \beta$) se le stringhe α, β si possono decomporre in $\alpha = \eta A\delta$, $\beta = \eta\gamma\delta$ ed esiste la produzione $A\rightarrow\gamma$. In generale, si dice che β *deriva* da α e si scrive $\alpha \mid\!\rightarrow \beta$, se esiste una sequenza di N derivazioni dirette che da α possono infine produrre β, ovvero $\alpha = \alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_N = \beta$.
Si dice "sequenza di derivazione" la sequenza di passi necessari per produrre una forma di frase x a partire dallo *start symbol s* mediante l'applicazione di una o più regole di produzione.

Definizione 1.4. Un linguaggio $\mathcal{L}$ nell'alfabeto A è *producibile* dalla grammatica G se gli elementi di $\mathcal{L}$ si possono caratterizzare come le parole nell'alfabeto terminale V che si possono derivare dallo start simbolo s, cioè se $\mathcal{L} = \{x \in VT^+ : s \mid\!\rightarrow x\}$.

Nel seguente esempio si mostra come sia possibile costruire, tramite un'opportuna grammatica, un linguaggio che rappresenta un sottoinsieme molto ristretto della lingua italiana. Quello che si vuole cercare è una sintassi mediante la quale descrivere tale linguaggio, anziché specificare l'insieme di tutte le sue possibili frasi (metodo utilizzabile solo per linguaggi limitatissimi).
Sia *G = (VT, VN, P, s),* con:

- *VT = {il, gatto, topo, mangia, miagola};*
- *VN = {asserzione, articolo, soggetto, predicato};*[9]
- *P ={asserzione → articolo soggetto predicato, articolo → il, soggetto → gatto / topo, predicato → mangia / miagola}.*

Assunto come *start symbol* la variabile "*asserzione*", il linguaggio, che segue dalla grammatica definita in questo modo, consentirà di produrre frasi del tipo:

"il gatto miagola", "il topo miagola", "il gatto mangia", "il topo mangia".

Ad esempio, la derivazione:

[9] Gli alfabeti *VT* e *VN* sono a loro volta insiemi di parole in un altro alfabeto.

asserzione, articolo gatto predicato, il gatto predicato, il gatto miagola
si ottiene utilizzando le produzioni:

$$asserzione \rightarrow articolo\ soggetto\ predicato,$$

$$articolo \rightarrow il, \quad soggetto \rightarrow gatto, \quad predicato \rightarrow miagola.$$

Non deve stupire, però, il fatto che sia producibile una frase del tipo "*il topo miagola*", in quanto una grammatica non garantisce che le frasi costruite siano vere ma solo che siano scritte correttamente. Ad esempio, la frase "il cane mangia" non è corretta sintatticamente.

La costruzione di una grammatica capace di produrre (e controllare) una lingua naturale come l'italiano o l'inglese è ovviamente una cosa complicatissima e non ancora completamente realizzata. Una realizzazione di un metodo di controllo permetterebbe, ad esempio, di programmare un sistema di scrittura che corregga automaticamente gli errori di grammatica.

Si fa notare che tale esempio fornisce un tipo di grammatica capace di produrre solo un numero finito di frasi, in quanto non ci sono "produzioni che richiamano se stesse". A tale scopo, si potrebbe modificare la grammatica *G* aggiungendo una produzione del tipo:

$$discorso \rightarrow asserzione\ e\ discorso; \quad discorso \rightarrow asserzione.$$

Di conseguenza:

$VT_1 = VT \cup \{e\}$, $VN_1 = VN \cup \{discorso\}$, $s = discorso$, $P_1 = P \cup \{discorso \rightarrow asserzione\ e\ discorso;\ discorso \rightarrow asserzione\}$.

È evidente che questa nuova grammatica, per la seconda di tali produzioni, permette di ottenere tutte le frasi della grammatica precedente e, inoltre, per la prima di tali produzioni permette di ottenere frasi di lunghezza non determinata.

Questo fenomeno è molto importante dal punto di vista didattico poiché il primo incontro con l'infinito per un bambino non avviene quando si apprende la nozione di numero naturale. Piuttosto avviene quando si apprende la grammatica che consente di produrre la sequenza infinita di parole che denotano tali numeri.

2.2 IL LINGUAGGIO DELLA LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

2.2.1 LA SINTASSI

Per definire un linguaggio della logica dei predicati del primo ordine è necessario partire da un alfabeto.

Definizione 2.1.1. Un *alfabeto A* di un linguaggio del primo ordine comprende:

- un insieme finito *C* di simboli di *costante*;
- un insieme numerabile *V* di simboli di *variabile*;
- un insieme finito *P* di simboli di *predicato* (o relazione), ognuno dei quali ha associato il suo numero di argomenti detto "arità";
- un insieme finito *F* di simboli di *funzione* con associata "arità";
- i connettivi logici: $\neg$ (not), $\wedge$ (and), $\vee$ (or);
- i quantificatori $\forall$ e $\exists$, detti rispettivamente *quantificatore universale* ed *esistenziale*;
- i simboli di parentesi " (", ") " e virgola " , ".

A partire da tale alfabeto, è possibile definire il linguaggio del primo ordine corrispondente. Da notare che, per evitare inutili complicazioni, nel seguito verranno descritti i linguaggi in modo semi-formale e senza far riferimento alla nozione di grammatica. Si comincia col definire un linguaggio intermedio, detto *linguaggio dei termini*. Le espressioni nell'aritmetica e le espressioni nella teoria delle equazioni algebriche sono due esempi di linguaggio dei termini.

Definizione 2.1.2. I *termini* del linguaggio sono tutte e sole le parole ottenibili mediante le seguenti regole:

- ogni costante è un termine;
- ogni variabile è un termine;
- se f è un simbolo di funzione di arità n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora

$f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Se nel termine non compaiono variabili allora esso viene detto *chiuso*. Per le operazioni binarie, in generale, si usa la notazione infissa e quindi l'ultima regola diventa: se $\otimes$ è il simbolo di arità 2 e t_1, t_2 sono termini, allora $(t_1)\otimes(t_2)$ è un termine. È utile vedere un termine chiuso come la descrizione di un algoritmo, precisamente un algoritmo che utilizza la composizione di operazioni appartenenti al linguaggio. Ad esempio, nell'usuale linguaggio algebrico $3\cdot(4 + 5) + 2$ è un termine chiuso. Anche la rappresentazione di un numero naturale è un termine chiuso. Ad esempio, 35 denota il termine $(3\cdot10) + 5$. Esistono alcune regole per evitare il proliferare delle parentesi ma non ci si sofferma su questo. Se, invece, compaiono anche variabili il termine deve essere interpretato come un algoritmo per calcolare una funzione.[10]

Definizione 2.1.3. Un linguaggio del primo ordine è l'insieme delle parole, dette *formule*, che si possono ottenere mediante le seguenti regole:

- se p è un simbolo di predicato di arità n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora tutte le espressioni del tipo $p(t_1, \ldots, t_n)$ sono formule (dette formule *atomiche*);
- se α e β sono formule allora $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$ e $\neg(\alpha)$ sono formule;
- se α è una formula e x una variabile, allora $\exists x(\alpha)$ e $\forall x(\alpha)$ sono formule.

Si definisce *letterale* ogni formula che sia atomica (*letterale positivo*) o negata di una formula atomica (*letterale negativo*).

Si definisce *variabile libera* una variabile che non compare all'interno del campo di azione di un quantificatore e una formula che la contiene è detta *formula aperta*. Mentre le formule che contengono solo variabili quantificate sono dette *formule chiuse* o *asserzioni*.

[10] Si fa notare che nell'attività di sperimentazione svolta si utilizza un linguaggio senza nomi di funzioni. Pertanto, i termini si riducono o a variabili o a costanti.

Per questioni di semplicità in logica matematica si propone la notazione prefissa anche per i predicati nella costituzione delle formule atomiche. Tuttavia, i matematici utilizzano svariati tipi di notazione. Ad esempio, usualmente per le relazioni di arità 2 come $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\in$, $\subseteq$ viene utilizzata la notazione infissa. Pertanto, si scrive $x = y$ e non $= (x, y)$ oppure $x \leq y$ non $\leq (x, y)$. Ovviamente per funzioni di arità 1 si utilizza la notazione prefissa. Il fattoriale è un esempio di notazione post-fissa.

2.2.2 LA SEMANTICA

Il passo successivo è associare ai simboli di un linguaggio del primo ordine un significato, ovvero creare un rapporto tra i simboli e la realtà (o la struttura matematica) alla quale si riferisce il linguaggio. Tale significato si ottiene specificando di quali oggetti si parla e quindi fissando un insieme di oggetti. Successivamente si interpretano le costanti, i simboli di funzione ed i simboli per relazioni.

Definizione 2.2.1. Una *interpretazione* è una coppia (D, I), con D insieme non vuoto, detto *dominio dell'interpretazione*, ed I una funzione che associa:

- ad ogni simbolo di funzione n-ario $f \in F$, una funzione $I(f)$: $D^n \rightarrow D$;
- ad ogni simbolo di costante $c \in C$, un elemento $I(c) \in D$;
- ad ogni simbolo di predicato n-ario $p \in P$ una relazione n-aria $I(p) \subseteq D^n$.

Si noti che uno stesso linguaggio può avere più interpretazioni, ad esempio cambiando il dominio cui ci si riferisce. Questo contrasta con quanto viene fatto nell'interpretazione di un linguaggio naturale, in cui esiste la tendenza opposta ad interpretare il linguaggio in modo univoco e quindi ad utilizzare parole diverse quando si devono rappresentare oggetti o relazioni diverse. Ad esempio, si preferisce usare la parola "congruente" per la relazione di isometria tra figure geometriche, per non confonderla con altri tipi di equivalenza come l'identità o la similitudine. Questa differenza può essere la sorgente di diverse

difficoltà e costituisce un ostacolo ai processi di apprendimento di cui si deve tenere conto nell'attività di insegnamento.
Si passa poi ad interpretare i termini. Come si è già detto, un termine può essere visto come una sequenza di operazioni da eseguire e quindi come un algoritmo algebrico. Pertanto, è naturale interpretare un termine chiuso come l'elemento del dominio che sia il risultato di tale algoritmo e un termine non chiuso come la funzione associata a tale algoritmo. Un esempio, ben noto agli studenti della secondaria, è quello del polinomio, che è un termine e quindi una parola, e della funzione polinomiale corrispondente.

Definizione 2.2.2. Sia (D, I) una interpretazione, e t un termine. Allora, dato un intero n maggiore o uguale agli indici delle variabili che compaiono in t, è definita una funzione n-aria $I(t) : D^n \to D$, per ricorsione sulla complessità di t. Tale funzione è definita al modo seguente:

a) se t è la costante c allora $I(t)$ è la funzione costantemente uguale a $I(c)$;
b) se t è la variabile x_i allora $I(t)$ è la proiezione i-esima[11] cioè la funzione definita da: $I(t)(d_1, ..., d_n) = d_i$
c) se $t = p(t_1, ..., t_r)$ allora $I(t)$ è la funzione composta da $I(p)$ e $I(t_1), ..., I(t_r)$, cioè la funzione tale che: $I(t)(d_1, ..., d_n) = I(p)(I(t_1)(d_1, ..., d_n), ..., I(t_r)(d_1, ..., d_n))$.

Ad esempio, sia t il termine $log(x_1)+sen(x_2)$, che scritto in forma prefissa sarà $+(log(x_1),log(x_2))$, allora: $I(t)(d_1,d_2) = I(+)(I(log(x_1))(d_1, d_2), I(sen(x_2)(d_1, d_2))$.
D'altra parte:

$$I(log(x_1))(d_1, d_2) = I(log)(I(x_1)(d_1,d_2)) = I(log)(d_1)$$
$$I(sen(x_2))(d_1,d_2) = I(sen)(I(x_2)(d_1,d_2)) = I(sen)(d_2)$$

e quindi:

$$I(t)(d_1,d_2) = I(+)(I(log)(d_1), I(sen)(d_2)).$$

[11] Prende il nome di *proiezione i-esima* in un prodotto cartesiano $X_1\times...\times X_n$ con $i\leq n$ la funzione Pr_i definita dal porre $Pr_i(x_1,...,x_n) = x_i$. In altri termini la proiezione i-esima è la funzione che associa ad ogni vettore la sua componente di posto i. La terminologia geometrica è dovuta al fatto che, ad esempio, in un piano euclideo le due possibili proiezioni corrispondono alle proiezioni sugli assi cartesiani.

Questo significa che il temine $log(x_1) + sen(x_2)$ viene interpretato come la funzione che, data la coppia (d_1, d_2) di elementi di D,

1. applica la funzione $I(log)$ a d_1,
2. applica la funzione $I(sen)$ a d_2,
3. compone i risultati ottenuti nei passi 1. e 2. tramite $I(+)$.

A questo punto, si consideri una formula α di un dato linguaggio, si vuole definire, in maniera formale, che cosa significa l'espressione "α è vera".

È ovvio che la verità o falsità di una formula dipende dall'interpretazione del linguaggio. Ad esempio, la formula $\forall x_1(\forall x_2(x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1))$ sarà vera se il dominio D dell'interpretazione è l'insieme degli interi relativi ed il simbolo "·" è interpretato con l'usuale moltiplicazione di numeri. Tale formula sarà invece falsa se D è l'insieme delle funzioni di R in R e l'interpretazione di "·" è di essere la composizione di due funzioni.[12]

Allora, si vuole precisare che cosa si debba intendere per "α è vera rispetto ad una interpretazione I". Tuttavia, anche in questo modo non si evitano problemi nel caso in cui in α vi è una variabile libera x. Infatti, in tale caso α può essere vera o falsa a seconda dell'elemento rappresentato da x. Ad esempio, la formula $\forall x_2(x_2 \cdot x_1 = x_2)$ sarà vera negli interi relativi se x_1 rappresenta l'unità, sarà falsa se x_1 rappresenta il numero 2.

Ciò significa che ha senso dire se α è vera o falsa non solo dopo aver fissato una interpretazione I del linguaggio ma anche dopo aver assegnato ad ogni variabile libera di α un particolare elemento nel relativo dominio.

Per evitare complicazioni formali, nel seguito si suppone che anche le variabili vincolate siano interpretate da elementi del dominio. Pertanto, se le variabili libere o vincolate di α sono tra $x_1, ..., x_t$, dati $d_1, ..., d_t$ elementi di D, si vuole dare una definizione precisa del concetto: "α è vera rispetto alla interpretazione I quando le sue eventuali variabili libere sono interpretate con $d_1, ..., d_t$". Indicando, in breve, con $I \vDash \alpha\, [d_1,...,d_t]$ tale asserzione, viene data la seguente definizione formale.

---

[12] Infatti, la composizione di funzioni è un'operazione non commutativa. Ad esempio: $log(sen(x)) \neq sen(log(x))$.

Definizione 2.2.3. Sia I una interpretazione, sia α una formula le cui variabili libere o vincolate siano tra $x_1,...,x_m$ e siano $d_1,...,d_m$ elementi del dominio D. Allora, la relazione $I \vDash \alpha\,[d_1,...,d_m]$ è definita per induzione sulla complessità di α tramite:

a) $I \vDash r(t_1,...,t_n)\,[d_1, ..., d_m]$ se $(I(t_1)(d_1, ..., d_m), ..., I(t_n)(d_1, ..., d_m)) \in I(r)$

b) $I \vDash \alpha\wedge\beta\,[d_1, ..., d_m]$ se $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_m]$ e $I \vDash \beta\,[d_1, ..., d_m]$

c) $I \vDash \alpha\vee\beta\,[d_1, ... ,d_m]$ se $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_m]$ o $I \vDash \beta\,[d_1, ..., d_m]$

d) $I \vDash \neg\alpha\,[d_1, ..., d_m]$ se non è vero che $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_m]$

e) $I \vDash \exists x_i(\alpha)\,[d_1, ..., d_m]$ se esiste $d \in D$ tale che $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_{i-1}, d, d_{i+1}, ..., d_m]$

f) $I \vDash \forall x_i(\alpha)\,[d_1, ..., d_m]$ se per ogni $d_i \in D$ $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_i, ..., d_m]$.

Da notare che:

- $I \vDash \forall x_i(\alpha)\,[d_1, ..., d_m]$ se e solo se $I \vDash \neg\exists x_i(\neg\alpha)\,[d_1, ... ,d_m]$
- $I \vDash \exists x_i(\alpha)\,[d_1, ..., d_m]$ se e solo se $I \vDash \neg\forall x_i(\neg\alpha)\,[d_1, ..., d_m]$.

Pertanto, i due quantificatori sono interdefinibili. Sono anche interdefinibili la congiunzione e la disgiunzione in quanto:

- $I \vDash \alpha\wedge\beta\,[d_1, ..., d_m]$ se e solo se $I \vDash (\neg\alpha)\vee(\neg\beta_i)\,[d_1, ..., d_m]$
- $I \vDash \alpha\vee\beta\,[d_1, ..., d_m]$ se e solo se $I \vDash (\neg\alpha)\wedge(\neg\beta_i)\,[d_1, ... ,d_m]$.[13]

Allora, invece di interpretare tutte le variabili che appaiono libere o vincolate si potrebbero interpretare solo quelle che sono libere nella formula α. Infatti, se la variabile x_i è vincolata, allora l'essere $I \vDash \alpha\,[d_1, ..., d_t]$ non dipende dall'elemento d_i considerato. Ad esempio, se risulta che:

$$I \vDash \forall x_1(x_1{\cdot}x_2 = x_2{\cdot}x_1)\,[d_1, d_2],$$

allora, risulta anche:

$$I \vDash \forall x_1(x_1{\cdot}x_2 = x_2{\cdot}x_1)\,[d, d_2], \text{ per un qualunque } d \neq d_1.$$

[13] Tuttavia, poiché nella sperimentazione fatta, si sono utilizzati solo "programmi positivi", si preferisce non utilizzare la negazione e quindi considerare come primitivi sia i due quantificatori che la disgiunzione e la congiunzione.

In particolare, se una formula è chiusa allora si può omettere la stringa $[d_1, ..., d_n]$ che interpreta le variabili occorrenti in α. Ad esempio, invece di scrivere:

$$I \vDash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1)\ [d_1, d_2]$$

è possibile, più semplicemente, scrivere:

$$I \vDash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1).$$

Definizione 2.2.4. Se $I \vDash \alpha\ [d_1, ..., d_m]$ si dice che la formula α *è vera* rispetto ad I negli elementi $d_1, ..., d_m$.

Inoltre, si dice che α *è vera* in I o che *I è un modello di α* e si scrive $I \vDash \alpha$, se risulta $I \vDash \alpha\ [d_1, ..., d_m]$ per ogni $d_1, ..., d_m$ in D.

Si chiama *logicamente vera* (logicamente falsa) una formula che sia vera (falsa) in ogni interpretazione.

In altre parole, dire che una formula con eventuali variabili libere è vera in una interpretazione I equivale a dire che la sua chiusura universale è vera. Ad esempio, si dice che $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ è vera in una interpretazione I se $I \vDash x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1\ [d_1, d_2]$ comunque si scelgano d_1 e d_2 nel dominio di interpretazione, cioè se $I \vDash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1)$.

Definizione 2.2.5. Una formula α è *conseguenza logica* di un insieme di formule T (detto *teoria*), e si scrive $T \vDash \alpha$, se ogni interpretazione I modello di T è un modello anche di α.

Definizione 2.2.6. Una teoria T si dice *soddisfacibile* se ammette un modello, si dice *completa* se per ogni formula α risulta:

$$T \vDash \alpha \quad \text{oppure} \quad T \vDash \neg\alpha.$$

2.3 SISTEMI INFERENZIALI

Data una teoria *T*, volendo stabilire se una formula α è una sua conseguenza logica il procedimento suggerito dalla definizione comporta la necessità di:

1. prendere tutte le possibili interpretazioni del dato linguaggio;
2. considerare solo quelle che sono modelli della teoria *T;*
3. verificare che ciascuno di tali modelli verifichi la formula α.

È evidente che una tale impresa risulta impossibile, anche perché la classe delle possibili interpretazioni di un linguaggio ha una grandezza che va oltre le capacità umane. Allora, è necessario trovare un'altra via e chiedersi:

Esiste un metodo capace, per ogni teoria T, di generare effettivamente tutte le conseguenze logiche di T?

La risposta a tale domanda viene fornita dai sistemi inferenziali. Un sistema inferenziale è usualmente costituito da un insieme *Al* di formule, dette *assiomi logici*, che appaiono vere in tutte le possibili situazioni (cioè sono logicamente vere), da una insieme *T* di formule ritenute vere per situazioni particolari, dette *ipotesi o assiomi propri* e da regole per la manipolazione sintattica, dette *regole di inferenza*. Lo scopo è quello di produrre nuove formule dagli assiomi propri, dette *teoremi*, e questo in modo da essere in accordo con la relazione di conseguenza logica. Il tutto permette la produzione di *dimostrazioni*.

Nell'effettuare la dimostrazione di un teorema α, a partire da un sistema di assiomi *T*, un matematico scrive una sequenza finita di formule α_1, α_2, ..., α_n, di cui l'ultima è del tipo "pertanto possiamo concludere α" e "giustifica", implicitamente o esplicitamente, ogni formula in modo opportuno.

Esempi di giustificazioni che di solito vengono date sono:

- *perché è una assioma della teoria T ...* (ad esempio quando si fanno affermazioni del tipo "per la proprietà distributiva ...");
- *perché è logicamente vero che ...* (ad esempio quando si afferma "d'altra parte due sono i casi: un numero o è primo o non è primo ...");
- *perché segue dalle asserzioni già provate ...* (ad esempio quando si afferma "poiché si è provato che l'ultima cifra di *n* è 2 e che terminare per 2 implica essere pari allora si può asserire che *n* è pari").

Quest'ultimo caso corrisponde alla nozione di *regola di inferenza* vista come procedimento con cui da alcune asserzioni già provate se ne ricava un'altra. L'esempio fatto rientra nella regola del "Modus Ponens". Più in generale, si ha la seguente definizione.

Definizione 3.1. Si dice *regola di inferenza* una qualunque funzione parziale m-aria $r(x_1, ..., x_m)$ che associa ad ogni m-pla di formule $\alpha_1, ..., \alpha_m$ in cui è definita (le premesse) una formula $\alpha = r(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ (la conclusione).

È evidente che gli assiomi logici devono essere scelti tra le formule logicamente vere e che le regole di inferenza devono essere *corrette*, cioè tali che, presa una qualunque interpretazione I, se $\alpha_1,...,\alpha_m$ sono vere in I allora anche α è vera in I. Sia la scelta degli assiomi che quella delle regole è molto ampia e nei diversi approcci alla deduzione si fissano in modi diversi.
Tra le regole più antiche e più utilizzate in matematica vi è il Modus Ponens, di cui si è già visto un esempio, cioè la regola per cui se, a partire dall'insieme di assiomi T,

- ho dimostrato la formula $\alpha \to \beta$,
- ho dimostrato α,
- allora posso affermare anche β.

In breve:

$$\frac{\alpha\ ;\ \alpha\to\beta}{\beta} \qquad \text{(Modus Ponens)}$$

Tale regola è corretta, ovvero se le due premesse sono vere in una data interpretazione allora anche il conseguente è vero in tale interpretazione.
Altro esempio di regola corretta è quella che permette di affermare $\alpha \wedge \beta$ se si sono già dimostrate le formule α e β. Questa regola prende il nome di "introduzione di $\wedge$". In breve:

$$\frac{\alpha; \beta}{\alpha\wedge\beta} \qquad (\wedge\text{-introduzione})$$

Esistono anche regole relative ai quantificatori. In breve:

$$\frac{\alpha}{\forall x(\alpha)} \quad (\forall\text{-introduzione}) \qquad\qquad \frac{\forall x(\alpha)}{\alpha(t)} \quad (\forall\text{-eliminazione})$$

dove t è un termine chiuso. Queste due regole vengono anche chiamate, rispettivamente, regola di *generalizzazione* e regola di *particolarizzazione*.

Definizione 3.2. Se T è una teoria ed α una formula, una *dimostrazione* di α sotto ipotesi T, è una successione finita di formule $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ con $\alpha_n = \alpha$, tale che ogni α_i verifichi almeno una delle seguenti condizioni:

- α_i è un assioma logico, cioè $\alpha_i \in Al$;
- α_i è un assioma proprio, cioè $\alpha_i \in T$;
- α_i è stata ottenuta da formule precedenti (cioè con indice minore di i) tramite una regola di inferenza.

Definizione 3.3. Si dice che α è *dimostrabile* in T, e si scrive $T \vdash \alpha$, se esiste una dimostrazione di α sotto ipotesi T.

Si dice che α è *confutabile* in T se $T \vdash \neg\alpha$.

Ad esempio, si consideri un apparato inferenziale costituito dalle regole di inferenza "modus ponens" e "generalizzazione" e avente come assiomi logici le formule $Al = \{(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\beta, (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha\}$ e sia $T = \{\alpha \wedge \neg\beta, \alpha \rightarrow \beta\}$. In questo caso, un esempio di dimostrazione di $\neg\beta$ sotto ipotesi T è costituita dalla successione:

1. $(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\beta$ (perché un assioma logico)
2. $\alpha \wedge \neg\beta$ (per ipotesi)
3. $\neg\beta$ (per modus ponens da 1. e 2.)

Una dimostrazione di β è costituita dalla successione:

1. $(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha$ (perché un assioma logico)
2. $\alpha \wedge \neg\beta$ (per ipotesi)
3. α (per modus ponens da 1. e 2.)

4. $\alpha \to \beta$ (per ipotesi)
5. β (per modus ponens da 3. e 4.).

Definizione 3.4. Un sistema inferenziale è *corretto* se, data una teoria T, le asserzioni dimostrate a partire da T sono conseguenze logiche di T. In altre parole, un sistema inferenziale è corretto se vale l'implicazione:

$$T \vdash \alpha \Rightarrow T \vDash \alpha.$$

Un sistema inferenziale è *completo* se tutte le formule che seguono logicamente da T possono essere dimostrate come teoremi della teoria. In altre parole

$$T \vDash \alpha \Rightarrow T \vdash \alpha.$$

Se il sistema è corretto e completo allora è garantita l'equivalenza tra l'aspetto sintattico e l'aspetto semantico, ovvero:

$$T \vdash \alpha \Leftrightarrow T \vDash \alpha.$$

In tal caso, quello che si fa a livello sintattico equivale a quello che si fa a livello semantico.

2.4 TEORIE CON SOLO REGOLE E FATTI: LA PROGRAMMAZIONE LOGICA

Nei linguaggi di programmazione tradizionali, di tipo *procedurale*, i programmi si scrivono specificando la sequenza di operazioni che il calcolatore deve eseguire per risolvere il problema. La programmazione logica è invece un tipo di programmazione che si basa sulla logica del primo ordine, sia per rappresentare che per elaborare l'informazione. L'obiettivo della programmazione logica è dunque quello di definire un linguaggio in cui la parte di controllo sia demandata all'interprete e al programmatore non resti che definire la struttura logica del problema. Di conseguenza, in un certo senso il programma è una descrizione della soluzione, non del processo per ottenere tale soluzione. Esso si costruisce descrivendo in un linguaggio formale gli oggetti che interessano, le relazioni fra loro e i fatti che li riguardano. I fatti e le regole asseriti costituiscono la *base di conoscenza* del sistema). I programmi si attivano ponendo al sistema delle domande circa gli oggetti del dominio e le loro relazioni.

Esistono vari linguaggi formali basati sulla programmazione logica, quello attualmente più diffuso è il Prolog (*Pro*gramming in *Log*ic). Il Prolog può rappresentare una buona fonte d'ispirazione per esplorare le capacità di ragionamento logico nell'ambito della didattica. Da notare che esso viene insegnato in via sperimentale agli alunni di alcune scuole primarie inglesi (ma vi è traccia di tali interventi anche in alcune scuole italiane della Repubblica di San Marino).

La programmazione logica è basata sulle cosiddette *clausole di Horn*.

Definizione 4.1. Si chiama:

- *clausola*, ogni formula che sia disgiunzione di letterali positivi o negativi;
- *clausola di programma*, ogni clausola con *almeno* un letterale positivo;
- *clausola di Horn*, ogni clausola con *al più* un letterale positivo;
- *clausola positiva di programma* o *clausola di Horn definita*, ogni clausola con *esattamente* un letterale positivo;
- *clausola negativa*, ogni clausola che non è una clausola di programma;
- *fatto*, ogni formula atomica chiusa;
- *regola*, ogni clausola di programma che non sia un fatto.

Pertanto, una clausola di Horn o è una clausola positiva di programma oppure una clausola negativa. Tenendo presente che nella programmazione logica si preferisce scrivere $\beta \leftarrow \alpha$ per denotare la formula $\alpha \rightarrow \beta$, e che tale formula equivale alla formula $\beta \vee \neg\alpha$, è immediato verificare la seguente proposizione.

Proposizione 4.2.

- Ogni clausola di programma è equivalente ad una formula atomica, oppure ad una formula del tipo:

  $$\alpha \leftarrow (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_h \wedge \neg\beta_1 \wedge ... \wedge \neg\beta_k)$$

  con α, $\alpha_1, ..., \alpha_h$ e $\beta_1, ..., \beta_k$ formule atomiche.
- Ogni clausola positiva di programma è equivalente ad una formula atomica, oppure ad una formula del tipo:

  $$\beta \leftarrow (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$$

  con $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e β formule atomiche.
- Le clausole negative sono equivalenti a formule del tipo:

  $$\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n).$$

Da notare che tutte le clausole sopra definite vanno intese come enunciati universalmente quantificati.

Ad esempio se $x_1, \ldots, x_n$ sono le variabili che occorrono nelle formule atomiche $\alpha_1, ..., \alpha_h, \beta$, allora la clausola di Horn:

$$\beta \vee \neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_h$$

rappresenta la formula:

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n\ (\beta \vee \neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_h)$$

ovvero, la clausola positiva:

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n\ (\beta \leftarrow (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_h)).$$

Inoltre, in tali regole la parte a sinistra della freccia è detta *testa* e la parte a destra è detta *corpo.* Una regola con corpo vuoto costituisce un *fatto*, mentre una regola la cui testa è vuota:

$$\leftarrow (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_h)$$

che a sua volta può essere scritta:

$$\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_h)$$

è detta *goal.*

Esistono particolari tipi di teorie che sono più agevolmente trattabili e che sono caratterizzate dall'avere come assiomi solo clausole positive di programma (formule atomiche o implicazioni).

Definizione 4.3. Una teoria prende il nome di *programma* se è costituita solo da clausole di programma, è chiamata *programma positivo* o *definito* se è costituita solo da clausole di programma positive o definite.

Un programma logico è, dunque, un insieme di clausole definite (regole e fatti) o, se si vuole, un insieme di formule che sono atomiche oppure sono implicazioni in cui il conseguente è una formula atomica e la premessa è una formula atomica o una congiunzione di formule atomiche. Ci si è riferiti a programmi logici positivi in quanto, anche se tale scelta è restrittiva, i programmi positivi sono capaci di rappresentare una grande varietà di argomentazioni fatte nel linguaggio naturale e, come già detto, non presentano le grosse difficoltà che nascono, invece, dalla presenza della negazione.

2.5 LA GENERAZIONE DI FATTI "DAL BASSO"

Nella programmazione logica non solo ci si limita al tipo di teoria che è possibile considerare, ma il grosso limite è che ci si pone come obiettivo solo quello di dimostrare formule atomiche. Inoltre, nella particolare attività di sperimentazione svolta ci si limita alla dimostrazione di soli fatti. In questo caso è possibile utilizzare un sistema inferenziale particolarmente semplice. Tale sistema non ha assiomi logici ed utilizza solo la regola di *particolarizzazione*, il *Modus Ponens* e la regola di $\wedge$-*introduzione* nella forma più generale:

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}$$ [14]

Per esporre tale metodo si indica con:

- B_P l'insieme di tutti i possibili fatti, cioè formule atomiche che non contengono variabili.

[14] Naturalmente nello scrivere $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n$ si sarebbe dovuto specificare l'ordine delle parentesi, cosa che si evita per non creare inutili complicazioni formali.

- *Fatt*(P) $\subseteq B_P$, l'insieme dei fatti che appartengono al programma (teoria) P o che si ottengono dalle formule atomiche di P per particolarizzazione, sostituendo al posto delle variabili libere termini chiusi;
- *Reg*(P), l'insieme delle clausole chiuse che si ottengono dalle formule non atomiche di P, sostituendo anche in questo caso le variabili con termini chiusi;
- *Ground*(P) = *Fatt*(P) $\cup$ *Reg*(P).

Se nel linguaggio sono presenti nomi di operazioni, allora, esistendo infiniti termini chiusi, la teoria *Ground*(P) contiene infinite formule. Questo almeno se in P appare una variabile. Se il linguaggio è "*function free*", allora *Ground*(P) è costituita da un numero finito di formule.

Ad esempio, se P è costituito dalle clausole:

$$r(a, b), r(b, c), r(X, X), r(X, Y) \rightarrow r(Y, X),$$

allora:

- *Fatt*(P) = $\{r(a, b), r(b, c), r(a, a,), r(b, b), r(c, c)\}$;
- *Reg*(P) = $\{r(a, a) \rightarrow r(a, a), r(a, b) \rightarrow r(b, a), r(a, c) \rightarrow r(c, a), r(b, a) \rightarrow r(a, b), r(b, b) \rightarrow r(b, b), r(b, c) \rightarrow r(c, b), r(c, a) \rightarrow r(a, c), r(c, b) \rightarrow r(b,c), r(c, c) \rightarrow r(c, c)\}$.

Teorema 5.1. L'insieme *Ground*(P) rappresenta una teoria equivalente alla teoria P nel senso che un fatto è deducibile da P se e solo se è deducibile da *Ground*(P).

Poiché in *Ground*(P) non ci sono variabili libere, in un certo senso questo teorema riduce al calcolo proposizionale il compito di effettuare le dimostrazioni.

L'insieme dei fatti che si possono dimostrare a partire da un programma positivo può essere ottenuto al modo seguente.

Definizione 5.2. Dato un programma positivo P, si definisce l'operatore T: $P(B_P) \rightarrow P(B_P)$ ponendo, per ogni sottoinsieme X di B_P,

$$T(X) = X \cup Fatt(P) \cup \{ \alpha : \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in Reg(P),\ \alpha_1 \in X, ..., \alpha_n \in X\}$$

Il significato dell'operatore T è che se ad un certo passo del processo inferenziale è stato dimostrato un insieme X di fatti, al passo successivo è possibile dimostrare l'insieme $T(X)$ di fatti. Da notare che $T(\emptyset)$ è l'insieme dei fatti che sono presenti esplicitamente nel programma.

Ad esempio, sia:

$P = \{r(a, b), r(c, d), r(x, y) \rightarrow s(x, y), r(y, x) \rightarrow s(x, y)\}$, allora:

$T(\emptyset) = Fatt(P) = \{r(a, b), r(c, d)\}$;

$T(T(\emptyset)) = T^2(\emptyset) = \{r(a, b), r(c, d)\} \cup \{s(a, b), s(c, d), s(b, a), s(d, c)\}$;

$T^3(\emptyset) = T^2(\emptyset)$.

Pertanto:

$$T^2(\emptyset) = \{r(a, b), r(c, d)\} \cup \{s(a, b), s(c, d), s(b, a), s(d, c)\}$$

è l'insieme dei fatti che si possono provare a partire dal programma P. In questo caso il processo termina.

Tuttavia, non sempre il processo termina dopo un numero finito di passi. Se, ad esempio, si considera un linguaggio con una costante a, un simbolo per una funzione s ed un nome di predicato "*dispari*" e si considera il programma:

$$P = \{dispari(a);\ dispari(X) \rightarrow dispari(s(s(X)))\},$$

allora:

$T(\emptyset) = \{dispari(a)\}$

$T^2(\emptyset) = \{dispari(a)\} \cup \{dispari(s(s(a)))\}$

$T^3(\emptyset) = \{dispari(a), dispari(s(s(a)))\} \cup \{dispari(s(s(s(s(a)))))\}$

...

In tale esempio tutti i $T^n(\emptyset)$ sono diversi tra loro e l'insieme dei fatti dimostrabili coincide con l'insieme dei fatti del tipo $dispari(s(...s(a)))$, dove s compare un numero pari di volte.

Questo modo di procedere è giustificato dal seguente teorema di cui si omette la dimostrazione.

Teorema 5.3. Dato un programma positivo P ed un fatto α, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) α è conseguenza logica di P;

b) α è deducibile da P tramite il sistema esposto all'inizio del paragrafo;

c) $\alpha \in \cup_{n\in N} T^n(\emptyset)$.

2.6 IL METODO DI RISOLUZIONE

Il metodo esposto nel paragrafo precedente oltre a limitarsi solo alla produzione di fatti è di difficile applicazione nel caso in cui il numero dei fatti coinvolti sia grande. Un metodo più efficiente e più diffuso è quello di *risoluzione*, che è un tipo di *dimostrazione per confutazione*. Prima di esporre tale metodo si premettono alcune considerazioni di carattere euristico.

2.6.1 UNA DESCRIZIONE EURISTICA

Si consideri, ad esempio, il programma costituito dai seguenti assiomi:

Regola 1	$A \leftarrow P \wedge D$
Regola 2	$A \leftarrow C \wedge D$
Regola 3	$C \leftarrow S \wedge T$
Regola 4	$D \leftarrow R \wedge T$
Regola (o fatto) 5	$R \leftarrow$
Regola (o fatto) 6	$T \leftarrow$
Regola (o fatto) 7	$S \leftarrow$

Volendo tentare una dimostrazione di A, si osserva che la prima regola permetterebbe di provare A se fossimo in grado di provare P e D. Tuttavia, poiché P non è né un assioma né la testa di una regola, questa strada non è percorribile. Si può, allora, tentare con la regola 2, che suggerisce che il problema può essere ricondotto al dover provare C e D. Per provare C la terza regola suggerisce di provare S e T e quindi rimangono da provare S, T, D.

Si passa, allora, ad esempio a provare D e quindi, per la regola 4, R e T.
In definitiva, si devono provare S, T, R, T, cioè S, T, R. Ma queste formule sono assiomi della teoria e quindi, risalendo indietro, è possibile affermare che A è dimostrato. Naturalmente se, ad esempio, S non fosse presente tra gli assiomi, allora questo tentativo di dimostrazione, partito dalla regola 2, sarebbe fallito. Tuttavia, niente esclude l'esistenza di una ulteriore regola avente come testa A e quindi la possibilità di un ulteriore tentativo di dimostrazione di A e così via.

Da notare che, in questo modo, si è partiti dalla cosa da dimostrare e, con un percorso "all'indietro", si sono ricercate le condizioni per il successo della dimostrazione. Questa è la forma di ragionamento che viene spontaneo a tutti di adottare. Tuttavia, esiste l'esigenza di trasformare tale modo di procedere in una forma che sia implementabile e che faccia emergere il nucleo logico del procedimento.
Per quanto riguarda l'implementazione, ci si accorge che dal punto di vista algoritmico quello che si è fatto è solo una semplice successione di sostituzioni in una stringa che inizialmente inizia con la parola A e che procede tramite una serie di sostituzioni, ciascuna suggerita da una regola. L'algoritmo termina con successo quando si perviene ad una parola contenente formule atomiche che risultano essere tutte assiomi. Se questo non avviene si deve partire applicando regole diverse. Se, dopo avere esplorato tutte le possibilità, tutti i tentativi falliscono, allora si può concludere che il goal non è raggiungibile, cioè che il fatto che interessa non può essere dimostrato. L'esempio sopra analizzato si può sintetizzare nei seguenti passi:

A
CD
STD
STRT
STR
ST
S
□ (parola vuota)

Negli ultimi passi è stata utilizzata una regola di cancellazione per gli assiomi che permette di pervenire alla parola vuota "□". Se non si vuole introdurre tale regola ma procedere in maniera più uniforme, allora si può riscrivere ciascun assioma atomico *X* presente nel programma nella forma:

$X \leftarrow □$ (o, più semplicemente $X \leftarrow$)

e poi considerare □ come elemento neutro di un opportuno monoide.

Queste osservazioni mettono in rilievo come il paradigma della programmazione logica sia molto simile a quello del problem-solving, in quanto il raggiungimento del "goal" avviene tramite una scelta libera di regole di riscrittura all'interno di regole prefissate.

Si deve osservare, comunque, che la sequenza sopra indicata non può essere considerata direttamente come una dimostrazione in quanto non parte dagli assiomi per andare verso la cosa da dimostrare. Tuttavia, è possibile una rilettura di tale sequenza in termini di dimostrazione per assurdo. Infatti, non è difficile riscriverla in questi termini purché ci si ricordi che le implicazioni utilizzate sono in realtà disgiunzioni di letterali e purché si adotti una sorta di regola di cancellazione del tipo:

$$\frac{X \vee Z_1,\ \neg X \vee Z_2}{Z_1 \vee Z_2}$$

È possibile, allora, reinterpretare l'esempio precedente al modo seguente:[15]

A	Supponiamo per assurdo $\neg$A
CD	allora, data la regola 2: A $\vee$ ($\neg$C $\vee$ $\neg$D)
	si perviene a $\neg$C $\vee$ $\neg$D
STD	d'altra parte, data la regola 3: C $\vee$ ($\neg$S $\vee$ $\neg$T)
	è lecito affermare $\neg$D $\vee$ ($\neg$S $\vee$ $\neg$T)
STRT	da cui data la regola 4: D $\vee$ ($\neg$R $\vee$ $\neg$T) è possibile
	affermare $\neg$S $\vee$ $\neg$T $\vee$ $\neg$R $\vee$ $\neg$T e quindi :
	$\neg$S $\vee$ $\neg$T $\vee$ $\neg$R.

A questo punto, utilizzando il fatto che S, T, R sono assiomi, si perviene ad un assurdo. La conclusione è, dunque, che A è un teorema.

[15] Si dà per scontata la proprietà associativa e quella commutativa della disgiunzione.

Ovviamente, fino ad ora si è trascurata la presenza delle variabili e si è trattato la questione come appartenente al calcolo proposizionale. Tuttavia, il teorema 5.3. del paragrafo precedente mostra che questo non è riduttivo se ci si limita al voler provare fatti e non formule con variabili.
L'attività di sperimentazione svolta si attiene a questa scelta.

2.6.2 DESCRIZIONE FORMALE

Il metodo di risoluzione si basa sulle nozioni di *sostituzione* e *unificazione*.[16] Per una sua descrizione formale si premettono, allora, le seguenti definizioni.

Definizione 6.2.1. Una *sostituzione* σ è una funzione tra un insieme finito di variabili in un insieme di termini. Se $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è l'insieme delle variabili, si pone $\sigma(x_i) = t_i$ e quindi la sostituzione si può rappresentare con la scrittura:

$$\sigma = [x_1 / t_1, \dots, x_n / t_n].$$

Una sostituzione corrisponde all'idea che si può sostituire a tutte le occorrenze di una variabile un termine in modo uniforme.

Definizione 6.2.2. Data una sostituzione $\sigma = [x_1 / t_1, \dots, x_n / t_n]$,

- se $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono tutte variabili, allora σ è detta *sostituzione di variabili*;
- se $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono tutte variabili distinte, allora la sostituzione è detta *rinomina*;
- se σ è una *rinomina* tale che $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, allora σ è detta *permutazione di variabili*;
- se $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono tutti termini *ground* (chiusi), allora σ è detta *sostituzione ground*.[17]

[16] Nei linguaggi in cui non esistono nomi di funzioni, come quello adottato nella sperimentazione, tutte le definizioni che saranno date nel seguito risultano estremamente semplificate.
[17] È evidente che se a una variabile se ne sostituisce un'altra si hanno più possibilità di andare avanti con le sostituzioni.

Definizione 6.2.3. Sia $\sigma = [x_1 / t_1, \ldots, x_n / t_n]$ una sostituzione e t un termine. L'*applicazione* di σ a t è l'espressione ottenuta da t sostituendo simultaneamente ogni occorrenza della variabile x_i ($i = 1, \ldots, n$) con il termine t_i. Il risultato dell'applicazione, denotato con $\sigma(t)$ o $t\sigma$ è detto *istanza* di t. Se la sostituzione è ground, allora il termine diviene chiuso.

Definizione 6.2.4. Date due sostituzioni σ e τ, si definisce la loro *composizione*, indicata con $\sigma\tau$, come la sostituzione tale che $\sigma\tau(t) = \tau(\sigma(t))$.

Poiché la stessa istanza può essere ottenuta anche applicando differenti sostituzioni, ci si può chiedere se tra tutte le possibili sostituzioni ve ne sia una "preferibile" alle altre. Con la seguente definizione si vede che è possibile introdurre una nozione di ordine tra le sostituzioni.

Definizione 6.2.5. Date due sostituzioni σ e τ, si dice che σ è *più generale* di τ, e si scrive $\sigma \leq \tau$, se esiste una sostituzione η tale che $\tau = \sigma\eta$.[18]

Si osserva che la relazione $\leq$ è riflessiva, transitiva ma non antisimmetrica. Quindi non è una relazione d'ordine parziale ma semplicemente una relazione di *pre-ordine*.

La scelta della sostituzione più generale è fatta con lo scopo di avere risultati il più generale possibile, cioè con la maggiore informazione possibile. Una diversa scelta fornirebbe comunque risultati corretti. Ricorrendo a tale relazione, è possibile introdurre la nozione di *unificatore.*

Definizione 6.2.6. Dati due termini s e t, una sostituzione σ si dice *unificatore* di s e t se: $s\sigma = \sigma(t)$. In tal caso i termini s e t sono detti *unificabili*.

[18] Si osservi che nella sperimentazione effettuata, non essendoci nomi di funzione, σ è più generale di θ se θ si ottiene sostituendo a qualche variabile una costante.

L'unificatore σ di s e t si dice *unificatore più generale* (*most general unifier, m.g.u.*) se per ogni unificatore θ di s e t vale che $\sigma \leq \theta$.

Ad esempio, siano $f(g(x, a), z)$ e $f(y, b)$ due termini, la sostituzione $[y/g(c, a); x/c; z/b]$ è un loro unificatore. Un altro unificatore dei due termini è rappresentato dalla sostituzione $[y/g(h(w), a); x/h(w), z/b]$. Tali unificatori sono confrontabili rispetto alla relazione di $\leq$ e l'unificatore più generale risulta essere la prima sostituzione.

Dalla definizione precedente si nota che la condizione per la quale due termini si considerano unificabili è prettamente sintattica.

Si introduce ora il concetto di sistema di equazioni.

Definizione 6.2.7. $C \equiv (s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n)$, dove ogni s_i e t_i è un termine, si dice sistema di equazioni. Se σ è una sostituzione, allora:

- σ è unificatore di C se per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha che $s_i\sigma \equiv t_i\sigma$.
- σ è m.g.u. di C se σ è unificatore di C e per ogni unificatore θ di C si ha che $\sigma \leq \theta$.

Definizione 6.2.8. Date due formule atomiche α_1, α_2, una sostituzione σ si dice *unificatore* di α_1 e α_2, se:

- α_1 e α_2 hanno lo stesso simbolo predicativo e la stessa arità, ovvero $\alpha_1 = p(s_1, \ldots, s_n)$ e $\alpha_2 = p(t_1, \ldots, t_n)$, con s_i e t_i termini per ogni i;
- la sostituzione σ è unificatore del sistema di equazioni $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$.

Nel caso in cui σ sia anche l'unificatore più generale, si scrive $\sigma = m.g.u.(\alpha_1, \alpha_2)$.

Esistono vari tipi di algoritmi di unificazione che, dato un insieme di termini C, calcolano un unificatore più generale per C, oppure rivelano la sua non unificabilità.

A questo punto si hanno gli strumenti per esporre un metodo molto potente di dimostrazione, utilizzato nella programmazione logica: il *metodo di* *risoluzione*. Si tratta di un metodo efficiente, la cui astuzia principale sta nell'unificazione dei termini. Alla base di tale metodo vi è una sola regola d'inferenza: il *principio di risoluzione*.

Un algoritmo di risoluzione utilizzato nella programmazione logica è la *SLD–risoluzione* (risoluzione *Lineare* con funzione di *Selezione*[19] per clausole *Definite*). Esso parte da un insieme di clausole definite (il programma) e da un'unica clausola negativa (il goal).

Per rispondere al goal, l'algoritmo procede costruendo (o cercando di farlo) una successione di passi di inferenza, ovvero una successione di trasformazioni del goal fornito. Tale processo continua fino a che non sia più possibile effettuare alcuna trasformazione.

Ogni passo avviene:

1. selezionando uno dei letterali del goal;
2. scegliendo opportunamente una delle clausole del programma;
3. combinando i letterali del goal e quelli della clausola per ottenere un nuovo goal.

Tale processo può terminare solo se al punto 1 non ci sono letterali selezionabili (cioè se il goal è vuoto); oppure se al punto 2 nessuna delle clausole del programma permette di effettuare il passo 3.

Una volta selezionato il letterale del goal attuale, una clausola si ritiene adeguata se la sua testa unifica con questo letterale, tramite l'unificatore più generale. Il nuovo goal viene ottenuto dal goal attuale sostituendo al posto del letterale selezionato il corpo della clausola scelta, ed istanziando tramite l'unificatore più generale la congiunzione così ottenuta.

Quando il goal non contiene ulteriori formule atomiche selezionabili, dalle sostituzioni impiegate nella derivazione, si ottiene una risposta al goal. Se invece, pur essendoci formule atomiche nel goal attuale, non ci sono clausole utilizzabili per effettuare ulteriori passi di inferenza l'algoritmo fallisce nella ricerca di soluzioni.

[19] Nel senso che si deve selezionare a quale letterale del goal applicare la risoluzione.

Questa forma di ragionamento, in cui a partire dal goal si procede "all'indietro", è detta *backward chaining*.
In particolare, l'interprete Prolog, nel rispondere ad un goal, seleziona sempre l'atomo più a sinistra, mentre al punto 2, per la ricerca di una clausola "adeguata", procede seguendo l'ordine in cui le clausole sono elencate nel programma, dall'alto verso il basso.

Di seguito si dà una definizione formale del passo di inferenza di SLD-derivazione.

Definizione 6.2.9. Sia $G \equiv \leftarrow (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_h)$ un goal in cui occorre il letterale α_i, $C \equiv \beta \leftarrow (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k)$ una clausola applicabile ad α_i e sia $\sigma = m.g.u.\ (\alpha_i, \beta)$, il goal:

$$G' \equiv \leftarrow (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \wedge \alpha_{i+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_h)\sigma$$

è detto SLD-risolvente di G e C.

In maniera sintetica, il passo d'inferenza si può rappresentare utilizzando la notazione $G \overset{\sigma}{\Rightarrow}_C G'$, con G' goal ottenuto a partire dal goal G, utilizzando la clausola C e la sostituzione σ.

Definizione 6.2.10. Una SLD-*derivazione* per un programma P e un goal G è una sequenza *massimale* di passi di derivazione: $G \overset{\sigma_1}{\Rightarrow}_{c_1} G_1 \overset{\sigma_2}{\Rightarrow}_{c_2} G_2 \overset{\sigma_3}{\Rightarrow}_{c_3} \ldots$ che può essere finita o infinita, tale che:

- $G_1, G_2, G_3, \ldots$ sono goal;
- $\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\sigma_3}, \ldots$ sono sostituzioni;
- $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sono le clausole scelte dal programma;
- $\boldsymbol{G_i} \overset{\boldsymbol{\sigma_{i+1}}}{\Longrightarrow}_{\boldsymbol{c_{i+1}}} \boldsymbol{G_{i+1}}$ è un passo SLD-derivazione.

Dove per "massimale" si intende che qualora esista almeno una clausola in P che sia applicabile all'atomo correntemente selezionato, l'unificazione deve essere operata e il passo di SLD-derivazione eseguito.

Definizione 6.2.11. Il numero di passi che compongono una SLD-derivazione è detto *lunghezza*[20] della SLD-derivazione, pertanto essa può essere finita o infinita.

Si osservi che, per il requisito di massimalità, se una SLD-derivazione ha lunghezza finita *n*, allora vale una delle seguenti proprietà:

- G_n è il goal vuoto;

oppure:

- per ogni atomo di G_n non esistono clausole di *P* applicabili.

In realtà, anche se da un punto di vista formale arrivare al goal vuoto equivale al successo della dimostrazione per assurdo, di fatto appare più intuitivo dire che il successo si raggiunge quando si giunge ad una formula atomica unificabile con una formula atomica presente nel programma[21]. Infatti, l'unico modo con cui si può presentare il goal vuoto è che nel passo precedente ci sia una formula di tale tipo.

Definizione 6.2.12. Una SLD-derivazione finita: $G \overset{\sigma_1}{\Rightarrow}_{c_1} G_1 \overset{\sigma_2}{\Rightarrow}_{c_2} G_2 \overset{\sigma_3}{\Rightarrow}_{c_3} \dots \overset{\sigma_n}{\Rightarrow}_{c_n} G_n$ si dice di *successo* se G_n è il goal vuoto, altrimenti si dice derivazione di *fallimento.*

Il seguente esempio mostra un'applicazione dell'algoritmo di SLD-derivazione. Si consideri il programma positivo definito dagli assiomi: [22]

1) padre(antonio, bruno) ←
2) padre(antonio, carlo) ←
3) padre(bruno, davide) ←
4) padre(bruno, ettore) ←

[20] Un tipo di misura delle difficoltà che si presentano nella scoperta di una derivazione per un determinato fatto (nei contesti scolastici cui ci si vuole riferire nelle sperimentazioni descritte al capitolo successivo) potrebbe essere la minima lunghezza tra le possibili derivazioni di tale fatto.

[21] Su questo principio si basa l'attività di deduzione di informazioni, tramite la costruzione delle relative catene deduttive, effettuata durante la sperimentazione descritta nel capitolo successivo.

[22] Scritto utilizzando una sintassi ispirata al Prolog.

5) nonno(x, y) ← padre(x, z) ∧ padre(z, y).

Le prime 4 regole (o meglio fatti) traducono le informazioni: "Antonio è il padre di Bruno e Carlo. Bruno è il padre di Davide e Ettore", la regola 5 traduce la relazione di parentela "essere nonno".

Relativamente alla domanda "Antonio è il nonno di Davide?", che si traduce nel goal: ← nonno(antonio, davide), l'algoritmo di risoluzione procede al modo seguente:

- utilizzando la regola 5 e la sostituzione $\sigma_1 = [x/\text{antonio},\ y/\text{davide}]$, si ottiene il nuovo goal:

  ← padre(antonio, z) ∧ padre(z, davide);

- da questo goal, sfruttando la sostituzione $\sigma_2 = [z/\ \text{bruno}]$ si ottiene il nuovo goal:

  ← padre(antonio, bruno) ∧ padre(bruno, davide)

A questo punto si osserva che quest'ultimo goal ottenuto è composto da due fatti: "padre(antonio, bruno)" e "padre(bruno, davide)", che sono rispettivamente gli assiomi 1 e 3 del programma. Entrambi i fatti, dunque, si possono "cancellare" e si ottiene il goal vuoto "□ ←", che indica che la derivazione è finita ed è di successo.

2.7 MODELLI DI HERBRAND: MONDI COSTRUITI CON PAROLE

Per i programmi positivi non solo l'apparato inferenziale è particolarmente semplice ma anche la costruzione di modelli non presenta eccessive difficoltà.[23] Per fare questo viene utilizzata una delle idee principali della logica matematica, ovvero che: *è possibile costruire modelli di una teoria a partire dal linguaggio stesso in cui è espressa la teoria.*

Tale idea è in accordo con il punto di vista secondo cui la matematica è un sistema costituito da segni e da regole che permettono di manipolare tali segni.

[23] Si pensa di utilizzare questa caratteristica positiva della programmazione logica per future sperimentazioni. Qui ci limitiamo ad esporre teoricamente come questo possa essere fatto.

In particolare, per costruire un modello si assume che: *si possa considerare come dominio di interpretazione l'insieme dei "nomi che si possono formulare nel linguaggio $\mathcal{L}$".*

Con la parola "nome" si intende un'espressione linguistica che determina univocamente un elemento del dominio di interpretazione. Pertanto, i nomi sono sia le costanti (in un certo senso i nomi propri) sia i termini chiusi.

Definizione 7.1. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine contenente almeno una costante, si dice *universo di Herbrand* l'insieme $U_{\mathcal{L}}$ di tutti i termini chiusi di $\mathcal{L}$.

Ad esempio:

- se nel linguaggio si ha una costante "1" ed un nome di operazione "+", allora l'universo di Herbrand sarà costituito dai termini chiusi: 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, 1 + (1 + 1), ...
- se nel linguaggio è presente anche la costante "0", allora l'universo di Herbrand sarà costituito dai termini del tipo: 0, 1, 1 + 1, 0 + 1, 1 + 0, (1 + 1) + 1, 1 + (1 + 1), ...
- se nel linguaggio è presente solo il simbolo "≤", allora non esistono termini e l'universo di Herbrand è vuoto;
- se il linguaggio contiene solo i nomi *"Maria"* e *"Carlo"* allora l'universo di Herbrand si riduce all'insieme {*Maria*, *Carlo*};
- se oltre i due nomi *"Maria"* e *"Carlo* si introduce anche il nome di funzione *padre_di*, allora l'universo di Herbrand sarà costituito dagli infiniti termini:
  Maria, *Carlo*,
  padre_di(*Maria*), *padre_di*(*Carlo*),
  padre_di(*padre_di*(*Maria*)), *padre_di*(*padre_di*(*Carlo*)),
  …

Proposizione 7.2. Se nel linguaggio $\mathcal{L}$ non vi sono nomi di funzioni, l'universo di Herbrand, $U_\mathcal{L}$, coincide con l'insieme delle costanti ed è quindi, in generale, finito. Se, invece, vi è il nome di almeno una funzione allora $U_\mathcal{L}$ è infinito.

Dim. La prima parte è ovvia. Supponiamo che esista un nome di operazione n-aria f e sia c una costante del linguaggio, allora posto:

$$t_1 = f(c, ..., c),\ t_2 = f(t_1, ..., t_1),\ t_3 = f(t_2, ..., t_2),\ ...$$

si ottiene una successione infinita di termini chiusi e quindi di elementi di $U_\mathcal{L}$.

Ad esempio:

- se $\mathcal{L}$ è un linguaggio contenente solo le costanti a ed b, allora $U_\mathcal{L}$ corrisponde all'insieme finito $\{a, b\}$;
- se in $\mathcal{L}$, oltre alle costanti a ed b, vi è anche un solo nome di funzione unaria f, allora:
  $U_\mathcal{L} = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$;
- se in $\mathcal{L}$, al posto di f vi è il nome di una operazione binaria "+", allora:
  $U_\mathcal{L} = \{a, b, a + a, b + b, a + b, (a + a) + a, (b + b) + b, (a + b) + a, ...\}$.

Definizione 7.3. Una interpretazione (D, I) di $\mathcal{L}$ viene detta *interpretazione di Herbrand* o *modello di Herbrand* (in breve *H-interpretazione* o *H-modello*) se:

a. il dominio D è l'universo di Herbrand di $\mathcal{L}$, cioè $D = U_\mathcal{L}$;
b. ogni costante viene interpretata con se stessa: $I(c) = c$;
c. ogni nome di funzione n-aria h viene interpretata come la funzione che associa ai termini chiusi $t_1, ..., t_n$ il termine chiuso $h(t_1, ..., t_n)$, ovvero: $I(h)(t_1, ..., t_n) = h(t_1, ..., t_n)$.

Da notare che due differenti H-interpretazioni di un dato linguaggio differiscono solo per le interpretazioni dei predicati.

Se si suppone che un linguaggio $\mathcal{L}$ contenga i nomi propri (cioè le costanti) *maria*, *mario*, *luigi*, *carlo*, ed il predicato binario *Amico*(x, y), da interpretare con la relazione di amicizia, allora, usualmente, una interpretazione di tale linguaggio si ottiene, ad esempio, considerando un insieme D di persone, associando alle costanti *maria*, *mario*, *luigi* e *carlo* delle particolari persone in D ed interpretando *Amico* come una particolare relazione binaria $I(Amico) \subseteq D \times D$, che esprime la relazione di amicizia.

Naturalmente, niente esclude che, oltre le quattro persone che in D sono denotate con particolari nomi, ci siano anche molte altre persone. Si è interessati, però, ad interpretazioni che siano le più piccole possibili e quindi in cui D abbia solo quattro elementi che permettano di interpretare i quattro nomi di persona utilizzati. Ma, se si vuole questo, tanto vale identificare questi quattro elementi con quattro foglietti con i nomi degli elementi o, addirittura, con i quattro nomi di persona coinvolti.

Si pone, allora, $D = \{maria, mario, luigi, carlo\}$, cioè D uguale all'universo di Herbrand $U_{\mathcal{L}}$.

Una interpretazione si ottiene assegnando al predicato *Amico* un insieme di coppie, cioè un elemento di $P(D \times D)$.

Ad esempio, si può mettere: $I(Amico) = \{(mario, carlo), (carlo, luigi), (luigi, carlo)\}$.

Poiché $D \times D$ ha cardinalità 16, $P(D \times D)$ ha cardinalità 2^{16} = 655336. Questo significa che esistono 655336 H-interpretazioni possibili di $\mathcal{L}$.

Se si aggiunge al precedente linguaggio il nome di funzione *padre_di*, che si interpreta come la funzione che associa ad ogni persona il relativo padre, allora l'universo di Herbrand diventa subito infinito poiché sarà costituito da:

$U_{\mathcal{L}} = \{maria, mario, luigi, carlo, padre\_di(maria), padre\_di(mario),$
$padre\_di(luigi), padre\_di(carlo), padre\_di(padre\_di(maria)),$
$padre\_di(padre\_di(mario)), ...\}$.

Ancora una volta si ottiene una interpretazione di Herbrand associando ad *Amico* un opportuno insieme di coppie, cioè un opportuno sottoinsieme $U_{\mathcal{L}} \times U_{\mathcal{L}}$.

Ne segue che esistono tante interpretazioni diverse quanti sono gli elementi di $P(U_{\mathcal{L}} \times U_{\mathcal{L}})$.

In definitiva, essendo $U_{\mathcal{L}}$ un insieme numerabile, l'insieme delle possibili interpretazioni di Herbrand ha la potenza del continuo.

2.7.1 UN TEOREMA DI PUNTO FISSO PER COSTRUIRE MODELLI

Due differenti *H*-interpretazioni di uno stesso linguaggio differiscono solo per il modo in cui sono stati interpretati i predicati. Ciò può essere utilizzato per definire in modo semplice un *H*-modello.

La seguente proposizione mostra che è possibile associare ad ogni insieme di fatti S una interpretazione di Herbrand I_S definita dal porre, per ogni nome di relazione n-aria r,

$$I_S(r) = \{(t_1, ..., t_n) : r(t_1, ..., t_n) \in S\}.$$

Tale interpretazione può essere vista come la più piccola *H*-interpretazione in cui tutti i fatti in S risultano veri.

È possibile anche procedere in modo inverso, associando ad ogni *H*-interpretazione I il sottoinsieme S_I di $B_£$ costituito dai fatti che sono veri in I:

$$S_I = \{r(t_1, ..., t_n) \in B_£ : I \vDash r(t_1, ..., t_n)\}.$$

Proposizione 7.1.1. La corrispondenza che associa ad ogni *H*-interpretazione I il sottoinsieme S_I di $B_£$ è biiettiva e la sua inversa è l'applicazione che associa ad ogni sottoinsieme S di $B_£$ l'*H*-interpretazione I_S.

Dim. Se I e I' sono due diverse *H*-interpretazioni, allora esiste r tale che $I(r) \neq I'(r)$ e quindi esistono $t_1, ..., t_n$ in $U_£$ tali che, ad esempio, $t_1, ..., t_n$ sono nella relazione $I(r)$ ma non sono nella relazione $I'(r)$. Ciò comporta che $r(t_1, ..., t_n)$ appartiene ad S_I ma non appartiene a $S_{I'}$ e, quindi, che $S_I \neq S_{I'}$. Il fatto che tale corrispondenza sia suriettiva deriva dal fatto che se S è un sottoinsieme di $B_£$ detta I l'interpretazione definita da: $I_S(r) = \{(t_1, ..., t_n) : r(t_1, ..., t_n) \in S\}$, risulta che $S_I = S$.

La rimanente parte della proposizione è immediata.

Queste due corrispondenze mostrano che: *la classe delle interpretazioni di Herbrand si può identificare con la classe $P(B_£)$ dei sottoinsiemi di $B_£$.*

Ad esempio, sia $\mathcal{L}$ il linguaggio le cui costanti sono a, b, c ed avente un unico predicato binario r. Le H-interpretazioni si ottengono interpretando r come sottoinsieme di $U_{\mathcal{L}} \times U_{\mathcal{L}} = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$.
Se si considera un qualunque sottoinsieme S di $B_{\mathcal{L}}$, ad esempio $S = \{r(a, a), r(c, b), r(b, c)\}$, allora viene definita l'interpretazione I_S per cui $I_S(r) = \{(a, a), (c, b), (b, c)\}$.

Proposizione 7.1.2. Sia S un sottoinsieme di $B_{\mathcal{L}}$ ed α una clausola di programma positivo, allora:

- se α è un fatto, si ha:
  $I_S \vDash \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in S$ (cioè un fatto è vero in un modello di Herbrand se e solo se appartiene a tale modello);
- se α è una regola atomica le cui variabili sono tra $x_1, ..., x_p$, si ha:
  $$I_S \vDash \alpha\ [t_1, ..., t_p] \;\Leftrightarrow\; \alpha(t_1, ..., t_p) \in S$$
  dove $\alpha(t_1, ..., t_p)$ denota il fatto che si ottiene sostituendo ciascun termine chiuso t_i al posto della variabile x_i;
- se α è una regola del tipo $\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \to \gamma$, si ha:
  $I_S \vDash \alpha[t_1, ..., t_p] \;\Leftrightarrow\;$ da $\gamma_1(t_1, ..., t_p) \in S, \ldots, \gamma_n(t_1, ..., t_p) \in S$ segue $\gamma(t_1, ..., t_p) \in S$.

Dim. Se α è il fatto $r(t_1, ..., t_n)$ allora: $I_S \vDash r(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow (t_1, ..., t_n) \in I(r) \Leftrightarrow r(t_1, ..., t_n) \in S$.
Se α è la regola atomica $r(\underline{t}_1, ..., \underline{t}_n)$, le cui variabili libere sono tra $x_1, ..., x_p$, allora $I(\underline{t}_i)(t_1, ..., t_p)$ è il termine $\underline{t}_i(t_1, ..., t_p)$ che si ottiene sostituendo in $\underline{t}_i(x_1, ..., x_p)$ alle variabili $x_1, ..., x_p$ i termini $t_1, ..., t_p$. Pertanto:
$I_S \vDash r(\underline{t}_1, ..., \underline{t}_n)\ [t_1, ..., t_p] \Leftrightarrow (I_S(\underline{t}_1)(t_1, ...,t_p), ..., I_S(\underline{t}_n)(t_1, ..., t_p)) \in I_S(r) \Leftrightarrow (\underline{t}_1(t_1, ..., t_p), ..., \underline{t}_n(t_1, ..., t_p)) \in I_S(r) \Leftrightarrow r(\underline{t}_1(t_1, ..., t_p), ..., \underline{t}_n(t_1, ..., t_p)) \in S$.
Se α è una regola del tipo $\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \to \gamma$, le cui variabili libere sono tra $x_1, ..., x_p$, allora:
$I_S \vDash \gamma_1 \wedge .. .\wedge \gamma_n \to \gamma\,[t_1, ..., t_p] \Leftrightarrow I_S \vDash \gamma_1[t_1, ..., t_p], ..., I_S \vDash \gamma_n\,[t_1, ..., t_p]$, implica: $I_S \vDash \gamma[t_1, ..., t_p] \Leftrightarrow$ da $\gamma_1(t_1, ..., t_p) \in S, ..., \gamma_n(t_1, ..., t_p) \in S$ segue $\gamma(t_1, ..., t_p) \in S$.

Dato un operatore T, si chiama *punto fisso* o *punto unito* di T un insieme X tale che $T(X) = X$.
Se P è un programma positivo e T l'operatore definito in (5.2.), allora si può dimostrare che sono punti uniti di T tutti e soli gli H-modelli di P (nel senso che S è punto unito se e solo se I_S è un modello di P). In particolare, da questo segue che ogni programma positivo P è una teoria soddisfacibile ed ammette come modello l'H-modello banale, ovvero l'insieme di tutti i fatti $B_{\mathcal{L}}$.

Definizione 7.1.3. L'H-modello di un programma positivo, che si ottiene come intersezione di tutti gli H-modelli di P, si dice *modello minimo di Herbrand* di P e si denota con M_P.

Si ha che $M_P = \bigcup_{n\in N} T^n(\emptyset)$, dove:

$T^1(\emptyset) = Fatt(P)$

$T^2(\emptyset) = Fatt(P) \cup \{\beta : (\beta_1\wedge...\wedge\beta_n\rightarrow\beta)\in Reg(P), \beta_1\in Fatt(P),...,\beta_n\in Fatt(P)\}$

$T^3(\emptyset) = T^2(\emptyset) \cup\{\beta : (\beta_1\wedge...\wedge\beta_n\rightarrow\beta)\in Reg(P),\ \beta_1\in T^2(\emptyset), ... ,\beta_n\in T^2(\emptyset)\}$

...

$T^{n+1}(\emptyset) = T^n(\emptyset) \cup\{\beta:(\beta_1\wedge...\wedge\beta_n\rightarrow\beta)\in Reg(P), \beta_1\in T^n(\emptyset), ... ,\beta_n\in T^n(\emptyset)\}.$

Se nel linguaggio esistono solo un numero finito di costanti e non esistono nomi di funzioni, essendo la base di Herbrand $B_{\mathcal{L}}$ finita, tale catena di sottoinsiemi di $B_{\mathcal{L}}$ non può crescere indefinitamente. Esisterà, quindi, un elemento massimo che coincide con il modello minimo M_P.
Ad esempio, sia $P = \{r(a, b), r(c, d), r(x, y)\rightarrow s(x, y), r(y, x)\rightarrow s(x, y)\}$, allora $U_{\mathcal{L}} = \{a, b, c, d\}$. Inoltre:

$T(\emptyset) = Fatt(P) = \{r(a, b), r(c, d)\}$;

$T^2(\emptyset) = \{r(a, b), r(c, d)\}\cup\{s(a, b), s(c, d), s(b, a), s(d, c)\}$;

$T^3(\emptyset) = T^2(\emptyset)$.

Pertanto $M_P = T^2(\emptyset)$ o, se si vuole, l'H-modello minimo di P interpreta r come la relazione $I(r) = \{(a, b), (c, d)\}$ ed s come la relazione $I(s) = \{(a, b), (c, d), (b, a), (d, c)\}$.

Ad esempio, sia $\mathcal{L}$ un linguaggio contenete le costanti *a*, *b*, *c*, *d* ed una relazione binaria "*eq*". Inoltre, sia *P* la teoria dell'equivalenza, cioè la teoria i cui assiomi sono:

$$eq(x, x); \quad eq(x, y) \rightarrow eq(y, x); \quad eq(x, z) \wedge eq(z, y) \rightarrow eq(x, y).$$

Tale teoria è un programma positivo e risulta:

$T(\varnothing) = \{eq(a, a), eq(b, b), eq(c, c), eq(d, d)\}$;

$T^2(\varnothing) = T(\varnothing)$,

pertanto l'*H*-modello minimo M_P coincide con $T(\varnothing)$ ed interpreta "*eq*" come identità:

$$I(eq) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

Naturalmente esistono anche altri *H*-modelli di *P*, è sufficiente interpretare *eq* con una qualunque relazione di equivalenza in $\{a, b, c, d\}$. Il più "grosso" ovviamente è quello in cui "*eq*" viene interpretata come la relazione $U_\mathcal{L} \times U_\mathcal{L}$ che sussiste tra due qualunque elementi.

Se si considera un linguaggio con una costante *a*, un simbolo per una funzione *s* ed un nome di predicato "*dispari*" e il programma P = $\{dispari(a), dispari(X) \rightarrow dispari(s(s(X)))\}$, si avrà: $U_\mathcal{L} = \{a, s(a), s(s(a)), ...\}$

$T(\varnothing) = \{dispari(a)\}$

$T^2(\varnothing) = \{dispari(a)\} \cup \{dispari(s(s(a)))\}$

$T^3(\varnothing) = \{dispari(a), dispari(s(s(a)))\} \cup \{dispari(s(s(s(s(a)))))\}$

...

In tale esempio, tutti i $T^n(\varnothing)$ sono diversi tra loro ed il modello minimo di Herbrand coincide con l'insieme dei fatti del tipo $dispari(s(...s(a)))$ dove *s* compare un numero pari di volte.

CAPITOLO 3

LE SPERIMENTAZIONI

INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono descritte e analizzate alcune sperimentazioni fatte, le prime due in scuole primarie e l'ultima in una scuola secondaria di primo grado. L'obiettivo di tali esperimenti è stato quello di esplorare il rapporto tra la manipolazione linguistica e lo sviluppo di abilità logico-deduttive negli allievi. Essi, come si è già detto, sono ispirati al paradigma della programmazione logica che si applica a sistemi di assiomi definiti da formule atomiche chiuse (*fatti*), formule atomiche universali (*regole atomiche*) e implicazioni (*regole*).

Una particolarità della ricerca è stata l'ideazione e la costruzione di un apposito artefatto (tessere di legno magnetizzate) utilizzato dagli allievi in sostituzione dei cartoncini usati nella prima sperimentazione e in precedenti esperienze del gruppo di Salerno. In accordo con le teorie sull'uso degli artefatti nell'insegnamento della matematica, il contributo positivo di tale scelta si è manifestato nella diversa dinamica di interazione che si è creata tra gli studenti. Lo scopo principale degli esperimenti, infatti, è stato quello di far costruire agli allievi, utilizzando tali tessere, delle catene deduttive che consentono di valutare la deducibilità di un fatto dal sistema di assiomi. L'algoritmo suggerito agli allievi per realizzare tali catene è ispirato alla strategia utilizzata dalla programmazione logica, ovvero a partire dal *goal* da provare e, procedendo all'indietro, si prendono in considerazione soltanto le regole e i fatti utili al suo raggiungimento, invece di produrre tutto ciò che risulta deducibile dai fatti a disposizione (procedimento *bottom-up*). Si tratta, quindi, di un procedimento che più si avvicina al tipo di ragionamento che l'uomo fa per arrivare alla soluzione di un problema nel modo più veloce possibile.

Si fa notare, però, che a differenza dei linguaggi di programmazione tipo Prolog, che sono necessariamente deterministi, nella sperimentazione si richiede un procedimento intelligente da parte dello studente che si manifesta con la presenza di momenti di scelta. Infatti, nella realizzazione delle catene deduttive l'astuzia dello studente consiste nello scegliere la regola "migliore" e, all'interno del corpo di questa regola, nello scegliere la formula atomica "migliore".

Come si è già accennato nel capitolo precedente, il linguaggio utilizzato nelle attività sperimentali è puramente relazionale e non utilizza termini, o meglio i termini usati si riducono solo a variabili e costanti. Di conseguenza non sono presenti nomi di funzioni, come d'altra parte anche nei software utilizzati nella programmazione logica sono coinvolte solo funzioni di libreria. Inoltre, per evitare di aumentare la complessità non vengono utilizzate variabili che compaiono nel corpo della regola e non nella testa. In questo modo, in ogni passo del processo inferenziale si ha a che fare con formule atomiche chiuse, cioè con fatti e anche le domande sono solo fatti.

Nel progettare l'attività si è scelto di partire dalla lettura di un apposito testo scritto per arrivare a costruire il relativo "sistema di assiomi", invece di effettuare tale costruzione tramite domande poste agli allievi[24], allo scopo di analizzare un aspetto importante delle ricerche in didattica come la comprensione di un testo. Secondo molti ricercatori, infatti, le difficoltà degli allievi nella risoluzione di un problema sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di comprensione. Per questo motivo la comprensione del testo dovrebbe rappresentare la prima fase del processo risolutivo (si veda ad esempio Zan, 2007).

---

[24] Questo modo di procedere per la costruzione del sistema di assiomi è stato utilizzato in una precedente sperimentazione (si veda Coppola *et al.*, 2010).

3.1 La metodologia

Le attività di sperimentazione svolte hanno coinvolto studenti di ordini scolastici differenti. In particolare, alle prime due, svolte in orario scolastico in presenza degli insegnati di classe, hanno partecipato allievi di scuole primarie, all'altra hanno partecipato allievi di scuola secondaria di primo grado. Quest'ultima è stata svolta in orario extra-scolastico con la presenza di un insegnante tutor della scuola.

In accordo con la prospettiva vygotskiana, secondo cui le capacità di ragionamento aumentano nell'interazione tra pari e con persone più esperte, la maggior parte delle attività sono state organizzate facendo lavorare gli studenti in gruppi cooperativi (Vygotskij, 1992). Il mio ruolo è stato di coordinatore e di supporto ai processi di pensiero durante la risoluzione dei compiti proposti, attraverso la proposta di domande e di spunti di riflessione, cercando di non intervenire troppo nella gestione delle attività e nel processo di risoluzione della situazione problematica.

Le attività sono state progettate in modo da ispirarsi ai cicli didattici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), con l'alternanza di varie fasi: lavoro individuale, lavoro di gruppo con manipolazione dell'artefatto finalizzata a compiti mirati, discussione collettiva da me guidata.

Il corpus dei dati osservativi è stato raccolto tramite video ed audio-registrazioni, note osservative ed elaborati prodotti dagli allievi durante le attività. Tutte le fasi delle attività sono state video-registrate e trascritte.
In particolare, nella fase finale della seconda sperimentazione, al fine di verificare l'effettiva elaborazione cognitiva individuale dell'attività si è fatto ricorso ad interviste narrative.

Sul piano metodologico appare essenziale un esplicito riferimento alla dimensione narrativa come modalità cognitiva attraverso cui i bambini organizzano e attribuiscono senso all'esperienza, interpretando la realtà al fine di rappresentare gli eventi e trasformarli in oggetto di. Le interviste semi-strutturate audio-registrate e trascritte, sono ispirate al resoconto biografico. Per la loro stessa natura non hanno avuto una durata prestabilita (Bruner, 1992).

L'analisi qualitativa del materiale raccolto ha riguardato sia l'analisi di video e registrazioni vocali, al fine di studiare gli scambi sociali ovvero le modalità attraverso cui i partecipanti, in interazione, hanno co-costruito le soluzioni ai compiti loro proposti; sia l'analisi degli elaborati degli allievi prodotti nel lavoro individuale e in quello di gruppo, al fine di analizzare la rappresentazione cognitiva della soluzione dei compiti proposti, elaborata dagli allievi.

3.2 UNA SPERIMENTAZIONE PILOTA

Il mio lavoro di ricerca è partito con lo scopo di approfondire e riflettere su alcuni problemi emersi durante le precedenti attività di sperimentazione del gruppo di ricerca di Salerno al fine di superare le criticità emerse.

Ciascuna attività prevede una prima fase di "formalizzazione della conoscenza" e una seconda fase di elaborazione di strategie dimostrative. La prima fase ha lo scopo di giungere alla costruzione di una teoria del primo ordine, costituita solo da "fatti" e "regole", scritta con il formalismo della logica matematica. Nelle precedenti sperimentazioni tale fase è stata realizzata sia a partire dall'analisi di un testo (come fatto ad esempio in Coppola *et al.*, 2007) dal quale sono state estrapolate le informazioni principali, sia ponendo direttamente agli allievi delle domande per raccogliere informazioni e giungere a una teoria condivisa (come fatto ad esempio in Coppola *et al*., 2010).

La seconda fase, invece, consiste nel porre agli studenti il problema di valutare se una data informazione può essere dedotta oppure no dalla teoria e nell'elaborare insieme strategie dimostrative.

Sulla base delle precedenti esperienze ho realizzato un primo esperimento didattico nell'Istituto comprensivo "Rubino Nicodemi" di Fisciano. All'attività hanno partecipato 15 bambini di una classe terza primaria della fascia d'età di 7/8 anni. Durante il primo intervento ho consegnato a ciascun allievo il seguente testo dal titolo "L'AMICIZIA":

"*In un condominio abitano le famiglie di Luca, Diego, Christian, Daniel, Luisa e Marzia. Come spesso accade, alcuni bambini sono diventati amici* *nel giro di poco tempo. In particolare Luca ha stretto amicizia con Diego. Christian è diventato amico di Daniel e Luisa è diventata amica di Marzia. Alcuni di questi bambini decidono di frequentare dei corsi di sport che si tengono nella palestra del quartiere, come il calcio e la pallavolo. Il calcio dura poche settimane e la pallavolo viene ritenuta uno sport divertente. Luca, che è un po' svogliato, vuole seguire tutti i corsi che siano brevi. Lo stesso vale anche per Christian. Luisa, invece, vuole seguire i corsi divertenti. Inoltre ogni bambino invita il suo amichetto a frequentare il corso con lui. Ogni volta che un bambino frequenta un corso ed invita un altro bambino a seguirlo, allora i due giocano insieme.*"

e un relativo questionario:

"*Rispondi alle seguenti domande e spiega il motivo della tua risposta:*

1) È vero[25] *che Christian è amico di Daniel?*

2) È vero che Luca invita Diego?

3) È vero che Luisa gioca insieme a Marzia a pallavolo?

4) È vero che Daniel è amico di Luca?

5) È vero che Luca e Christian giocano insieme a calcio?

6) È vero che Luca invita Marzia?"

I bambini hanno letto individualmente il testo proposto e hanno risposto alle domande del questionario. Alla fine, ho raccolto le produzioni scritte dei bambini per analizzarne i risultati, senza rivelare loro quali erano le risposte corrette.

A questo punto ho analizzato insieme ai bambini il brano, allo scopo di estrapolare da esso le informazioni significative. Tutte le informazioni selezionate, sia del tipo "fatti" (ad esempio "Luca è amico di Diego"), che "regole" (ad esempio "Luca segue tutti i corsi che sono brevi"), sono state condivise dalla classe e poi scritte dagli stessi allievi alla lavagna (Figura 1). Si è arrivati così alla costruzione di un "sistema di assiomi".

[25] Questa formulazione delle domande si è rivelata poco appropriata, in quanto, in realtà, lo scopo della relativa risposta non consisteva nello stabilire la verità o falsità dell'asserzione ma solo se essa fosse deducibile oppure no dal testo.

Figura 1 – Alcune informazioni del testo

Durante il secondo incontro i bambini sono stati suddivisi in gruppi e a ciascun gruppo è stato consegnato del materiale cartaceo preventivamente preparato (Figura 2):

- un cartoncino su cui erano stati riportati i *Fatti*, scritti alla lavagna dai bambini nell'incontro precedente. In essi, i predicati sono stati scritti in carattere maiuscolo per distinguerli dalle costanti;
- un cartoncino delle *Regole*, individuate dai bambini nell'incontro precedente, scritte nella forma "*Se*… *allora* …". Le variabili sono state rappresentate con delle forme geometriche;
- cartoncini con le frecce.

Figura 2 – Cartoncini consegnati a ciascun gruppo.

Altro materiale (cartoncini dei predicati, lucidi adesivi con sopra scritte le costanti e cartoncini del connettivo "e") è stato collocato in diverse scatole a disposizione degli allievi, secondo le necessità (Figura 3).

Figura 3 – Alcuni cartoncini e lucidi a disposizione degli allievi

Il materiale consegnato a ciascun gruppo e quello messo in comune a tutti i partecipanti è stato utilizzato per realizzare delle catene deduttive allo scopo di rispondere alle stesse domande del questionario, somministrato durante il primo incontro. Ad esempio, per rispondere alla domanda "*È vero che Luisa gioca insieme a Marzia a pallavolo?*" la strategia suggerita agli allievi è la seguente:

- controllare se l'informazione è presente nel cartoncino dei Fatti;

- visto che non lo è, prendere il cartoncino con il predicato "*x gioca insieme* a *y* a *z*"[26] e attaccare sulle forme geometriche (che rappresentano le variabili) rispettivamente i lucidi delle costanti: "Luisa", "Marzia" e "pallavolo";
- controllare il cartoncino delle regole e selezionare quella che interessa: "Se *x invita y* e *x segue z* allora *x gioca insieme* a *y* a *z*";
- selezionare i cartoncini dei predicati "*x invita y*" e "*x segue z*", il cartoncino del connettivo "e" e attaccare sulle variabili i rispettivi lucidi delle costanti;
- controllare se le informazioni così ottenute sono presenti nel cartoncino dei Fatti, altrimenti selezionare le regole che consentono di ottenerle e i relativi cartoncini dei predicati;
- procedendo con questa strategia "all'indietro", se la catena termina con fatti presenti nel sistema di assiomi vuol dire che l'informazione è deducibile dal testo, altrimenti vuol dire che essa non è ricavabile dalle informazioni disponibili.

In questo esempio particolare la catena deduttiva (Figura 4) termina a sinistra con fatti presenti nel sistema di assiomi e, dunque, essa permette di dedurre la nuova informazione: "*Luisa gioca insieme a Marzia a pallavolo*".

Figura 4 – Una catena deduttiva realizzata con i cartoncini

Analizzando il materiale raccolto durante tutto l'intervento sono emerse alcune criticità.

[26] Come si è detto, per indicare le variabili presenti nelle regole, al posto delle lettere *x*, *y*, *z* sono state disegnate delle forme geometriche.

Le risposte al questionario, date dagli allievi in seguito alla sola lettura del testo, hanno evidenziato la loro difficoltà ad individuare informazioni non presenti esplicitamente nel testo, ma deducibili da esso. Ad esempio, alla stessa domanda prima analizzata, "*È vero che Luisa gioca insieme a Marzia a pallavolo?*" molti rispondono: "*No, perché nella lettura non c'è scritto chi gioca a pallavolo*". Inoltre, il più delle volte le risposte riportano delle motivazioni che non sono strettamente ricavabili dal testo oppure che fanno riferimento a esperienze di vita quotidiana. Sempre relativamente alla stessa domanda, una motivazione data è: "*Perché sono amiche e vogliono stare insieme*".

L'attività della fase successiva, durante la quale sono state riproposte le stesse domande del questionario, si è svolta sotto forma di gioco di squadra. Ciascun gruppo ha ricostruito le risposte tramite la realizzazione di catene deduttive con l'uso dei cartoncini, seguendo la strategia suggerita loro. In questo caso, gli allievi si sono attenuti strettamente ai fatti e alle regole in loro possesso, come emerge dalle loro motivazioni alle risposte. Ad esempio, alla domanda "*È vero che Luca invita Diego?*" un gruppo risponde: "*Si è vero, perché abbiamo visto sulle regole e poi abbiamo formulato la frase*". Durante l'attività gli allievi non hanno avuto molta difficoltà ad istanziare le "variabili", distinte per simboli e colori. Qualche difficoltà c'è stata nell'individuare "antecedente" e "conseguente" di una regola e nell'effettuare deduzioni che richiedevano più passi.[27]

Alla fine i bambini concludevano che un'informazione era deducibile se la catena realizzata "all'indietro" finiva con fatti presenti sul cartoncino, altrimenti essa era non-dimostrabile.[28]

[27] Nelle successive sperimentazioni le regole sono state formulate mettendo il conseguente prima dell'antecedente, perché più vicino al linguaggio comune. Inoltre, sono state evitate deduzioni "troppo lunghe".

[28] In questo caso, a causa della poca praticità dei cartoncini, agli allievi non è stato chiesto di giustificare la risposta, ripercorrendo "in avanti" la catena deduttiva costruita allo scopo di validarla. Questa difficoltà è stata superata nelle successive sperimentazioni con l'uso delle tessere magnetizzate.

3.3 L'ARTEFATTO "TESSERE"

L'ideazione di un "nuovo" artefatto, utilizzato nelle attività sperimentali successive a quella "pilota", nasce da alcune esigenze che sono emerse durante tale sperimentazione, in cui si è fatto uso dei cartoncini. A seguito di quest'esperienza, sono emersi, infatti, alcuni limiti nell'uso dell'artefatto "cartoncini". In particolare, essi:

- non sono risultati pratici da manipolare in quanto, non essendo fissati al piano di lavoro, finivano con l'essere spostati involontariamente;
- non potevano essere collocati in verticale per potere rendere facile la comunicazione dei risultati di un gruppo al resto della classe;
- dovevano essere necessariamente preparati dal ricercatore prima dell'esperimento, cosa che limitava l'intervento personale dei bambini;
- non erano riscrivibili e quindi ogni volta che si cambiava il contenuto del testo utilizzato nell'attività era necessario realizzarne dei nuovi.

A partire da queste considerazioni, è stato ideato un nuovo artefatto che consiste di tessere magnetizzate, su ciascuna delle quali, come su piccole lavagne, è possibile scrivere con pennarelli colorati e cancellare. Le tessere sono magnetizzate allo scopo di poterle attaccare a una lavagna magnetica e potere facilmente organizzare la loro disposizione sulla lavagna (Figura 5). Tali tessere sono state realizzate materialmente da un falegname.

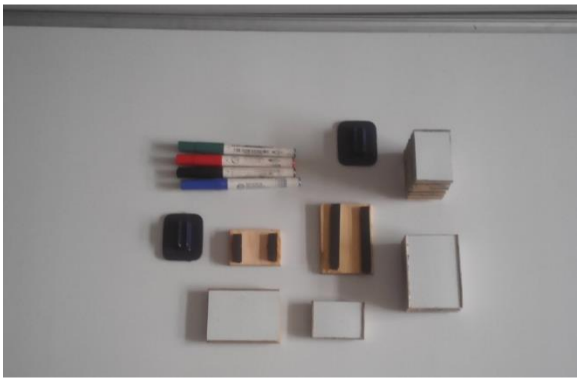


Figura 5 – Tessere e altro materiale

L'utilizzo delle tessere in questo modo ha la potenzialità di realizzare un processo di "oggettificazione" del linguaggio, rendendolo un oggetto concretamente manipolabile. Mediante l'artefatto è semplice, infatti, trasformare la struttura di una asserzione in una sequenza di tessere e i processi deduttivi nella manipolazione concreta delle diverse sequenze ottenute. Infatti, mettendo in sequenza le tessere è possibile costruire delle frasi della logica del primo ordine, realizzando la struttura delle formule logiche.

Nello specifico, una parte delle tessere può essere utilizzata per "scrivere" un sistema di assiomi, esprimente le informazioni contenute in un testo, come una sequenza di tessere applicate ad una lavagna magnetica. Con altre tessere, che diventano strumento di lavoro degli allievi, è possibile costruire delle catene deduttive applicate su lavagne magnetiche.

Rispetto all'uso dei cartoncini, tenuto conto della giovane età degli allievi coinvolti nelle attività di sperimentazione, ci si aspetta che la struttura fisica delle tessere magnetiche (peso, forma, colore, …) abbia un ruolo non secondario nel processo di apprendimento dei bambini.[29]

Una potenzialità non trascurabile dell'artefatto, inoltre, sta nella praticità con cui è possibile muovere le tessere per costituire le frasi. Questo, infatti, consente facilmente di scrivere il "sistema di assiomi" passando a una formalizzazione che usi una notazione prefissa come il Prolog.

3.4 LA SPERIMENTAZIONE CON IL "NUOVO" ARTEFATTO

L'attività di sperimentazione, di seguito descritta, è stata da me svolta presso la scuola primaria "G. Vespucci" dell'Istituto Comprensivo di Forino (AV). Sono stati coinvolti 30 allievi delle due classi terze dell'Istituto della fascia d'età di 7/8 anni, unite insieme per lo svolgimento della specifica attività. L'intera attività è stata da me condotta, a volte nel ruolo di "moderatore", altre volte nel ruolo di "scaffolder" (Bruner *et al.*, 1976).

[29] Una potenzialità delle tessere che si potrebbe esplorare in futuro sarebbe indagare se esse si prestano bene ad essere utilizzate da allievi con difficoltà di apprendimento (o più in particolare di concentrazione), ad esempio nella costruzione delle frasi sia in italiano che in lingua inglese.

Durante tutti gli interventi sono stati sempre presenti, in qualità di osservatori, gli insegnanti, sia di area linguistica che scientifica, delle due classi coinvolte.
L'esperimento è stato articolato nelle seguenti fasi:

- Lettura e comprensione di un testo, tramite un questionario;
- Analisi del testo ed estrazione della conoscenza da esso (in forma scritta e successivamente tramite le tessere);
- Deduzione mediante la manipolazione delle tessere;
- Rinforzo all'attività di estrazione della conoscenza e deduzione con l'artefatto a partire da un nuovo testo;
- Interviste individuali a-posteriori.

Ciascuna di queste fasi è stata video-registrata, cosa che ha permesso di catturare, momento per momento, le attività, consentendo in seguito di studiare e analizzare ogni minimo dettaglio del percorso.

3.4.1 LETTURA E COMPRENSIONE DI UN TESTO

Durante questa prima fase gli allievi hanno lavorato in maniera individuale. È stato fornito loro un breve testo, riguardante una situazione di vita quotidiana e un relativo questionario di comprensione del testo (Figura 6). La consegna consisteva nello stabilire se un'informazione, ovvero ciascuna delle sei domande del questionario proposto, fosse presente o deducibile dalle informazioni contenute nel testo, e nel motivare le risposte date.

LA SCUOLA È COMINCIATA …

È il primo giorno di scuola e, nella classe terza della scuola primaria "Dante Alighieri" di Napoli, la maestra chiede ai suoi alunni di descrivere quali sono i loro interessi. Tra gli altri bambini intervengono: Luca, Carlo e Matteo.
Luca afferma che spesso legge i fumetti e che il suo sport preferito è il calcio. Anche Matteo dichiara di amare il calcio e che si diverte a leggere i racconti di avventura. Carlo afferma di amare il tennis e il calcio, e di leggere con piacere i racconti di fantasia e i fumetti.
In seguito, la maestra chiede ancora ai bambini di esprimere le loro preferenze sui compagni di classe.
Matteo dichiara di trovare simpatici tutti i bambini che amano il tennis. Carlo dice di provare simpatia per tutti i bambini che amano il tennis o leggono i racconti di avventura. Luca, infine, afferma di trovare simpatici tutti i bambini che, come lui, amano il calcio e leggono i fumetti.
Terminata la discussione, su proposta della maestra, ogni bambino fa un regalo ai compagni che gli stanno simpatici.

Rispondi alle seguenti domande e spiega il motivo della tua risposta.
Dalla lettura del testo, puoi dire che:

1) **Matteo legge i racconti di avventura?** SI ☐ NO ☐
2) **Luca trova simpatico Carlo?** SI ☐ NO ☐
3) **Carlo ha 8 anni?** SI ☐ NO ☐
4) **Carlo trova simpatico Luca?** SI ☐ NO ☐
5) **Matteo fa un regalo a Carlo?** SI ☐ NO ☐
6) **Luca fa un regalo a Matteo?** SI ☐ NO ☐

Figura 6 – Testo e questionario somministrati agli allievi[30]

Al termine sono stati raccolti i protocolli degli allievi. Subito dopo è seguita una discussione collettiva in cui sono state poste agli allievi domande stimolo allo scopo di far emergere osservazioni o eventuali difficoltà sul compito da loro svolto.

3.4.2 ANALISI DEL TESTO ED ESTRAZIONE DELLA CONOSCENZA

Al termine della discussione, in maniera collettiva e da me guidata, è stato analizzato il testo allo scopo di estrarre da esso le informazioni principali. A turno gli allievi hanno scritto sulla lavagna, in linguaggio naturale, ciascuna informazione estratta dal testo e condivisa con la classe (Figura 7).
In particolare, dall'analisi della prima parte del testo sono state estrapolate le informazioni del tipo "Luca legge i fumetti", classificate come "fatti".

Dalla seconda parte del testo sono state estratte le informazioni del tipo "Matteo trova simpatici tutti i bambini che amano il tennis", classificate come "regole". Prima di ri-formulare tali regole sotto la forma condizionale "Se …

[30] Rispetto alla formulazione delle domande, solo dopo l'attività, è stata rilevata ancora una criticità. La dicitura "Dalla lettura del testo puoi dire che …", posta in testa al questionario come premessa a tutte le domande, veniva trascurata dagli allievi.

allora …", è stata stimolata una discussione sul significato del termine regola e sul fatto che le regole permettono di ottenere nuove informazioni. Nella formulazione di ciascuna regola gli allievi hanno messo in risalto, evidenziandole, le "variabili" e i connettivi logici.

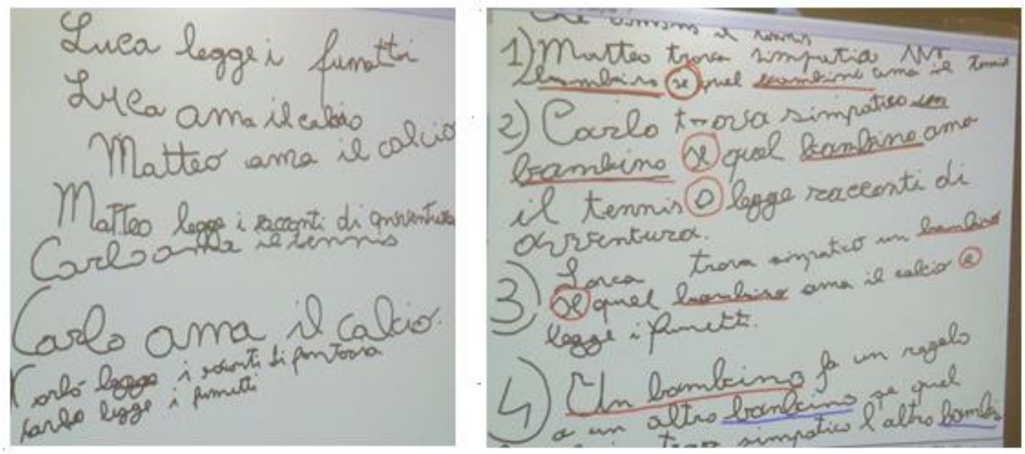


Figura 7 – Fatti e regole scritti in linguaggio quotidiano[31]

Una volta terminata la scrittura in forma sintetica delle informazioni del testo, sono state mostrate agli allievi le tessere magnetiche, spiegando loro che sarebbero state utilizzate allo scopo di riprodurre le informazioni precedentemente scritte alla lavagna.

Gli allievi allora, sotto la mia guida, hanno scritto sulle tessere le componenti di ciascuna frase, utilizzando:

- colori diversi per distinguere le costanti dai predicati;
- tessere di dimensioni più piccole per indicare i connettivi logici e le variabili.

A turno, hanno poi applicato le tessere ad una lavagna magnetica grande, ricostruendo così l'intero sistema di assiomi contenuto nel testo (Figura 8).

[31] La scrittura un po' distorta degli allievi è giustificata dal fatto che essi hanno dovuto scrivere utilizzando la lavagna interattiva, pur non essendo abituati a farlo. Infatti, tutte le attività di sperimentazione sono state svolte in quest'aula "LIM", in quanto era l'unica disponibile nell'Istituto a poter ospitare le due classi unite insieme.

Figura 8 – Fatti e regole riprodotti con l'artefatto

In questa configurazione di tessere si può notare che gli allievi, in accordo con il paradigma della programmazione logica, hanno riprodotto le regole ponendo il conseguente prima dell'antecedente, a differenza di quanto viene fatto in logica formale. Ciò ha reso la visualizzazione del calcolo logico più agevole, in quanto parte del processo è consistito nello scorrere con lo sguardo dall'alto verso il basso il lato sinistro della configurazione.[32]

Inoltre, gli allievi hanno rappresentato le variabili in modo da ricordare il tipo di cose o persone da esse denotate. Infatti, poiché nelle regole si parla di "bambini che cambiano", hanno scelto, a maggioranza, di utilizzare il disegno stilizzato del volto di un bambino (contro un'altra proposta di utilizzare la lettera "B", perché rappresenta l'iniziale della parola "bambino"). Anche in questo caso si è manifestato un "distacco" dalle convenzioni dei logici (e più in

[32] Si fa notare che nella programmazione logica questa facilitazione viene accentuata dall'uso della notazione prefissa per le formule atomiche che situa completamente a sinistra i nomi dei predicati (si veda quanto detto nel paragrafo 2.2). Non esisterebbero grosse difficoltà ad abituare i bambini a questo tipo di notazione, anche grazie alla possibilità di spostare facilmente le tessere, ma per il momento non si è andati verso questa direzione.

generale dei matematici) che utilizzano usualmente lettere come *x*, *y*, *z*,... riferendosi ad oggetti della più diversa natura.

3.4.3 DEDUZIONE CON LE TESSERE

Il lavoro svolto con gli allievi nella fase precedente è servito a creare i presupposti per realizzare l'attività di deduzione mediante la manipolazione delle tessere. Infatti, grazie alla trasposizione delle asserzioni sulle tessere il linguaggio è stato oggettificato ed è diventato uno strumento concretamente manipolabile dagli allievi.

Durante questa fase gli allievi hanno lavorato in gruppi cooperativi composti da 6/7 membri ciascuno. Ad ogni gruppo è stato fornito il seguente materiale:

- tessere magnetiche delle due diverse dimensioni;
- pennarelli colorati per scrivere sulle tessere e cancellini;
- una lavagna magnetica per applicare le tessere.

Ciascun gruppo ha avuto il compito di valutare se un'informazione poteva essere dedotta oppure no dal sistema di assiomi precedentemente costruito sulla lavagna e visibile a tutti.

Le consegne consistevano in domande, equivalenti a quelle del questionario svolto individualmente dagli allievi durante la prima fase, sempre con richiesta di motivazione (Figura 9). Questa volta è stata somministrata una domanda per volta e domande diverse per ciascun gruppo, per fare in modo che durante l'attività i vari gruppi non si potessero influenzare tra loro.

Gruppo: _______________ Componenti: __________________________

____

Rispondete alla seguente domanda e spiegate come avete fatto per ottenere la risposta.

Dai fatti e dalle regole segue che:

Matteo trova simpatico Carlo? SI ☐ NO ☐

Figura 9 – Esempio di domanda somministrata ai gruppi

Per valutare la deducibilità di un'informazione dal sistema di assiomi, ovvero realizzare la fase di ricerca della dimostrazione, è stato chiesto agli allievi di costruire con le tessere una catena deduttiva. Anche questa volta, l'algoritmo suggerito agli allievi per realizzare tali catene è ispirato alla strategia utilizzata dal linguaggio *Prolog*: tramite un procedimento *backward* o *goal-oriented*, parte dal *goal* e, procedendo all'indietro, prende in considerazione soltanto le regole e i fatti utili al suo raggiungimento.[33]
Gli allievi, pertanto, hanno tradotto tale procedimento in una successione di configurazioni di tessere applicate sulla loro lavagna (Figura 10).

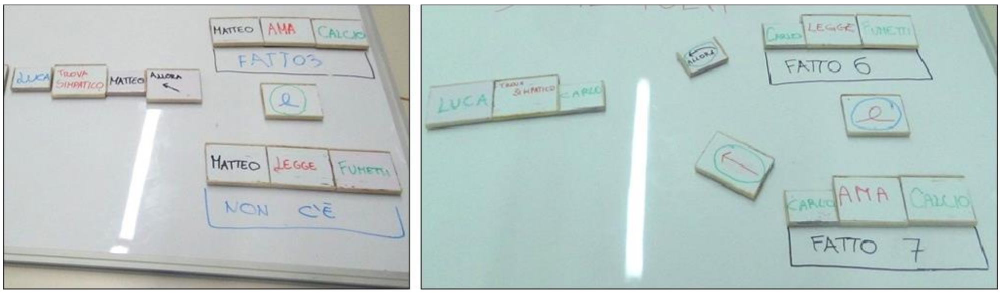


Figura 10 – Esempi di catene deduttive realizzate dai gruppi

Una volta "ricostruita" la propria risposta e motivata per iscritto, ciascun gruppo è stato invitato ad illustrare la risposta ottenuta ripercorrendo "in avanti" la catena deduttiva realizzata.
Questa strategia di lettura al contrario della catena deduttiva (albero rovesciato) ha lo scopo di rappresentare la fase di validazione, ovvero di dimostrazione (al modo classico) dell'informazione.

3.4.4 UNA NUOVA FASE DI "RINFORZO"

Successivamente è stato realizzato un nuovo intervento, pensato come rinforzo alla precedente attività, con lo scopo di far acquisire agli allievi una

[33] Come si è già fatto notare, mentre la dimostrazione in Hilbert parte dagli assiomi e produce tutto quello che si può ricavare, quando dimostriamo partiamo dalla tesi e cerchiamo quello che ci occorre per provarla.

maggiore autonomia nel realizzare il sistema di assiomi relativo a un testo e le catene deduttive per rispondere alle domande.

Per svolgere tale attività, questa volta, gli allievi sono stati suddivisi in coppie. È stato proiettato alla lavagna interattiva un nuovo testo, più breve del precedente (Figura 11).

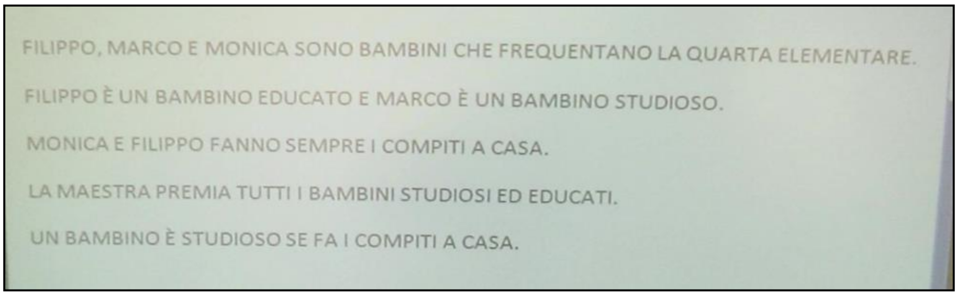


Figura 11 – Nuovo testo proposto

Ciascuna coppia ha analizzato autonomamente il testo, estraendo da esso il sistema di assiomi senza passare per la forma scritta in linguaggio quotidiano, giungendo così direttamente alla configurazione di tessere disposte sulla propria lavagna magnetica.

A questo punto, a ciascuna coppia è stato chiesto di valutare la deducibilità di alcune informazioni, di volta in volta segnate sulla loro lavagna (Figura 12).

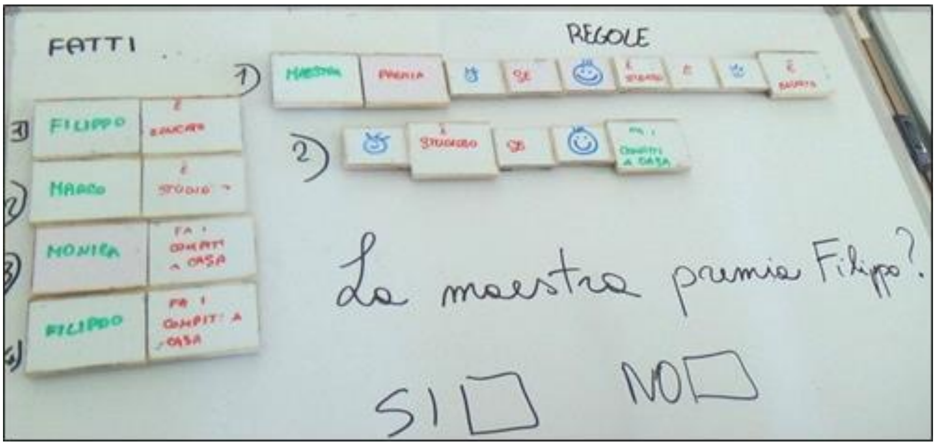


Figura 12 – Sistema di assiomi con l'artefatto

Gli allievi hanno così utilizzato una seconda lavagna magnetica, fornita loro, per poter costruire le catene deduttive utili a rispondere alle domande poste (Figura 13). Questa volta agli allievi è stata lasciata maggiore autonomia nello scegliere la strategia che consentiva loro di ottenere le deduzioni.

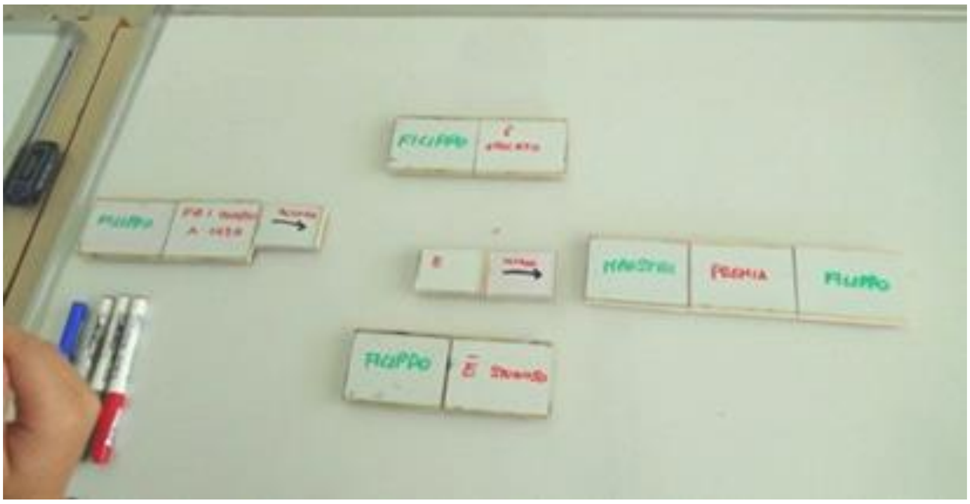


Figura 13 – Esempio di catena deduttiva

Alla fine di tutto il percorso sperimentale, alcuni allievi sono stati da me intervistati con lo scopo di stimolare in loro delle riflessioni sulle varie attività svolte.

3.5 ANALISI DEL MATERIALE RACCOLTO

Qui presento alcuni risultati provenienti dall'analisi del materiale raccolto durante la sperimentazione. In particolare, i dati analizzati sono i seguenti:

- le risposte fornite dagli allievi alle domande del questionario svolto nella prima fase e i video delle discussioni collettive;
- i video relativi all'attività svolta dai gruppi nella realizzazione delle catene deduttive e le loro motivazioni scritte alle risposte, allo scopo di confrontarle con le risposte individuali provenienti dai questionari;
- i video dell'attività svolta dalle coppie nella realizzazione del sistema assiomatico e delle catene deduttive;

- i video delle interviste individuali.

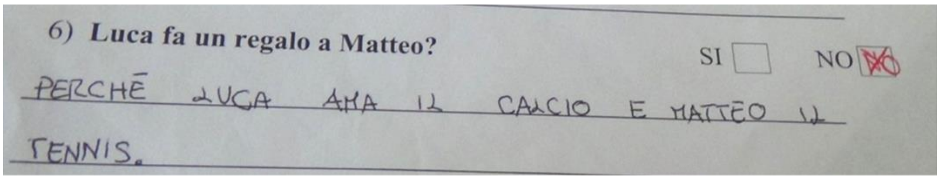
3.5.1 Risultati della fase di lettura e comprensione del testo

Da una prima analisi complessiva dei questionari, è emerso che la maggior parte degli studenti è riuscita a dare risposte corrette solo nel momento in cui l'informazione era presente esplicitamente nel testo. Tutti, infatti, hanno risposto correttamente alla prima domanda "Matteo legge i racconti di avventura?", in quanto si trattava di un'informazione presente esplicitamente nel testo. Alcuni sono riusciti anche a fare semplici deduzioni che richiedevano l'uso di una regola il cui corpo (cioè l'antecedente) era privo di connettivi logici.

Sono, invece, emerse difficoltà quando, per rispondere ad una domanda, era necessario utilizzare più regole. A tal proposito, durante la discussione collettiva seguita alla consegna dei questionari, un alunno, riferendosi ad un caso in cui per rispondere si dovevano utilizzare due regole:
"Un bambino fa un regalo a un altro bambino se lo trova simpatico" e "Luca trova simpatico un bambino se quel bambino ama il calcio e legge i fumetti", afferma:

"*Ho trovato difficoltà nella domanda – Luca fa un regalo a Matteo? – perché non riuscivo a trovare la risposta*".

Ad esempio, dal protocollo in Figura 14 emerge la confusione di un allievo, rispetto alla stessa domanda, tra regole e fatti presenti nel testo:


6) **Luca fa un regalo a Matteo?** SI ☐ NO ☒

PERCHÉ LUCA AMA IL CALCIO E MATTEO IL TENNIS.

Figura 14 – Protocollo 26[34]

[34] I protocolli dei questionari elaborati dai bambini sono stati numerati da 1 a 30.

In realtà, nel testo non è detto che "Matteo ama il tennis" ma che "Matteo trova simpatici tutti bambini che amano il tennis".

Inoltre, le domande con il maggior numero di motivazioni sbagliate sono risultate quelle in cui la risposta prevedeva l'applicazione di regole nel cui corpo erano presenti i connettivi logici "*e*" e "*o*". Infatti, la maggior parte dei bambini mostra di non conoscere la differenza tra essi. Ad esempio, alla domanda: "Carlo trova simpatico Luca?" (non deducibile dalla regola: "Carlo trova simpatico un bambino se ama il tennis o legge racconti di avventura", in quanto nel testo Luca non dichiara né di amare il tennis né di leggere i racconti di avventura) molti bambini rispondono correttamente, ma dalle motivazioni si comprende che nell'applicare la regola con la disgiunzione hanno considerato solo la prima premessa del corpo della regola e non hanno fatto nessun riferimento alla seconda che, se vera, avrebbe fatto scattare la deduzione.[35]

Dall'analisi delle motivazioni alle risposte fornite[36], inoltre, è emerso che gli allievi, soprattutto nel momento in cui un'informazione non risultava deducibile dal testo, non si sono attenuti alle sole informazioni presenti nel testo ma hanno fatto riferimento alle loro esperienze personali, cercando in ogni modo di dare la risposta che ritenevano essere attesa. [37]

Ad esempio, un fenomeno che emerge è che molti bambini nel rispondere non considerano le regole presenti nel testo ma fanno riferimento ad una esperienza del senso comune secondo cui: due persone per trovarsi simpatiche devono condividere gli stessi interessi (Figura 15). [38]

---

[35] A conferma di questa ipotesi sarebbe stato utile proporre domande in cui andando ad applicare la regola con la disgiunzione sia verificata solo la seconda premessa.
Una verifica dello stesso tipo si può fare ponendo domande che prevedono l'applicazione della regola nel cui corpo vi è una congiunzione di cui risulta verificata solo la prima parte.
Domande con queste caratteristiche sono state poste nella fase di deduzione con la manipolazione delle tessere e hanno avuto successo.

[36] Molto spesso le motivazioni consistono nella ripetizione dell'enunciato della domanda o in una negazione di esso.

[37] Si è manifestata spesso l'influenza di una regola del contratto didattico, ovvero: "se si formula una domanda non è possibile dire che non ci siano elementi sufficienti per fornire la risposta" (D'Amore, 1990).

[38] Probabilmente i bambini traggono questa conclusione anche dall'inciso "come lui" nella frase: "Luca afferma di trovare simpatici tutti i bambini che, *come lui*, amano il calcio e leggono i fumetti".

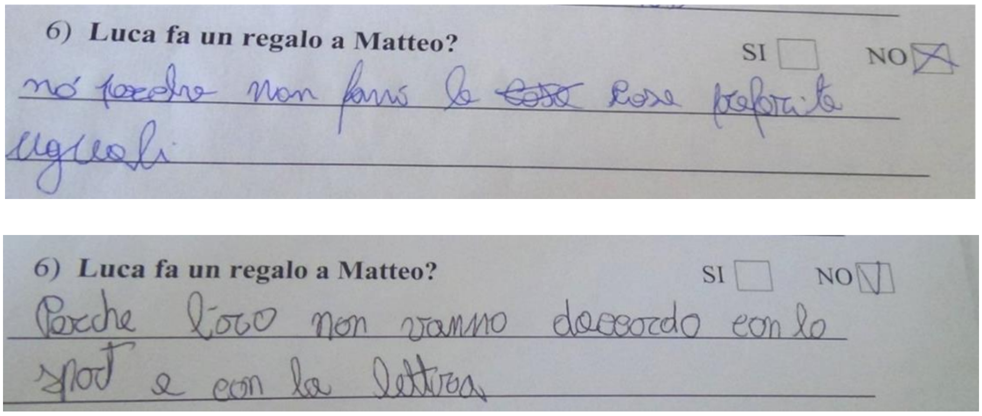


Figura 15 – Protocolli 10 e 22

Alcune delle motivazioni fornite alle risposte, inoltre, evidenziano il fatto che talvolta i bambini nel rispondere fanno riferimento a delle "regole morali" ritenute condivise da tutta la classe (Figura 16). Tali regole non solo non sono presenti nel testo ma non fanno parte della logica assertiva in senso stretto.

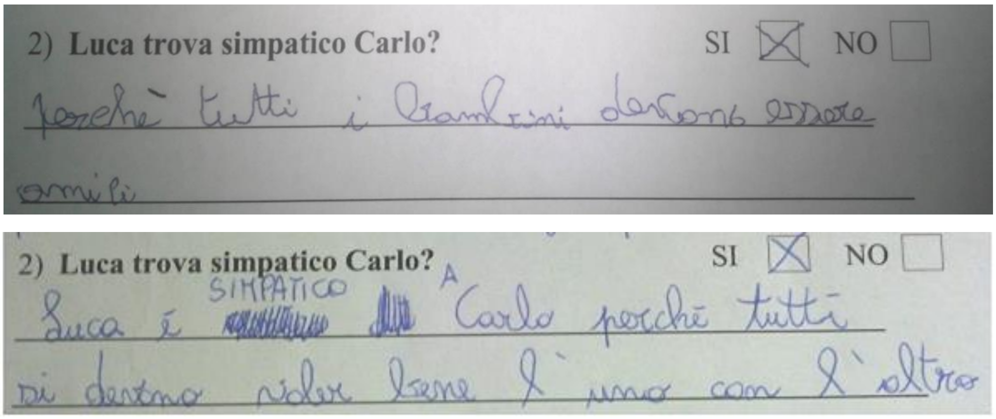
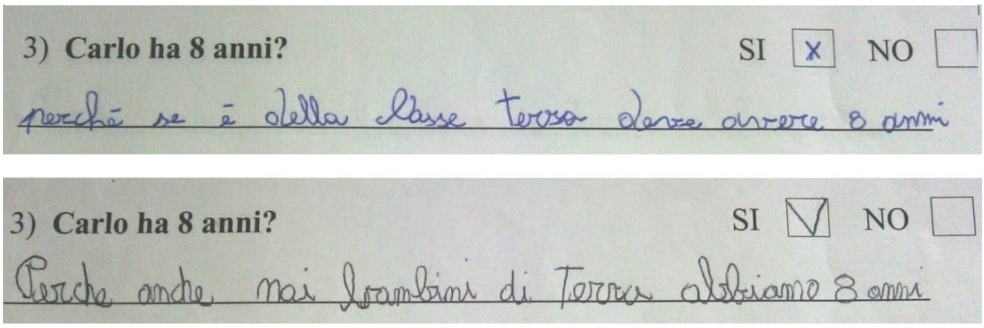


Figura 16 – Protocolli 10 e 3

Un caso a parte è costituito dalla terza domanda del questionario: "*Carlo ha otto anni?*".[39] A questa richiesta quasi tutti gli allievi (27 su 30) hanno risposto in maniera affermativa, motivando la risposta con il fatto che nel testo è detto che Carlo frequenta la classe terza, proprio come loro (Figura 17).

[39] Inserita di proposito nel questionario per poi studiarne i risultati.


3) **Carlo ha 8 anni?** SI [x] NO [ ]
perché se è della classe terza deve avere 8 anni

3) **Carlo ha 8 anni?** SI [x] NO [ ]
Perche anche noi bambini di Terza abbiamo 8 anni

Figura 17 – Protocolli 16 e 22

In effetti, nel brano si parla di bambini che frequentano la terza classe di una scuola primaria, tuttavia, non è presente nessuna regola che permetta di dedurre "logicamente" l'età di Carlo.

Si fa, inoltre, notare che tra i partecipanti alla sperimentazione vi erano anche bambini di 7 anni. Uno di questi, che alla stessa domanda aveva fornito una motivazione simile alle precedenti di Figura 16, durante la discussione collettiva, alla richiesta di esplicitare il motivo della sua risposta ha affermato:

"*Io ho sette anni ma sono un'eccezione [...] se anche Carlo era un'eccezione il brano lo avrebbe detto*".

In questo caso si nota il ricorso a un'implicatura che non deriva dal contenuto dichiarativo del testo ma, piuttosto, dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto (Ferrari, 2004). Tale implicatura, anche se non è coerente con l'idea di deduzione da una fissata teoria, non può essere considerata un errore in assoluto. In generale, nei processi razionali di cui è piena la vita quotidiana le implicature giocano un ruolo spesso positivo.

3.5.2 RISULTATI DELLA FASE DI DEDUZIONE

Dall'analisi delle risposte scritte fornite da ciascun gruppo e dei video relativi all'attività di deduzione con la manipolazione delle tessere, emerge che gli allievi, collaborando tra di loro, sono riusciti a trovare le risposte alle domande loro poste attraverso la costruzione di semplici catene deduttive.

Inoltre, ciascun gruppo, "ripercorrendo in avanti" la catena costruita, è riuscito ad esporre al resto della classe la deduzione ottenuta, argomentandone ogni singolo passo.

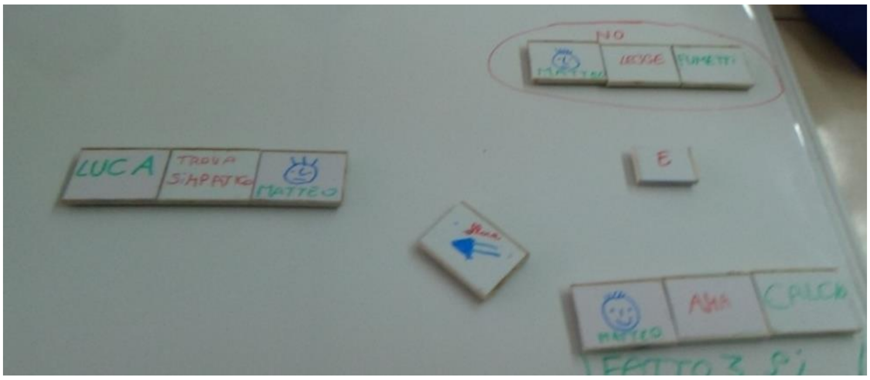
Durante l'attività di creazione della catena deduttiva sono state stimolate, all'interno dei gruppi, delle discussioni sul ruolo dei connettivi logici presenti nelle regole. Ad esempio, in una di queste discussioni, un bambino, osservando la configurazione delle tessere poste sulla lavagna, ha affermato:

> "[…] *nella regola c'è "oppure" e quindi basta che si trovano d'accordo su una cosa, l'altra non serve;*

un altro bambino, sempre dello stesso gruppo, ha fatto notare:

> "[…] *in quest'altro caso c'è la "e", quindi devono essere verificate tutte e due le cose*".

A tal proposito, sono interessanti anche le motivazioni scritte alle risposte ricavate mediante la costruzione delle catene deduttive. Ad esempio, alla domanda "Luca trova simpatico Matteo?", un gruppo, dopo aver costruito la catena deduttiva, argomenta al seguente modo (Figura 18):



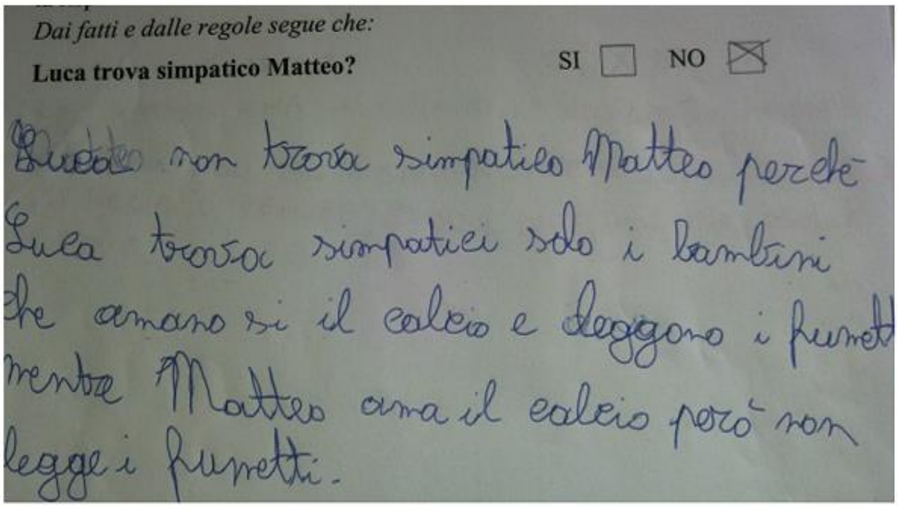
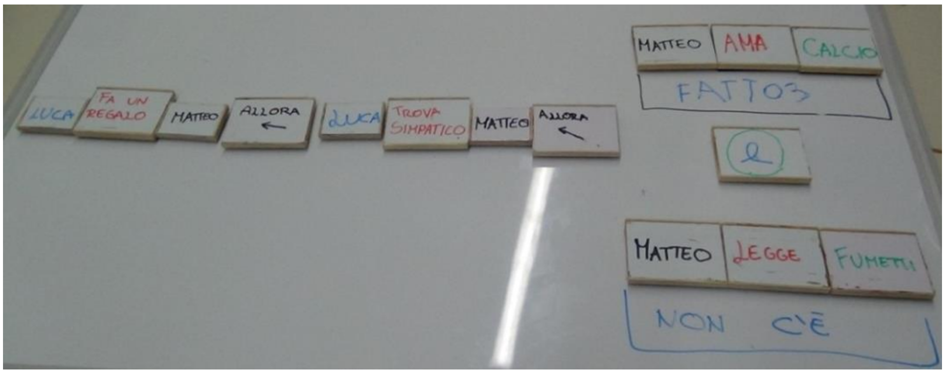


Figura 18 – Catena deduttiva e relativa motivazione alla risposta (protocollo G1)[40]

Tale informazione, infatti, non è deducibile dal testo, in quanto la regola "Luca trova simpatico un bambino se quel bambino ama il calcio e legge i fumetti", non risulta verificata, perché nel testo Matteo afferma di amare il calcio ma non dichiara di leggere i fumetti.

Ad esempio, a quest'altra domanda "Luca fa un regalo a Matteo?", un gruppo fornisce la seguente motivazione alla risposta ottenuta tramite la costruzione della catena deduttiva (Figura 19):



[40] I protocolli delle risposte scritte elaborate dai gruppi sono stati numerati da G1 a G4.

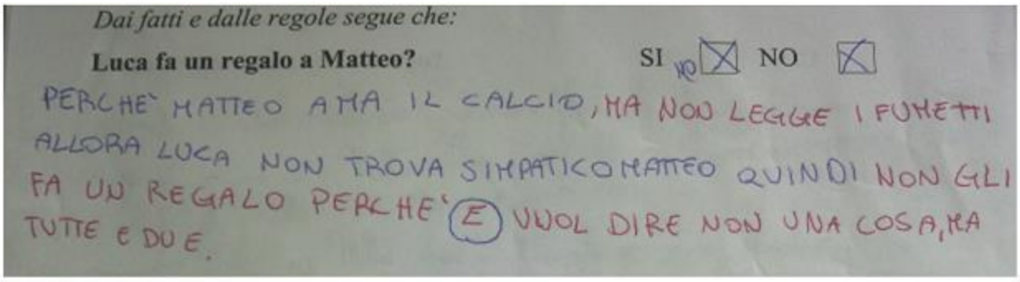
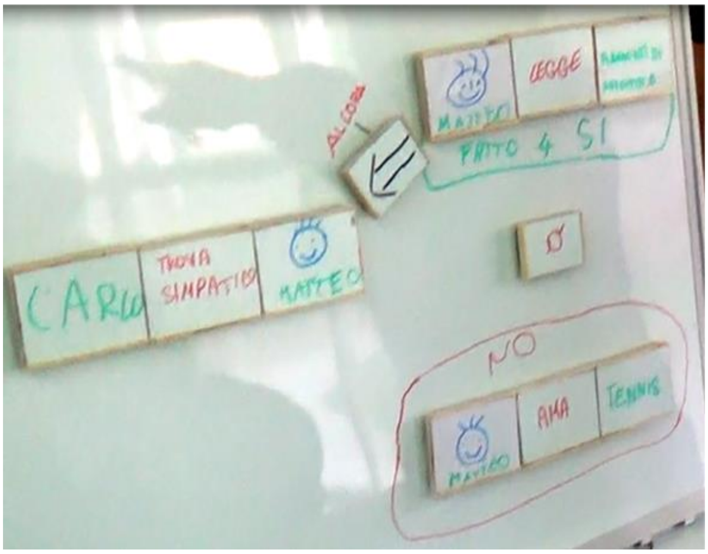


Figura 19 – Catena deduttiva e relativa motivazione alla risposta (protocollo G2)

Anche questa domanda non risulta deducibile dalle informazioni del testo, perché richiede l'applicazione della regola "Un bambino fa un regalo a un altro bambino se quel bambino trova simpatico l'altro bambino" e della regola precedente "Luca trova simpatico un bambino se …" , che non è verificata.

Alla domanda "Carlo trova simpatico Matteo?",[41] lo stesso gruppo, una volta costruita la catena deduttiva per ricavare la risposta, fornisce la seguente motivazione (Figura 20):



[41] Deducibile dal testo mediante l'applicazione della regola con la disgiunzione "Carlo trova simpatico un bambino se quel bambino ama il tennis o legge i racconti di avventura", in cui una delle due premesse è verificata.

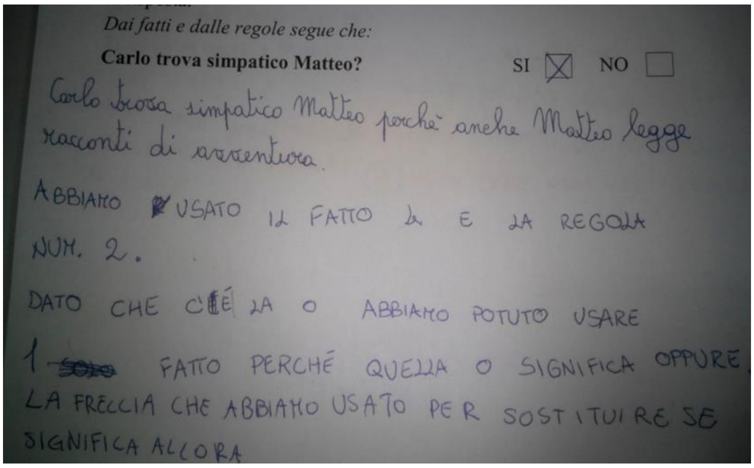

Dai fatti e dalle regole segue che:
Carlo trova simpatico Matteo? SI ☒ NO ☐
Carlo trova simpatico Matteo perchè anche Matteo legge racconti di avventura.
ABBIAMO USATO IL FATTO 4 E LA REGOLA NUM. 2.
DATO CHE C'É LA O ABBIAMO POTUTO USARE 1 ~~SOLO~~ FATTO PERCHÉ QUELLA O SIGNIFICA OPPURE, LA FRECCIA CHE ABBIAMO USATO PER SOSTITUIRE SE SIGNIFICA ALLORA

Figura 20 – Catena deduttiva e relativa motivazione alla risposta (protocollo G2)

In questo caso, infatti, l'informazione risulta deducibile dal testo mediante l'applicazione della regola con la disgiunzione "Carlo trova simpatico un bambino se quel bambino ama il tennis o legge i racconti di avventura", in cui una delle due premesse è verificata.

Da questi ultimi protocolli sembra emergere che, in seguito all'attività di deduzione svolta con la manipolazione dell'artefatto, alcuni bambini hanno acquisito una maggiore consapevolezza nell'uso "logico" della congiunzione e della disgiunzione.

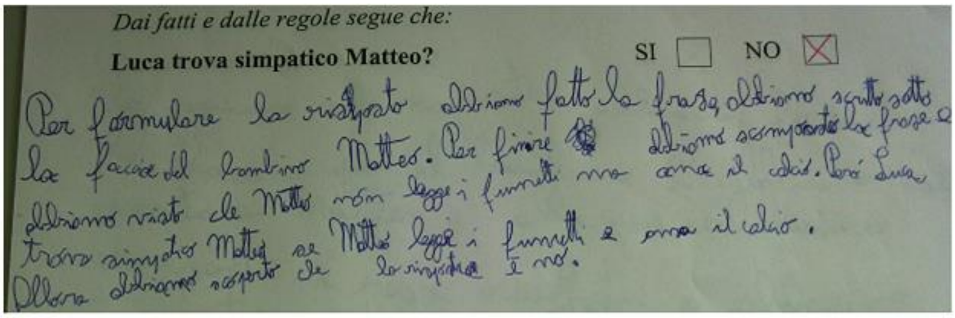
In questa fase, come emerge anche dal precedente protocollo del gruppo G1 ("Luca non trova simpatico Matteo …"), rimane ancora non chiara la distinzione tra "non deducibilità" e "falsità" di un'informazione.

Un altro risultato positivo riguarda l'uso delle variabili. In questo caso, gli allievi mostrano di aver compreso come istanziare correttamente una variabile all'interno di una regola. Ad esempio, un gruppo, nello spiegare come è stata ricavata la risposta, scrive:

"*[…] abbiamo scritto sotto la faccia del bambino Matteo …*";

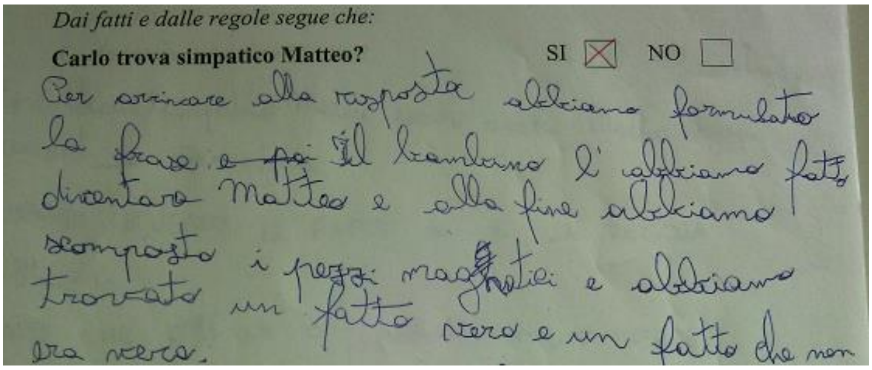
e ancora, relativamente a un'altra domanda scrive:

"*[…] il bambino l'abbiamo fatto diventare Matteo …*" (Figura 21).


Dai fatti e dalle regole segue che:

Luca trova simpatico Matteo? SI ☐ NO ☒

Per formulare la risposta abbiamo fatto la frase, abbiamo scritto sotto la faccia del bambino Matteo. Per finire abbiamo scomposto la frase e abbiamo visto che Matteo non legge i fumetti ma ama il calcio. Però Luca trova simpatico Matteo se Matteo legge i fumetti e ama il calcio. Allora abbiamo scoperto che la risposta è no.


Dai fatti e dalle regole segue che:

Carlo trova simpatico Matteo? SI ☒ NO ☐

Per arrivare alla risposta abbiamo formulato la frase ~~e poi~~ il bambino l'abbiamo fatto diventare Matteo e alla fine abbiamo scomposto i pezzi magnetici e abbiamo trovato un fatto vero e un fatto che non era vero.

Figura 21 – Protocolli G3

3.5.3 Risultati della fase di rinforzo e delle interviste a-posteriori

Dall'analisi dei video effettuati durante l'attività, emerge che ciascuna coppia è riuscita ad analizzare il nuovo testo e a costruire, in maniera autonoma, il sistema di assiomi ad esso relativo, utilizzando esclusivamente le tessere. Inoltre, si nota che gli allievi hanno ben interiorizzato l'attività precedente di deduzione con le tessere, in quanto riescono a realizzare autonomamente semplici catene deduttive per rispondere alle domande loro poste.

Durante l'attività di deduzione, ad alcune coppie, oralmente, è stata posta una domanda del tipo "Carlo ha otto anni?" (presente nel questionario della prima fase) e dai video si nota che gli allievi di fronte a tale richiesta mostrano dapprima imbarazzo e poi d'impulso rispondono in maniera affermativa facendo riferimento alla loro esperienza personale, dimenticando il sistema di assiomi utilizzato fino a quel momento e senza tentare di costruire la corrispondente catena deduttiva.

In seguito, però, a una discussione collettiva, in cui sono state stimolate riflessioni sui concetti "non deducibilità" e "falsità" di un'informazione, alcuni bambini mostrano di averne compreso la differenza, come emerge dall'estratto di un'intervista, svolta al termine dell'attività, di seguito riportato.

Ricercatore: *Cosa hai utilizzato per rispondere alla domanda "Carlo ha otto anni?"*

Luca: *Ho usato il fatto che Carlo frequenta la terza.*

R: *E quale regola hai usato?*

L: *Ho usato la regola che ogni bambino che sta in terza deve avere 8 anni.*

R: *C'era questa regola nel testo?*

L: *No, l'ho aggiunta io.*

R: *Ora come risponderesti alla stessa domanda?*

L: *Carlo non deve avere per forza 8 anni* […] *non lo possiamo stabilire.*

Inoltre, sempre dalle interviste individuali, emerge che i bambini hanno acquisito piena consapevolezza dell'attività svolta. Nel seguente estratto un'allieva illustra i tratti salienti del percorso svolto:

Ricercatore: *Descrivi l'attività che hai svolto in questo periodo.*

Simona: […] a*bbiamo scritto sui pezzi di legno i fatti e le regole che c'erano nel testo.*

R: *Come hai fatto per rispondere alle domande?*

S: […] *alle domande abbiamo risposto usando le regole che ci servivano, sostituendo il volto del bambino con il suo nome* […] *spostando i pezzi* […] *e poi è uscita fuori la risposta.*

R: *Cosa hai imparato da quest'attività?*

S: *A comprendere bene i testi dei problemi che ci dà il maestro* [42]

[42] Questa risposta non corrisponde allo scopo principale della sperimentazione a meno che per "comprendere bene i testi" non si intenda "comprendere e risolvere i problemi".

3.6 UNA VERIFICA A-POSTERIORI DELLE CAPACITÀ ACQUISITE

Dopo alcuni mesi sono ritornata presso la scuola primaria "G. Vespucci" di Forino (AV) e agli stessi allievi delle classi terze che avevano partecipato alla precedente sperimentazione, ho proposto un'attività di lettura e comprensione di un testo (Figura 22).

Scopo di tale attività era verificare se, grazie all'esperimento svolto nei mesi precedenti, fosse migliorata la loro capacità di analizzare un testo, individuarne le informazioni contenute ed escogitare una strategia deduttiva per rispondere alle domande poste.

Il testo somministrato, sempre riguardante situazioni di vita quotidiana, era equivalente, dal punto di vista della struttura logica, a quelli utilizzati nella precedente attività.

UN INCONTRO AL PARCO

In una bella giornata di sole nel parco comunale di Roma si incontrano Luigi, Anna, Mario e Martina, quattro compagni della scuola primaria "G. Leopardi".
Mentre passeggiano insieme i ragazzi parlano delle attività che preferiscono fare nel tempo libero e delle loro simpatie nei confronti dei compagni.
Dalla loro conversazione emerge che a Luigi piace giocare con il tablet e guardare i cartoni animati.
Anche Mario nel suo tempo libero si diverte a guardare i film d'azione e a giocare con il computer.
Martina ama guardare le serie televisive e giocare a computer.
Anche Anna guarda le serie televisive e gioca sia a computer che a tablet.
Parlando di amicizie, Anna dichiara di provare simpatia per tutti quelli che giocano a computer.
Mario dice di provare simpatia per tutti i compagni che giocano a tablet o guardano le serie televisive.
Luigi ammette di provare simpatia per i compagni che giocano sia computer che a tablet.
Martina afferma di provare simpatia per tutti i ragazzi che giocano a tablet e guardano le serie televisive.
Durante la conversazione tutti i ragazzi ammettono che invitano a casa un compagno se provano simpatia per lui.

Dai fatti e dalle regole che trovi nel testo:

1. Puoi stabilire che ***Martina prova simpatia per Anna***? SI NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

2. Puoi stabilire che ***Luigi prova simpatia per Mario***? SI NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

3. Puoi stabilire che ***Mario invita a casa sua Martina***? SI NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

4. Puoi stabilire che ***Anna invita a casa sua Luigi***? SI NO

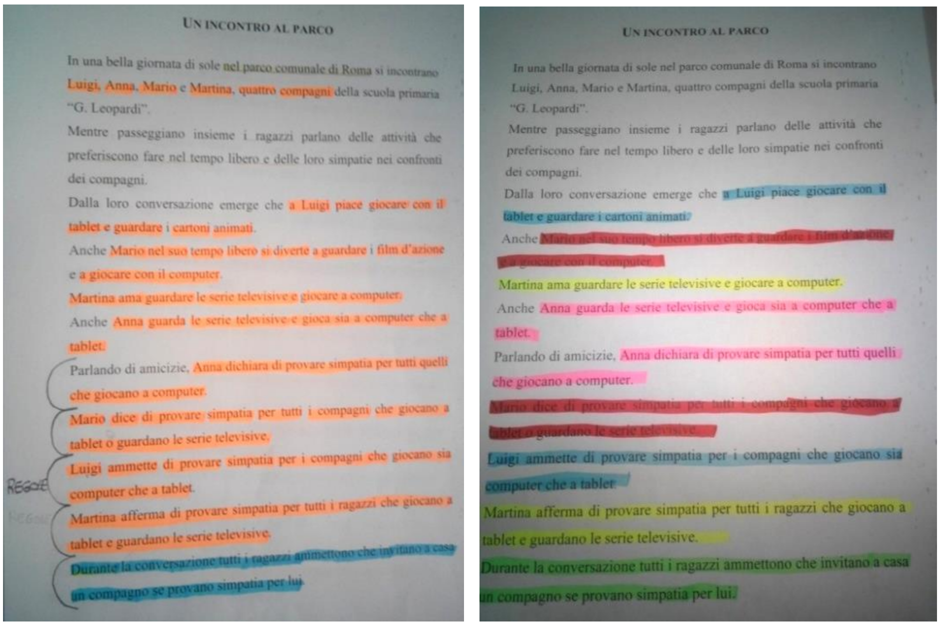
Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

Figura 22 – Testo e questionario proposti

Agli allievi è stato chiesto di leggere individualmente il testo e di rispondere alle domande del questionario, motivando la propria risposta, immaginando di doverla spiegare ad un compagno.

Tale attività è stata svolta senza usare l'artefatto "tessere". Al termine sono stati raccolti sia i testi distribuiti che i questionari svolti dagli allievi.

Da una prima osservazione dei testi consegnati, è emerso che gli allievi hanno interiorizzato la precedente esperienza e hanno fatto riferimento ad essa. Infatti, si nota che alcuni di essi hanno selezionato, anche utilizzando colori diversi, i fatti e le regole presenti nel brano (Figura 23). In questo modo sembra quasi che abbiano avuto l'esigenza di riprodurre con altri mezzi i meccanismi insiti nell'uso delle tessere.


UN INCONTRO AL PARCO

In una bella giornata di sole nel parco comunale di Roma si incontrano Luigi, Anna, Mario e Martina, quattro compagni della scuola primaria "G. Leopardi".

Mentre passeggiano insieme i ragazzi parlano delle attività che preferiscono fare nel tempo libero e delle loro simpatie nei confronti dei compagni.

Dalla loro conversazione emerge che a Luigi piace giocare con il tablet e guardare i cartoni animati.

Anche Mario nel suo tempo libero si diverte a guardare i film d'azione e a giocare con il computer.

Martina ama guardare le serie televisive e giocare a computer.

Anche Anna guarda le serie televisive e gioca sia a computer che a tablet.

Parlando di amicizie, Anna dichiara di provare simpatia per tutti quelli che giocano a computer.

Mario dice di provare simpatia per tutti i compagni che giocano a tablet o guardano le serie televisive.

Luigi ammette di provare simpatia per i compagni che giocano sia computer che a tablet.

Martina afferma di provare simpatia per tutti i ragazzi che giocano a tablet e guardano le serie televisive.

Durante la conversazione tutti i ragazzi ammettono che invitano a casa un compagno se provano simpatia per lui.

REGOLE

UN INCONTRO AL PARCO

In una bella giornata di sole nel parco comunale di Roma si incontrano Luigi, Anna, Mario e Martina, quattro compagni della scuola primaria "G. Leopardi".

Mentre passeggiano insieme i ragazzi parlano delle attività che preferiscono fare nel tempo libero e delle loro simpatie nei confronti dei compagni.

Dalla loro conversazione emerge che a Luigi piace giocare con il tablet e guardare i cartoni animati.

Anche Mario nel suo tempo libero si diverte a guardare i film d'azione e a giocare con il computer.

Martina ama guardare le serie televisive e giocare a computer.

Anche Anna guarda le serie televisive e gioca sia a computer che a tablet.

Parlando di amicizie, Anna dichiara di provare simpatia per tutti quelli che giocano a computer.

Mario dice di provare simpatia per tutti i compagni che giocano a tablet o guardano le serie televisive.

Luigi ammette di provare simpatia per i compagni che giocano sia computer che a tablet.

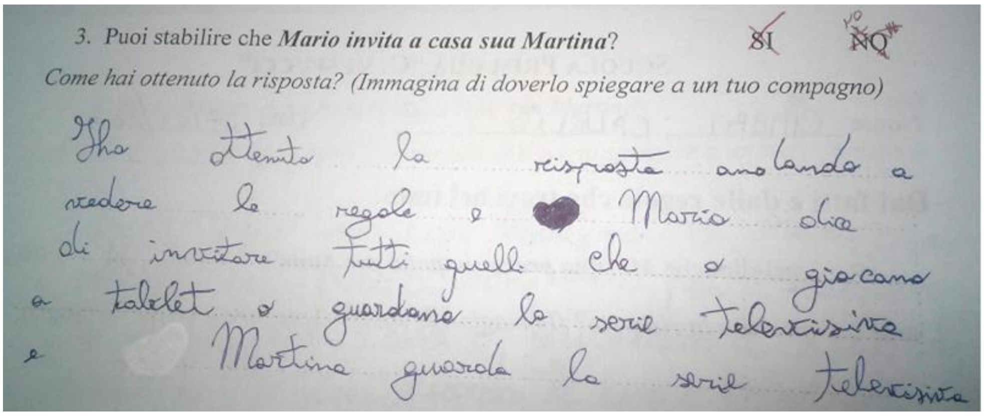
Martina afferma di provare simpatia per tutti i ragazzi che giocano a tablet e guardano le serie televisive.

Durante la conversazione tutti i ragazzi ammettono che invitano a casa un compagno se provano simpatia per lui.

Figura 23 – Protocolli 4 e 30[43]

Questa volta, dall'analisi dei questionari individuali emerge che la maggior parte degli allievi, nel rispondere alle domande, si è attenuta ai fatti e alle regole presenti nel testo, senza fare riferimento a "regole morali" o ad esperienze personali. Il protocollo in Figura 24 ne è un esempio:

[43] I testi e i protocolli dei questionari svolti dai bambini riportano la stessa numerazione dei questionari svolti nella prima fase dell'esperimento, in corrispondenza degli stessi allievi.



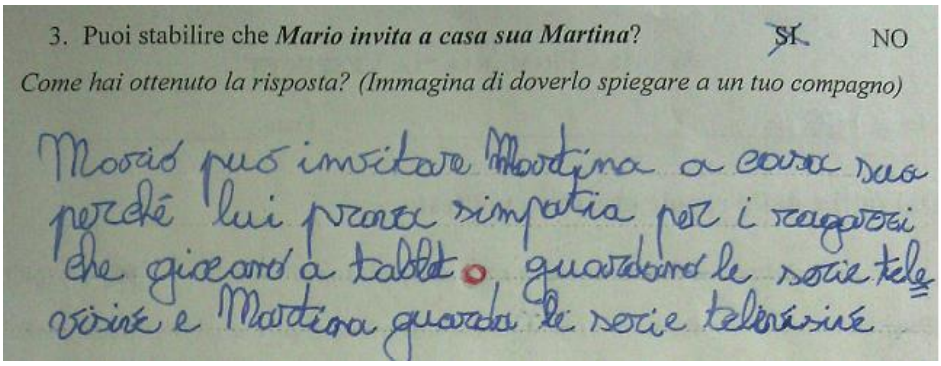
3. Puoi stabilire che ***Mario invita a casa sua Martina***? SI NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

Ho ottenuto la risposta andando a vedere le regole e Mario dice di invitare tutti quelli che o giocano a tablet o guardano le serie televisiva e Martina guarda la serie televisiva

Figura 24 – Protocollo 30

Inoltre, molti bambini nel fare deduzioni usano in maniera consapevole e corretta i connettivi logici presenti nelle premesse delle regole, come emerge dai protocolli in Figura 25 e 26.

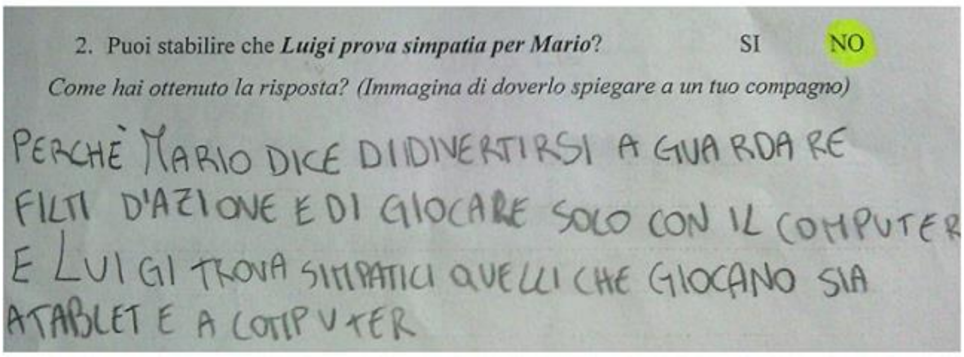


3. Puoi stabilire che ***Mario invita a casa sua Martina***? ~~SI~~ NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

Mario può invitare Martina a casa sua perché lui prova simpatia per i ragazzi che giocano a tablet o guardano le serie televisive e Martina guarda le serie televisive

Figura 25 – Protocollo 19



2. Puoi stabilire che ***Luigi prova simpatia per Mario***? SI NO

Come hai ottenuto la risposta? (Immagina di doverlo spiegare a un tuo compagno)

PERCHÈ MARIO DICE DIDIVERTIRSI A GUARDARE FILMI D'AZIONE E DI GIOCARE SOLO CON IL COMPUTER E LUIGI TROVA SIMPATICI QUELLI CHE GIOCANO SIA ATABLET E A COMPUTER

Figura 26 – Protocollo 4

3.7 LA SPERIMENTAZIONE IN UNA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Un'attività sperimentale, simile a quella svolta nella scuola primaria descritta nei paragrafi precedenti, è stata effettuata anche con allievi di scuola secondaria, della fascia d'età di 10/11 anni. Alla sperimentazione, svolta in orario extra-curricolare[44], hanno partecipato 54 allievi frequentanti diverse classi prime della scuola secondaria di I grado "Solimena – De Lorenzo" di Nocera Inferiore (SA).

3.7.1 DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ

Anche in questo caso si è partiti da una fase individuale di lettura e comprensione di un testo, sempre riguardante una situazione di vita quotidiana(Figura 27). Dopo lo svolgimento del questionario, agli allievi è stato chiesto, sempre individualmente,[45] di analizzare il testo ed estrarre da esso le informazioni principali. Tali informazioni sono state poi condivise in maniera collettiva e scritte alla lavagna in linguaggio quotidiano.

---

[44] L'attività è stata inserita all'interno di un corso pomeridiano più ampio.
[45] Nella precedente sperimentazione, trattandosi di bambini più piccoli, l'analisi del testo era stata effettuata in maniera collettiva e guidata.

UN INCONTRO AL PARCO

In una bella giornata di sole nel parco comunale di Roma si incontrano Carlo, Matteo, Anna e Luca, quattro compagni della classe I A della Scuola secondaria di I grado "G. Leopardi".

Mentre passeggiano insieme, i ragazzi parlano delle attività che preferiscono fare nel tempo libero e delle loro simpatie nei confronti dei compagni.

Dalla loro conversazione emerge che Luca gioca sia a tennis che a calcio e che legge i racconti di avventura. Matteo gioca a calcio e legge i fumetti. Carlo gioca a tennis e legge i fumetti. Anna gioca a pallavolo e legge sia i racconti di avventura che i fumetti.

Parlando di amicizie ognuno di loro dichiara di trovare simpatico chiunque gioca a calcio. Inoltre, Carlo dice di provare simpatia anche per tutti quelli che giocano a tennis o leggono i racconti di avventura. Matteo afferma di trovare simpatici anche tutti i ragazzi che leggono i fumetti e giocano a tennis. Durante la conversazione tutti ammettono che invitano a casa un compagno solo se lo trovano simpatico.

Rispondi alle seguenti domande e spiega il motivo della tua risposta.

Dalle informazioni presenti nel testo:

- Puoi stabilire che *Luca trova simpatico Matteo?* SI NO
- Puoi stabilire che *Matteo trova simpatica Anna?* SI NO
- Puoi stabilire che *Carlo trova simpatico Luca?* SI NO
- Puoi stabilire che *Matteo ha 11 anni?* SI NO
- Puoi stabilire che *Matteo invita Luca?* SI NO
- Puoi stabilire che *Carlo invita Anna?* SI NO
- Puoi stabilire che *Luca trova simpatico Antonio?* SI NO
- Puoi stabilire che *Anna invita Carlo?* SI NO

Figura 27 – Testo e questionario somministrati agli allievi[46]

Una volta mostrato l'artefatto e spiegato il suo uso, gli allievi hanno riscritto, utilizzando le tessere magnetiche, ciascuna informazione. Hanno, poi, attaccato i fatti su una lavagna magnetica e le regole su un'altra lavagna. In questo modo, hanno ricostruito il sistema di assiomi relativo al testo (Figura 28).

Figura 28 – Il sistema di assiomi con l'artefatto[47]

46 Questa volta, a differenza della precedente esperienza, ciascuna domanda del questionario è stata preceduta dalla dicitura: "Puoi stabilire che…", in modo che agli allievi risultasse chiaro che le opzioni "SI" e "NO" della risposta si riferissero alla deduzione dell'enunciato dalle informazioni del testo e non alla sua verità o falsità.

Come si può notare dalla precedente Figura 28, in questo caso a differenza dell'altra esperienza, per indicare le "variabili" presenti nelle regole gli allievi hanno scelto, a maggioranza, di utilizzare le lettere maiuscole dell'alfabeto[48], forse perché già orientati verso il calcolo algebrico.

Nella fase successiva gli allievi hanno lavorato in gruppi cooperativi di 5/6 membri ciascuno. Utilizzando il materiale loro fornito (tessere, pennarelli e lavagna), hanno costruito le catene deduttive per rispondere alle singole domande che di volta in volta venivano poste loro.

Durante l'attività tra i vari gruppi si è creata una sorta di competizione che ha trasformato l'attività di deduzione in un gioco di squadre.

Ciascun gruppo, una volta realizzata la catena deduttiva corrispondente alla domanda loro posta (Figura 29) era invitato ad illustrarla e argomentarla al resto della classe, oltre che a produrre una motivazione scritta alla risposta ricavata.

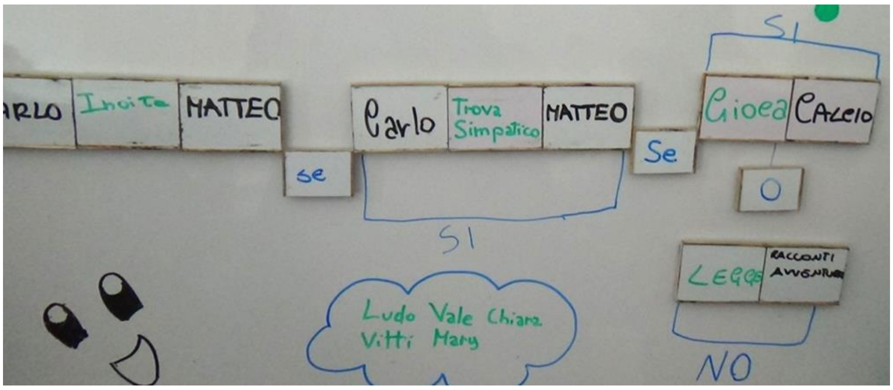


Figura 29 – Esempio di catena deduttiva

[47] Si fa notare che l'espressione contenuta nell'ultima frase del testo "… solo se …" è stata interpretata come se fosse stato un "se" e quindi tradotta in una implicazione. Questo è un punto delicato di ricerca che riguarda le difficoltà che sorgono con l'implicazione, con l'equivalenza logica e con il "se" definitorio, che ci si propone di esplorare in futuro.

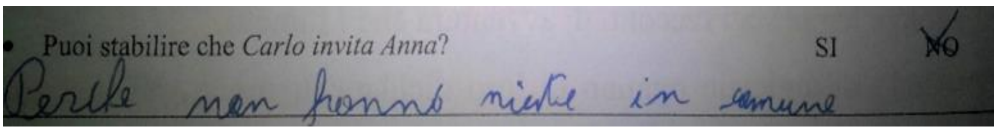
[48] Alcuni propongono di utilizzare i numeri, con la motivazione che in quel contesto si stava parlando di matematica e che in matematica si usano numeri. D'altra parte, una delle osservazioni più comuni fatta dagli allievi nell'affrontare tale attività è stata: "Cosa c'entra questo con la matematica?".

3.7.2 ANALISI DEI RISULTATI

Anche relativamente a questa sperimentazione descritta è stata effettuata l'analisi del materiale raccolto. In particolare, sono stati analizzati i questionari individuali, le risposte fornite dai gruppi e le registrazioni audio e video effettuate.

Dall'analisi delle risposte individuali degli allievi alle domande del questionario emerge, ancora una volta in maniera diffusa (nonostante si tratti di allievi più grandi rispetto alle precedenti sperimentazioni), la loro difficoltà a fare deduzioni che richiedono l'applicazione di regole che chiamano altre regole[49] o anche di regole in cui sono presenti predicati con due variabili. Ad esempio, alla domanda "Puoi stabilire che Matteo invita Luca?", che segue dalle regole "[…] tutti ammettono che invitano a casa un compagno solo se lo trovano simpatico" e "[…]ognuno di loro dichiara di trovare simpatico chiunque gioca a calcio", in quanto Luca gioca a calcio, la maggior parte degli allievi scrive: "*Il testo non lo dice*", oppure "*Nel testo non c'è scritta questa cosa*".

Inoltre, molto spesso gli allievi nel rispondere alle domande non si attengono alle informazioni presenti nel testo ma fanno riferimento alla loro esperienza quotidiana o a regole di comportamento. Ad esempio, anche questa volta, è molto comune l'idea che affinché due persone si trovino simpatiche devono avere gli stessi interessi (Figura 30).


• Puoi stabilire che *Carlo invita Anna*? SI ~~NO~~

Perchè non hanno niente in comune

Figura 30 – Protocollo 49′[50]

Molto diffusa, anche in questo caso, è la difficoltà ad applicare regole nelle cui premesse sono presenti i connettivi logici di "congiunzione" e "disgiunzione".

[49] Ciò può essere utilizzato per misurare la capacità di un allievo di gestire la complessità di un algoritmo nel risolvere un problema e distinguere così i livelli di complessità.

[50] I protocolli dei questionari elaborati dagli studenti sono stati numerati da 1′ a 54′.

Ad esempio, alla domanda "Puoi stabilire che Matteo trova simpatica Anna?" (la cui risposta non è deducibile dal testo) solo 10 su 54 rispondono correttamente. Tutti gli altri sbagliano, in quanto nell'applicare la regola con la congiunzione: "Matteo afferma di trovare simpatici tutti i ragazzi che leggono i fumetti e giocano a tennis", considerano solo che è soddisfatta la prima premessa della regola ("Anna legge i fumetti") senza tener conto dell'altra che, non essendo verificata, non fa scattare la regola e dunque la deduzione (Figura 31).

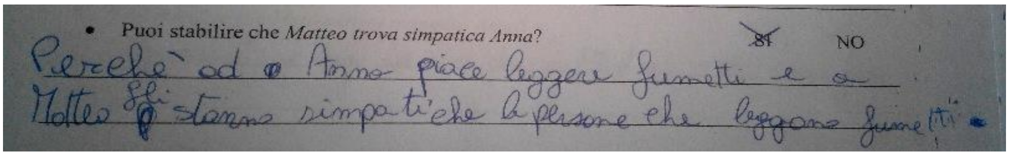


Figura 31 – Protocollo 26′

Rispetto all'esperienza precedente nella scuola primaria, in riferimento alla domanda, non deducibile dalle informazioni del testo, "Puoi stabilire che Matteo ha 11 anni?" aumentano le risposte corrette (20 su 54). In alcune di queste risposte gli allievi ammettono che: "*Quando si va in prima media di solito si ha 11 anni*", ma riconoscono che non è sempre detto. La maggior parte di essi, però, come gli allievi della primaria, risponde in maniera affermativa facendo riferimento al proprio vissuto (Figura 32).

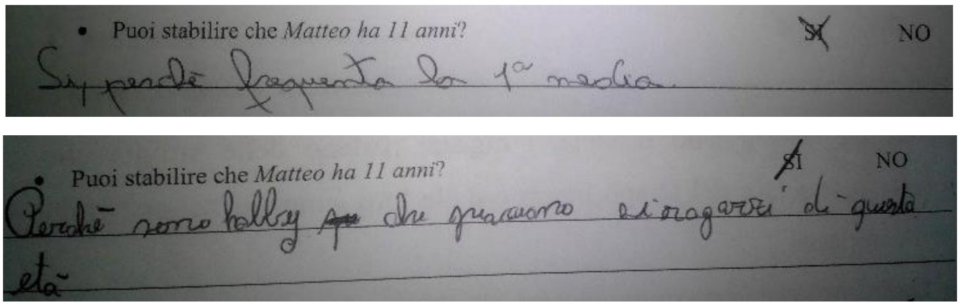
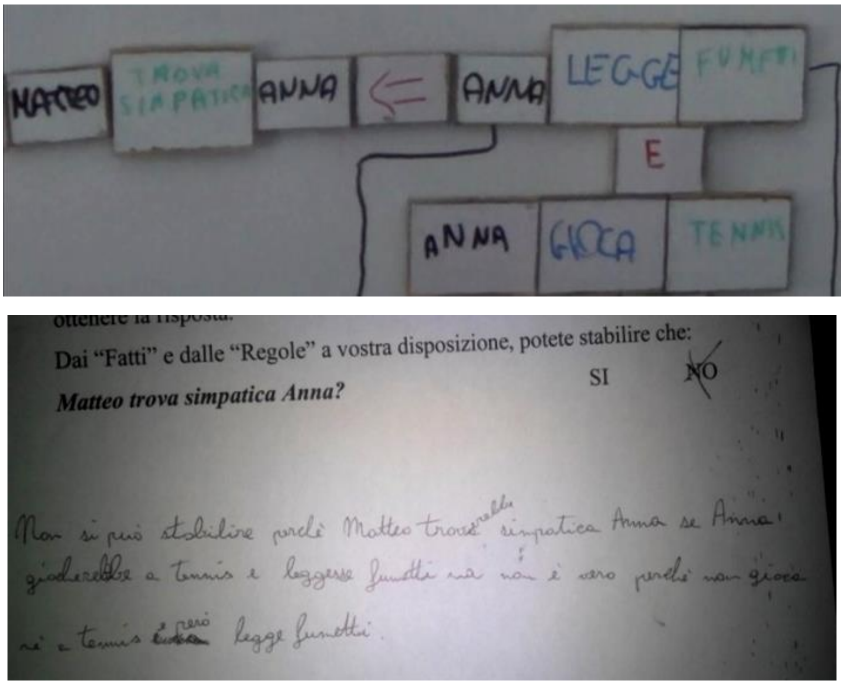


Figura 32 – Protocolli 5′ e 27′

Dall'analisi delle riposte scritte, fornite dai gruppi durante la fase di deduzione con la manipolazione delle tessere, emerge una netta prevalenza di deduzioni corrette, ottenute applicando consapevolmente i fatti e le regole del sistema di assiomi costruito in precedenza. In particolare, alle stesse domande del questionario, che richiedevano l'applicazione di regole nelle cui premesse vi erano i connettivi logici di disgiunzione e soprattutto di congiunzione (che avevano ottenuto i maggiori fallimenti), gli allievi stavolta rispondono correttamente (Figura 33).

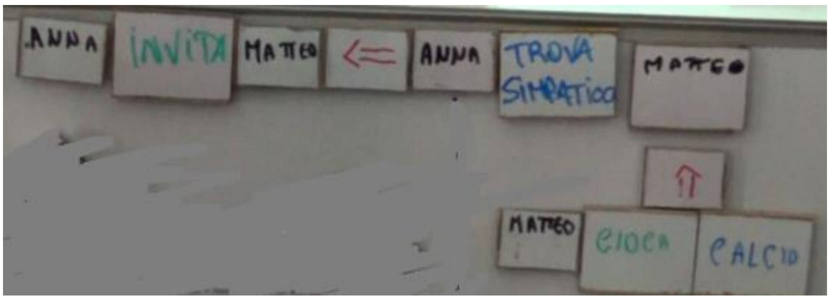


Dai "Fatti" e dalle "Regole" a vostra disposizione, potete stabilire che:
SI ~~NO~~
Matteo trova simpatica Anna?

Non si può stabilire perchè Matteo troverebbe simpatica Anna se Anna giocherebbe a tennis e leggerebbe fumetti ma non è vero perchè non gioca né a tennis ~~e~~ però legge fumetti.

Figura 33 – Catena deduttiva e relativo protocollo G7′[51]

Vengono meno i riferimenti basati sulle proprie esperienze personali (Figura 34) e appare la parola "dedurre" (Figura 35).



[51] I protocolli delle risposte scritte elaborate dai gruppi sono stati numerati da G1′ a G10′.

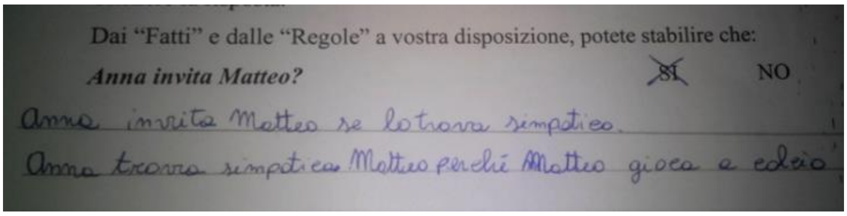


Figura 34 – Catena deduttiva e relativo protocollo G3′

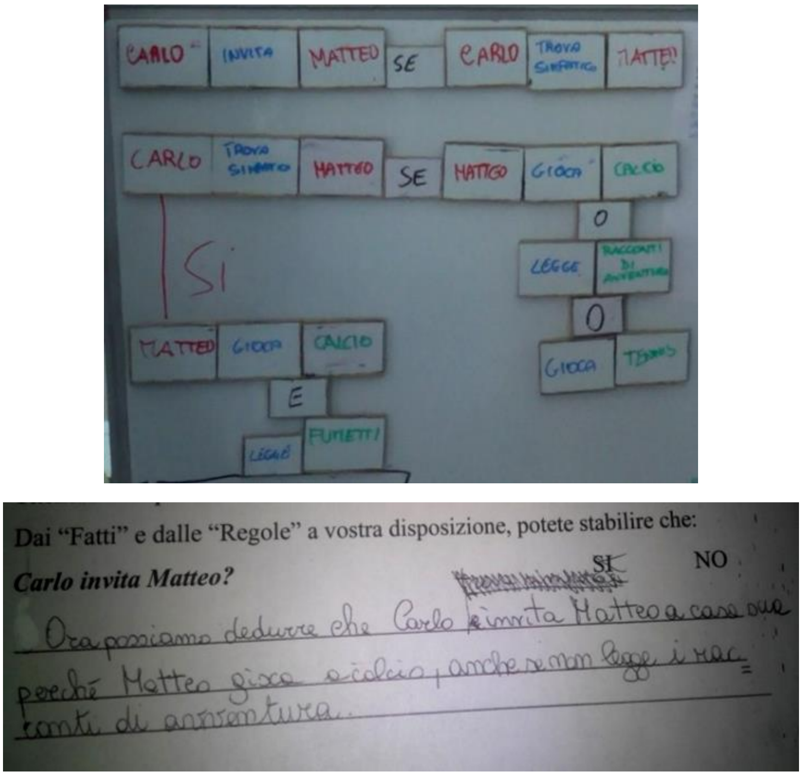


Figura 35 – Catena deduttiva e relativo protocollo G5′

Al termine della realizzazione di ciascuna catena deduttiva, relativa alle singole domande proposte, ogni gruppo era invitato a presentare al resto della classe la risposta ottenuta. Un rappresentante del gruppo rileggeva la catena deduttiva costruita, ripercorrendola "in avanti", allo scopo di validarla. A tal proposito, dall'analisi dei video effettuati emerge che gli allievi, dopo i primi fallimenti, sono riusciti a fare deduzioni corrette e ad argomentarle con consapevolezza e buona padronanza di linguaggio.

Ben presto, i gruppi di allievi hanno trasformato l'attività di deduzione in una competizione fra squadre. Così, ogni squadra ha cercato di rispondere al maggior numero di domande, da me fornite, attraverso la costruzione di catene deduttive corrette.

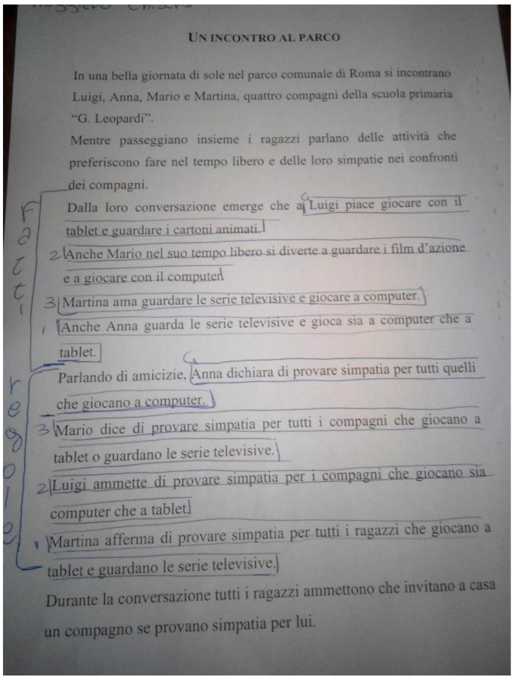
Al termine dell'attività, mediante una discussione collettiva con gli allievi, sono state stimolate delle osservazioni sul percorso svolto. Durante la discussione, un'allieva ha affermato:

> "*Ho trovato difficoltà a rispondere alle domande del questionario perché c'era confusione nel testo, invece, quando abbiamo usato le tessere era tutto più chiaro*".

Da quest'affermazione sembra emergere che la riscrittura del testo in forma sintetico-simbolica e l'attività di deduzione delle informazioni da esso tramite la manipolazione delle tessere ne abbia semplificato la comprensione.

Anche in questo caso, in un periodo successivo, è stata svolta un'attività di comprensione del testo,[52] senza l'utilizzo dell'artefatto.

Già dalla maggior parte dei testi consegnati dagli allievi emerge un chiaro riferimento alla precedente attività: nel testo essi selezionano, sottolineandoli, solo i fatti e le regole presenti (la Figura 36 ne mostra un esempio).



UN INCONTRO AL PARCO

In una bella giornata di sole nel parco comunale di Roma si incontrano Luigi, Anna, Mario e Martina, quattro compagni della scuola primaria "G. Leopardi".

Mentre passeggiano insieme i ragazzi parlano delle attività che preferiscono fare nel tempo libero e delle loro simpatie nei confronti dei compagni.

fatti

Dalla loro conversazione emerge che a Luigi piace giocare con il tablet e guardare i cartoni animati.

2 Anche Mario nel suo tempo libero si diverte a guardare i film d'azione e a giocare con il computer.

3 Martina ama guardare le serie televisive e giocare a computer.

1 Anche Anna guarda le serie televisive e gioca sia a computer che a tablet.

regole

Parlando di amicizie, Anna dichiara di provare simpatia per tutti quelli che giocano a computer.

3 Mario dice di provare simpatia per tutti i compagni che giocano a tablet o guardano le serie televisive.

2 Luigi ammette di provare simpatia per i compagni che giocano sia computer che a tablet.

1 Martina afferma di provare simpatia per tutti i ragazzi che giocano a tablet e guardano le serie televisive.

Durante la conversazione tutti i ragazzi ammettono che invitano a casa un compagno se provano simpatia per lui.

Figura 36 –Protocollo 32′

[52] Il testo e il relativo questionario somministrato agli allievi sono gli stessi di quelli utilizzati nella verifica a-posteriori fatta nella precedente sperimentazione.

Dall’analisi dei questionari svolti singolarmente dagli allievi si nota una buona prevalenza di risposte corrette. In particolare, dalle motivazioni prodotte emerge che la maggior parte di essi nel rispondere, questa volta, si attiene alle sole informazioni presenti nel testo e usa in modo consapevole i connettivi logici (si vedano ad esempio i protocolli delle Figure 37 e 38).

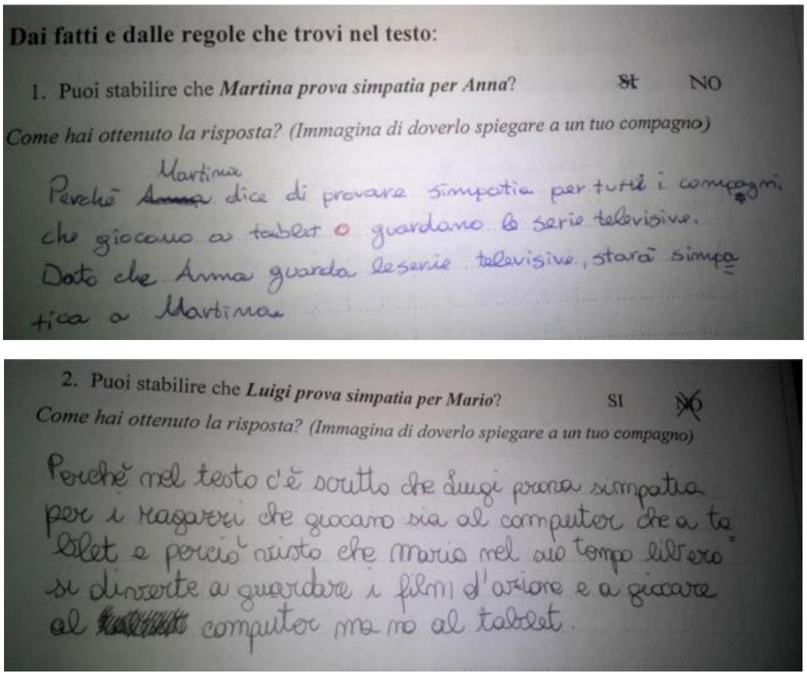
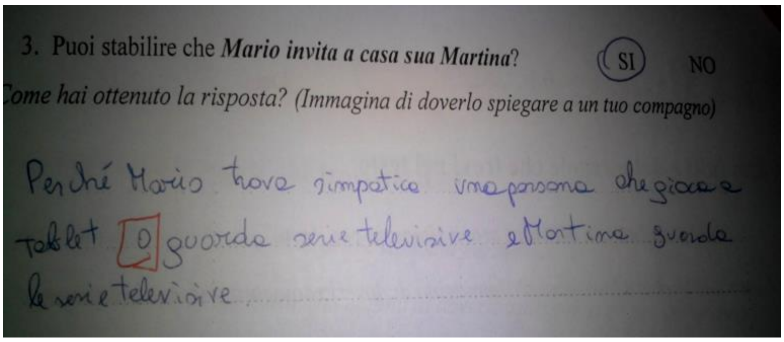


Figura 37 – Protocolli 48′ e 40′



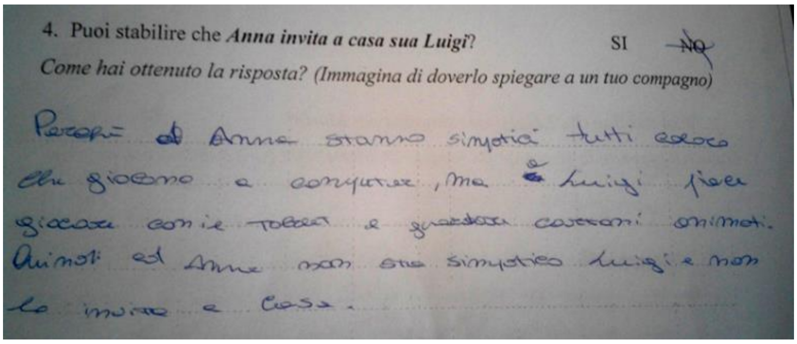


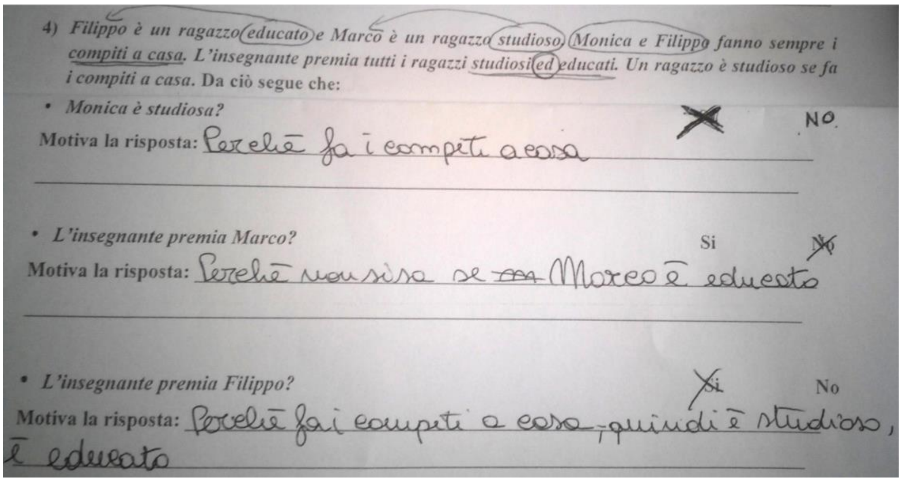
Figura 38 – Protocolli 41′ e 32′

Il fatto che in questo caso le risposte al questionario siano in buona parte corrette fa supporre che gli allievi abbiano acquisito una strategia risolutiva nell'analisi e comprensione di un testo.

Un'ulteriore conferma di ricaduta positiva dell'attività svolta durante la sperimentazione è arrivata alcuni mesi dopo, quando agli stessi allievi è stata somministrata una verifica complessiva, sui contenuti trattati durante l'intero corso pomeridiano, nella quale ho inserito due quesiti.[53] Nel primo quesito, in accordo con l'attività svolta, era prevista la lettura di un breve testo e la risposta a tre domande di comprensione (ovvero deducibilità di fatti dal teso)[54]. Nel secondo quesito "di tipo matematico" era data la definizione di "numeri primi gemelli" e la richiesta di stabilire se per tre coppie di numeri dati era verificata tale definizione. Scopo di tale quesito era quello di verificare se le capacità che si sono sviluppate durante le attività sperimentali in un ambito non matematico, vengano poi trasferite anche in ambito matematico.

Nella figura seguente è riportato il protocollo di un allievo, relativamente al primo quesito, che risponde correttamente alle domande, dopo aver selezionato parti del testo (Figura 39).

[53] La verifica trattava argomenti relativi non solo all'attività da me solta. Inoltre, essa è stata somministrata da un altro docente senza la mia presenza.
[54] Il testo proposto corrisponde a quello utilizzato durante la fase di nuova deduzione svolta con gli allievi della primaria.



4) *Filippo è un ragazzo educato e Marco è un ragazzo studioso. Monica e Filippo fanno sempre i compiti a casa. L'insegnante premia tutti i ragazzi studiosi ed educati. Un ragazzo è studioso se fa i compiti a casa.* Da ciò segue che:

- *Monica è studiosa?* NO

Motiva la risposta: Perchè fa i compiti a casa

- *L'insegnante premia Marco?* Si No

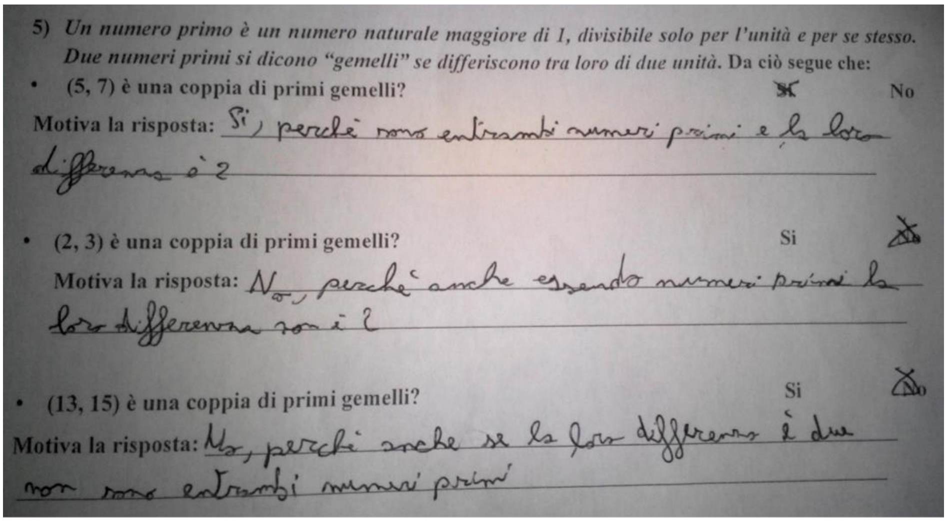
Motiva la risposta: Perchè non si sa se Marco è educato

- *L'insegnante premia Filippo?* Si No

Motiva la risposta: Perchè fa i compiti a casa, quindi è studioso, è educato

Figura 39 – Protocollo 10′

Anche per il quesito "matematico", molti rispondono correttamente rispettando le "regole" della definizione (Figure 40).



5) *Un numero primo è un numero naturale maggiore di 1, divisibile solo per l'unità e per se stesso. Due numeri primi si dicono "gemelli" se differiscono tra loro di due unità.* Da ciò segue che:

- (5, 7) è una coppia di primi gemelli? Si No

Motiva la risposta: Si, perchè sono entrambi numeri primi e la loro differenza è 2

- (2, 3) è una coppia di primi gemelli? Si No

Motiva la risposta: No, perchè anche essendo numeri primi la loro differenza non è 2

- (13, 15) è una coppia di primi gemelli? Si No

Motiva la risposta: No, perchè anche se la loro differenza è due non sono entrambi numeri primi

Figura 40 – Protocollo 3′

Analizzando i risultati complessivi della verifica, è emerso che la maggior parte degli allievi che ha risposto correttamente a questi due particolari quesiti sono risultati coloro che avevano partecipato a tutta o almeno alla gran parte dell'attività sperimentale.

CONCLUSIONI

Il lavoro di ricerca qui presentato, ha voluto mostrare, in particolare, che attività di tipo logico-deduttivo sono possibili anche con allievi dei primi livelli scolastici e risultano importanti per lo sviluppo di abilità nella deduzione.

I risultati provenienti dai questionari iniziali relativi alla fase di "comprensione del testo scritto", effettuati nelle diverse sperimentazioni individualmente dagli allievi, sembrano far emergere che le loro difficoltà non sono legate all'età ma al tipo di formazione scolastica che mira più ai contenuti che allo sviluppo di capacità deduttive. Infatti, pur cambiando il livello di scuola, non cambiano in maniera evidente le difficoltà evidenziate dagli allievi nell'analizzare un testo e dedurre informazioni da esso.

Di contro, i risultati provenienti dai questionari svolti alla fine degli interventi, fanno rilevare dei miglioramenti negli allievi di entrambi i livelli scolastici circa le loro capacità di analizzare un testo e ricavare informazioni da esso.

Un contributo positivo sembra provenire dalle attività svolte, orientate non ai contenuti ma a supportare lo sviluppo di abilità deduttive, in cui è risultata fondamentale la scelta di introdurre una concretizzazione dell'artefatto-linguaggio, che ha portato ad eliminare anche le interferenze tra significati ed esperienze preesistenti.

Da questa ricerca sembra emergere, in accordo con le teorie sull'utilizzo degli artefatti matematici in ambito educativo, che l'uso delle tessere nelle attività sperimentali, abbia:

- favorito opportunità di apprendimento promosse attraverso la discussione collettiva su un oggetto comune a cui tutti potevano riferirsi;
- reso il linguaggio un oggetto concretamente manipolabile e uno strumento di deduzione logica;
- consentito agli allievi di fare "dimostrazioni" visualizzandone la struttura "fisica" senza interferenze di tipo semantico.

Presumibilmente, un'attività di questo tipo non avrebbe gli stessi risultati, se realizzata utilizzando solo carta e penna. In tal senso, sarebbe interessante esplorare altre potenzialità legate all'utilizzo dell'artefatto "tessere".

Tra le prospettive future vi è l'idea di sperimentare, sempre con bambini della scuola primaria, altre attività partendo da un testo il cui contenuto sia più oggettivo (ad esempio argomenti di scienze), sempre però vicino alle conoscenze dei bambini. Lo scopo sarebbe quello di analizzare se, non trattandosi, in tal caso, di relazioni affettive, i bambini facciano comunque inferenze dal testo legate a esperienze personali o, in questo caso, si attengono strettamente al testo. Inoltre, si è pensato di sperimentare attività dello stesso tipo anche con allievi della scuola secondaria di secondo grado, eventualmente partendo da un testo di contenuto matematico.

Vi è, infine, l'idea di esplorare le potenzialità della programmazione logica anche per gli aspetti semantici (per costruire modelli finiti) e di sfruttare altri frammenti della logica classica (come la logica monadica o i sillogismi) per realizzare nuove attività sperimentali.

BIBLIOGRAFIA

Antonini S. (2006). Negare in matematica: una classificazione dal punto di vista cognitivo, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 298, 41-66.

Arzarello F., Sabena C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities, *Educational Studies in Mathematics*, 77, 2-3, 189-206.

Bagni G.T. (2005). Quantificatori esistenziali: simboli logici e linguaggio nella pratica didattica, *L'educazione matematica*, XXVI-VIII, I, 2, 8-26.

Bagni G.T. (2007). *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti, figure,* Aracne Ed., Roma.

Barbin E. (1994). La dimostrazione in matematica: significati epistemologici e questioni didattiche, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 17B (3), 209-246.

Barra M., Zanardo A. (a cura di). (1988). *La Logica Matematica nella Didattica. Atti degli incontri di Logica Matematica*, 5, Roma.

Bartolini Bussi M.G. (1996). Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 11-41.

Bartolini Bussi M.G. (2009). *Proof and proving in primary school: an experimental approach*, ICMI Study 19.

Bartolini Bussi M.G. (2010). Historical Artefacts, Semiotic Mediation and Teaching Proof. In G. Hanna, H.N Jahnke, H. Pulte, *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives*, Berlin, Springer, 151-168.

Bartolini Bussi M.G., Boero P. (1988). Quadro teorico per una ricerca didattica sull'approccio ai teoremi, *Seminario Didattico di Pisa*.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 32, n.3, 270-294.

Bernardi C. (2002). Ricerche in Didattica della Matematica e in Matematiche Elementari, *Bollettino Unione Matematica Italiana*, VIII, vol. V-A, 193-213.

Bonotto C., Zanardo A. (1990). Linguaggi naturali e linguaggi artificiali. Procedimenti logici e linguaggio della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 13, 10, 955-974.

Bruner J., Wood D., Ross G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving, *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17.

Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge: Harvard University Press (tr.it. *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale*. Torino: Bollati Boringhieri, 1992).

Casadio C. (2006). *Logica e Psicologia del pensiero,* Carocci editore, Roma.

Cellucci C. (1989). L'insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie. In M. Barra, A. Zanardo (a cura di), *Atti del XII incontro di Logica Matematica La logica matematica nella didattica*, Siena, 121-135.

Cellucci C. (2005). *Le ragioni della logica*. Laterza.

Coppola C., Donato D., Gerla G., Pacelli T. (2007). Materiali poveri e calcolatori per la logica matematica, *Atti del Convegno "Modelli e Tecnologie per la Nuova Didattica della Matematica"*, Positano, Salerno.

Coppola C., Gerla G., Pacelli T. (2007). Un progetto di ricerca: logica matematica per lo sviluppo di abilità dimostrative, *Periodico di Matematiche*, 1, 41-52.

Coppola C., Mollo M., Pacelli T. (2010a). Deduzione come manipolazione linguistica: un'esperienza in una scuola primaria, *L'educazione matematica*, XXXI, 1, vol. 2, n. 3, 5 – 22.

Coppola C., Mollo M., Pacelli T. (2010b). Logica matematica, linguaggio e sviluppo delle capacità cognitive. In *Logica Matematica e Processi Cognitivi*, G. Gerla (a cura di), Rubettino Ed., Catanzaro, 57-66.

Coppola C., Mollo M., Pacelli T. (2014). Manipolazione di un linguaggio socialmente costruito in una classe di scuola primaria: costruzione del concetto di equivalenza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 37 A, n. 1, 7-33.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora Editrice, Bologna.

D'Amore B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 28- 47.

D'Amore B., Plazzi P. (1992). La didattica della logica dei predicati. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 10, 1019-1039.

Dapueto C., Ferrari P.L. (1988). Educazione logica ed educazione matematica nella scuola elementare, *L'insegnamento della Matematica*, vol.11.

Dapueto C. (2012). Quale logica (matematica) a scuola? In *Logica, linguaggio e didattica della matematica*, G. Gerla (a cura di), FrancoAngeli Ed., Milano, 111-120.

Dello Iacono U., Lombardi L. (2015), *An artefact for deductive activities: a teaching experiment with primary school children*, in stampa su Proceeding of CIEAEM 67, Aosta.

Donaldson M. (2010). *Children's Mind*, trad. it. Postfazione di Bartolini Bussi M. G. e Zan R., *Come ragionano i bambini*, Springer-Verlag Italia.

Douek N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school, *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3), 89-110.

Dovier A. Formisano A., *Programmazione Dichiarativa con Prolog, CLP, CCP, e ASP,* http://www.dimi.uniud.it/~dovier.

Durand-Guerrier V., Boero P., Douek N., Epp S., Tanguay D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. In G. Hanna, M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*, 369-389. New York, Springer.

Duval R. (1992). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?*, Pitagora editrice, Bologna.

Ferrari P.L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 26A, n.4, 469-496.

Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico per la didattica*. Bologna, Pitagora Editrice.

Ferrari P.L., Gerla G. (2015). Logica e didattica della matematica, in *Le direzioni della ricerca logica in Italia*, Edizioni della Normale, 143-184.

Ferro R. (2010). Che cos'è la matematica realmente ? in *Logica Matematica e Processi Cognitivi*, G. Gerla (a cura di). Rubettino Ed., Salerno, 75-84.

Gentilini P. (2005). Progettazione del Curricolo di Matematica: competenze, metodi, interazioni fra Dimostrazione e Argomentazione, in P. Gentilini, *Matematica: temi e metodi per la Scuola Superiore*, Edistudio Ed., Milano, 49-92.

Gerla G. (1988). L'insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie, *La logica matematica nella didattica, Atti del XII Incontro AILA*.

Gerla G., Sestito L., Vescia S. (1990). Linguaggi algebrico-procedurali nella scuola elementare: un progetto di ricerca. *La matematica e la sua didattica*, 4, 39 -48.

Gopnik A. (2009). *The Philosophical Baby. What Children's Mind Tell Us about Thuth, Love, and the Meaning of Life*, (traduz. ital. *Il bambino filosofo*, Bollati Boringhieri, 2010).

Krzysztof R. Apt. (1997). *From Logic Programming to Prolog*. International Series in Computer Science Prentice Hall.

Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (2012). www.indicazioninazionali.it

Lloyd J.W. (1987). *Foundations of Logic Programming*. Springer-Verlag.

Lolli G. (1988). *Capire una dimostrazione.* Bologna, il Mulino.

Lolli G. (1991). *Introduzione alla logica formale.* Bologna, il Mulino.

Lolli, G. (2008). Why mathematicians do not love logic, Relazione al convegno: *Linguaggio, Verità e Storia in Matematica*, Mussomeli, 9 febbraio 2008.

Lolli G. (2014). *Se viceversa; Trenta pezzi facili e meno facili di Matematica*, Bollati Boringhieri.

Lombardi L. (2015), *Un artefatto a supporto di abilità deduttive nella scuola primaria*, in stampa su Atti XX Convegno UMI, Siena.

Malara N.A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la meta conoscenza, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 10, 927-954.

Marchini C. (1987). Argomentazione e dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 10, 2, 121-140.

Marchini C. (1989). Logica proposizionale nella scuola, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 28-37.

Marchini C. (1996a). Schemi di deduzione, in L. Ciarrapico, D. Mundici (a cura di). *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma, Direzione generale dell'Istruzione Classica, 107-132.

Marchini C. (1996b). La deduzione: esperienze didattiche. In L. Ciarrapico, D. Mundici (a cura di). *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma, Direzione generale Istruzione Classica, 159-175.

Mariotti M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education, in A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of*

Mathematics Education, Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands, 173-204.

Mariotti M.A. (2009a). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher, ZDM *Mathematics Education*, 41, 427-440.

Mariotti M.A. (2009b). La dimostrazione e la sua pratica nell'insegnamento della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32, A-B, 6, 611-660.

Navarra G. (1993). Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative. Versione italiana della relazione presentata all'ICME 7, Quèbec (Canada), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 8, 731-756.

Norman D.A. (1991). *Cognitive artifacts*, John M. Carroll (red), Designing interaction, Cambridge University Press, Cambridge.

Norman D.A. (1993). *Things that make us smarts*, Addison-Wesley Pub. Com (traduz. ital. *Le cose he ci fanno intelligenti*, Feltrinelli, 1995).

Palladino D. (2002). *Corso di Logica. Introduzione elementare alla logica dei predicati*. Carocci, Roma.

Pedemonte B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.

Piaget J. (1967). *Biologie et Connaissance*. Paris, Gallimard.

Pólya G. (1948). *How to solve it, A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*, Paris, A. Colin.

Rosolini G. (2010). La resa della logica. In *Logica Matematica e Processi Cognitivi*, G. Gerla (a cura di), Rubettino Ed., Catanzaro, 107-115.

Toffalori C. (2010). Matematico e investigatore? In *Logica Matematica e Processi Cognitivi*, G. Gerla (a cura di), Rubettino Ed., Catanzaro, 117-123.

Tortora R. (1998). Logica e linguaggio. *Atti del IV Corso MPI in Didattica della Matematica*, Lucca, 1997, Matteoni, Lucca, 188-192.

Tortora R. (2001). Una proposta sull'insegnamento della logica nella scuola media inferiore. In G. Navarra, M. Reggiani, R. Tortora (a cura di). Valutazione dei processi di apprendimento con particolare riferimento alle difficoltà, *Atti del III Internuclei Scuola dell'Obbligo*, Napoli, 24-30.

Tortora R., Vaccaro V. (1999). Logica "naturale" e logica matematica: d'amore e d'accordo? In B. Jannamorelli, A. Strizzi (a cura di). *Allievo, Insegnante, Sapere: dagli studi teorici alla pratica didattic*a, *Atti del 4° Seminario internazionale di Didattica della matematica*, Sulmona, 152-156.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46.

Vygotskij, L.S. (1934). *Thought and language.* Moscow-Leningrad: Sozekgiz. (Trad. It.*: Pensiero e Linguaggio*, Feltrinelli, Milano, 1990).

Vygotskij, L.S. (1935). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*, Giunti Barbera, Firenze, trad. it. 1973.

Vygotskij L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Wason P. C. (1966). *Reasoning*. In B. Foss (ed.), New Horizons in Psychology, Penguin, Harmondsworth, 135-151.

Zan R. (2007). Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire. Springer-Verlag, Milano.

RINGRAZIAMENTI

Al termine di questi tre anni di dottorato vorrei ringraziare tutte le persone che a vario titolo mi hanno accompagnato durante questo percorso.

Per la realizzazione del mio lavoro di ricerca, un ringraziamento particolare va al professor Giangiacomo Gerla per il suo prezioso contributo e per tutto il tempo che mi ha dedicato. Un grazie anche alla professoressa Giovannina Albano per la sua disponibilità e i suoi utili consigli.

Ringrazio tutto il gruppo di ricerca in didattica, il "dream team", con cui ho condiviso questa bella esperienza. Un ringraziamento particolare va a Cristina e Tiziana, che durante questi anni mi hanno sempre incoraggiata e supportata nell'attività di ricerca, e a Umberto con il quale ho condiviso una parte di questo lavoro.

Ringrazio, per la loro disponibilità, tutte le insegnanti delle scuole che mi hanno consentito di svolgere le varie attività sperimentali con i loro allievi.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, a mio marito senza il quale tutto questo non sarebbe stato possibile e alle mie adorate figlie, Chiara e Giulia, alle quali ho fatto spesso mancare la mia presenza.