

Abstract

Lo scopo di questa ricerca è la costruzione e l'analisi di nuove famiglie di metodi numerici per l'integrazione di equazioni differenziali ordinarie (ODEs) del secondo ordine di tipo speciale. Modelli di sistemi dinamici continui nel tempo, basati su equazioni differenziali del secondo ordine sono utilizzati in molti campi applicativi, come la meccanica celeste, la sismologia, la dinamica molecolare, o derivano dalla semidiscretizzazione di equazioni differenziali alle derivate parziali (che porta a sistemi stiff di grandi dimensioni). Anche se il trattamento numerico di questo problema è stato ampiamente discusso in letteratura, l'interesse in questo settore è ancora vivo, perché tali equazioni in genere presentano problemi tipici (ad esempio stiffness, metastabilità, periodicità, ampie oscillazioni) di difficile integrazione, che devono essere superati in modo efficiente utilizzando opportuni integratori numerici. Lo scopo di questa ricerca è duplice: in primo luogo costruire una famiglia generale di metodi numerici per ODEs del secondo ordine del tipo $y'' = f(y(t))$, al fine di fornire un approccio unificante per l'analisi delle proprietà di consistenza, zero-stabilità e convergenza; in secondo luogo costruire metodi special purpose, ossia metodi che seguono il comportamento oscillatorio o periodico della soluzione del problema. In questo lavoro, ci occupiamo di problemi a valori iniziali basati su ODEs del secondo ordine del tipo

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t)), & t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \\ y'(t_0) = y'_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (1)$$

dove la funzione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ non dipende esplicitamente da y' ed è supposta sufficientemente regolare, in modo tale da assicurare che il corrispondente problema (1) sia ben posto secondo Hadamard. Sebbene il problema (1) possa essere trasformato in un sistema di ODEs del primo ordine di dimensione doppia e risolto mediante formule standard per i sistemi di equazioni differenziali del primo ordine, tuttavia, lo sviluppo di

metodi numerici per la sua integrazione diretta risulta più naturale ed efficiente. Abbiamo considerato i metodi generali lineari (GLMs) per equazioni differenziali del secondo ordine, con l'obiettivo di fornire un approccio unificante per l'analisi delle proprietà di base dei metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie. Questa classe di metodi contiene propriamente tutti i metodi classici noti in letteratura, quali i metodi lineari multistep, i metodi Runge-Kutta-Nyström, i metodi ibridi a due passi di Coleman e i metodi Runge-Kutta-Nyström a due passi, come casi particolari. La famiglia di metodi che abbiamo considerato è più ampia e generale rispetto a quelli classici: infatti, i nuovi metodi dipendono da altri parametri che possono essere sfruttati, ad esempio, per fornire un migliore equilibrio tra ordine di convergenza e proprietà di stabilità.

Una teoria sistematica dei GLMs per ODEs del primo ordine è dovuta a Butcher, al fine di fornire un quadro unificante per l'approccio alle questioni fondamentali di consistenza, convergenza e stabilità dei metodi numerici per ODEs. È importante osservare che la scoperta di una teoria dei GLMs "ha aperto la possibilità di ottenere nuovi metodi che non erano né Runge-Kutta, né metodi lineari multistep, né variazioni di questi metodi". Nella prima parte di questa tesi gettiamo le basi per fondare la teoria dei GLMs per ODEs del secondo ordine. La seconda parte invece, è dedicata alla costruzione e all'analisi di metodi special purpose, che rappresentano un approccio efficiente al problema (1) in presenza di periodicità ed ampie oscillazioni nella soluzione; in particolare, ci occupiamo dei cosiddetti metodi exponentially fitted. I metodi numerici classici per ODEs infatti, non sono adatti a riprodurre il comportamento periodico od oscillante della soluzione, perché è richiesto un passo di integrazione molto piccolo, con conseguente deterioramento delle performances numeriche, soprattutto in termini di efficienza. Per tale ragione, molti metodi numerici classici sono stati adattati in modo da seguire l'andamento oscillante della soluzione. Uno dei possibili modi di procedere in questa direzione può essere imporre che un metodo numerico integri esattamente (a meno degli errori di round-off) problemi del tipo (1), la cui soluzione può essere espressa come combinazione lineare di funzioni diverse da quelle polinomiali.