

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI FISICA “E. R. CAIANIELLO”

DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA, FISICA ED APPLICAZIONI
CURRICULUM MATEMATICA



TESI DI DOTTORATO IN

Lo pseudotensore energia-impulso in teorie estese della gravitazione

DISCUSSIONE SOTTOPOSTA
PER IL TITOLO DI DOTTORE DI RICERCA

CANDIDATO
Maurizio Capriolo

TUTOR
Prof.ssa Maria Transirico

COORDINATORE
Prof. Roberto Scarpa

CO-TUTOR
Prof. Salvatore Capozziello

XXX Ciclo

A.A. 2017 - 2018

Ai miei genitori Costantino e Mafalda
ed al mio adorato fratello Ettore.

I ringraziamenti

Desidero ringraziare la Prof.ssa Maria Transirico ed il Prof. Salvatore Capozziello per i preziosi e puntuali suggerimenti e per la continua motivazione infusami per raggiungere questo traguardo.

Le definizioni dell'energia e della quantità di moto del campo gravitazionale sono trattate in teorie estese della gravitazione, attraverso la generalizzazione dello pseudotensore energia-impulso, definito da Einstein in relatività generale. Tale estensione è stata ottenuta modificando la lagrangiana di Hilbert-Einstein o utilizzando una connessione differente da quella di Levi-Civita come quella di Weitzenböck per le teorie teleparallele. Abbiamo prima ricavato lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale per lagrangiane estese che dipendono dalla metrica $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate fino all'ordine n -esimo e poi dimostrato, in generale, il suo carattere affine e non covariante. Quindi abbiamo applicato il limite di campo debole alle equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana che dipende linearmente dai termini $\square^k R$ e ricavato le onde gravitazionali modificate con sei stati di polarizzazione, tre trasversali e tre non, ad elicità 0 e 2. Successivamente abbiamo ricavato, tramite il teorema di Noether per traslazioni rigide infinitesime, il relativo pseudotensore energia-impulso e dopo averlo sviluppato all'ordine h^2 ed averlo mediato su di un opportuno dominio abbiamo calcolato la potenza emessa da una possibile sorgente radiante gravitazionale. Per le gravità $f(R)$ e $f(T)$ abbiamo ricavato i rispettivi pseudotensori energia-impulso e, grazie al termine ai bordi B che connette la curvatura R alla torsione T , abbiamo studiato il relativo pseudotensore $\tau^\alpha_{\lambda|\omega(T,B)}$ che ci permette di collegare $\tau^\alpha_{\lambda|f(R)}$ e $\tau^\alpha_{\lambda|f(T)}$. Infine abbiamo ricavato le equazioni per due teorie della gravità teleparallela di ordine superiore: in particolare per le lagrangiane $L_{\square^k T} = h \left(T + \sum_{k=0}^p a_k T \square^k T \right)$ e per la gravità teleparallela del sest'ordine equivalente a $L_{R\square R} = \sqrt{-g} (-R + a_0 R^2 + a_1 R \square R)$.

Indice

Elenco delle figure	xiii
Elenco delle tabelle	xv
Introduzione	xvii
1 L'ambiente geometrico	1
1.1 La connessione sui fibrati principali	1
1.2 La torsione e la curvatura di una connessione	2
1.3 Interpretazione geometrica della curvatura e della torsione	8
2 Le teorie estese della gravità	11
2.1 La relatività generale	11
2.2 Le teorie estese della gravità	17
2.2.1 Esempi di teorie estese della gravità ETG	21
2.3 Il Teleparallelismo	24
2.3.1 La teoria teleparallela equivalente alla relatività generale	25
2.3.2 Le teorie estese della gravità teleparallela	28
3 Lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale in relatività generale	29
3.1 Lo pseudotensore energia-impulso di Einstein	29
3.2 Lo pseudotensore energia-impulso di Landau-Lifshitz	30
3.3 Il complesso dei contributi energia-impulso di Møller	32
3.4 Lo pseudotensore energia-impulso di Papapetrou	33
3.5 Lo pseudotensore energia-impulso di Weinberg	34
4 Il limite di campo debole della gravità di ordine superiore	37
4.1 Le equazioni di campo nell'approssimazione di campo debole	37

4.2	Il limite newtoniano	40
4.2.1	Primo metodo	40
4.2.2	Secondo metodo	41
4.3	La soluzione delle equazioni di campo	43
4.3.1	La soluzione particolare	43
4.3.2	La soluzione omogenea	45
4.4	La polarizzazione e gli stati di elicità nel vuoto	48
5	Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità di ordine superiore	57
5.1	Lo pseudotensore energia-impulso gravitazione nella lagrangiana di ordine n	59
5.2	La non covarianza del tensore energia-impulso del campo gravitazionale	64
5.3	Lo pseudotensore energia-impulso della gravità di ordine superiore al quarto	67
5.4	Il limite di campo debole dello pseudotensore energia-impulso	71
5.5	La media dello pseudotensore energia-impulso	75
5.6	Le conclusioni	78
6	Lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale: i casi $f(R)$ e $f(T)$	81
6.1	Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità $f(R)$	82
6.2	Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità $f(T)$	85
6.3	Lo pseudotensore energia-impulso del termine $\omega(T, B)$	88
6.4	Dalla gravità $f(R)$ alla gravità $f(T)$ e viceversa grazie al termine al bordo $\tau_{\lambda \omega(T,B)}^{\sigma}$	91
6.5	Le conclusioni	92
7	La gravità teleparallela di ordine superiore	93
7.1	La gravità teleparallela del sest'ordine	93
7.2	Le equazioni di campo della gravità teleparallela di ordine superiore	95
7.3	Le equazioni di campo della gravità teleparallela di ordine superiore non equivalente alla gravità riemanniana	96
8	Le conclusioni	99
	Appendice A	103
A.1	Formule utili	103
A.2	I conti in dettaglio	104
A.2.1	Le equazioni di campo nel limite di campo debole	104

A.2.2	Il limite newtoniano	109
A.2.3	La soluzione particolare	110
A.2.4	La soluzione omogenea	111
A.2.5	La polarizzazione e gli stati di elicità nel vuoto	114
Appendice B		117
B.1	La media dei termini $\langle (A_p)_\alpha^\eta \rangle$ e $\langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle$	117
Appendice C		121
C.1	Formule utili	121
C.2	Le principali variazioni	121
L'elenco dei lavori		123
La bibliografia		125

Elenco delle figure

- 1.1 Interpretazione geometrica della curvatura. Il trasporto parallelo del vettore A dal punto m al punto o della varietà lungo i due percorsi C e C' . La curvatura misura la differenza tra i vettori $A_C(o)$ e $A_{C'}(o)$ 9
- 1.2 Interpretazione geometrica della torsione. Il vettore nr è il vettore ρ^α trasportato parallelamente mentre il vettore ps è il vettore σ^α parallelo. I punti r ed s in generale non coincidono e la torsione misura il vettore rs . . 10

Elenco delle tabelle

4.1	Classificazione delle onde nel vuoto	48
4.2	Polarizzazione ed elicità	55

Introduzione

Una teoria della gravitazione deve rispondere essenzialmente a due domande: come il campo gravitazionale influenza il comportamento della materia e come la materia è determinata dal campo gravitazionale. La teoria gravitazionale di Newton lo fa attraverso due famose equazioni, la legge dell'inverso del quadrato e la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_g m_g}{r^2} \mathbf{e}_r \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_i}$$

Equivalentemente in termini del potenziale gravitazionale Φ legato alla densità di massa ρ tramite l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

e legato all'accelerazione tramite il gradiente

$$\mathbf{a} = \nabla \Phi$$

con m_g ed m_i rispettivamente massa gravitazionale ed inerziale. La meccanica classica è invariante in forma sotto il gruppo di Galileo a dimensione dieci e questo ci permette di definire una scelta arbitraria di una classe che chiamo riferimenti inerziali che introducono il principio di relatività galileana in base al quale le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Esiste una precisa relazione tra gruppo di simmetria e leggi di conservazione. Se il sistema fisico è invariante sotto il gruppo a dieci parametri di simmetrie allora dieci grandezze fisiche sono conservate: l'energia, il vettore della quantità di moto, il vettore momento angolare ed il vettore velocità del baricentro. Nel sistema solare la teoria di Newton funziona bene perché vale

$$m|\Phi| \ll mc^2$$

dove mc^2 è l'energia a riposo. Tuttavia la meccanica newtoniana non è compatibile con l'elettromagnetismo perché le equazioni di Maxwell non sono invarianti in forma per trasformazioni di Galileo ma lo sono per trasformazioni di Lorentz. Ecco quindi la necessità di un principio di relatività più generale di quello galileano per poter raccordare la meccanica e l'elettromagnetismo. Einstein nel 1905 formula la relatività speciale che descrive tutte le leggi della fisica quando spegniamo la gravità. Essa è basata sul postulato di relatività per cui tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali ovvero sono covarianti sotto il gruppo di simmetria di Poincaré di dimensione dieci e sul postulato di costanza della velocità della luce nel vuoto in riferimenti inerziali. L'equivalenza tra tutti i sistemi inerziali impone una precisa forma alle leggi della fisica. L'equivalenza tra massa ed energia ad esempio viene fuori dall'aver imposto l'invarianza in forma sotto il gruppo di Poincaré della conservazione dell'energia e della quantità di moto. Quindi i principi di relatività e di covarianza impongono la forma delle equazioni della fisica. La gravità di Newton tuttavia prevede che il campo gravitazionale si propaghi istantaneamente e non ci dice nulla circa il suo modo di trasformarsi da un sistema di riferimento ad un altro contro visione relativistica. Inoltre su scale cosmologiche dell'ordine del raggio di Hubble $R_H = 10^{28}$ cm l'energia potenziale gravitazionale newtoniana è dell'ordine dell'energia a riposo mc^2 ovvero

$$m|\Phi| \sim mc^2$$

e quindi nasce l'esigenza di una teoria gravitazionale relativistica. Per fare questo bisogna estendere ulteriormente il principio di relatività non più limitandolo a sistemi di riferimento privilegiati come quelli inerziali ma generalizzandolo a qualsiasi riferimento: le leggi della fisica sono le stesse in tutti i riferimenti e sono covarianti sotto il gruppo dei diffeomorfismi (principio di covarianza generale). A questo va aggiunta una proprietà tipica della gravità cioè la sua universalità. Essa si accoppia a tutto allo stesso modo e ciò ci permette di scegliere la giusta struttura geometrica. Mentre è sempre possibile con un insieme di osservatori inerziali misurare il campo elettromagnetico che sente un corpo di prova carico osservando le deviazioni dal loro moto geodetico ciò non lo si può fare con il campo gravitazionale perché localmente gli osservatori seguono le stesse geodetiche dei corpi di prova. Questo fa sì che al concetto di forza si sostituisca quello di curvatura per descrivere la gravità quindi la gravità viene geometrizzata: i moti dei corpi in caduta libera altro non sono che le geodetiche di tipo tempo dello spaziotempo curvo. Dall'accoppiamento universale della gravitazione nasce l'identificazione della gravità con la geometria: se non dovesse valere il principio di equivalenza tale identificazione potrebbe non esserci più. È possibile tuttavia misurare le forze di marea tra punti vicini dove il

campo gravitazionale non è uniforme semplicemente misurando l'accelerazione relativa delle geodetiche seguite da tali punti in caduta libera governata dalle equazioni delle geodetiche che è direttamente collegata alla curvatura dello spaziotempo. Per rispondere alla domanda iniziale le equazioni di Einstein ci dicono come lo spazio influenza la materia

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

mentre dalle identità contratte di Bianchi segue l'equazione di "continuità":

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

che ci dicono come la materia risponde ad un campo gravitazionale cioè rappresentano dei vincoli al moto della materia. Un primo grande problema che la relatività generale pone è una non univoca definizione dell'energia e della quantità di moto del campo gravitazionale. In relatività ristretta sappiamo che l'equazione di conservazione locale dell'energia-impulso porta automaticamente alla conservazione di quattro grandezze P^{μ} espresse con gli integrali sul volume V ai cui bordi si annullano o vanno rapidamente a zero i campi

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_0 T^{0\nu} = -\partial_i T^{i\nu} \quad \rightarrow \quad P^{\nu} = \int_V T^{0\nu} d^3x$$

che possiamo identificare con l'energia e la quantità di moto associata ai campi ed alla materia. In relatività generale grazie al principio di minimo accoppiamento tale equazione di continuità va scritta come $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ che non rappresenta nessuna legge di conservazione perché si può scrivere come

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0$$

Questo è dovuto al fatto che a conservarsi devono essere l'energia e l'impulso della materia più quelli del campo gravitazionale non solo quelli della materia $T^{\mu\nu}$. Einstein quindi formulò una legge di conservazione che tenesse conto di ciò introducendo lo pseudotensore $t^{\mu\nu}$ relativo all'energia-momento del campo gravitazionale

$$\partial_{\mu} (\sqrt{-g} (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})) = 0$$

A causa del carattere affine del tensore $t^{\mu\nu}$ cioè della sua non covarianza sotto trasformazioni generiche e della covarianza solo sotto trasformazioni affini, l'energia ed il mo-

mento lineare gravitazionali non possono essere localizzati. La pseudotensorialità di $t^{\mu\nu}$ destò non poche perplessità da parte della comunità scientifica. Tuttavia spesso si ha a che fare con sistemi fisici isolati dove gli effetti della materia distante e della curvatura cosmologica su tali sistemi è trascurabile. Quindi possiamo studiare tali sistemi come se sufficientemente lontano dal essi lo spaziotempo divenisse piatto. Basta scegliere un dominio spaziale di integrazione che verifica la condizione di piatezza spaziale asintotica ovvero con una metrica che si raccorda con continuità alla metrica di Minkowski all'infinito spaziale dove i campi vanno rapidamente a zero per poter definire l'energia ed la quantità di moto gravitazionale

$$P^\nu = \int_V \sqrt{-g} (T^{0\nu} + t^{0\nu}) d^3x$$

Tale definizione ha il vantaggio di essere indipendente dalla scelta delle coordinate all'interno del dominio spaziotemporale purché sia verificata la condizione di piatezza asintotica. La relatività generale è molto ben verificata su scala solare molto meno se andiamo a scale galattiche, intergalattiche o addirittura cosmologiche nel regime infrarosso. Infatti per poter spiegare l'espansione accelerata all'epoca attuale, la curvatura spaziale nulla dell'universo e la piatezza delle curve di rotazione galattiche bisogna introdurre l'energia e la materia oscura se si vuole conservare la relatività einsteiniana. Questo è ciò che fa il modello Λ CDM identificando la costante cosmologica con l'energia oscura e la materia non barionica non relativistica con la materia oscura con l'aggiunta del paradigma inflazionario per risolvere i problemi di piatezza, dell'orizzonte, dei monopoli magnetici e della formazione di strutture. Questo però non risolve il problema della costante cosmologica che sperimentalmente risulta ben 120 ordini di grandezza più piccola di quella ricavata con il modello standard ed il problema della coincidenza per cui proprio all'epoca attuale la densità di energia oscura e di materia sono dello stesso ordine di grandezza. Lì dove però la relatività generale potrebbe fallire drasticamente è quando ci avviciniamo alla scala di Planck ($m_P = 2.18 \times 10^{-5}$ g, $l_P = 1.62 \times 10^{-33}$ cm, $t_P = 5.39 \times 10^{-44}$ sec, $E_P = 1.22 \times 10^{19}$ GeV) ad esempio al tempo di Planck dal Big Bang, cioè in prossimità di un buco nero ovvero a regimi ultravioletti dove la gravità diventa molto intensa. Infatti la relatività di Einstein è una teoria classica non rinormalizzabile ossia quando consideriamo correzioni quantistiche appaiono infiniti che non possono essere riassorbiti in un certo numero di parametri. A questo si aggiunge che mentre in teoria dei campi lo spaziotempo su cui è formulata è fisso e dato per sempre sia che sia piatto o curvo in relatività generale lo spaziotempo è una grandezza dinamica soluzione delle equazioni quindi non è dato a priori e questo rende difficile la quantizzazione della gravità. Tutto ciò determina la dif-

ficoltà a formulare una teoria unificata delle quattro interazioni ed allo stato attuale non esiste una teoria quantistica della gravità definitiva che sia rinormalizzabile ed unitaria nonostante vari tentativi come la teoria delle stringhe, delle superstringhe o delle supersimmetrie. Da questi limiti della relatività generale nascono le teorie estese della gravità utilizzando un paradigma differente rispetto a quello adottato in precedenza. Anziché modificare le equazioni di campo a destra con l'introduzione di materia o energia esotiche si è pensato di modificarle a sinistra ossia nella parte geometrica. Per fare ciò viene modificata la lagrangiana di Hilbert-Einstein con l'aggiunta di termini di ordine superiore negli invarianti di curvatura e/o da termini con campi scalari minimalmente o non minimalmente accoppiati alla geometria oppure adottando connessioni differenti non simmetriche con torsione che alterano il trasporto parallelo dei vettori sulla varietà. Tali teorie estese recuperano la relatività generale come caso particolare ma come nel caso del teleparallelismo in alcuni casi forniscono una descrizione equivalente alla relatività ed in qualche modo la estendono. Tali teorie come la famosa teoria di Starobinsky che introducendo il termine R^2 ottenne l'inflazione senza utilizzare campi scalari cercano di spiegare l'accelerazione dell'universo, la piatezza delle curve di rotazione galattiche ed altri parametri astrofisici direttamente modificando la geometria. Inoltre le lagrangiane sono spesso simili a quelle presenti nelle lagrangiane efficaci di stringa o supersimmetriche per cui si possono prestare più facilmente ad essere quantizzate. Tuttavia spesso introducono equazioni di campo difficilissime da risolvere, gradi di libertà aggiuntivi, modi ghost e soluzioni instabili. Tra i vari tentativi di estendere la relatività il teleparallelismo appare molto significativo. Questo perché permette di interpretare la gravità come una effettiva teoria di gauge e quindi più facilmente quantizzabile. Non necessita del principio di equivalenza come la teoria di Einstein e quindi recupera il concetto di forza gravitazionale modificando la descrizione geometrica della gravità. È la torsione a determinare la gravità in uno spaziotempo piatto dove adottiamo la connessione a curvatura nulla di Weitzenböck non la curvatura dello spaziotempo. Nel lavoro di tesi abbiamo esteso il fondamentale pseudotensore energia-impulso definito da Einstein ad alcune significative teorie estese della gravitazione con la relativa legge di conservazione e ne abbiamo studiato il limite alle basse energie. La struttura della tesi è la seguente. Nel capitolo 1 viene introdotto l'ambiente geometrico dentro al quale ci si muove. Quindi le nozioni di fibrato di fibra tipica S , di fibrato principale su varietà, di connessione sui fibrati principali, di torsione e curvatura di una connessione con le relative interpretazioni geometriche, di formalismo delle tetradi e di connessione di Weitzenböck. Nel capitolo 2 viene fatta una breve disamina delle principali teorie estese della gravità partendo dalle teorie estese scalar-tensoriali e dalle teorie della gravità di ordine superiore fino alle teorie scalar-tensoriali di ordine superiore. Dopo aver osservato

che è possibile una teoria equivalente della relatività generale nel formalismo teleparallelo, laTEGR, si è accennato alla possibilità di estenderla come fatto nella relatività di Einstein ottenendo le $f(T)$ teorie estese teleparallele. Nel capitolo 3 vengono analizzate alcune definizioni di pseudotensore energia-impulso gravitazionale in relatività generale. Quindi una breve introduzione degli pseudotensori proposti da Einstein, Landau-Lifshitz, Møller, Papapetrou e Weinberg analizzando pregi e difetti delle varie definizioni. Gli ultimi quattro capitoli riguardano il contributo originale di ricerca di questa tesi facendo riferimento a quattro lavori di ricerca uno pubblicato [A], un secondo accettato e da pubblicare [B] e i rimanenti due in preparazione [C, D].

Nel capitolo 4 partendo da una densità di lagrangiana gravitazionale $L_g = (R + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R) \sqrt{-g}$ adottando il principio variazionale abbiamo ricavato le equazioni di campo associate di ordine $2p + 4$ fortemente non lineari. Perturbando di poco la metrica in approssimazione di campo debole abbiamo ricavato le equazioni di campo linearizzate. Questo ci ha permesso di calcolarne le soluzioni sia nel vuoto che in presenza di materia ottenendo così le onde gravitazionali modificate con sei stati di polarizzazione ad elicità zero e due. Nel capitolo 5 abbiamo ottenuto il "tensore" energia-impulso gravitazionale per una lagrangiana di ordine n in due modi: variando localmente la lagrangiana gravitazionale ed imponendo che tale variazione sia nulla per traslazioni rigide essenzialmente il teorema di Noether oppure adottando una procedura suggerita da Landau [1]. Quindi abbiamo provato che il tensore è affine e non covariante e successivamente calcolato lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale per una particolare lagrangiana $L_g = (\bar{R} + a_0 \bar{R}^2 + \sum_{k=1}^p a_k \bar{R} \square^k \bar{R}) \sqrt{-g}$. Nel limite di campo debole abbiamo ricavato lo pseudotensore energia-impulso e quindi sviluppato nella perturbazione metrica h fino all'ordine h^2 e specializzato a due semplici casi dove l'indice p è uguale a 0 o 1. Abbiamo inoltre utilizzando le soluzioni delle equazioni di campo linearizzate nel limite di campo debole nel vuoto precedentemente ricavate, calcolato il valor medio dello pseudotensore su di una opportuna regione quadridimensionale scelta grande abbastanza in modo tale che ogni integrale svanisce asintoticamente. Infine il calcolo esplicito della potenza emessa da sorgenti astrofisiche è stato ottenuto per possibili applicazioni alla fisica dalle onde gravitazionali. Nel capitolo 6 abbiamo prima scritto per le teorie estese $f(R)$ le equazioni di Eulero-Lagrange e ricavato lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale applicando il teorema di Noether ad un particolare gruppo continuo ad un parametro di diffeomorfismi ovvero le traslazioni rigide ed ottenuto quindi l'equazione di continuità in presenza di materia. Successivamente abbiamo scritto le equazioni di campo relative alle teorie teleparallele modificate della gravità $f(T)$ e ricavato lo pseudotensore energia-momento del campo gravitazionale con l'equazione di continuità in presenza di materia. Quindi abbiamo ricavato per il termine $\omega(T, B)$, necessario per rendere le teorie $f(R)$

ed $f(T)$ equivalenti, le equazioni di Eulero-Lagrange ed il relativo pseudotensore. Infine attraverso i tre pseudotensori ricavati abbiamo collegato le due teorie metriche della gravitazione. Nel capitolo 7 abbiamo considerato due possibili lagrangiane teleparallele estese. La prima equivalente alla gravità del sesto ordine $L_{R\Box R} = \sqrt{-g}(-R + a_0 R^2 + a_1 R\Box R)$ evidenzia un pezzo che dipende dal termine ai bordi $B = (2/h) \partial_\mu (hT^\mu)$ con la torsione scalare T ; la seconda lagrangiana teleparallela $L_{\Box^k T} = h(T + \sum_{k=0}^p a_k T\Box^k T)$ non è equivalente a nessuna teoria in termini dello scalare di curvatura ma solo simile nella struttura a quella studiata in precedenza. Di entrambe "tramite metodi variazionali" sono state ricavate le equazioni di campo in presenza di materia. Infine nel capitolo 8 le conclusioni. Seguono tre appendici: l'appendice A è composta da alcune formule utili e dai conti in dettaglio relativi al capitolo 4 riguardanti il limite di campo debole e newtoniano, le soluzioni omogenee e quella particolare, gli stati di polarizzazione ed di elicità; l'appendice B riporta il calcolo delle medie dei termini $\langle (A_p)_\alpha^\eta \rangle = \langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle = 0$ del capitolo 5 mentre nell'appendice C vengono elencate altre formule fondamentali per la comprensione dei capitoli (6, 7) nonché le principali variazioni.

Capitolo 1

L'ambiente geometrico

1.1 La connessione sui fibrati principali

Lo spaziotempo M è una varietà quadridimensionale pseudo-riemanniana (M, g) ossia una varietà differenziabile su cui è definito il tensore metrico g , un campo tensoriale $(0, 2)$ simmetrico e non degenere, non definito positivo di segnatura $(1, 3) = (+, -, -, -)$. Quindi M è una varietà topologica, uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile localmente omeomorfo ad un aperto di R^4 , dotata di una struttura differenziale ossia di un atlante massimale liscio che la ricopre. Un *fibrato* di *fibra tipica* S su di una varietà M è una quadrupla (E, π, M, S) , con E, M, S varietà differenziabili ed un'applicazione differenziabile suriettiva $\pi : E \rightarrow M$, detta proiezione, localmente banale in E ovvero tale che per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p in M ed un diffeomorfismo $\chi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times S$ tale che $\pi_1 \circ \chi = \pi$ dove π_1 è la proiezione sulla prima coordinata. Sia G un gruppo di Lie, una G -struttura su di un fibrato E di fibra tipica S consiste in un'azione sinistra $\theta : G \times S \rightarrow S$ ed un atlante del fibrato (U_α, ψ_α) le cui funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta}$ agiscono su S tramite l'azione su G . Un fibrato di fibra tipica S con una G -struttura è chiamato G -fibrato. Un *fibrato principale* (P, π, M, G) è un G -fibrato con fibra tipica G , gruppo di Lie, dove l'azione sinistra di G su G è esattamente la traslazione sinistra cioè un fibrato le cui fibre coincidono con il gruppo di struttura è un fibrato principale. Il *fibrato dei riferimenti* è l'unione disgiunta al variare di $p \in M$ dell'insieme di tutte le basi lineari dello spazio tangente T_p in p (fibra in p) che è un fibrato principale con $GL(m, R)$ gruppo di struttura che agisce sulla fibra in p . Una connessione Γ è una struttura definita su di un fibrato principale P cioè una regola che assegna un *sottospazio orizzontale* H_u di $T_u(P)$, spazio tangente di P in $u \in P$, ad ogni $u \in P$ tale che $T_u(P) = V_u \oplus H_u$ cioè $T(P) = V \oplus H$ ed $u \rightarrow H_u$ sia differenziabile ed invariante sotto l'azione destra del

gruppo G , dove V_u è il *sottospazio verticale* di $T_u(P)$ ossia il sottospazio tangente alla fibra G_p in u . Data una connessione Γ in P definiamo la 1-forma ω a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo di Lie G chiamata *forma di connessione* come una 1-forma tale che $\omega(X)$ con $X \in T(P)$ sia quell'unica $A \in \mathfrak{g}$ tale che A^* , il campo vettoriale fondamentale corrispondente a A , sia uguale alla componente verticale di X . La connessione quindi è una regola che permette di confrontare vettori appartenenti a spazi vettoriali differenti per poterli derivare sulla varietà. Questo permette di definire il cosiddetto trasporto parallelo ovvero una regola che ci trasporta i vettori sulla varietà in modo da tenerli costanti ossia che hanno derivata nulla [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

1.2 La torsione e la curvatura di una connessione

Le variabili dinamiche nel teleparallelismo che definiremo successivamente non sono le componenti della metrica g come in relatività generale bensì i campi di tetradi. Tali campi di tetradi o vierbein $h_a(x^\mu)$ sono campi vettoriali locali sulla varietà M che in ogni punto della varietà con coordinate x^μ definiscono una base di vettori ortonormali per lo spazio tangente alla varietà nel punto che è uno spazio di Minkowski con metrica $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esprimendo la base di tetradi $\{h_a\}$ e la sua base duale $\{h^a\}$ in termini della base di coordinate (olonoma) $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$ e della base duale di coordinate $\{e^\mu\} = \{dx^\mu\}$ insieme alle relazioni di ortonormalità si ha [10, 11, 12, 13]:

$$h_a = h_a^\mu e_\mu \qquad h^a = h^a_\mu e^\mu \qquad (1.2.1)$$

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h_b^\nu \qquad (1.2.2)$$

$$h^a_\mu h_a^\nu = \delta_\mu^\nu \qquad h^a_\mu h_b^\mu = \delta_a^b \qquad (1.2.3)$$

Una *forma di connessione* ω (*connessione di spin* o *connessione di Lorentz*) di una data connessione Γ sul fibrato dei riferimenti lineari, *connessione lineare*, è una 1-forma ω a valori nell'algebra di Lie del gruppo di Lorentz $\mathfrak{so}(1, 3)$:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \omega^a_b S_a^b = \frac{1}{2} \omega^a_{b\mu} S_a^b dx^\mu \qquad (1.2.4)$$

con S_a^b una opportuna rappresentazione dei generatori di Lorentz e $\omega^a_b \in A^1(M)$ matrici di 1-forme ed $A^1(M)$ lo spazio di tutte le 1-forme [14, 15, 16]. Definiamo il *differenziale esterno assoluto* o la *derivata covariante esterna* della p -forma a valori tensoriali (r, s)

$B^a_b \in A^p(M, \mathcal{T}_s^r(M))$ come l'operatore $D : A^p(M, \mathcal{T}_s^r) \rightarrow A^{p+1}(M, \mathcal{T}_s^r)$:

$$DB^a_b = dB^a_b + \omega^a_c \wedge B^c_b - \omega^d_b \wedge B^a_d \quad (1.2.5)$$

dove l'operatore $d : A^p(M) \rightarrow A^{p+1}(M)$ è la *derivata esterna* di una p forma e $A^p(M, \mathcal{T}_s^r)$ l'insieme delle p -forme a valori tensoriali con $\mathcal{T}_s^r(M)$ l'insieme dei campi tensoriali (r, s) sulla varietà M . Otteniamo quindi l'*equazioni di struttura di Cartan*:

$$T^a = Dh^a = dh^a + \omega^a_b \wedge h^b = \frac{1}{2}T^a_{bc}h^b \wedge h^c \quad (1.2.6)$$

$$R^a_b = D\omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}h^c \wedge h^d \quad (1.2.7)$$

dove T^a ed R^a_b sono rispettivamente la *2-forma di torsione* e la *2-forma di curvatura*. Le forme T and R sono rispettivamente 2-forme a valori sull'algebra di Lie del gruppo di traslazione e del gruppo di Lorentz ossia:

$$T = T^a P_a = \frac{1}{2}T^a_{\mu\nu} P_a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.2.8)$$

$$R = \frac{1}{2}R^a_b S_a^b = \frac{1}{4}R^a_{b\mu\nu} S_a^b dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.2.9)$$

relative ad una base di coordinate $\{dx^\mu\}$ dove P_a sono i generatori delle traslazioni nello spazio tangente di Minkowski nel punto $p = \{x^\mu\}$ della varietà ovvero la fibra in tale punto del fibrato tangente. Inoltre, le forme di torsione e curvatura soddisfano le identità di Bianchi:

$$DT^a = R^a_b \wedge h^b \quad \text{prima identità di Bianchi} \quad (1.2.10)$$

$$DR^a_b = 0 \quad \text{seconda identità di Bianchi} \quad (1.2.11)$$

Allo stesso modo sia (M, π, E) un fibrato vettoriale su di una varietà M possiamo definire una connessione come una mappa bilineare $\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ cioè $(X, V) \mapsto \nabla_X V$ tale che sia $C^\infty(M)$ -lineare in $X \in \mathcal{T}(M)$, \mathbb{R} -lineare in $V \in \mathcal{E}(M)$ e soddisfi la regola di Leibniz con $\mathcal{T}(M)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali ed $\mathcal{E}(M)$ lo spazio delle sezioni lisce del fibrato vettoriale. Quindi la *derivata covariante* $\nabla_X V$ di V lungo X è la sezione della mappa ∇ . Definiamo ora i *coefficienti di connessione* ω^a_{bc} di una connessione ω in una arbitraria base di tetradi anolonoma $\{h_a\}$ come:

$$dh^a = -\frac{1}{2}f^a_{bc}h^b \wedge h^c \iff [h_b, h_c] = f^a_{bc}h_a \quad (1.2.12)$$

$$\nabla_{h_a} h_b = \omega^c_a (h_b) h_c = \omega^c_{ba} h_c \quad (1.2.13)$$

Dalla formula per la *derivativa esterna* di una 1-forma

$$d\omega (X, Y) = X\omega (Y) - Y\omega (X) - \omega ([X, Y]) \quad (1.2.14)$$

si ottiene

$$\tau (X, Y) = T^a (X, Y) h_a \quad (1.2.15)$$

$$\mathcal{R} (X, Y) h_b = R^a_b (X, Y) h_a \quad (1.2.16)$$

dove definiamo la torsione della connessione ω su M come una mappa $\tau : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$:

$$\tau (X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.2.17)$$

con τ un campo tensoriale tipo $(1, 2)$ chiamato tensore di torsione ed il tensore di Riemann di curvatura della connessione ω su M come la mappa $\mathbf{R} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ definita da:

$$\mathbf{R} (X, Y, Z) = \mathcal{R} (X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.2.18)$$

con \mathbf{R} un campo tensoriale di tipo $(1, 3)$. I coefficienti della connessione ω su M in termini della sola base di coordinate sono tradizionalmente i *simboli di Christoffel* $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ che sono legati ai coefficienti della connessione $\omega^a_{b\mu}$ nella base mista ovvero:

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} e_\alpha \quad \nabla_{e_\mu} h_b = \omega^a_{b\mu} h_a \quad (1.2.19)$$

$$\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = h_a^\alpha \partial_\mu h^a_\nu + h_a^\alpha \omega^a_{b\mu} h^b_\nu \quad (1.2.20)$$

L'equazione (1.2.20) non è nient'altro che il *postulato della tetrad* o *parallelismo assoluto* che è:

$$\nabla_\mu h^a_\rho = \partial_\mu h^a_\rho - \Gamma^\alpha_{\rho\mu} h^a_\alpha + \omega^a_{b\mu} h^b_\rho = 0 \quad (1.2.21)$$

in sostanza le vierbein sono campi vettoriali paralleli rispetto alla derivata covariante totale che tiene conto sia degli indici spaziotemporali tramite i coefficienti della connessione $\Gamma^\alpha_{\rho\mu}$ che di quelli interni tramite i coefficienti della connessione $\omega^a_{b\mu}$. Deriviamo le componenti del tensore di torsione τ e del tensore di curvatura \mathbf{R} di una arbitraria connessione

ω rispetto ad un riferimento anolonomo di campi di tetrad $\{h_a\}$:

$$\tau(h_a, h_b) = T^c{}_{ab} h_c = (\omega^c{}_{ba} - \omega^c{}_{ab} - f^c{}_{ab}) h_c \quad (1.2.22)$$

$$\mathcal{R}(h_a, h_b) h_c = R^d{}_{cab} h_d = (h_a(\omega^d{}_{cb}) - h_b(\omega^d{}_{ca}) + \omega^e{}_{cb} \omega^d{}_{ea} - \omega^e{}_{ca} \omega^d{}_{eb} - f^g{}_{ab} \omega^d{}_{cg}) h_d \quad (1.2.23)$$

Le componenti della torsione e della curvatura negli indici misti, algebrici e spaziotemporali, sono:

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + \omega^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu - \omega^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu \quad (1.2.24)$$

$$R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} + \omega^a{}_{e\nu} \omega^e{}_{b\mu} - \omega^a{}_{e\mu} \omega^e{}_{b\nu} \quad (1.2.25)$$

Mentre le componenti della torsione e della curvatura nella base naturale sono date rispettivamente da:

$$\tau(e_\mu, e_\nu) = T^\rho{}_{\mu\nu} e_\rho = (\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) e_\rho \quad (1.2.26)$$

$$\mathcal{R}(e_\lambda, e_\nu) e_\mu = R^\rho{}_{\mu\lambda\nu} e_\rho = (\partial_\lambda \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}) e_\rho \quad (1.2.27)$$

La prima identità di Bianchi per la torsione nelle componenti spaziotemporali è:

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu T^\lambda{}_{\rho\mu} + \nabla_\mu T^\lambda{}_{\nu\rho} + \nabla_\rho T^\lambda{}_{\mu\nu} \\ &= R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} + R^\lambda{}_{\nu\rho\mu} + R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} + T^\lambda{}_{\rho\sigma} T^\sigma{}_{\mu\nu} + T^\lambda{}_{\nu\sigma} T^\sigma{}_{\rho\mu} + T^\lambda{}_{\mu\sigma} T^\sigma{}_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

La seconda identità di Bianchi per la curvatura nelle componenti spaziotemporali è:

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \\ &= R^\lambda{}_{\sigma\mu\theta} T^\theta{}_{\nu\rho} + R^\lambda{}_{\sigma\nu\theta} T^\theta{}_{\rho\mu} + R^\lambda{}_{\sigma\rho\theta} T^\theta{}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

dove ∇_μ è la derivata covariante lungo la base di coordinate e_μ rispetto alla generica connessione ω . In presenza di torsione il commutatore delle derivate covarianti di una funzione scalare non commuta come in relatività generale. Infatti:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] f = -T^\rho{}_{\mu\nu} \nabla_\rho f \quad (1.2.30)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\alpha\mu\nu} V^\alpha - T^\sigma{}_{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\rho \quad (1.2.31)$$

La connessione di Weitzenböck è una connessione a curvatura nulla, metrico compatibile e nel riferimento di coordinate è definita in termini di una tetrad particolare in cui la connessione di Lorentz $\omega^a{}_{b\mu}$ si annulla. Se utilizziamo tale connessione e come variabili

dinamiche le tetradi parliamo di teleparallelismo. Quindi abbiamo:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu = -h^a{}_\mu \partial_\nu h_a{}^\rho \quad (1.2.32)$$

che soddisfa la condizione di metricità

$$\tilde{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0 \quad (1.2.33)$$

ed il postulato del parallelismo assoluto o postulato della tetrade

$$\tilde{\nabla}_\lambda h^a{}_\mu = \partial_\lambda h^a{}_\mu - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} h^a{}_\rho = 0 \quad (1.2.34)$$

Le componenti della torsione e della curvatura della connessione di Weitzenböck nella base delle coordinate sono:

$$T^\rho_{\mu\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu \quad \tilde{R}^\rho_{\mu\lambda\nu} = 0 \quad (1.2.35)$$

$$T^\rho_{(\mu\nu)} = 0 \quad (1.2.36)$$

dove $\tilde{\nabla}$ è la derivata covariante rispetto alla connessione di Weitzenböck. Tale connessione verifica sia la condizione di metricità che il postulato della tetrade. In termini di parallelismo la scelta della connessione di Weitzenböck ha una semplice interpretazione. Infatti facendo la derivata covariante di un generico campo vettoriale $V = V^\mu e_\mu = V^a h_a$ rispetto ad un campo vettoriale $X = X^\nu e_\nu$ si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X V &= X^\nu \left[\partial_\nu V^\alpha + V^\mu \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \right] e_\alpha = X^\nu \left[\partial_\nu V^\alpha + h_a{}^\alpha \partial_\nu h^a{}_\mu V^\mu \right] e_\alpha = X^\nu [h_a{}^\alpha \partial_\nu V^a] e_\alpha \\ \tilde{\nabla}_X V &= 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu V^a = 0 \end{aligned}$$

ossia il vettore V è trasportato parallelamente con la connessione di Weitzenböck lungo il campo X se le sue componenti lungo la base di tetradi sono costanti ovvero il campo di tetradi parallelizza lo spaziotempo. Gli indici latini a, b, c, \dots anche detti piatti od olonomi, si riferiscono agli oggetti tensoriali proiettati tramite le tetradi sullo spazio tangente e si abbassano ed alzano tramite il tensore di Minkowski η_{ab} cioè $F_a = \eta_{ab} F^b$ mentre gli indici greci μ, ν, \dots , detti curvi od anolonomi, si riferiscono ad oggetti tensoriali definiti sulla varietà riemanniana che si alzano ed abbassano tramite la metrica $g_{\mu\nu}$. La tetrade $h^a{}_\rho$ e la sua inversa $h_a{}^\rho$ permette quindi di proiettare un oggetto geometrico dalla varietà di Riemann allo spazio tangente e viceversa ossia $F^a = h^a{}_\rho F^\rho$ ed $F^\rho = h_a{}^\rho F^a$. La

differenza fra la connessione di Weitzenböck e quella di Levi-Civita a torsione nulla è data dal *tensore di contorsione* :

$$K^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T^{\rho}_{\mu\nu} - T^{\rho}_{\nu\mu} + T^{\rho}_{\mu\nu}) = h^{\rho}_{\alpha} \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} h^{\alpha}_{\mu} \quad (1.2.37)$$

$$K^{(\rho\mu)\nu} = 0 \quad (1.2.38)$$

dove

$$\overset{\circ}{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (1.2.39)$$

è la connessione di Levi Civita a torsione nulla ed $\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}$ è la derivata covariante rispetto alla connessione di Levi Civita. Quindi definiamo il tensore *superpotenziale* come :

$$S^{\rho\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu} T^{\sigma\nu}_{\sigma}) \quad (1.2.40)$$

$$S^{\rho(\mu\nu)} = 0 \quad (1.2.41)$$

$$K^{\mu}_{\rho\mu} = -T^{\mu}_{\rho\mu} = S^{\mu}_{\rho\mu} \quad (1.2.42)$$

La torsione scalare T è:

$$\begin{aligned} T &\equiv S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} = -2S^{\rho\mu\nu} K_{\rho\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} T_{\nu\mu\rho} - T^{\rho}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_{\nu} \\ &= K^{\mu\nu\rho} K_{\rho\nu\mu} - K^{\mu\rho}_{\mu} K^{\nu}_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

Il tensore di Riemann per la connessione di Weitzenböck è nullo ovvero:

$$\mathbf{R} [\tilde{\Gamma}] = 0 \quad (1.2.44)$$

per cui otteniamo la seguente relazione tra le componenti spaziotemporali del tensore di Riemann della curvatura di Weitzenböck e quella di Levi-Civita:

$$0 = \tilde{R}^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = -\overset{\circ}{R}^{\rho}_{\mu\lambda\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} K^{\rho}_{\mu\lambda} - \overset{\circ}{\nabla}_{\lambda} K^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\sigma\nu} K^{\sigma}_{\mu\lambda} - K^{\rho}_{\sigma\lambda} K^{\sigma}_{\mu\nu} \quad (1.2.45)$$

Il tensore di Ricci corrispondente contraendo primo e terzo indice $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$ è:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \overset{\circ}{\nabla}_{\nu} K^{\rho}_{\mu\rho} - \overset{\circ}{\nabla}_{\rho} K^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\sigma\nu} K^{\sigma}_{\mu\rho} - K^{\rho}_{\sigma\rho} K^{\sigma}_{\mu\nu} \\ &= -2 \overset{\circ}{\nabla}^{\rho} S_{\nu\rho\mu} - g_{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}^{\rho} T^{\sigma}_{\rho\sigma} - 2S^{\rho\sigma}_{\mu} K_{\sigma\rho\nu} \end{aligned} \quad (1.2.46)$$

Da cui contraendo ancora avremo che lo scalare di Ricci espresso rispetto alla connessione di Levi Civita e

$$R \left[\overset{\circ}{\Gamma} \right] (h) = -T - \frac{2}{h} \partial_\mu (h T^{\nu\mu}) = -T - 2 \overset{\circ}{\nabla}_\mu T^\mu \quad (1.2.47)$$

dove $h = \det(h^a_\mu) = \sqrt{-g}$ e $T^\mu = T^{\nu\mu}$ è la contrazione del tensore di torsione contraendo primo e terzo indice. Nel teleparallelismo le variabili dinamiche sono le 16 componenti della vierbein h^a_μ anziché le 10 componenti della metrica $g_{\alpha\beta}$ della relatività generale. Se scegliamo una base di tetradi tale da annullare la connessione di Lorentz $\omega^a_b = 0$ perdiamo l'invarianza di Lorentz locale conservando quella globale. Quindi avremo 16 equazioni anziché 10 come in relatività classica. Se ristabiliamo l'invarianza locale di Lorentz con una connessione di spin non nulla significa che solo 10 delle 16 componenti della tetrad sono indipendenti mentre le rimanenti 6 vengono fissate dalla gauge. In assenza di tale simmetria locale non possiamo scegliere la tetrad a meno di una trasformazione globale di Lorentz.

1.3 Interpretazione geometrica della curvatura e della torsione

La curvatura e la torsione hanno una semplice interpretazione geometrica se consideriamo un parallelogramma infinitesimo sulla varietà spaziotemporale composto da geodetiche di tipo tempo. Il trasporto parallelo da un punto all'altro della varietà spaziotempo dipende in generale dal percorso mentre nello spazio piatto minkowskiano no. La non integrabilità del trasporto parallelo è una nozione intrinseca di curvatura e la caratterizza. Consideriamo [7, 17] come in (Fig. 1.1) un parallelogramma infinitesimo mno sulla varietà spaziotemporale di coordinate $m = \{x^\alpha\}$, $n = \{x^\alpha + \sigma^\alpha\}$, $o = \{x^\alpha + \sigma^\alpha + \rho^\alpha\}$ e $p = \{x^\alpha + \rho^\alpha\}$ con σ^α ed ρ^α vettori infinitesimi. Trasportiamo il vettore $A(m) \in T_m M$ in m dello spazio tangente in tale punto lungo la curva $C = mno$ così da ottenere il vettore $A_C(o) \in T_o M$ ovvero quello parallelo nel punto o appartenente allo spazio tangente $T_o M$. Il vettore $V(m)$ trasportato parallelamente da m in n e poi in o lungo C è

$$A_C^\alpha(n) = A^\alpha(m) - A_0^\beta(m) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) \sigma^\eta \quad (1.3.1)$$

$$A_C^\alpha(o) = A_C^\alpha(n) - A_C^\beta(n) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(n) \delta^\eta \quad (1.3.2)$$

Sostituendo la (1.3.1) nella (1.3.2) e sviluppando la $\Gamma(n) = \Gamma(m) + \partial\Gamma(m)\sigma$ fermandoci a termini del second'ordine nei vettori infinitesimi σ e ρ si ha:

$$\begin{aligned} A_C^\alpha(o) &= A^\alpha(m) - A^\beta(m) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) \sigma^\eta - A^\beta(m) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) \rho^\eta \\ &- A^\beta(m) [\partial_\lambda \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) - \Gamma_{\lambda\beta}^\rho(m) \Gamma_{\eta\rho}^\alpha(m)] \sigma^\lambda \rho^\eta + \mathcal{O}(\text{termini del terz'ordine in } \sigma \text{ ed } \rho) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Trasportiamo ora lo stesso vettore $A(m)$ da m lungo la curva C' in o ed otteniamo con lo stesso ragionamento fatto

$$\begin{aligned} A_{C'}^\alpha(o) &= A^\alpha(m) - A^\beta(m) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) \rho^\eta - A^\beta(m) \Gamma_{\eta\beta}^\alpha(m) \sigma^\eta \\ &- A^\beta(m) [\partial_\eta \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha(m) - \Gamma_{\eta\beta}^\rho(m) \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha(m)] \sigma^\lambda \rho^\eta + \mathcal{O}(\text{termini del terz'ordine in } \sigma \text{ ed } \rho) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

La differenza tra questi due vettori trasportati in o ci dà

$$A_C(o) - A_{C'}(o) = A^\beta(m) R_{\beta\lambda\eta}^\alpha(m) \sigma^\lambda \rho^\eta. \quad (1.3.5)$$

Quindi il tensore di curvatura di Riemann è legato alla differenza del vettore $A(m)$ trasportato parallelamente in m attraverso due percorsi differenti. Se tale differenza è sempre zero qualsiasi siano i percorsi la curvatura è nulla altrimenti lo spaziotempo è curvo e tale differenza dà una misura della curvatura.

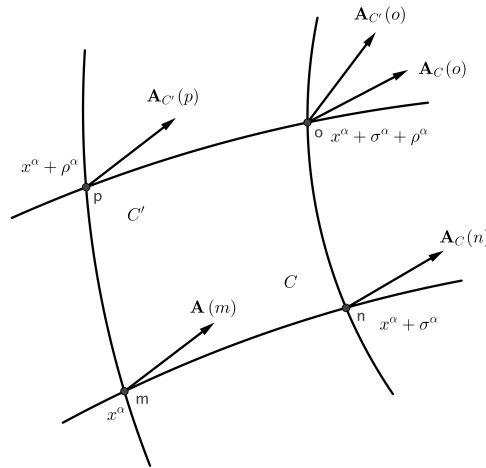


Figura 1.1: Interpretazione geometrica della curvatura. Il trasporto parallelo del vettore A dal punto m al punto o della varietà lungo i due percorsi C e C' . La curvatura misura la differenza tra i vettori $A_C(o)$ e $A_{C'}(o)$.

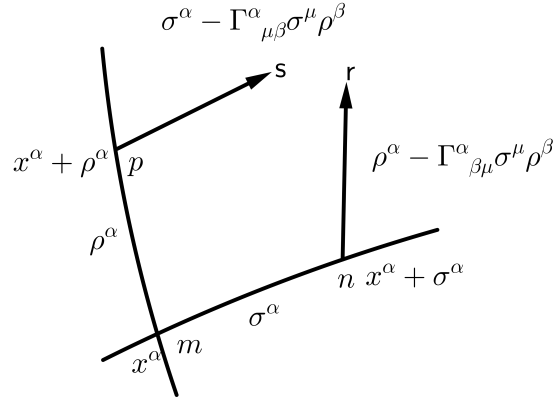


Figura 1.2: Interpretazione geometrica della torsione. Il vettore nr è il vettore ρ^α trasportato parallelamente mentre il vettore ps è il vettore σ^α parallelo. I punti r ed s in generale non coincidono e la torsione misura il vettore rs .

Vediamo ora il significato geometrico della torsione. Dati due vettori infinitesimi $W = \sigma^\alpha e_\alpha$ ed $Q = \rho^\alpha e_\alpha$ in $m = \{x^\alpha\}$ che commutano si ottengono i punti infinitesimamente vicini $n = \{x^\alpha + \sigma^\alpha\}$ ed $p = \{x^\alpha + \rho^\alpha\}$ come in (fig. 1.2). Trasportando parallelamente W lungo mp ed Q lungo mn otteniamo rispettivamente i vettori ps ed nr

$$ps = (\sigma^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \sigma^\mu \rho^\beta) e_\alpha \quad (1.3.6)$$

ed

$$nr = (\rho^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \sigma^\mu \rho^\beta) e_\alpha \quad (1.3.7)$$

In generale il punti $s = \{\rho^\alpha + \sigma^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \sigma^\mu \rho^\beta\}$ ed $r = \{\sigma^\alpha + \rho^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \sigma^\mu \rho^\beta\}$ della varietà non coincidono ovvero il parallelogramma infinitesimo non chiude cioè è stato rotto dalla torsione della varietà. Per misurare tale torsione basta calcolare il vettore infinitesimo rs

$$rs = (\Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \sigma^\mu \rho^\beta e_\alpha = T^\alpha_{\mu\beta} \sigma^\mu \rho^\beta e_\alpha, \quad (1.3.8)$$

cioè la torsione dà una stima della rottura del parallelogramma. Una bella interpretazione della torsione è presente in teoria dell'elasticità dove il vettore rs rappresenta il vettore di Burgers.

Capitolo 2

Le teorie estese della gravità

2.1 La relatività generale

La relatività generale è una teoria dello spazio, del tempo e della gravità formulata da Einstein negli anni 1915-1916. Essa sostituisce al rigido ed assoluto concetto di spazio e di tempo una entità dinamica, la varietà spaziotemporale, la cui curvatura viene identificata con l'interazione gravitazionale ossia viene geometrizzata la gravità. Quindi i corpi liberi cioè soggetti alla sola gravità seguono le geodetiche di tipo tempo ed al concetto di forza gravitazionale viene sostituito quello di curvatura. La relatività generale è stata ispirata in modo esplicito o implicito dai seguenti principi:

A Principio di equivalenza

- (a) *Principio di equivalenza debole (WEP)*. Se un corpo di prova in caduta libera è posto in corrispondenza di un evento iniziale dello spaziotempo con una velocità assegnata, la sua linea d'universo è indipendente dalla sua massa, struttura interna e composizione. Questo è una conseguenza del fatto che, a differenza di altre interazioni tipo quella elettromagnetica, solo la gravità si accoppia in modo universale a tutti i corpi dotati di massa gravitazionale (carica gravitazionale) sempre allo stesso modo poiché la massa gravitazionale e la massa inerziale sono equivalenti. Per corpo di prova si intende un corpo che non influenza il campo gravitazionale creato da altri corpi ed in caduta libera o che si muove liberamente vuol dire che non nessun'altra forza esclusa quella gravitazionale agisce sulla particella test. Tale accoppiamento universale permette di geometrizzare l'interazione gravitazionale sostituendo il concetto di forza con quello di curvatura della varietà spaziotemporale. Ciò non è possibile far-

lo per l'interazione elettromagnetica ad esempio dove l'accoppiamento non è universale.

(b) *Principio di equivalenza di Einstein (EEP)*. Il principio di equivalenza debole è valido ed il risultato di un qualsiasi esperimento locale non gravitazionale in caduta libera è indipendente dalla velocità dell'apparato e da dove e quando esso viene effettuato. Non è quindi possibile schermare la gravità ma localmente è possibile eliminare gli effetti gravitazionali mettendoci in un riferimento comovente con la particella in caduta libera, sistema localmente inerziale, dove vale la relatività ristretta. Intendiamo localmente come una regione sufficientemente piccola dove le variazioni del campo gravitazionale sono non osservabili sperimentalmente.

(c) *Principio di equivalenza forte (SEP)*. Il principio di equivalenza debole è valido anche per corpi di prova autogravitanti e quello di equivalenza di Einstein è valido anche per gli esperimenti locali gravitazionali.

B *Principio di relatività*. Tutti gli osservatori sono equivalenti ossia le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento. Non esistono quindi sistemi di riferimento preferenziali rispetto ai quali formulare le leggi come in relatività ristretta dove tali sistemi sono quelli inerziali.

C *Principio di Mach*. L'origine delle forze inerziali risiede nell'attrazione gravitazionale esercitata dalle masse presenti nell'universo. La relatività di Einstein è parzialmente una teoria machiana.

D *Principio di covarianza generale*. Tutte le equazioni della fisica sono covarianti ovvero invarianti in forma rispetto a diffeomorfismi e quindi hanno una forma tensoriale.

E *Principio di causalità*. Ogni punto dello spaziotempo ammette una nozione universalmente valida di passato, presente e futuro.

F *Principio di corrispondenza*. La relatività generale si riduce alla relatività ristretta in assenza di gravità ed alla teoria gravitazionale di Newton nel limite di campi gravitazionali statici e deboli a velocità non-relativistiche.

G *Principio di minimo accoppiamento gravitazionale*. Non bisogna aggiungere alcun termine che contenga esplicitamente il tensore di curvatura nel passare dalla relatività speciale a quella generale.

La variazione prodotta nelle componenti del vettore covariante A_μ trasportato parallelamente lungo uno spostamento infinitesimo dx^α sulla varietà curva è:

$$\delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu dx^\beta \quad (2.1.1)$$

dove $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è la connessione simmetrica di Levi Civita cioè l'unica connessione torsion-free e metrico compatibile definita sulla varietà pseudo-riemanniana ossia:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \quad (2.1.2)$$

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.3)$$

che diventa uguale ai simboli di Christoffel ossia:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}) \quad (2.1.4)$$

La derivata covariante di un tensore di rango due misto T^μ_ν è definita come:

$$\nabla_\alpha T^\mu_\nu = \partial_\alpha T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^\beta_\nu - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} T^\mu_\beta \quad (2.1.5)$$

Tutti i corpi soggetti al solo campo gravitazionale seguono le geodetiche dello spaziotempo curvo ovvero l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.1.6)$$

La curvatura della varietà spaziotemporale è espressa dal tensore di Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (2.1.7)$$

antisimmetrico rispetto a ciascuna coppia di indici $\alpha\beta$ e $\mu\nu$ e simmetrico rispetto alla permutazione di queste coppie:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{[\alpha\beta][\mu\nu]} \quad (2.1.8)$$

e per cui valgono la prima e seconda identità di Bianchi:

$$R^\alpha_{[\beta\mu\nu]} = 0 \quad (2.1.9)$$

$$R^{\alpha}_{\beta[\mu\nu;\lambda]} = 0 \quad (2.1.10)$$

dove ; sta per derivata covariante. Contraendo il primo e terzo indice del tensore di Riemann si ottiene il tensore simmetrico di Ricci $R_{\beta\nu}$:

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\mu}_{\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu} \quad (2.1.11)$$

In uno spaziotempo curvo la variazione di un vettore covariante A_{β} trasportato parallelamente lungo una curva infinitesima chiusa di spostamenti infinitesimi $d\xi^{\mu}$ e $d\zeta^{\nu}$ è:

$$\Delta A_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} A_{\alpha} d\xi^{\nu} d\zeta^{\mu} \quad (2.1.12)$$

L'equazione di deviazione geodetica permette di calcolare la 4-accelerazione relativa di due particelle che seguono due geodetiche infinitamente vicine

$$\frac{D^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = \xi^{\nu} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad (2.1.13)$$

La non commutatività delle derivate seconde covarianti ovvero:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A_{\beta} = -R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} A_{\alpha} \quad (2.1.14)$$

Combinando il tensore di Ricci con la curvatura scalare si ha il tensore di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.1.15)$$

che verifica l'identità contratta di Bianchi:

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.16)$$

Le equazioni di campo di Einstein in presenza di materia e campi sono:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu} \quad (2.1.17)$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore simmetrico energia-impulso dovuto alla materia ed ai campi non gravitazionali e $\chi = 8\pi G$ la costante di accoppiamento in unità di c . Dalla (2.1.16) la divergenza covariante ai due membri delle equazioni di Einstein (2.1.17) porta alla

seguenti equazioni del tensore energia-impulso della materia

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.18)$$

ovvero la geometria dice alla materia come muoversi per dirla alla Wheeler. Le (2.1.17) sono sedici equazioni differenziali alle derivate parziali nella metrica $g_{\mu\nu}$ del second'ordine quasilineari cioè lineari nelle derivate seconde e fortemente non lineari nelle derivate prime che per la simmetria di $R_{\mu\nu}$ si riducono a dieci nelle dieci componenti della metrica. Per l'identità contratta di Bianchi (2.1.16) tali equazioni si riducono a sei indipendenti lasciando solo quattro componenti della metrica libere scelte con la gauge. Il principio di sovrapposizione non è valido per i campi gravitazionali perché le equazioni di Einstein sono non lineari. È possibile ricavare le equazioni di Einstein da un principio variazionale partendo dall'azione di Hilbert-Einstein [12]:

$$S_{HE} = -\frac{1}{2\chi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.1.19)$$

dall'azione materiale S_m :

$$S_m = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(\psi, \nabla\psi, g) \quad (2.1.20)$$

e da una opportuna azione di bordo S_{YGH} detta azione di York-Gibbon-Hawking necessaria per eliminare dei contributi ai bordi non eliminabili imponendo la stazionarietà dell'azione rispetto alla metrica imponendo che sia nulla la variazione della metrica $\delta g = 0$ ai bordi del dominio spaziotemporale Ω . Dalla variazione delle varie azioni rispetto a $g_{\mu\nu}$ si ha:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\chi} \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2\chi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \\ \delta S_m &= \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

con

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.1.22)$$

e per l'azione ai bordi non covariante [18]

$$\delta S_{YGH} = \frac{1}{2\chi} \int_{\partial\Omega} d\xi^3 \sqrt{|h|} h^{\nu\alpha} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\nu\alpha} \quad (2.1.23)$$

dove h è il determinante della metrica indotta $h_{\mu\nu}$ sull'ipersuperficie $\partial\Omega$, n^μ la normale a tale frontiera ed $d\xi^3 \sqrt{|h|}$ l'elemento di volume covariante sul bordo. Notiamo che utilizzando il teorema di Gauss con la condizione di annullamento ai bordi delle variazioni della metrica si ha:

$$\delta S_{YGH} = -\frac{1}{2\chi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.1.24)$$

Imponendo la stazionarietà dell'azione $S = S_{HE} + S_m + S_{YGH}$ si ottengono le equazioni di campo di Einstein nella materia imponendo $\delta S = 0$ ovvero:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (2.1.25)$$

La relatività generale è una teoria verificata da vari esperimenti relativi al sistema solare e recentemente anche cosmologici. Alcuni test sperimentali di conferma su cui si basa la relatività generale sono:

1. Precessione del perielio di Mercurio
2. Deflessione dei raggi luminosi
3. Lo spostamento gravitazionale verso il rosso delle linee spettrali (redshift gravitazionale)
4. Ritardo temporale della luce
5. La diminuzione del periodo osservato nella pulsar binaria PRS B1913+16 scoperto da Hulse e Taylor [19](verifica indiretta delle onde gravitazionali)
6. Verifica diretta delle onde gravitazionali generate dalla fusione di un sistema binario di buchi neri dai due interferometri americani LIGO [20]

Il test di deflessione della luce e del redshift gravitazionale sono una verifica diretta del principio di equivalenza.

2.2 Le teorie estese della gravità

La relatività generale riproduce con grande accuratezza i test del sistema solare in approssimazione post-newtoniana parametrizzata e non (PPN e PN) ottenuta sviluppando la metrica fino all'ordine $1/c^4$. Tuttavia molte sono le motivazioni per cui la relatività generale necessita di essere estesa ovvero di essere inclusa in una teoria più generale. Tali motivazioni possono essere di natura cosmologica ed astrofisica, matematica oppure legate alla gravità quantistica [21, 22, 23, 24].

La motivazione cosmologica Il modello cosmologico standard è basato sulla relatività generale e sul modello standard della fisica delle particelle ma è inadeguato a descrivere l'universo sia nella regione dell'infrarosso a basse energie tipicamente su scale cosmologiche che in quelle dell'ultravioletto ad alte energie nella fase iniziale dell'universo dove gli effetti quantistici sono rilevanti. Per superare i problemi cosmologici della piattezza e degli orizzonti del modello cosmologico standard nonché quello dei monopoli magnetici, Alan Guth negli anni ottanta ipotizzò che nei primi istanti dopo il Bing Bang l'universo avesse subito una rapidissima espansione la cosiddetta fase inflazionaria. I diagrammi di luminosità-redshift relativi ai dati delle Supernove tipo Ia (SNeIa) misurati dal Supernova Cosmology Project e da Hight-z Team fino a redshit pari ad uno hanno rivelato che l'universo è ora in una fase di espansione accelerata. D'altro canto dallo studio delle anisotropie dello spettro della radiazione cosmica di fondo (Cosmic Microwave Background CMB) si evince che le sezioni spaziali del nostro universo sono piatte come confermato da osservazioni anche recentissime (COBE, BOOMERAG, MAXIMA e WMAP) [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Un possibile spiegazione della espansione accelerata può essere data interpretando la ben nota costante cosmologica Λ introdotta da Einstein per rendere il suo modello di universo statico, come una forma di energia oscura (Dark Energy) non clusterizzata di pressione negativa che domina l'universo e ne guida l'espansione. Mentre la curvatura nulla dell'universo spaziale può essere spiegata utilizzando una sorta di materia esotica la materia oscura (Dark Matter) di natura gravitazionale ma che interagisce molto debolmente, postulata per risolvere il cosiddetto problema della "massa mancante" e quello delle curve di rotazione galattiche. Quindi l'equazione di Friedmann modificata con il termine cosmologico Λ espressa in termini dei parametri adimensionali $\Omega = \rho/\rho_c$ in unità di densità critica ρ_c può essere scritta:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (2.2.1)$$

dove ai giorni nostri t_0 abbiamo ¹

$$\Omega_m(t_0) = 0.308 \pm 0.012 \quad (2.2.2)$$

$$\Omega_\Lambda(t_0) = 0.692 \pm 0.012 \quad (2.2.3)$$

$$\Omega_k(t_0) = -0.005^{+0.016}_{-0.017} \quad (2.2.4)$$

dove Ω_Λ è il contributo dovuto all'energia oscura, Ω_k il contributo dovuto alla curvatura k ed Ω_m è il contributo dovuto alla materia che si suddivide ulteriormente in materia oscura fredda (Cold Dark Matter) ed materia barionica ossia:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \Omega_{cdm} + \Omega_b \\ \Omega_{cdm} &= 0.258 \\ \Omega_b &= 0.0484 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Tale modello detto modello della concordanza o Λ CDM fallisce in modo plateale se si prova a stimare Λ interpretandola come il contributo gravitazionale all'energia di vuoto. Si ottiene un valore sperimentale che è ben 120 ordini di grandezza più piccolo di quello che si ottiene con il modello standard delle particelle. Inoltre c'è il problema cosiddetto della coincidenza cosmica ovvero perchè proprio all'epoca attuale le densità di materia e dell'energia oscura sono dello stesso ordine di grandezza? Un tentativo di soluzione è stato quello di sostituire la costante cosmologica con la cosiddetta quintessenza ossia un campo scalare, l'inflatone, che rotola giù molto lentamente lungo la sua energia potenziale determinando una densità di vuoto variabile [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Tuttavia l'ipotesi della quintessenza oltre a non risolvere il problema della coincidenza introduce un campo scalare la cui natura è alquanto misteriosa. Esiste un modo differente di ragionare: potrebbe invece essere che l'accelerazione cosmica sia il segnale del fatto che nel limite infrarosso la gravità di Einstein non funziona e quindi va modificata. Quindi anziché introdurre energia e materia esotici a destra delle equazioni di Einstein lasciando la geometria invariata si potrebbe pensare di lasciare la materia invariata considerando solo quella standard e di modificare la geometria ovvero il membro sinistro delle equazioni di campo. Questo ha dato vita ad un elevato numero di teorie estese della relatività generale ovvero di teorie che la inglobano come caso particolare ma addirittura a teorie alternative che non riproducono esattamente i risultati einsteiniani ma in qualche modo li generaliz-

¹I principali parametri fisici aggiornati è disponibile sul sito del *Particle Data Group* all'indirizzo <http://pdg.lbl.gov>

ziano. Tali teorie generano in modo naturale una componente a pressione negativa la cui origine è nella geometria che spiega l'espansione accelerata e la piatezza delle curve di rotazione galattiche senza l'introduzione né di energia né di materia oscura.

La motivazione matematica Nelle teorie estese e più in generale modificate o alternative della gravitazione le equazioni di campo di Einstein sono modificate in cinque modi:

- i introducendo nella lagrangiana invarianti di curvatura di ordine superiore del tipo R^2 , $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R\Box R$, $R\Box^k R$ che conduce ad equazioni differenziali che descrivono il campo gravitazionale di ordine superiore al secondo perché appaiono derivate della metrica superiori al secondo dando vita alle cosiddette *teorie della gravità di ordine superiore*;
- ii accoppiando la geometria attraverso i termini di curvatura R , $R_{\mu\nu}$ in modo non minimale a qualche campo di materia ϕ nelle equazioni introducendo termini nella lagrangiana del tipo ϕR , dando vita a quelle che si chiamano *teorie scalar-tensoriali della gravità*;
- iii introducendo nella lagrangiana termini di curvatura di ordine superiore non minimalmente accoppiati ai campi di materia per cui si ottengono le cosiddette *teorie scalar-tensoriali di ordine superiore della gravità*
- iv aggiungendo d extra dimensioni oltre le quattro della relatività generale compatificate su qualche varietà d -dimensionale, per un totale di $4 + d$ dimensioni. Modelli di questo tipo sono noti come *teorie di Kaluza-Klein*.
- v usando una connessione diversa da quella di Levi-Civita: non metrica oppure metrica ma non simmetrica con torsione. Nel primo caso avremo le *teorie metrico-affini* (MAG) mentre nel secondo in generale parleremo di *teorie di Cartan-Einstein*.

Di fondamentale importanza è vedere se queste ETG sono equivalenti alla relatività generale cioè descrivono la stessa fisica. Per fare ciò si adottano opportune trasformazioni conformi che mandano le lagrangiane estese in una lagrangiana standard di Hilbert-Einstein più pezzi che descrivono campi scalari minimalmente accoppiati passando dal riferimento di Jordan a quello di Einstein. Tutte queste teorie possono essere espresse in funzione del solo tensore metrico $g_{\mu\nu}$ che governa la struttura causale dello spaziotempo con la connessione $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ a torsione nulla e metrico compatibile che determina le traiettorie

espressa in termini della metrica cioè abbiamo le teorie metriche della gravitazione. Se invece consideriamo la metrica e la connessione come campi indipendenti, il cosiddetto formalismo di Palatini, disaccoppiando la struttura metrica della varietà da quella geodetica abbiamo le teorie metriche-affini della gravitazione. L'approccio di Palatini della relatività generale è equivalente a quello metrico perché la connessione si riduce a quella di Levi Civita ma in ETG i principi variazionali metrici e quelli di Palatini portano a differenti equazioni e quindi ad una fisica diversa potendo essere descritti in termini di una struttura bimetrica dello spaziotempo.

La motivazione della gravità quantistica La relatività generale che descrive l'interazione gravitazionale è una teoria classica e non si presta ad essere quantizzata come le altre tre interazioni fondamentali descritte dalla teoria quantistica dei campi impedendo una grande teoria unificata. Sia adottando uno schema di quantizzazione canonico che covariante, la relatività generale presenta problemi di rinormalizzazione ad alte energie e di unitarietà. Questo è dovuto essenzialmente al fatto che in relatività non abbiamo uno spaziotempo fissato a priori cosa che invece accade in teoria dei campi sia su background piatto che su spaziotempo curvo. A questo si aggiunge che una descrizione Hamiltoniana della relatività generale è impossibile in senso stretto a causa dell'hessiano nullo della lagrangiana di Hilbert- Einstein impedendone di fatto una quantizzazione canonica. Una formulazione hamiltoniana della relatività è possibile adottando il formalismo ADM dove lo spaziotempo non è più covariante ma viene utilizzata la decomposizione 3+1 della metrica permettendo di ricavare la famosa equazione di Wheeler-De Witt avente per soluzione la funzione d'onda dell'universo. Molti sono stati i tentativi di formulare una gravità quantistica tra cui citiamo la teoria della stringhe, delle superstringhe e della supersimmetria, la M-teoria, la gravità quantistica a loop, le geometrie non commutative, la teoria dei twistor ed altre teorie. Tali teorie contengono azioni efficaci che presentano invarianti di curvatura di ordine superiore minimalmente e non minimalmente accoppiati (ad esempio la teoria delle stringhe può essere interpretata a basse energie come una teoria effettiva della gravitazione non minimalmente accoppiata con un campo scalare, il dilatone). Diventa quindi fondamentale saper trattare tali teorie estese della gravità quando sempre nella teoria delle stringhe si inducono correzioni perturbative quantistiche di loop (one-loop, two-loop o higher-loop) all'azione classica di Hilbert-Einstein per avere una teoria rinormalizzata.

2.2.1 Esempi di teorie estese della gravità ETG

Le teorie della gravità scalar-tensoriali

La teoria di Brans-Dicke La teoria di Brans-Dicke è il più semplice esempio di teoria scalar-tensoriale oltre ad essere uno dei primi tentativi di estendere la gravità einsteiniana cercando di inglobare il principio di Mach attraverso l'introduzione di un campo di materia ϕ che porta ad una costante di accoppiamento gravitazionale variabile. L'azione nel frame di Jordan è:

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m \quad (2.2.6)$$

dove S_m è l'azione della materia ordinaria, ω è un parametro adimensionale di Brans-Dicke e $V(\phi)$ è un potenziale del campo scalare. Il campo gravitazionale è descritto dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e dal campo scalare ϕ che rappresentano i gradi libertà della teoria. Variando l'azione rispetto a $g^{\mu\nu}$ ed allo scalare di Brans-Dicke ϕ imponendo le variazioni nulle ai bordi del dominio di integrazione si ottengono le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \phi \nabla_{\nu\alpha} \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (2.2.7)$$

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.2.8)$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso della materia ordinaria e $G_{\mu\nu}$ il tensore di Einstein. Spesso ci si riferisce alla teoria di Brans-Dicke quando si pone $V(\phi) = 0$. Tale teoria attraverso una trasformazione conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ con $\Omega = \sqrt{G\phi}$ che ci fa passare dal frame di Jordan a quello di Einstein è conformemente equivalente alla relatività generale più un campo scalare minimalmente accoppiato. È possibile far vedere che la teoria di Brans-Dicke con potenziale scalare è equivalente alla gravità $f(R)$ di Palatini.

Le teorie scalar-tensoriali della gravità in generale L'azione nel frame di Jordan di una generica teoria metrica scalar-tensoriale della gravità che generalizza quella di

Brans-Dicke è:

$$S_{ST} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] - V(\phi) + \alpha_m L_m \right\} \quad (2.2.9)$$

dove α_m è la costante di accoppiamento della materia ordinaria ed L_m è la densità di lagrangiana della materia ordinaria. Tramite un fattore conforme simile a quello della teoria di Brans-Dicke tale teoria risulta conformemente equivalente alla relatività generale più un campo scalare minimalmente accoppiato.

Le teorie della gravità di ordine superiore

La gravità $f(R)$ L'azione nel frame di Jordan di una lagrangiana che dipende dallo scalare di curvatura R attraverso una funzione analitica f nel formalismo metrico è:

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (2.2.10)$$

Variando rispetto a $g^{\mu\nu}$ imponendo che la variazione prima si annulli ai bordi otteniamo le seguenti equazioni di campo di quart'ordine nel vuoto:

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \quad (2.2.11)$$

Le teorie $f(R)$ sono conformemente equivalenti alla relatività generale più un campo scalare minimalmente accoppiato ossia la densità di lagrangiana trasformata nel frame di Einstein sotto la seguente trasformazione conforme in $\dim(M) = 4$:

$$\tilde{g}_{\alpha,\beta} = e^{2\omega} g_{\alpha\beta} \quad (2.2.12)$$

con

$$\omega = \frac{1}{2} \ln |f'(R)| \quad (2.2.13)$$

diventa

$$\sqrt{-g} \mathcal{L} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.2.14)$$

dove $\phi = \sqrt{3/2} \ln f'(R)$. È possibile far vedere che la gravità $f(R)$ è equivalente a quella di Brans-Dicke con potenziale scalare assumendo che in $f(R)$ le particelle test si muovano lungo le geodetiche di g e non della trasformata \tilde{g} .

La gravità $f(R, \square R, \dots, \square^k R)$ L'azione libera per questa lagrangiana è:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^k R) \quad (2.2.15)$$

Le equazioni di campo nel vuoto associate sono di ordine $2k + 4$ perché ogni operatore \square introduce due ordini di derivazione in più nelle equazioni differenziali. Tali teorie di ordine $2k + 4$ sono conformemente equivalenti alla teoria di Einstein più $k + 2$ campi scalari minimalmente accoppiati. Ad esempio la teoria descritta dalla densità di lagrangiana libera $\mathcal{L} = R \square R$ ammette equazioni del sest'ordine. Utilizzando un fattore conforme:

$$\omega = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} + \square \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \square R} \right| \quad (2.2.16)$$

la teoria è equivalente alla relatività generale più due campi scalari con accoppiamento gravitazionale minimo cioè ogni termine $\square R$ corrisponde alla comparsa di un campo scalare nello spazio conformemente trasformato.

Le teorie della gravità scalar-tensoriali di ordine superiore

Le teorie miste $f(R)$ e scalar tensoriali della gravità L'azione nel frame di Jordan generale è data da:

$$S_{f(R)ST} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi, R) - \frac{\epsilon}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] \quad (2.2.17)$$

dove $\epsilon = \pm 1, 0$ è un costante che fissa la teoria. Con il fattore conforme $\Omega = [16\pi G \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right| + k]^{1/2}$ l'azione si può scrivere nel riferimento di Einstein come una azione di Hilbert-Einstein più un campo scalare con accoppiamento minimale.

Le teorie miste $f(R, \square R, \dots, \square^k R)$ scalar tensoriali della gravità L'azione nel frame di Jordan nel formalismo metrico è:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(R, \square R, \dots, \square^k R, \phi) - \frac{\epsilon}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + 2\kappa L_m \right] \quad (2.2.18)$$

Variando rispetto a $g_{\mu\nu}$ ed al campo ϕ si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} = \frac{1}{\mathcal{G}} & \left[\kappa T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (F - \mathcal{G}R) + (g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}) \mathcal{G}_{;\lambda\sigma} \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) (\square^{j-i})_{;\sigma} \left(\square^{i-j} \frac{\partial f}{\partial \square^i R} \right)_{;\lambda} \\
& \left. - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \left((\square^{j-1} R)_{;\sigma} \square^{i-j} \frac{\partial f}{\partial \square^i R} \right)_{;\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

dove

$$\mathcal{G} = \sum_{j=0}^n \square^j \left(\frac{\partial f}{\partial \square^i R} \right) \tag{2.2.20}$$

e per il campo scalare ϕ :

$$\epsilon \square \phi = - \frac{\partial F}{\partial \phi} \tag{2.2.21}$$

2.3 Il Teleparallelismo

Sono stati numerosi i tentativi infruttuosi di unificare la relatività di Einstein con l'elettromagnetismo. Tra questi possiamo citare la teoria elettrogravitazionale di Weyl che introdusse la nozione di trasformazione di gauge ed di invarianza di gauge. Nonostante tale teoria fu abbandonata le teorie di gauge costituiscono una pietra miliare di tutta la fisica teorica odierna. Kaluza-Klein provarono ad unificare gravità ed elettromagnetismo introducendo una quinta dimensione compattificata oltre alle quattro della varietà pseudoriemanniana scrivendo la lagrangiana su di una varietà pentadimensionale. Lo stesso Einstein nel 1928 fece un tentativo di formulare una teoria unificata elettrogravitazionale usando la nozione geometrica di teleparallelismo introdotta qualche anno prima da Cartan. Per fare ciò rilassò l'ipotesi che la connessione di Levi Civita fosse simmetrica considerando la torsione della connessione non nulla, quella di Weitzenböck, e si mise in una base dello spazio tangente con la proprietà di parallelizzare lo spaziotempo, la tetrad, basata sul concetto di parallelismo distante o assoluto. Le tetradi hanno sedici componenti indipendenti dieci delle quali furono identificate con quelle del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e le rimanenti sei con i gradi di libertà dinamici del campo elettromagnetico. Tale tentativo fu abbandonato perchè le sei componenti potevano essere eliminate imponendo l'invarianza locale di Lorentz. Come per la teoria di Weyl nonostante l'insuccesso nell'unificare i due campi la nozione di teleparallelismo intesa come l'utilizzo di una connessione a torsione

non nulla ed a curvatura nulla, quella di Weitzenböck, in una particolare base di tetradi con connessione di spin nulla è di enorme attualità. Importante è anche il tentativo di generalizzare il teleparallelismo dovuto a Einstein-Cartan dove la connessione adottata è sia a curvatura che a torsione non nulla. Esiste inoltre una formulazione puramente affine che unifica le interazioni gravitazionali con quelle elettromagnetiche [40].

2.3.1 La teoria teleparallela equivalente alla relatività generale

La teoria teleparallela equivalente alla relatività generale, laTEGR, è una formulazione alternativa della relatività generale di Einstein ad essa equivalente nel senso che descrive la stessa fisica perchè ha le stesse equazioni di campo [14, 41]. Essa si basa su di una descrizione della gravità non più in termini della curvatura dello spaziotempo ma della torsione. Adottando la base di tetradi $\{h_a\}$, una base ortonormale dello spazio tangente ad ogni punto della varietà, e la seguente connessione di Weitzenböck non simmetrica:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \equiv h_a^\rho \partial_\nu h^a_\mu \quad (2.3.1)$$

notiamo che è compatibile con la metrica

$$\tilde{\nabla} g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.2)$$

a curvatura nulla

$$R[\tilde{\Gamma}] = 0 \quad (2.3.3)$$

a torsione non nulla

$$T^\rho_{\mu\nu} = h_a^\rho \partial_\mu h^a_\nu - h_a^\rho \partial_\nu h^a_\mu \quad (2.3.4)$$

e la tetrad scelta per la connessione di Weitzenböck è tale da annullare la connessione di spin $\omega^a_{b\mu}$

$$\omega^a_{b\mu} = h^a_\nu \partial_\mu h_b^\nu + h^a_\nu \Gamma^\nu_{\rho\mu} h_b^\rho = 0 \quad (2.3.5)$$

rompendo l'invarianza locale di lorentz della tetrad ma non quella globale. Rispetto a tale connessione la varietà è parallelizzata nel senso che il campo di tetradi è autoparallelo su tutto lo spaziotempo, postulato della tetrad, ovvero

$$\tilde{\nabla}_\lambda h^a_\mu = \partial_\lambda h^a_\mu - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} h^a_\rho = 0 \quad (2.3.6)$$

L'azione gravitazionale della gravità teleparallela scritta in termini della 2-forma di torsione T e della corrispondente forma duale di Hodge $\star T$ è:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \text{tr} (T \wedge \star T) \quad (2.3.7)$$

dove

$$T = \frac{1}{2} T^a_{\mu\nu} P_a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.3.8)$$

ed

$$\star T = \frac{1}{2} (\star T^a_{\mu\nu}) P_a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.3.9)$$

con

$$\star T^a_{\mu\nu} = h \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{a\alpha\beta} \quad (2.3.10)$$

essendo $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ lo pseudotensore di Levi-Civita che si trasforma come densità tensoriale ed $s^{a\alpha\beta}$ il superpotenziale. Sostituendo la (2.3.8) e la (2.3.9) nella (2.3.7) otteniamo la seguente azione di campo libero

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu} h d^4x \quad (2.3.11)$$

se utilizziamo la seguente identità

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x \quad (2.3.12)$$

Utilizzando lo scalare di torsione T (1.2.43) possiamo esprimere l'azione libera teleparallela come:

$$\mathcal{S}_{TEGR} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x h T \quad (2.3.13)$$

con $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$. Esprimendo le quantità espresse in termini della connessione simmetrica e metrico compatibile di Levi Civita con il pallino e quelle senza in termini della connessione di Weitzenböck si ha:

$$R[\tilde{\Gamma}] = \overset{\circ}{R}[\overset{\circ}{\Gamma}] + T + \frac{2}{h} \partial_\mu (h T^{\nu\mu}{}_\nu) \quad (2.3.14)$$

e dalla (2.3.3) si ha:

$$\overset{\circ}{R} = -T - B \quad (2.3.15)$$

dove B è il termine ai bordi $B = 2 \overset{\circ}{\nabla}_\mu T^\mu$. Sostituendo quest'ultima espressione nella densità di lagrangiana di Hilbert-Einstein

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{HE}(h) = -\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \overset{\circ}{R} \quad (2.3.16)$$

si ottiene che la densità di lagrangiana teleparallela

$$\mathcal{L}_T = \frac{h}{2\kappa^2} T \quad (2.3.17)$$

equivalente a quella di Hilbert-Einstein a meno di una quadridivergenza:

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{HE} = \mathcal{L}_T + \partial_\mu \left(\frac{h}{\kappa^2} T^{\nu\mu}{}_\nu \right) \quad (2.3.18)$$

La differenza fondamentale tra le due densità di lagrangiana gravitazionale $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{HE}$ ed \mathcal{L}_T è che la prima contiene le derivate seconde della metrica mentre la seconda solo le derivate prime delle tetradi. Questo fa sì che la lagrangiana di HE sia invariante per trasformazioni locali di Lorentz mentre quella teleparallela non lo è perché il termine ai bordi non localmente invariante sotto tali trasformazioni. Considerando le azioni di HE e quella teleparallela utilizzando il teorema di Gauss per trasformare un integrale di volume sul dominio Ω in uno di superficie sulla sua frontiera $\partial\Omega$ dalla (2.3.18) si ha:

$$\int_\Omega \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{HE}(h) d^4x = \int_\Omega \mathcal{L}_T d^4x + \int_{\partial\Omega} \frac{h}{\kappa^2} T^{\nu\mu}{}_\nu dS_\mu \quad (2.3.19)$$

Variando a sinistra ed a destra della (2.3.19) rispetto alla tetrad $h_a{}^\mu$ otteniamo le stesse equazioni di Eulero-Lagrange perché la variazione dell'ultimo termine nell'ipotesi che la variazione prima della tetrad si annulli sulla frontiera del dominio spaziotemporale Ω ($\delta h_a{}^\mu|_{\partial\Omega} = 0$) è uguale a zero. Ponendo uguale a zero tale variazione otteniamo le seguenti equazioni

$$4h^{-1} \partial_\sigma [h S_a{}^{\rho\sigma}] - 4T^\mu{}_{\nu a} S_\mu{}^{\nu\rho} + T h_a{}^\rho = h \left(\overset{\circ}{R}_a{}^\rho - \frac{1}{2} h_a{}^\rho \overset{\circ}{R} \right) = 0 \quad (2.3.20)$$

ossia le equazioni di Einstein scritte nella nostra tetrad sono esattamente quelle del teleparallelismo per cui descrivono la stessa fisica da cui l'equivalenza tra GR e TE-GR. Tuttavia la gravità teleparallela equivalente dà una descrizione differente della gravità non più come curvatura dello spaziotempo ma in termini di forza gravitazionale

causata dalla torsione ovvero alle geodetiche sostituiamo le equazioni delle forze come nell'elettromagnetismo di Maxwell

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = K^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.3.21)$$

Inoltre la relatività generale non è esattamente una teoria di gauge se per trasformazione di gauge si intende una trasformazione legata a gradi di libertà interni e non a diffeomorfismi infinitesimi dello spaziotempo che coinvolgono le coordinate. La TEGR può essere interpretata, invece, come una teoria di gauge per il gruppo delle traslazioni che agisce sulla fibra del fibrato tangente della varietà spaziotemporale in un suo punto p . Il principio di equivalenza che sta alla base della GR non è indispensabile per la TEGR che rimane una teoria perfettamente consistente anche in sua assenza.

2.3.2 Le teorie estese della gravità teleparallela

La teoria metrica gravitazionale $f(R)$ è una estensione della relatività generale nel senso che sostituisce nella lagrangiana di Hilbert-Einstein alla curvatura R di Ricci una funzione di R e si riduce alla GR nel limite di campo debole. Allo stesso modo una estensione della gravità equivalente teleparallela consiste nel modificare lo scalare di torsione T della lagrangiana gravitazionale della TEGR in una sua funzione analitica $f(T)$ ossia l'azione teleparallela modificata diventa [42, 43]

$$S_{f(T)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x h f(T) \quad (2.3.22)$$

La gravità modificata teleparallela $f(T)$ differisce da quella estesa $f(R)$ essenzialmente per quattro ragioni. La prima è che le equazioni di campo associate alla $f(T)$ sono del second'ordine mentre quelle associate alla $f(R)$ sono del quart'ordine. La seconda è che la $f(T)$ ha più gradi di libertà della $f(R)$. La terza consiste nella impossibilità tramite una trasformazione conforme di riformulare la gravità modificata teleparallela come una TEGR più campi scalare. La quarta ed ultima differenza sta nel fatto che a differenza della teoria metrica $f(R)$ la gravità $f(T)$ non è localmente invariante per trasformazioni di Lorentz se si considera nulla la connessione di spin.

Capitolo 3

Lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale in relatività generale

Le nozioni di energia, quantità di moto e momento angolare insieme con le leggi di conservazione giocano un ruolo fondamentale in tutta la fisica. In assenza di gravità, in relatività ristretta, l'equivalenza tra massa a riposo ed energia è una conseguenza dell'invarianza delle leggi di conservazione di energia ed impulso per sistemi di riferimento inerziali. Ciò nasce da una stretta relazione tra invarianza sotto gruppi di trasformazione e leggi di conservazione. Quindi Einstein affinché valessero le leggi di conservazione ha introdotto l'energia a riposo utilizzando un metodo molto usato in fisica cioè quello di introdurre nuove forme di energia pur di non rinunciare alle leggi di conservazione. In relatività generale invece tutto ciò è complicato farlo perchè non esiste una definizione unanime di energia gravitazionale e quindi di quantità ad essa associata che si conserva [44]. La dipendenza dell'energia gravitazionale dalle coordinate fa sì che tale energia non sia localizzabile. In questo capitolo introdurremo alcune definizioni di tensore energia-impulso del campo gravitazionale affine secondo Einstein, Landau-Lifshitz, Møller, Papapetrou e Weinberg. Tutte le definizioni sono possibili ma ognuna ha pregi e difetti.

3.1 Lo pseudotensore energia-impulso di Einstein

In relatività speciale la legge di conservazione dell'energia e del momento è data da

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3.1.1)$$

con $T^{\mu\nu}$ il tensore energia impulso della materia e dei campi non gravitazionali. In relatività generale tale principio diventa per la covarianza generale:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.2)$$

che non corrisponde a nessuna legge di conservazione di grandezze fisiche. Einstein quindi formulò la legge di conservazione nel seguente modo:

$$\frac{\partial \theta_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} (T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu})) = 0 \quad (3.1.3)$$

dove t_{μ}^{ν} è uno pseudotensore ovvero un oggetto che si trasforma in modo affine ma non covariante mentre θ_{μ}^{ν} è lo pseudotensore totale dovuto sia alla materia che ai campi gravitazionali e non. Più in generale in letteratura si trovano definiti i potenziali tensoriali e covarianti ma noi ci limiteremo agli pseudotensori [45, 46, 47, 48]. Quindi ciò che si conserva non è solo il tensore dei campi non gravitazionali e della materia T_{μ}^{ν} ma ad esso deve essere aggiunto uno pseudotensore t_{μ}^{ν} che può essere interpretato come associato al campo gravitazionale ed a conservarsi è l'energia dovuta alla somma dei contributi dei campi gravitazionali e non più quella dei campi dovuti la materia. Tuttavia dato il carattere di pseudotensorialità di t_{μ}^{ν} che lo rende dipendente dalle coordinate l'energia gravitazionale diventa non localizzabile. Einstein applicando il principio variazionale di Hilbert alla seguente densità di lagrangiana che è una densità scalare non covariante

$$L = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) \quad (3.1.4)$$

ha definito lo pseudotensore energia-impulso del campo gravitazionale:

$$\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{16\pi} \left(\delta_{\mu}^{\nu} L - \frac{\partial L}{\partial g^{\rho\sigma}_{,\nu}} g^{\rho\sigma}_{,\mu} \right) \quad (3.1.5)$$

3.2 Lo pseudotensore energia-impulso di Landau-Lifshitz

Lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale definito da Landau-Lifshitz ha il grande vantaggio di essere simmetrico a differenza di quello di Einstein che in generale non lo è. Questo permette di definire il momento angolare e quindi la relativa legge di conservazione. Adottando un sistema di coordinate geodetiche dove si annullano le derivate prime del tensore metrico $g^{\mu\nu}$ l'equazione (3.1.2) si riduce alla (3.1.1) che può essere scritta in

termini della seguente quantità antisimmetrica nei due ultimi indici $\eta^{\mu\nu\sigma} = -\eta^{\mu\sigma\nu}$ ovvero:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \eta^{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} \quad (3.2.1)$$

Poiché la connessione di Levi-Civita Γ si annulla in un punto in tale sistema di coordinate è possibile utilizzando le equazioni di Einstein in presenza di materia scritte in tali coordinate esprimere il tensore energia-impulso della materia $T^{\mu\nu}$ come:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^\rho} [(-g) (g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})] \right\} \quad (3.2.2)$$

dove indicando il termine in parentesi graffa con la quantità antisimmetrica negli ultimi due indici $h^{\mu\nu\sigma} = -h^{\mu\sigma\nu}$ otteniamo:

$$\frac{\partial h^{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} - (-g) T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.2.3)$$

Ritornando ad un arbitrario sistema di coordinate la differenza precedente non si annulla più per cui possiamo indicarla con $(-g) t^{\mu\nu}$ ovvero:

$$(-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{\partial h^{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} \quad (3.2.4)$$

Le grandezze $t^{\mu\nu}$ sono simmetriche ma non costituiscono le componenti di un tensore covariante bensì affine ovvero esse si trasformano come le componenti di un tensore sotto trasformazioni affini ma non sotto trasformazioni generali. Utilizzando nuovamente le equazioni di campo di Einstein è possibile dalla (3.2.4) ricavare una espressione esplicita di $t^{\mu\nu}$, definito come lo *pseudotensore energia-impulso* del campo gravitazionale, mediante le derivate delle componenti del tensore metrico ossia:

$$\begin{aligned} 16\pi (-g) t^{\mu\nu} = & \mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\rho} \mathfrak{g}^{\rho\sigma}{}_{,\sigma} - \mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\rho} \mathfrak{g}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{\rho\alpha}{}_{,\beta} \mathfrak{g}^{\beta\sigma}{}_{,\alpha} \\ & - \left(g^{\mu\rho} g_{\sigma\alpha} \mathfrak{g}^{\nu\alpha}{}_{,\beta} \mathfrak{g}^{\sigma\beta}{}_{,\rho} + g^{\nu\rho} g_{\sigma\alpha} \mathfrak{g}^{\mu\alpha}{}_{,\beta} \mathfrak{g}^{\sigma\beta}{}_{,\rho} \right) + g_{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} \mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\alpha} \mathfrak{g}^{\nu\sigma}{}_{,\beta} \\ & + \frac{1}{8} (2g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) (2g_{\alpha\beta} g_{\gamma\lambda} - g_{\beta\gamma} g_{\alpha\lambda}) \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\rho} \mathfrak{g}^{\beta\gamma}{}_{,\sigma} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

dove $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$. Grazie all'antisimmetria di $h^{\mu\nu\sigma}$ dalla (3.2.4) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0 \quad (3.2.6)$$

che vuol dire che vale la legge di conservazione dell'energia e del momento definiti attraverso gli integrali di superficie estesi ad ogni ipersuperficie infinita che racchiude l'intero spazio tridimensionale (ad esempio prendendo un quadrivolume Ω delimitato da due ipersuperfici spaziali infinite e da una ipersuperficie di tipo tempo collocata all'infinito spaziale) se i campi vanno a zero in maniera sufficientemente rapida all'infinito spaziale:

$$P^\mu = \int_{\partial\Omega} (-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) dS_\nu \quad (3.2.7)$$

e che per una ipersuperficie ad x^0 costante si può scrivere come un integrale di volume ovvero:

$$P^\mu = \int_V (-g) (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) dV \quad (3.2.8)$$

3.3 Il complesso dei contributi energia-impulso di Møller

Gli pseudotensori energia-impulso $t^{\mu\nu}$ sia di Einstein che di Landau-Lifshitz oltre ad avere la pecca di essere tensori solo affini e non covarianti dipendono inoltre dalla scelta delle coordinate. Quindi Møller cercò una espressione per l'energia ed il momento gravitazionali indipendenti dal particolare sistema di coordinate. Per fare ciò Møller sfruttò il fatto che lo pseudotensore comprensivo di materia più gravità $\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ può essere definito a meno di una grandezza $S^{\mu\nu}$ a divergenza nulla $\partial_\mu S^{\mu\nu} = 0$. Nel 1958 Møller propose il seguente tensore complesso dei contributi energia-impulso $\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \theta_\mu{}^\nu + S_\mu{}^\nu$ cercando la $S_\mu{}^\nu$ tale che $\mathcal{T}_\mu{}^\nu$ si trasformasse come un tensore per trasformazioni solo spaziali ovvero [49]:

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \frac{1}{8\pi} \partial_\rho [\sqrt{-g} (g_{\mu\sigma,\lambda} - g_{\mu\lambda,\sigma}) g^{\lambda\nu} g^{\sigma\rho}] \quad (3.3.1)$$

dove l'espressione in parentesi quadra è il superpotenziale antisimmetrico $U_\mu{}^{\nu\rho} = -U_\mu{}^{\rho\nu}$ tale che:

$$\partial_\nu \mathcal{T}_\mu{}^\nu = 0 \quad (3.3.2)$$

Il complesso dei contributi energia-momento (3.3.1) ha la fondamentale proprietà che le componenti $\mathcal{T}_0{}^\nu$ si trasformano come una densità quadrivettoriale rispetto alle trasformazioni puramente spaziali a jacobiano positivo. Questo significa che l'energia contenuta in una ipersuperficie non dipende dalla scelta delle coordinate spaziali. Poi definì il quadrivettore energia-momento totale di un sistema asintoticamente piatto come:

$$P_\mu = \int_{x^0=const.} \mathcal{T}_\mu{}^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.3.3)$$

con coordinate cartesiane x^1, x^2, x^3 .

3.4 Lo pseudotensore energia-impulso di Papapetrou

Papapetrou nel 1948 utilizzò il metodo di Belifante generalizzato per ricavare il suo pseudotensore dovuto al complesso dei contributi energia-impulso utilizzando l'espressione di Tolman dello pseudotensore complessivo di Einstein θ_{μ}^{ν} (3.1.3) ossia:

$$\theta_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(-g^{\nu\sigma} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\sigma, \rho}} + \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta, \rho}} \right) \quad (3.4.1)$$

dove L è la lagrangiana di Einstein data dalla (3.1.4) ed $g^{\nu\sigma}$ sono stati definiti in precedenza. Il metodo di Belifante consiste nel trovare una quantità simmetrica $\Omega^{\mu\nu} = \Omega^{\nu\mu}$ a divergenza nulla che differisce da $\eta^{\mu\rho} \theta_{\rho}^{\nu}$ solo per una divergenza della quantità antisimmetrica nei primi due indici $B^{\mu\nu\rho} = -B^{\nu\mu\rho}$ ovvero:

$$\Omega^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \theta_{\rho}^{\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} B^{\mu\nu\rho} \quad (3.4.2)$$

tale che:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Omega^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4.3)$$

con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esprimendo $B^{\mu\nu\rho}$ in termini della densità di spin del campo $S^{\mu\nu\rho}$:

$$B^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2} (S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\mu\nu} + S^{\rho\nu\mu}) \quad (3.4.4)$$

si ottiene dopo un po' di conti l'espressione per lo pseudotensore complessivo $\Omega^{\mu\nu}$:

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - g^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} - g^{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho})] \quad (3.4.5)$$

Tale oggetto geometrico è simmetrico rispetto ai primi due indici μ e ν e soddisfa la legge di conservazione locale (3.4.3) e la quantità conservata è il seguente integrale di volume che esprime l'energia ed il momento totali:

$$P^{\mu} = \int \Omega^{\mu 0} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.4.6)$$

3.5 Lo pseudotensore energia-impulso di Weinberg

Weinberg [50] ha ricavato lo pseudotensore energia-impulso totale adottando un sistema di coordinate quasi-minkowskiano. In tale sistema il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ tende a quello di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ a grandi distanze da un sistema materiale finito.¹ Scriviamo la metrica $g_{\mu\nu}$ come somma della metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ più $h_{\mu\nu}$ che va a zero all'infinito ma che può assumere valori arbitrariamente grandi altrove ossia:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.5.1)$$

Le equazioni di Einstein $G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$ sviluppando in tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ in termini di potenze di $h_{\mu\nu}$ si possono linearizzare:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} = -8\pi G [T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}] \quad (3.5.2)$$

dove

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - R^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \right) \quad (3.5.3)$$

è lo pseudotensore gravitazionale energia impulso. Quindi nella (3.5.2) si vede che leggendo l'equazione da destra verso sinistra $t_{\mu\nu}$ assume il significato di sorgente della curvatura linearizzata assieme al tensore dei campi non gravitazionali e della materia $T_{\mu\nu}$. Dalla legge di Bianchi linearizzata a cui obbediscono le quantità $R^{(1)}_{\mu\nu}$ si ottiene la seguente legge di conservazione locale:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.5.4)$$

Sviluppando lo pseudotensore $t_{\mu\nu}$ in potenze di h si ottiene che il primo termine è quadratico in h ossia:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left(-\frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R^{(1)}_{\rho\sigma} + R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma} \right) + \mathcal{O}(h^3) \quad (3.5.5)$$

dove $R_{\mu\nu}$ al prim'ordine in h è:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right) \quad (3.5.6)$$

¹La segnatura della metrica $g_{\mu\nu}$ in questo paragrafo è $(-+++)$, il tensore di Ricci è definito $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$ ed il tensore di Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \dots$

mentre al second'ordine in h è:

$$\begin{aligned}
R^{(2)}_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}h^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} \right) \\
& + \frac{1}{4} \left(2 \frac{\partial h^\rho_\sigma}{\partial x^\rho} - \frac{\partial h^\rho_\rho}{\partial x^\sigma} \right) \left(\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\sigma_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \left(\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial h^{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h^\lambda_\mu}{\partial x_\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Capitolo 4

Il limite di campo debole della gravità di ordine superiore

Abbiamo derivato le equazioni di campo nel limite di campo debole partendo da una densità di lagrangiana gravitazionale $L_g = (R + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R) \sqrt{-g}$. Ne abbiamo calcolato le soluzioni sia nel vuoto che in presenza di materia ricavando le onde gravitazionali nel vuoto modificate dai termini aggiuntivi tipo $R \square^k R$ presenti nella lagrangiana. Con opportuni coefficienti a_k è possibile trovare fino a $p + 2$ modi normali di oscillazione con sei stati di polarizzazione, tre trasversali ed tre non, ad elicità 0 o 2. Più precisamente: il modo ω_1 con $k^2 = 0$ polarizzazione trasversale $\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}$ e $\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}$ ad elicità 2; i $p + 1$ modi ω_m con $k^2 \neq 0$ polarizzazione trasversale $\epsilon_{\mu\nu}^{(1)}$ e non trasversali $\epsilon_{\mu\nu}^{(TT)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(TS)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(L)}$ tutti ad elicità 0 [C].

4.1 Le equazioni di campo nell'approssimazione di campo debole

Consideriamo la seguente densità di lagrangiana L somma della L_g gravitazionale, lineare in R e $\square^k R$, e di quella materiale L_m con derivata variazionale $\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}$ rispetto a $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 L &= L_g + L_m \\
 L_g &= (R + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R) \sqrt{-g} & P^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} \\
 L_m &= 2\chi \sqrt{-g} \mathcal{L}_m & T^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

con $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ e $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ il d'Alembertiano covariante e $T^{\mu\nu}$ tensore energia-momento della materia più campi non gravitazionali.

Utilizziamo il principio di minima azione applicato all'azione della densità di lagrangiana $L = L_g + L_m$. Imponiamo che la derivata variazionale $\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$ perchè condizione necessaria per la stazionarietà di tale azione dove la derivata variazionale è [51] [52] [21]:

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \sum_{m=0}^{2p+2} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu, i_1 \dots i_m}} \right)_{, i_1 \dots i_m} \quad (4.1.2)$$

Otteniamo così le equazioni di campo di ordine $2p + 4$ associate alla nostra densità di lagrangiana L (vedi appendice A.1, A.2 ed A.2.1): ¹

$$\begin{aligned} & R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + 2a_0(RR^{\mu\nu} - \frac{1}{4}R^2g^{\mu\nu} - R^{;\mu\nu} + g^{\mu\nu}\square R) \\ & + 2 \sum_{j=1}^p a_j (R^{\mu\nu}\square^j R - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}R\square^j R - (\square^j R)^{;\mu\nu} + g^{\mu\nu}\square^{j+1} R) \\ & + \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j \frac{1}{2} \left\{ g^{\mu\nu} \left[(\square^{j-A} R)_{;\lambda} (\square^{A-1} R)^{;\lambda} + (\square^{j-A} R) (\square^A R) \right] \right. \\ & \left. - 2(\square^{j-A} R)^{;\mu} (\square^{A-1} R)^{;\nu} \right\} = \chi T^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

In approssimazione di campo debole ovvero $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ le equazioni di campo diventano [50](appendice A.2.1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(h^\rho{}_{\mu,\nu\rho} + h^\rho{}_{\nu,\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k \square^k (h^{\tau\kappa}{}_{,\tau\kappa} - \square h)^{,\lambda\sigma} \\ & = 4\pi(2 T_{\mu\nu} - T\eta_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

con $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ e la traccia $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Per verificare l'identità di Bianchi contratta $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ il tensore energia impulso della materia $T_{\mu\nu}$ deve essere quello imperturbato ovvero calcolato all'ordine zero in h affinché valga la legge di conservazione $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$. Infatti la divergenza ordinaria del membro sinistro e destro della (4.1.4) debbono essere uguali ovvero:

¹La segnatura della metrica $g_{\mu\nu}$ è $(+ - - -)$, il tensore di Ricci è definito $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ ed il tensore di Riemann $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (h^{\rho}_{\mu,\nu\rho} + h^{\rho}_{\nu,\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k \square^k (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h)^{\lambda\sigma\mu} \\ = 4\pi (2 T_{\mu\nu}{}^{,\mu} - T^{,\mu}\eta_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Calcolando la traccia della (4.1.4)

$$6 \sum_{k=0}^p a_k \square^k (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h) = h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h + 8\pi T \quad (4.1.6)$$

si ha dalle (4.1.5) e (4.1.6) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h)_{,\nu} - \frac{1}{6} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h + 8\pi T)^{\lambda\sigma\mu} \\ = 4\pi (2 T_{\mu\nu}{}^{,\mu} - T^{,\mu}\eta_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

ossia:

$$\frac{1}{2} (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h)_{,\nu} - \frac{1}{6} (3\square) (h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} - \square h + 8\pi T)_{,\nu} = 4\pi (2 T_{\mu\nu}{}^{,\mu} - T_{,\nu}) \quad (4.1.8)$$

che implica $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$.

L'equazione (4.1.4) è gauge invariante quindi esiste sempre una trasformazione di gauge tale che valga la gauge armonica ovvero

$$(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h)_{,\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} h^{\tau\kappa}_{,\tau\kappa} = \frac{1}{2}\square h \\ h^{\rho}_{\mu,\nu\rho} + h^{\rho}_{\nu,\mu\rho} - h_{,\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Le equazioni quindi si semplificano e diventano:

$$\boxed{\square h_{\mu\nu} - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k \square^{k+1} h^{\lambda\sigma} = -8\pi (2 T_{\mu\nu}^{(0)} - T^{(0)}\eta_{\mu\nu})} \quad (4.1.10)$$

ovvero 10 equazioni differenziali parziali lineari di ordine $2(p+2)$ di cui solo 6 indipendenti perché vale l'identità di Bianchi contratta. La traccia dell'equazione 4.1.10 è:

$$\square h - 6 \sum_{k=0}^p a_k \square^{k+2} h = 16\pi T \quad (4.1.11)$$

È possibile mettere la (4.1.11) in una forma più compatta definendo

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_l = -6a_{l-2} \quad \text{se } l > 1 \end{cases} \quad (4.1.12)$$

e si ha

$$\boxed{\sum_{l=1}^{p+2} c_l \square^l h = 16\pi T^{(0)}} \quad (4.1.13)$$

4.2 Il limite newtoniano

4.2.1 Primo metodo

Verifichiamo che le (4.1.10) si riducono alla equazione di Poisson nell'approssimazione newtoniana ovvero di campo debole statico a velocità non relativistiche ossia (vedi appendice A.2.2):

1. il campo sia debole ossia $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| < 1$
2. il campo sia statico ovvero $g_{\mu\nu,0} = 0 \wedge g_{i0} = 0$
3. le velocità siano piccole rispetto a c ovvero $v/c \ll 1$ (moto lento)

Utilizzando il tensore energia momento materiale $T_{\mu\nu}$ approssimato all'ordine zero $T_{\mu\nu} = \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \rho$, perché siamo in approssimazione di moto lento, dalla (4.1.10) si hanno le seguenti equazioni di campo [53]:

$$\Delta h_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h^{\lambda\sigma} = 8\pi (2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \eta_{\mu\nu}) \rho \quad (4.2.1)$$

la cui traccia è:

$$\Delta h + 6 \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+2} \Delta^{k+2} h = -16\pi \rho \quad (4.2.2)$$

L'equazione della componente *time - time* della perturbazione metrica dalla (4.2.1) è:

$$\Delta h_{00} + \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+2} \Delta^{k+2} h = +8\pi \rho \quad (4.2.3)$$

Le equazioni per le componenti spaziali dalla (4.2.1) sono:

$$\Delta h_{ij} + \eta_{ij} \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+2} \Delta^{k+2} h + 2 \sum_{k=0}^p (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h_{,ij} = 8\pi\rho\delta_{ij} \quad (4.2.4)$$

Dalla (4.2.2) ed (4.2.3) si ottiene:

$$6\Delta h_{00} - \Delta h = 64\pi\rho \quad (4.2.5)$$

Dalla gauge armonica si ha per la perturbazione metrica $h_{\mu\nu}$

$$h^{ij}_{,j} - \frac{1}{2}h^{,i} = 0 \quad (4.2.6)$$

ovvero :

$$\begin{cases} h^{11}_{,1} + h^{12}_{,2} + h^{13}_{,3} + \frac{1}{2}h_{,1} = 0 \\ h^{21}_{,1} + h^{22}_{,2} + h^{23}_{,3} + \frac{1}{2}h_{,2} = 0 \\ h^{31}_{,1} + h^{32}_{,2} + h^{33}_{,3} + \frac{1}{2}h_{,3} = 0 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

sicuramente verificate se:

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} \quad (4.2.8)$$

e le rimanenti nulle. Dalla (4.2.5) e la (4.2.8) tenendo presente che $h = -2h_{00}$ si ha:

$$\Delta h_{00} = 8\pi\rho \quad (4.2.9)$$

Ponendo $h_{00} = 2\phi$ si ha:

$$h_{\mu\nu} = \text{diag}(2\phi, 2\phi, 2\phi, 2\phi) \quad (4.2.10)$$

Quindi sostituendo nella (4.2.9) otteniamo l'equazione di Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (4.2.11)$$

4.2.2 Secondo metodo

Faremo vedere ora come si possano ricavare le equazioni di Poisson in un modo alternativo aggiungendo alla metrica le due ipotesi di piattezza ed andamento asintotici rispetto alle tre ipotesi classiche ed alleggerendo quella della staticità che diventa stazionarietà ovvero [1, 54]:

1. campo debole

2. stazionarietà ($g_{\mu\nu,0} = 0$)
3. moto lento
4. piatezza asintotica
5. andamento asintotico

Effettuando la seguente sostituzione:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \quad (4.2.12)$$

la gauge armonica diventa $(\bar{h}^{\mu\nu})_{,\mu} = 0$.

Se imponiamo che la metrica sia:

1. *stazionaria* ovvero $g_{\mu\nu,0} = 0$
2. *asintoticamente piatta* ovvero $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$,
3. *andamento asintotico*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^M \left[\bar{h}^{\mu\nu} - \sum_{n=0}^M \frac{A_n^{\mu\nu}}{r^n} \right] = 0 \quad \forall M > 0$$

possiamo sviluppare la $\bar{h}^{\mu\nu}$ asintoticamente nel seguente modo:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{A^{\mu\nu}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (4.2.13)$$

Imponendo la condizione di gauge alla (4.2.13):

$$0 = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu i}_{,i} = \frac{A^{\mu i} n_i}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{con} \quad n_i = \frac{x_i}{r} \quad (4.2.14)$$

si ottiene:

$$A^{\mu i} = 0, \quad |\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{0i}|, \quad |\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{ki}| \quad (4.2.15)$$

cioè sopravvive solo \bar{h}^{00} all'ordine $\frac{1}{r}$ perché $\bar{h}^{\mu i} \approx \frac{1}{r^2}$. In generale quindi si ha:

$$\Delta^{k+1} \bar{h}^{\lambda\sigma} \approx \frac{1}{r^{2k+5}} \quad \wedge \quad \Delta \bar{h}_{\mu\nu} \approx \frac{1}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{k+1} \bar{h}^{\lambda\sigma} = o(\Delta \bar{h}_{\mu\nu}) \quad (4.2.16)$$

Quindi la (4.2.1) diventa in queste ipotesi (campo debole, stazionarietà e piatezza asintotica)

$$\Delta \bar{h}_{00} = 16\pi (2T_{00} - T) \quad (4.2.17)$$

perché $\bar{h}_{00} = 2h_{00}$.

Nell'ipotesi ulteriore che le velocità siano molto inferiore a c ovvero *moto lento*, si ha:

$$\left| \frac{v}{c} \right| \ll 1 \rightarrow |T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}| \rightarrow T = T_{00} = \rho \quad (4.2.18)$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi\rho$$

Ponendo $h_{00} = 2\phi$ si ottiene l'equazione di Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi\rho$$

4.3 La soluzione delle equazioni di campo

Per poter risolvere l'equazione (4.1.10) il trucco sta nel risolvere prima la sua traccia calcolando $h(x)$ dalla (4.1.13), sostituirla nell'equazione di campo che a questo punto diventa una equazione tipo onde non omogenea e ricavare il tensore della perturbazione metrica $h_{\mu\nu}$.

La soluzione dell'equazione (4.1.10) la scriviamo come somma della soluzione omogenea più una soluzione particolare ovvero

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{omog} + h_{\mu\nu}^{part} \quad (4.3.1)$$

indichiamo $h_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ rispettivamente la soluzione omogenea e quella particolare.

4.3.1 La soluzione particolare

Calcoliamo funzione di Green per l'operatore differenziale lineare $D = \sum_{l=1}^{p+2} c_l \square^l$ (vedi appendice A.2.3)

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l \square^l G_D(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (4.3.2)$$

Gli integrali di Fourier per la G_D e la δ sono

$$G_D(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}_D(k) e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad \delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad (4.3.3)$$

dove $x = x^\alpha = (t, \mathbf{x})$, $k = k^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$, $k^2 = k^\alpha k_\alpha$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = q^2$ e $q = |\mathbf{k}|$.

Dalla relazione

$$\square^l G_D(x, x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-1)^l k^{2l} \tilde{G}_D(k) e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad (4.3.4)$$

scrivendo la (4.3.2) nello spazio dei k otteniamo la funzione di Green trasformata

$$\tilde{G}_D(k) = \frac{1}{\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l k^{2l}} \quad (4.3.5)$$

ovvero

$$G_D(x, x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l k^{2l}} e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad (4.3.6)$$

Quindi la soluzione particolare della (4.1.13) è:

$$\mathbf{h}(x) = 16\pi \int d^4 x' G_D(x, x') T^{(0)}(x') \quad (4.3.7)$$

ovvero

$$\mathbf{h}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \underbrace{\left[\int d^4 x' \frac{16\pi T^{(0)}(x') e^{-ik^\alpha x'_\alpha}}{\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l k^{2l}} \right]}_{\tilde{\mathbf{h}}(k)} e^{ik^\alpha x_\alpha} \quad (4.3.8)$$

Ogni derivata della perturbazione metrica $h_{\mu\nu}$ nello spazio delle coordinate fa scendere un ik_μ nello spazio di Fourier ossia $h(x)_{,\mu} \rightarrow ik_\mu \tilde{h}(k)$. Sostituendo la (4.3.8) nella (4.1.10) si ha

$$\underbrace{\square \mathbf{h}_{\mu\nu} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\mathbf{h}}(k) \left[(\eta_{\mu\nu} k^2 + 2k_\mu k_\nu) \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k^{2(l+1)} \right] e^{ik^\alpha x_\alpha} \right\}}_{F_{\mu\nu}(x)} = -8\pi(2T_{\mu\nu}^{(0)} - T^{(0)}\eta_{\mu\nu}) \quad (4.3.9)$$

e quindi si ottiene

$$\square \mathbf{h}_{\mu\nu} = -8\pi(2T_{\mu\nu}^{(0)} - T^{(0)}\eta_{\mu\nu}) + F_{\mu\nu}(x) \quad (4.3.10)$$

$$\boxed{\mathbf{h}_{\mu\nu}(x) = \int d^4 x'' G_\square(x, x'') [-8\pi(2T_{\mu\nu}^{(0)}(x'') - \eta_{\mu\nu} T^{(0)}(x'')) + F_{\mu\nu}(x'')] } \quad (4.3.11)$$

ovvero la *soluzione particolare delle equazioni di campo*, dove G_{\square} è la funzione di Green per l'operatore \square ovvero:

$$\square G_{\square}(x, x'') = \delta^4(x - x'') \quad (4.3.12)$$

$$G_{\square}(x, x'') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right) e^{ik^\alpha(x_\alpha - x''_\alpha)} \quad (4.3.13)$$

4.3.2 La soluzione omogenea

Per calcolare la soluzione omogenea della (4.1.10), effettuiamo la trasformata di Fourier solo delle coordinate spaziali della traccia (vedi appendice A.2.4):

$$\mathfrak{h}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathfrak{h}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.3.14)$$

dalla (4.1.13) omogenea

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l (\partial_0^2 - \Delta)^l \mathfrak{h}(x) = 0 \quad (4.3.15)$$

otteniamo:

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + q^2 \right]^l \mathfrak{h}(t, \mathbf{k}) = 0 \quad (4.3.16)$$

dove $q^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Sia \tilde{D}_t il seguente operatore differenziale lineare

$$\tilde{D}_t = \partial_0^2 + q^2$$

riscriviamo l'equazione nel seguente modo

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l \tilde{D}_t^l \mathfrak{h}(t, \mathbf{k}) = 0 \quad (4.3.17)$$

che rappresenta una equazione differenziale ordinaria omogenea in t di grado $2(p+2)$ a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è:

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l (\lambda^2 + q^2)^l = 0 \quad (4.3.18)$$

ammette per il teorema del fondamentale dell'algebra $2(p+2)$ soluzioni in λ . Se poniamo $\lambda_m^\pm = \pm i\omega_m$ otteniamo $p+2$ soluzioni ω_m del polinomio. Definiamo il quadri-vettore $k_m^\mu = (\omega_m, \mathbf{k})$ con $k_m^2 = \omega_m^2 - q^2$ avremo $p+2$ soluzioni k_m^2 dell'equazione

$\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l (k^2)^l = 0$. Una soluzione è sicuramente $k_1^2 = 0$ ossia $\omega_1 = q$ che darà le onde gravitazionali previste dalla GR.

In generale ω_m è un numero complesso e quindi ci saranno anche onde smorzate ma limitandoci a ω_m reale basta imporre delle condizioni sulle c_l ovvero sulle a_l . Quindi ci limiteremo al solo caso di ω_m reali, distinte e che siano esattamente $p+2$ dalle condizioni imposte. Le soluzioni della (4.3.17) sono [55, 1]:

$$\mathfrak{h}(t, \mathbf{k}) = \sum_{m=1}^{p+2} [A'_m(\mathbf{k}) e^{i\omega_m t} + A''_m(\mathbf{k}) e^{-i\omega_m t}] \quad (4.3.19)$$

che nello spazio delle coordinate diventa:

$$\mathfrak{h}(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} [A_m^+(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A_m^-(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_m t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}] \quad (4.3.20)$$

dove $A_m^+(\mathbf{k}) = A'_m(\mathbf{k})$ e $A_m^-(\mathbf{k}) = A''_m(-\mathbf{k})$. Siccome vogliamo una $\mathfrak{h}(t, \mathbf{x})$ reale basta che $A_m^+(\mathbf{k}) = \bar{A}_m^-(\mathbf{k})$ ovvero prendiamo la parte reale del seguente integrale:

$$\mathfrak{h}(t, \mathbf{x}) = \Re \left\{ \sum_{m=1}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \quad (4.3.21)$$

dove A_m è una funzione complessa. In seguito anche se non indicato prenderemo sempre la parte reale o equivalentemente il c.c.. Rappresentiamo $\mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ con la trasformata di Fourier rispetto alle sole coordinate spaziali \mathbf{x}

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.3.22)$$

dove $k_m^\mu = (\omega_m, \mathbf{k})$ come già definito. Dalla equazione (4.1.10) omogenea, dalle (4.3.21) e (4.3.22) nello spazio di Fourier si ha:

$$(\partial_0^2 + q^2) \mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) = \sum_{m=1}^{p+2} \left\{ \left[\eta_{\mu\nu} k_m^2 + 2(k_m)_\mu (k_m)_\nu \right] \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} \right\} A_m(\mathbf{k}) e^{i\omega_m t} \quad (4.3.23)$$

dove $k_m^2 = (k_m)^\alpha (k_m)_\alpha = \omega_m^2 - q^2$.

Per $m = 1$ essendo $k_1^2 = 0$ il primo termine della sommatoria in m nella (4.3.23) si annulla e quindi la sommatoria parte da $m = 2$. Per $2 \leq m \leq p+2$, dove $k_m^2 \neq 0$, dalla

seguinte identità:

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l k_m^{2l} = -k_m^2 \left(1 + 6 \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} = -\frac{1}{6} \quad (4.3.24)$$

si ha:

$$(\partial_0^2 + q^2) \mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) = \sum_{m=2}^{p+2} \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{i\omega_m t} \quad (4.3.25)$$

dove

$$\rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) = \left\{ -\frac{k_m^2}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_m^2} \right] \right\} A_m(\mathbf{k}) \quad (4.3.26)$$

La trasformata di Fourier nelle coordinate \mathbf{x} della funzione $\rho_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$

$$\rho_{\mu\nu}(x) = \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik_m^\alpha x_\alpha} = \sum_{m=2}^{p+2} \rho_{\mu\nu}(x; m) \quad (4.3.27)$$

dove $k_m^\alpha x_\alpha = \omega_m t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Nello spazio delle x si ottiene

$$\square \mathfrak{h}_{\mu\nu}(x) = \sum_{m=2}^{p+2} \rho_{\mu\nu}(x; m) \quad (4.3.28)$$

che risolviamo come somma della soluzione omogenea più quella particolare:

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu}(x) = \underbrace{\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ik_1^\alpha x_\alpha}}_{\text{onde gravitazionali classiche nel vuoto}} + \underbrace{\sum_{m=2}^{p+2} \int d^4 x' G_\square(x, x') \rho_{\mu\nu}(x'; m)}_{\text{termine correttivo}} \quad (4.3.29)$$

soluzione delle equazioni di campo nel vuoto o equivalentemente:

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu}(x) = \underbrace{\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ik_1^\alpha x_\alpha}}_{\text{onde gravitazionali classiche nel vuoto}} + \underbrace{\sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} G_\square(k_m) \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik_m^\alpha x_\alpha}}_{\text{termine correttivo}} \quad (4.3.30)$$

che possiamo anche scrivere più esplicitamente

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{\mu\nu}(x) = & \underbrace{\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ik_1^\alpha x_\alpha}}_{\text{onde gravitazionali classiche nel vuoto}} \\
& + \underbrace{\sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_m^2} \right] \right\} A_m(\mathbf{k}) e^{ik_m^\alpha x_\alpha}}_{\text{termine correttivo}} \quad (4.3.31)
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale delle equazioni di campo nella materia é:

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(x) = & \underbrace{\int d^4x' G_{\square}(x, x') [-8\pi(2 T_{\mu\nu}^{(0)}(x') - \eta_{\mu\nu} T^{(0)}(x'))]}_{\text{onde gravitazionali classiche nella materia}} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ik^\alpha x_\alpha} \\
& + \underbrace{\int d^4x' G_{\square}(x, x') \left[F_{\mu\nu}(x') + \sum_{m=2}^{p+2} \rho_{\mu\nu}(x'; m) \right]}_{\text{termini correttivi}} \quad (4.3.32)
\end{aligned}$$

4.4 La polarizzazione e gli stati di elicità nel vuoto

Per studiare la polarizzazione e l'elicità delle onde [56] consideriamo separatamente il caso con $k_1^2 = 0$ che indichiamo con modo di oscillazione A_1 , dai $p+1$ modi con $k_m^2 \neq 0$ per $2 \leq m \leq p+2$ che indichiamo con modi A_m , classificati nella Tabella 4.1.

Case	Choices	Gauge condition
A_1	$k^2 = k_1^2 = 0 \wedge \tilde{\mathfrak{h}} = C_{\mu}^{\mu}(\mathbf{k}) = 0 \Rightarrow \text{any } \tilde{\mathfrak{h}}_{\mu\nu}$	$\tilde{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} k^\mu = 0$
A_2	$k^2 = k_2^2 = \omega_2^2 - q^2 \wedge \tilde{\mathfrak{h}} = A_2(\mathbf{k}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_2)_\mu (k_2)_\nu}{k_2^2} \right) \tilde{\mathfrak{h}}$	$\tilde{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} k^\mu - \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{h}} k_\nu = 0$
\vdots	\vdots	\vdots
A_{p+2}	$k^2 = k_{p+2}^2 = \omega_{p+2}^2 - q^2 \wedge \tilde{\mathfrak{h}} = A_m(\mathbf{k}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_{p+2})_\mu (k_{p+2})_\nu}{k_{p+2}^2} \right) \tilde{\mathfrak{h}}$	verified

Tabella 4.1: Classificazione delle onde nel vuoto

Consideriamo un'onda che si propaga lungo l'asse z , dalla (4.3.31) si ha:

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu}(t, z) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{i\omega_1(t-z)}$$

$$+ \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_m^2} \right] \right\} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - k_z z)} \quad (4.4.1)$$

dove $k_1^\mu = (\omega_1, 0, 0, k_z)$ e $k_m^\mu = (\omega_m, 0, 0, k_z)$.

Il modo di oscillazione A_1 con $k^2 = k_1^2 = 0$ ovvero $\omega_1 = q = k_z > 0$ potrebbe avere la traccia non nulla della perturbazione metrica $h \neq 0$. Tuttavia sfruttando i gradi rimasti liberi, possiamo effettuare una trasformazione infinitesima che rende la traccia nulla. Infatti dalla (4.4.1) considerando l'onda piana associata al modo ω_1 a \mathbf{k} costante che si propaga lungo l'asse z sfruttando la sola simmetria del tensore di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{A_1}$ si ha:

$$h_{\mu\nu}^{A_1}(t, z) = \epsilon_{\mu\nu}^{A_1}(\mathbf{k}) e^{i\omega_1(t-z)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{01} & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{03} & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} e^{i\omega_1(t-z)} \quad (4.4.2)$$

dove abbiamo posto $C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \epsilon_{\mu\nu}^{A_1}(\mathbf{k})$. Dalle quattro relazioni dovute alla gauge $\epsilon_{\mu\nu} k^\mu - \frac{1}{2} \epsilon k_\nu = 0$ nello spazio delle k , le dieci incognite diventano sei e precisamente: ϵ_{01} , ϵ_{02} , ϵ_{03} , ϵ_{11} , ϵ_{12} ed ϵ . Ovvero scritte per esteso:

$$\begin{cases} \epsilon_{00} + \epsilon_{30} = \frac{1}{2}\epsilon & \Rightarrow \epsilon_{00} = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon_{30} \\ \epsilon_{01} + \epsilon_{31} = 0 & \Rightarrow \epsilon_{31} = -\epsilon_{01} \\ \epsilon_{02} + \epsilon_{32} = 0 & \Rightarrow \epsilon_{32} = -\epsilon_{02} \\ \epsilon_{03} + \epsilon_{33} = -\frac{1}{2}\epsilon & \Rightarrow \epsilon_{33} = -\frac{1}{2}\epsilon - \epsilon_{03} \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Se effettuiamo la trasformazione infinitesima $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, il tensore di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{A_1}$ al prim'ordine in $|\xi|$ diventa $\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \theta_\nu + k_\nu \theta_\mu$ se $\xi^\mu = i\theta^\mu e^{ik_1^\alpha x_\alpha}$ [56]. Essendo in questo modo $k_1^2 = 0$ si ha $\square \xi^\mu = 0$ cioè la gauge rimane invariata (gauge invariant) e quindi possiamo trovare quella trasformazione di gauge che ci renda la perturbazione metrica trasversa ed a traccia nulla che nello spazio di Fourier si traduce nelle due condizioni $k^\mu \epsilon'_{\mu\nu} = 0$ ed $\epsilon' = 0$ nota come gauge TT, lasciando solo due gradi di libertà residui.

Quindi per il sistema (4.4.3) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \epsilon'_{00} = \epsilon_{00} + 2\omega_1\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = -\frac{\epsilon_{00}}{2\omega_1} = -\frac{\epsilon}{4\omega_1} + \frac{\epsilon_{30}}{2\omega_1} \quad \text{se } \epsilon'_{00} = 0 \\
 \epsilon'_{11} = \epsilon_{11} \\
 \epsilon'_{22} = \epsilon_{22} \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_{22} = -\epsilon_{11} \\
 \epsilon'_{33} = \epsilon_{33} - 2\omega_1\theta_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = -\frac{\epsilon_{33}}{2\omega_1} = -\frac{\epsilon}{4\omega_1} - \frac{\epsilon_{30}}{2\omega_1} \quad \text{se } \epsilon'_{33} = 0 \\
 \epsilon'_{01} = \epsilon_{01} + \omega_1\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -\frac{\epsilon_{01}}{\omega_1} \quad \text{se } \epsilon'_{01} = 0 \\
 \epsilon'_{02} = \epsilon_{02} + \omega_1\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = -\frac{\epsilon_{02}}{\omega_1} \quad \text{se } \epsilon'_{02} = 0 \\
 \epsilon'_{03} = \epsilon_{03} + \omega_1\theta_3 - \omega_1\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_{03} = 0 \\
 \epsilon'_{12} = \epsilon_{12} \\
 \epsilon'_{13} = \epsilon_{13} - k_z\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_{13} = 0 \\
 \epsilon'_{23} = \epsilon_{23} - k_z\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_{23} = 0
 \end{array} \right. \quad (4.4.4)$$

Scegliendo il quadrivettore associato alla trasformazione infinitesima

$\theta_\mu = \left(-\frac{\epsilon}{4\omega_1} + \frac{\epsilon_{30}}{2\omega_1}, -\frac{\epsilon_{01}}{\omega_1}, -\frac{\epsilon_{02}}{\omega_1}, -\frac{\epsilon}{4\omega_1} - \frac{\epsilon_{30}}{2\omega_1} \right)$ si ha che il tensore di polarizzazione $\epsilon'^{A_1}_{\mu\nu}$ diventa

$$\epsilon'^{A_1}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ 0 & \epsilon_{12} & -\epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

ossia per le onde di tipo A_1 si hanno i due stati di polarizzazione trasversali della GR.

Quindi una generica onda piana di tipo A_1 si scrive come:

$$\mathfrak{h}^{A_1}_{\mu\nu}(t, z) = \sqrt{2} [\epsilon_{11}\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} + \epsilon_{12}\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}] e^{i\omega_1(t-z)} \quad (4.4.6)$$

dove abbiamo indicato i due stati di polarizzazione della GR con

$$\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{\mu\nu}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

I modi di oscillazione A_m con $2 \leq m \leq p + 2$ e $k^2 = k_m^2 \neq 0$ hanno sempre la traccia della perturbazione $\mathfrak{h} \neq 0$, altrimenti si otterrebbe $A_m(\mathbf{k}) = 0$ ovvero la soluzione banale $\mathfrak{h}_{\mu\nu} = 0$. Dall'equazione (4.4.1) consideriamo l'onda piana relativa al modo m per \mathbf{k} fissato ovvero:

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu}^{A_m}(t, z) = \epsilon_{\mu\nu}^{A_m} e^{i(\omega_m t - k_z z)} = \frac{A_m(\mathbf{k})}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\omega_m^2}{k_m^2} & 0 & 0 & -\frac{\omega_m k_z}{k_m^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\omega_m k_z}{k_m^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{k_z^2}{k_m^2} \end{pmatrix} e^{i(\omega_m t - k_z z)} \quad (4.4.8)$$

dove $\epsilon_{\mu\nu}^{A_m}(k) = \epsilon_{\mu\nu}(k) \frac{A_m(\mathbf{k})}{3}$ ed è verificata la gauge armonica nello spazio di Fourier $\epsilon_{\mu\nu} k^\mu - \frac{1}{2} \epsilon k_\nu = 0$. La gauge armonica, in generale non è gauge invariante, e per una generica trasformazione di gauge $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ si trasforma come (vedi appendice A.2.5):

$$\partial_\mu \left(h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h' \right) = \partial_\mu \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) - \square \xi^\nu \quad (4.4.9)$$

La nostra trasformazione manda gauge armonica in gauge armonica se e solo se ξ^ν è soluzione dell'equazione $\square \xi^\nu = 0$. Quindi avremo come soluzione

$$\xi^\nu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \theta^\mu(\mathbf{k}) e^{ik_m^\alpha x_\alpha} \Leftrightarrow k_m^2 = 0 \quad (4.4.10)$$

Ma per i modi massivi $k_m^2 \neq 0$ si ha:

$$\square \xi^\nu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \theta^\mu(\mathbf{k}) (-k_m^2) e^{ik_m^\alpha x_\alpha} \neq 0 \quad (4.4.11)$$

a meno che non sia $\theta^\nu = 0$ ovvero la trasformazione identica. Quindi per i modi massivi non esiste nessuna trasformazione di gauge che lasci invariata la gauge armonica ovvero il tensore di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{A_m}$ non può essere modificato. Quindi non è possibile rendere il tensore di polarizzazione per questi modi massivi né completamente spaziale né a traccia nulla per cui esprimendolo in funzione di una opportuna base di polarizzazione ortonormale si ha:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{A_m} = \frac{A_m(\mathbf{k})}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\omega_m^2}{k_m^2} & 0 & 0 & -\frac{\omega_m k_z}{k_m^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\omega_m k_z}{k_m^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{k_z^2}{k_m^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_m(\mathbf{k})}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_m^2}{k_m^2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left(-\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{\omega_m k_z}{k_m^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{k_z^2}{k_m^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

Indicando con

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\epsilon_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (4.4.13)$$

i quattro stati di polarizzazione possiamo esprimere le onde piane tipo A_m così:

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{A_m}(t, z) &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_m^2}{k_m^2} \right) \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})} - \frac{\sqrt{2}\omega_m k_z}{3k_m^2} \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})} - \frac{\sqrt{2}}{6} \epsilon_{\mu\nu}^{(1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{k_z^2}{k_m^2} \right) \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} \right] A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - k_z z)} \quad (4.4.14)
\end{aligned}$$

Quindi la generica soluzione per un'onda che si propaga lungo l'asse z considerando

i $p + 2$ modi di oscillazione ω_m diventa:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(t, z) = & \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{2}\epsilon_{11}\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{2}\epsilon_{12}\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)} \right] e^{i\omega_1(t-z)} \\ & + \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_m^2}{k_m^2} \right) \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})} - \frac{\sqrt{2}\omega_m k_z}{3k_m^2} \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})} \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}}{6} \epsilon_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{k_z^2}{k_m^2} \right) \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} \right] A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - k_z z)} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

espressa rispetto alla base di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(1)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(L)}$. In termini delle ampiezze la soluzione può essere scritta come:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(t, z) = & A^{(+)}(t-z) \epsilon_{\mu\nu}^{(+)} + A^{(\times)}(t-z) \epsilon_{\mu\nu}^{(\times)} \\ & + \sum_{m=2}^{p+2} \left[A_m^{(\text{TT})}(t-v_{G_m}z) \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})} + A_m^{(\text{TS})}(t-v_{G_m}z) \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})} \right. \\ & \left. + A_m^{(1)}(t-v_{G_m}z) \epsilon_{\mu\nu}^{(1)} + A_m^{(L)}(t-v_{G_m}z) \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} \right] \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

dove g_{G_m} è la velocità di gruppo relativa al modo massivo m definita dopo in (4.4.22). I tensori di polarizzazione sono stati scelti in modo da costituire una base ortonormale nel senso dei tensori ossia debbono verificare la seguente relazione:

$$\text{Tr} \{ \epsilon^{(i)} \epsilon^{*(j)} \} \equiv \epsilon_{\mu\nu}^{(i)} \epsilon^{*(j)\mu\nu} = \delta^{ij} \quad \text{con} \quad i, j \in \{+, \times, \text{TT}, \text{TS}, 1, \text{L}\} \quad (4.4.17)$$

I tre stati di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}$ ed $\epsilon_{\mu\nu}^{(1)}$ sono trasversali e verificano la relazione $\epsilon_{\mu\nu} k^\mu = 0$:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} k^\mu = 0 \quad \epsilon_{\mu\nu}^{(\times)} k^\mu = 0 \quad \epsilon_{\mu\nu}^{(1)} k^\mu = 0 \quad (4.4.18)$$

mentre i rimanenti tre stati di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{(L)}$ non sono trasversali:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})} k^\mu \neq 0 \quad \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})} k^\mu \neq 0 \quad \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} k^\mu \neq 0 \quad (4.4.19)$$

In sintesi nella nostra teoria della gravità le onde gravitazionali hanno 6 stati di polarizzazione.

Per studiare l'elicità di tali onde vediamo come si trasforma la base di polarizzazione ($\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}$),

$\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(1)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{L})}$ sotto una rotazione di un angolo φ attorno all'asse z :

$$R_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.20)$$

ovvero $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} \epsilon_{\rho\sigma}$. Le quattro polarizzazioni $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(1)}$ e $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{L})}$ rimangono invariate sotto rotazioni e quindi le onde di tipo A_m con $2 \leq m \leq p+2$ hanno elicità zero. Se introduciamo altre due stati di polarizzazione detti circolari, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{R})} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} + i\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)})$ e $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{L})} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{\mu\nu}^{(+)} - i\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)})$ si vede che sotto la nostra rotazione essi si trasformano come:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^{(\text{L})} = e^{\pm 2i\varphi} \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{L})} \quad (4.4.21)$$

ovvero le onde tipo A_1 hanno elicità 2 perché sono quelle classiche della GR.

È possibile dimostrare che la nostra lagrangiana è conformemente equivalente alla teoria di Einstein con $p+1$ campi scalari opportunamente definiti [52]. Ponendo $k_m^2 = M_m^2$ nelle onde tipo A_m la relazione di dispersione diventa $\omega_m(q) = \sqrt{M_m^2 + q^2}$ ovvero possiamo interpretare i $p+1$ modi di oscillazione come associati ai campi scalari massivi di massa M con quattro stati di polarizzazione, uno trasversale $\epsilon_{\mu\nu}^{(1)}$ e tre longitudinali $\epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TT})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{TS})}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\text{L})}$ ad elicità nulla.

Alle onde di tipo A_1 possiamo associare un campo tensoriale massless con due stati di polarizzazione trasversali ad elicità due. L'onda associata al modo massless A_1 ha velocità c , mentre le onde tipo A_m hanno velocità diversa da c a causa della legge di dispersione. Ovvero se consideriamo il pacchetto d'onda associato a tali modi sappiamo che la velocità di gruppo è definita:

$$v_{G_m} = \frac{d\omega_m(q)}{dq} = \frac{\sqrt{\omega_m^2 - M_m^2}}{\omega_m} \quad (4.4.22)$$

che ci permette di associare una velocità all'onda tipo A_m e quindi alla particella del campo scalare associato. Riportiamo la sintesi della polarizzazione ed dell'elicità nella Tabella 4.2 [22, 23].

Tipo	Relazione di dispersione	Polarizzazione	Elicità	Massa del campo associato
A_1	$\omega_1 = q$	$\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}$	2	0
A_2	$\omega_2 = \sqrt{k_2^2 + q^2}$	$\epsilon_{\mu\nu}^{(TT)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(TS)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(1)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(L)}$	0	$M_2 = k_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_{p+2}	$\omega_{p+2} = \sqrt{k_{p+2}^2 + q^2}$	$\epsilon_{\mu\nu}^{(TT)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(TS)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(1)}, \epsilon_{\mu\nu}^{(L)}$	0	$M_{p+2} = k_{p+2}$

Tabella 4.2: Polarizzazione ed elicità

Capitolo 5

Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità di ordine superiore

È ben noto che ci sono molte procedure per il calcolo dello pseudotensore energia-impulso del campo gravitazionale in relatività generale e molte possibili definizioni. Questo oggetto si comporta come un tensore sotto trasformazioni lineari di coordinate, in questo caso è un tensore affine o uno pseudotensore, ma non si comporta come un tensore sotto trasformazioni di coordinate generali: in questo caso noi parliamo di tensore non covariante. In generale, l'energia e l'impulso del campo gravitazionale più i campi di materia sono conservati in una appropriata regione spazialmente infinita anche se l'energia gravitazionale non può essere localizzata. Landau e Lifshitz hanno sottolineato questa caratteristica del tensore energia-impulso gravitazionale in relatività generale definendolo uno pseudotensore [1].

Tuttavia ogni teoria alternativa della gravità può presentare lo stesso problema cosicché un metodo generale per trattare con lo pseudotensore energia momento gravitazionale è necessario per alcuni problemi pratici che vanno dalla investigazione di ulteriori modi nella radiazione gravitazionale fino alla identificazione e classificazione di termini gravitazionali non locali. In particolare, tali termini stanno ora assumendo un ruolo fondamentale sia nella quantizzazione della gravità in teoria dei campi che nella dark energy in cosmologia [57].

Ad oggi non c'è una teoria quantistica definitiva della gravità ma solo alcune proposte che indicano una struttura estesa intrinseca della geometria dello spaziotempo [58, 59]. Tali caratteristiche sono sempre legate al comportamento efficace non locale dello spaziotempo ed implica in generale termini di ordine superiore nella lagrangiana di interazione effettiva [60, 61, 62, 63]. Nelle teorie delle stringhe ad esempio la misura dello spaziotem-

po è impossibile al di sotto della scala delle stringhe ed allora la teoria manifesta intrinsecamente un comportamento efficace non locale [64, 65]. Una simile situazione viene fuori nella gravità quantistica a loop dove si deve tener conto dell'area minima [66]. In generale ogni teoria quantistica della gravità presenta strutture estese intrinseche comparabili con la lunghezza di Planck [67, 68].

Gli effetti gravitazionali quantistici producono non località e termini di ordine superiore nelle lagrangiane efficaci gravitazionali [58, 59, 69, 70]. In cosmologia la non località potrebbe essere legata all'accelerazione cosmica [71, 72]. In astrofisica la materia oscura e la dinamica newtoniana modificata potrebbero essere spiegate in termini della non località [73, 74].

Nello specifico ogni termine non locale potrebbe essere rappresentato da termini tipo $\square R$ o $\square^k R$ nella lagrangiana gravitazionale effettiva e questa caratteristica dà origine all'estensione della relatività generale. Alla luce di ciò è estremamente importante fissare e classificare le proprietà generali dei termini non locali in particolare le caratteristiche dello pseudotensore energia-impulso gravitazionale a cui tali termini contribuiscono.

In questo capitolo generalizziamo lo pseudotensore energia-momento alle teorie estese della gravità [21, 75] dove la lagrangiana dipende dalle derivate della metrica fino all'ordine n . Mostriamo che tale tensore nonostante dipenda dalle derivate del tensore metrico di ordine superiore al secondo e quindi non può svanire in una carta appropriata è un tensore affine non covariante ovvero uno pseudotensore nel senso di Landau. A prima vista potrebbe sembrare strano che usando oggetti covarianti come il tensore $g_{\mu\nu}$ o le densità scalari di peso $w = -1$, come la lagrangiana L ed il determinante della metrica $\sqrt{-g}$, otteniamo un oggetto affine τ_α^η che si trasforma come un tensore sotto affinità ma non sotto generali diffeomorfismi. Tuttavia ci sono altri esempi di oggetti affini in relatività generale come ad esempio la connessione affine Γ , che noi potremmo chiamare *campo pseudotensoriale* [76], che non essendo un tensore covariante si trasforma come un tensore sotto trasformazioni affini. La ragione di questo comportamento è nella definizione del tensore energia-impulso gravitazionale τ_α^η e nella connessione affine Γ : entrambe sono funzioni delle derivate ordinarie della metrica $g_{\mu\nu}$ e quindi in generale sono oggetti non covarianti. Inoltre ne consegue che l'energia gravitazionale non è localizzabile [18, 47].

Tuttavia nel limite di campo debole in una opportuna gauge lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale per una lagrangiana di n^{esimo} ordine diventa un oggetto più maneggevole dopo che è stato mediato su di un opportuno dominio spaziotemporale. Infatti dopo un'accurata procedura di media si potrebbe calcolare la potenza emessa dalla radiazione gravitazionale da una qualche sorgente astrofisica. L'approccio può essere rilevante allo scopo di investigare possibili addizionali stati di polarizzazioni delle onde gravitazionali

oltre le due polarizzazioni standard della relatività generale [77, 78][A].

5.1 Lo pseudotensore energia-impulso gravitazione nella lagrangiana di ordine n

Abbiamo inizialmente calcolato il tensore energia-momento del campo gravitazionale per una lagrangiana gravitazionale del quart'ordine¹ che dipende dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate² fino al quart'ordine $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\rho}, g_{\mu\nu,\rho\lambda}, g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}, g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma})$. Dopo abbiamo generalizzato l'approccio ad una lagrangiana gravitazionale che dipende dalle derivate della metrica fino all' n^{esimo} ordine. Quindi abbiamo derivato il tensore energia-impulso gravitazionale variando localmente la lagrangiana rispetto alla metrica ed alle coordinate [1].

Consideriamo la variazione dell'azione integrale rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ ed alle coordinate x^μ [21, 79, 80]:

$$I = \int_{\Omega} d^4x L \rightarrow \tilde{\delta}I = \int_{\Omega'} d^4x' L' - \int_{\Omega} d^4x L = \int_{\Omega} d^4x [\delta L + \partial_\mu (L \delta x^\mu)] \quad (5.1.1)$$

dove $\tilde{\delta}$ significa la variazione locale mentre δ sta per la variazione totale mantenendo fissa la coordinata x . Per una trasformazione infinitesima:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (5.1.2)$$

otteniamo la variazione totale del tensore metrico:

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\mu\alpha} \partial_\nu \epsilon^\alpha - g_{\nu\alpha} \partial_\mu \epsilon^\alpha \quad (5.1.3)$$

La variazione funzionale della metrica sotto le trasformazioni globali $\partial_\lambda \epsilon^\mu = 0$ è $\delta g_{\mu\nu} = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}$ e se richiediamo che l'azione sia invariante sotto questa trasformazione, cioè

¹Per lagrangiana di ordine n si intende una dipendenza fino all'ennesimo ordine di derivazione della metrica $g_{\mu\nu}$

²La segnatura della metrica $g_{\mu\nu}$ è $(+ - - -)$, il tensore di Ricci è definito $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$ ed il tensore di Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \dots$

$\tilde{\delta}I = 0$, per un arbitrario volume di integrazione Ω , otteniamo:

$$0 = \delta L + \partial_\mu (L \delta x^\mu) = \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} + \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} - \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\xi \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} \right. \\ \left. + \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\xi \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} \right) \delta g_{\mu\nu} - \partial_\eta (2\chi \sqrt{-g} \tau_\alpha^\eta) \epsilon^\alpha \quad (5.1.4)$$

Imponendo il vincolo sulla metrica $g_{\mu\nu}$ che soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange per la lagrangiana gravitazionale:

$$\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} + \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} - \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\xi \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} + \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\xi \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} = 0 \quad (5.1.5)$$

otteniamo l'equazione di continuità:

$$\partial_\eta (\sqrt{-g} \tau_\alpha^\eta) = 0 \quad (5.1.6)$$

per un arbitrario ϵ^α e dove τ_α^η è il tensore energia-impulso gravitazionale per la nostra lagrangiana espresso come:

$$\tau_\alpha^\eta = \frac{1}{2\chi\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} - \partial_\lambda \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} + \partial_\lambda \partial_\xi \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda\xi}} - \partial_\lambda \partial_\xi \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda\xi\sigma}} \right) g_{\mu\nu,\alpha} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\eta}} - \partial_\xi \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\eta\xi}} + \partial_\xi \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\eta\xi\sigma}} \right) g_{\mu\nu,\alpha\rho} + \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\eta}} - \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\eta\sigma}} \right) g_{\mu\nu,\rho\lambda\alpha} \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\eta\sigma}} g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\alpha} - \delta_\alpha^\eta L \right] \quad (5.1.7)$$

In forma più compatta:

$$\tau_\alpha^\eta = \frac{1}{2\chi\sqrt{-g}} \left[\sum_{m=0}^3 (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_m} g_{\mu\nu,\alpha} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^2 \sum_{m=j+1}^3 (-1)^j \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_j} g_{\mu\nu,i_{j+1} \dots i_m \alpha} - \delta_\alpha^\eta L \right] \quad (5.1.8)$$

dove noi usiamo la seguente notazione:

$$()_{,i_0} = \mathbb{1}; \quad ()_{,i_0 \dots i_m} = \begin{cases} ()_{,i_1} & \text{se } m = 1 \\ ()_{,i_1 i_2} & \text{se } m = 2 \\ ()_{,i_1 i_2 i_3} & \text{se } m = 3 \\ \text{e così via} \end{cases}; \quad ()_{,i_k i_k} = ()_{,i_k}$$

Consideriamo una generica densità lagrangiana che dipende fino all' n^{esima} derivata della metrica $g_{\mu\nu}$ cioè $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,i_1}, g_{\mu\nu,i_1 i_2}, g_{\mu\nu,i_1 i_2 i_3}, \dots, g_{\mu\nu,i_1 i_2 i_3 \dots i_n})$. La variazione totale di L e le equazioni di Eulero-Lagrange per questa lagrangiana sono:

$$\delta L = \sum_{m=0}^n \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,i_0 \dots i_m}} \delta g_{\mu\nu,i_0 \dots i_m} = \sum_{m=0}^n \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,i_0 \dots i_m}} \partial_{i_0 \dots i_m} \delta g_{\mu\nu} \quad (5.1.9)$$

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \partial_{i_0 \dots i_m} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,i_0 \dots i_m}} = 0 \quad (5.1.10)$$

dove $\delta g_{\mu\nu,i_0 \dots i_m} = \partial_{i_0 \dots i_m} \delta g_{\mu\nu}$ perché noi variamo mantenendo x fisso. Procedendo in modo equivalente come per la lagrangiana del quart'ordine, troviamo una quantità conservata che soddisfa una più generale legge di conservazione e ci permette di definire il tensore energia-momento gravitazionale (che è in verità un tensore affine come sarà dimostrato in seguito) per una lagrangiana dell' n^{esimo} ordine:

$$\tau_{\alpha}^{\eta} = \frac{1}{2\chi\sqrt{-g}} \left[\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_m} g_{\mu\nu,\alpha} + \Theta_{[2,+\infty[}(n) \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=j+1}^{n-1} (-1)^j \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_j} g_{\mu\nu,i_{j+1} \dots i_m \alpha} - \delta_{\alpha}^{\eta} L \right] \quad (5.1.11)$$

dove Θ è la funzione gradino:

$$\Theta_{[a,+\infty[}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Un modo alternativo di ottenere il tensore (5.1.11) è la procedura utilizzata da Landau [1]. Noi consideriamo, ad esempio, il tensore derivato dalla lagrangiana del quart'ordine (5.1.8): la generalizzazione a lagrangiane di ordine superiore è formalmente identica. Pri-

ma di tutto imponiamo la condizione di stazionarietà e variamo l'azione rispetto alla metrica per ottenere le equazioni di campo sotto le ipotesi che sia $\delta g_{\mu\nu}$ che la variazione delle derivate $\delta\partial^{n-1}g$ si annullano sulla frontiera del dominio di integrazione per cancellare i termini di superficie. Quindi abbiamo:

$$\delta I = \delta \int_{\Omega} d^4x L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\rho}, g_{\mu\nu,\rho\lambda}, g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}, g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}) = 0 \quad (5.1.13)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_{\rho} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} + \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} - \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \partial_{\xi} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} + \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \partial_{\xi} \partial_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Calcoliamo ora le derivate e sostituiamo nelle equazioni di campo. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} \frac{\partial g_{\mu\nu,\rho}}{\partial x^{\alpha}} \\ &+ \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} \frac{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} \frac{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} \frac{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \\ &= \partial_{\rho} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} g_{\mu\nu,\alpha} - \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} g_{\mu\nu,\alpha} + \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \partial_{\xi} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} g_{\mu\nu,\alpha} \\ &- \partial_{\rho} \partial_{\lambda} \partial_{\xi} \partial_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} g_{\mu\nu,\rho\alpha} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} g_{\mu\nu,\rho\lambda\alpha} \\ &+ \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\alpha} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma\alpha} \\ &= \partial_{\rho} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} g_{\mu\nu,\alpha} \right) - \partial_{\rho} \left(\partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} g_{\mu\nu,\alpha} \right) + \partial_{\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} g_{\mu\nu,\rho\alpha} \right) \\ &+ \partial_{\rho} \left(\partial_{\lambda} \partial_{\xi} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} g_{\mu\nu,\alpha} \right) + \partial_{\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} g_{\mu\nu,\rho\xi\alpha} \right) \\ &- \partial_{\xi} \left(\partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi}} g_{\mu\nu,\alpha\rho} \right) - \partial_{\rho} \left(\partial_{\lambda} \partial_{\xi} \partial_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\alpha} \right) \\ &+ \partial_{\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\rho\xi\sigma\alpha} \right) - \partial_{\xi} \left(\partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\rho\sigma\alpha} \right) \\ &+ \partial_{\sigma} \left(\partial_{\xi} \partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda\xi\sigma}} g_{\mu\nu,\rho\alpha} \right) \end{aligned}$$

Raggruppando assieme i termini e rinominando gli indici muti, si ha:

$$\partial_{\eta} (\sqrt{-g} \tau_{\alpha}^{\eta}) = 0 \quad (5.1.15)$$

dove τ_{α}^{η} è il tensore definito nella (5.1.8).

Se consideriamo la lagrangiana materiale $L_m = 2\chi\sqrt{-g}\mathcal{L}_m$ dove il tensore energia-impulso della materia è definito come:

$$T^{\eta\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\eta\alpha}} \quad (5.1.16)$$

le equazioni di campo associate ad una generica lagrangiana in presenza di materia diventano $P^{\eta\alpha} = \chi T^{\eta\alpha}$ dove

$$P^{\eta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_g}{\delta g_{\eta\alpha}}, \quad \text{con l'accoppiamento } \chi = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (5.1.17)$$

Da queste equazioni, otteniamo:

$$\begin{aligned} (2\chi\sqrt{-g}\tau_\alpha^\eta)_{,\eta} &= -\sqrt{-g}P^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\alpha} = -\chi\sqrt{-g}T^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\alpha} \\ &= 2\chi\sqrt{-g}T_{\alpha;\eta}^\eta - (2\chi\sqrt{-g}T_\alpha^\eta)_{,\eta} \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$$\partial_\eta [\sqrt{-g}(\tau_\alpha^\eta + T_\alpha^\eta)] = \sqrt{-g}T_{\alpha;\eta}^\eta \quad (5.1.19)$$

poiché

$$\begin{aligned} \delta L + \partial_\mu (L\delta x^\mu) &= P^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} - \partial_\eta (2\chi\sqrt{-g}\tau_\alpha^\eta) \epsilon^\alpha \\ &= -[\sqrt{-g}P^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha} + \partial_\eta (2\chi\sqrt{-g}\tau_\alpha^\eta)] \epsilon^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

e dalla simmetria del tensore T_α^η , si ha:

$$\sqrt{-g}T_{\alpha;\eta}^\eta = (\sqrt{-g}T_\alpha^\eta)_{,\eta} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma,\alpha}T^{\rho\sigma}\sqrt{-g} \quad (5.1.21)$$

Per le lagrangiane che dipendono linearmente da termini $\square^k R$ (4.1.1) le identità contratte di Bianchi implicano la legge di conservazione della somma dei due tensori energia-impulso, campo gravitazionale più campi o materia, e viceversa:

$$G^{\eta\alpha}_{;\eta} = 0 \leftrightarrow P^{\eta\alpha}_{;\eta} = 0 \leftrightarrow T^{\eta\alpha}_{;\eta} = 0 \leftrightarrow \partial_\eta [\sqrt{-g}(\tau_\alpha^\eta + T_\alpha^\eta)] = 0 \quad (5.1.22)$$

dove $G^{\eta\alpha} = R^{\eta\alpha} - \frac{1}{2}g^{\eta\alpha}R$ è il tensore di Einstein. In altre parole le identità di Bianchi implicano la conservazione dei campi gravitazionali più materia e viceversa la conservazione dei campi di materia e gravitazionali implicano le identità di Bianchi per il tensore di Einstein (vedi anche [22] per una discussione dettagliata della gravità alternativa).

Dalle equazioni di continuità (5.1.22), è possibile derivare alcune quantità conservate come il quadrimomento ed il momento angolare della materia più la gravità, se noi assumiamo che le derivate del tensore metrico fino all' n^{esimo} ordine si annullano sulla frontiera del dominio spaziale Σ tridimensionale, gli integrali di superficie si cancellano sulla frontiera $\partial\Sigma$, cioè

$$\partial_0 \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} (T^{\mu 0} + \tau^{\mu 0}) = - \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i \sqrt{-g} (T^{\mu i} + \tau^{\mu i}) = 0 \quad (5.1.23)$$

dove Σ è una foliazione dello spaziotempo quadridimensionale a t fissato e $\partial\Sigma$ la sua frontiera. Quindi il 4-momento conservato è [55]

$$P^{\mu} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} (T^{\mu 0} + \tau^{\mu 0}) \quad (5.1.24)$$

Questa quantità è estremamente utile per applicazioni pratiche in astrofisica relativistica [16].

5.2 La non covarianza del tensore energia-impulso del campo gravitazionale

È possibile dimostrare che τ_{α}^{η} non è in generale un tensore covariante ma si comporta come un tensore sotto trasformazioni affini [76], cioè è uno pseudotensore. Prima consideriamo il caso particolare del tensore (5.1.11) per $n = 2$:

$$\tau_{\alpha}^{\eta} = \frac{1}{2\chi\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} - \partial_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} \right) g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\xi}} g_{\mu\nu,\xi\alpha} - \delta_{\alpha}^{\eta} L \right] \quad (5.2.1)$$

È possibile mostrare che sotto diffeomorfismi $x' = x'(x)$, si ha

$$\tau_{\alpha}^{\eta}(x') \neq J_{\sigma}^{\eta} J_{\alpha}^{-1\tau} \tau_{\tau}^{\sigma}(x) \quad (5.2.2)$$

dove la matrice Jacobiana ed il determinante sono definiti come

$$J_{\sigma}^{\eta} = \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\sigma}} \quad J_{\alpha}^{-1\tau} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\alpha}} \quad \det(J_{\beta}^{\alpha}) = |J| = \frac{1}{J^{-1}} \quad (5.2.3)$$

Invece sotto trasformazioni lineari o affini:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad J_{\nu}^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \quad |\Lambda| \neq 0 \quad (5.2.4)$$

il tensore si trasforma come

$$\tau_{\alpha}^{\prime\eta}(x') = \Lambda_{\sigma}^{\eta} \Lambda^{-1\tau}_{\alpha} \tau_{\tau}^{\sigma}(x) \quad (5.2.5)$$

In generale è possibile ottenere le seguenti identità:

$$\sqrt{-g'} = J^{-1} \sqrt{-g} \quad \text{dove } g \text{ è una densità scalare di peso } w = -2$$

$$L' = J^{-1} L \quad \text{dove } L \text{ è una densità scalare di peso } w = -1$$

$$g'_{\mu\nu,\alpha}(x') = J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu} J^{-1c}_{\alpha} g_{ab,c}(x) + \partial'_{\alpha} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu}] g_{ab}(x)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\rho,\tau}}{\partial g'_{\mu\nu,\eta}} = \frac{1}{2} [(\delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta}) \delta^{\eta}_{\gamma}] J^{\alpha}_{\gamma} J^{\beta}_{\rho} J^{\epsilon}_{\tau} = J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta}} = J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau}} = J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau}}$$

densità tensoriale (3,0) di peso $w = -1$

$$g'_{\mu\nu,\xi\alpha}(x') = J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu} J^{-1c}_{\xi} J^{-1d}_{\alpha} g_{ab,cd}(x) + \partial'^2_{\xi\alpha} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu}] g_{ab}(x) \\ + \partial'_{\alpha} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu}] J^{-1d}_{\xi} g_{ab,d}(x) + \partial'_{\xi} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu} J^{-1c}_{\alpha}] g_{ab,c}(x)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}}{\partial g'_{\mu\nu,\eta\xi}} = \left(\delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} \delta^{\eta}_{\gamma} \delta^{\xi}_{\tau} \right) J^{\alpha}_{\gamma} J^{\beta}_{\rho} J^{\epsilon}_{\tau} J^{\epsilon}_{\epsilon} = J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\xi}_{\epsilon}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta\xi}} = J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\xi}_{\epsilon} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}} = J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\xi}_{\epsilon} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}}$$

densità tensoriale (4,0) di peso $w = -1$

$$\partial'_{\lambda} \frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta\lambda}} = J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\lambda}_{\epsilon} J^{-1\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}} + \partial'_{\lambda} [J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\lambda}_{\epsilon}] \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}}$$

essendo $A^{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$, se $B_{\alpha\beta}$ è simmetrico, cioè $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$. Quindi otteniamo:

$$\frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta}} g'_{\mu\nu,\alpha} = J^{-1} J^{\eta}_{\tau} J^{-1\pi}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau}} g_{\gamma\rho,\pi}(x) \\ + \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu}] g_{ab}(x) J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau}}$$

$$\partial'_{\lambda} \frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta\lambda}} g'_{\mu\nu,\alpha}(x') = J^{-1} J^{\eta}_{\tau} J^{-1c}_{\alpha} \partial_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial g_{ab,\tau\sigma}} g_{ab,c}$$

$$+ \partial'_{\lambda} [J^{-1} J^{\mu}_{\gamma} J^{\nu}_{\rho} J^{\eta}_{\tau} J^{\lambda}_{\epsilon}] \partial'_{\alpha} [J^{-1a}_{\mu} J^{-1b}_{\nu}] g_{ab}(x) \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\sigma}} \partial'_\alpha [\mathbf{J}^{-1a} \mathbf{J}^{-1b}] g_{ab} \\
& \quad + \partial'_\lambda [\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \mathbf{J}_\epsilon^\lambda] \mathbf{J}^{-1a} \mathbf{J}^{-1b} \mathbf{J}^{-1c} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}} g_{ab,c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta\xi}} g'_{\mu\nu,\xi\alpha} (x') &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_\tau^\eta \mathbf{J}^{-1\omega} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}} g_{\gamma\rho,\omega\epsilon} (x) \\
& + \mathbf{J}^{-1} \partial_{\xi\alpha}^2 [\mathbf{J}^{-1a} \mathbf{J}^{-1b}] g_{ab} (x) \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \mathbf{J}_\epsilon^\xi \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}} \\
& + \mathbf{J}^{-1} \partial'_\alpha [\mathbf{J}^{-1a} \mathbf{J}^{-1b}] g_{ab,d} (x) \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau d}} \\
& \quad + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \mathbf{J}_\epsilon^\xi \partial'_\xi [\mathbf{J}^{-1a} \mathbf{J}^{-1b} \mathbf{J}^{-1c}] g_{ab,c} (x) \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau\epsilon}}
\end{aligned}$$

Infine utilizzando le relazioni precedentemente ottenute abbiamo:

$$\tau_\alpha^\eta (x') = \mathbf{J}_\sigma^\eta \mathbf{J}^{-1\tau} \tau_\tau^\sigma (x) + \left\{ \text{termini contenenti } \frac{\partial^2 x}{\partial x'^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial x'^3} \right\} \quad (5.2.6)$$

Questo risultato in generale prova la non-covarianza del tensore energia-impulso gravitazionale che è invariante sotto trasformazioni affini perché il termine aggiuntivo contiene le derivate di ordine superiore o uguale a due che si annullano per qualsiasi trasformazione lineare non singolare. Questo risultato deriva dalla non covarianza delle derivate del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Tali derivate danno origine al tensore affine. In generale consideriamo

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu,i_1 \dots i_m \alpha} (x') &= \mathbf{J}^{-1\alpha} \mathbf{J}_\mu^{-1\beta} \mathbf{J}_\nu^{-1j_1} \dots \mathbf{J}_{i_m}^{-1j_m} \mathbf{J}_\alpha^{-1\tau} g_{\alpha\beta,j_1 \dots j_m \tau} (x) \\
& \quad + \left\{ \text{contenente termini } \frac{\partial^2 x}{\partial x'^2}, \dots, \frac{\partial^{m+2} x}{\partial x'^{m+2}} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial g'_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_\gamma^\mu \mathbf{J}_\rho^\nu \mathbf{J}_\tau^\eta \mathbf{J}_{j_1}^{i_1} \dots \mathbf{J}_{j_m}^{i_m} \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma\rho,\tau j_1 \dots j_m}} \quad \text{densità tensoriali (m+3,0)} \\
& \quad \text{di peso } w = -1
\end{aligned}$$

da cui deriva la non covarianza del tensore τ_α^η . D'altra parte, sotto trasformazioni affini, noi abbiamo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x'^2} = \dots = \frac{\partial^{m+2} x}{\partial x'^{m+2}} = 0$$

$$\tau_{\alpha}^{\eta}(x') = \Lambda_{\sigma}^{\eta} \Lambda^{-1\tau}_{\alpha} \tau_{\tau}^{\sigma}(x)$$

cioè, il tensore energia-impulso del campo gravitazionale è un tensore affine ovvero uno pseudotensore. Questo risultato generalizza alle teorie estese della gravità il risultato di [1]. Il carattere affine del tensore energia-momento τ_{α}^{η} è legato alla non localizzabilità dell'energia gravitazionale, cioè, l'energia gravitazionale in una regione finita dello spazio tridimensionale ad un dato istante, dipende dalla scelta del sistema di coordinate [81, 55]. È importante notare che l'esistenza di una particolare lagrangiana che dia luogo ad un tensore energia-impulso τ_{α}^{η} i cui termini dipendano dalle derivate in parentesi (5.2.6) tipo $\frac{\partial^2 x}{\partial x'^2}, \dots, \frac{\partial^{m+2} x}{\partial x'^{m+2}}$ che si elidono, non può essere escluso a priori. In tali casi, il tensore energia-impulso τ_{α}^{η} è covariante oltre che affine, diventando un effettivo tensore e non uno pseudotensore. Tuttavia, a causa della struttura di (5.2.6), τ_{α}^{η} è in generale uno pseudotensore.

5.3 Lo pseudotensore energia-impulso della gravità di ordine superiore al quarto

Considerando tutti gli invarianti di curvatura, senza l'operatore \square nell'azione gravitazionale, le equazioni di campo risultano del quart'ordine nella metrica (vedi [82, 83]). Per avere teorie della gravità di ordine superiore al quarto devono essere presenti nell'azione lagrangiana gli operatori non locali \square . Tali teorie sono diventate estremamente interessanti in supergravità ed in generale in teorie di gauge della gravità [84, 85, 86]. Queste teorie sono rilevanti non solo come teorie effettive della gravità ma anche come teorie fondamentali. In realtà esiste almeno una sottoclasse di teorie non locali di ordine superiore, le cosiddette teorie Lee-Wick, che sono unitarie e super-rinormalizzabili o finite a livello quantistico come dimostrato in [62, 63]. Inoltre tra le famiglie di lagrangiane di ordine superiore che si comportano bene va menzionata quella di Lovelock. Vogliamo, ora, calcolare lo pseudotensore energia-impulso τ_{α}^{η} per una lagrangiana gravitazionale

$$L_g = (\bar{R} + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R) \sqrt{-g} \quad (5.3.1)$$

dove \bar{R} è la parte quadratica dello scalare di Ricci R . Tale lagrangiana è stata già considerata in [87]. Infatti è possibile suddividere la curvatura scalare R in parte quadratica e parte lineare: la prima \bar{R} dipende solo da $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate prime $g_{\mu\nu}$ mentre la seconda

dipende linearmente dalle derivate seconde del tensore metrico come segue [1, 76, 50]

$$R = R^* + \bar{R} \quad (5.3.2)$$

$$R^* = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho) \quad (5.3.3)$$

$$\bar{R} = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma) \quad (5.3.4)$$

Per ottenere lo pseudotensore τ_α^η , dobbiamo calcolare le seguenti derivate

$$\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} = \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} + \left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} + \sum_{k=1}^p a_k R \frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta}} \right] \quad (5.3.5)$$

$$-\partial_\lambda \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} \right) = -\partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \left[\left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} + \sum_{k=1}^p a_k R \frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} \right] \right) \quad (5.3.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_m} &= \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k=1}^p (-1)^m \partial_{i_0 \dots i_m} \left[\sqrt{-g} a_k R \frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{m=2}^{2p+3} (-1)^m \partial_{i_0 \dots i_m} \left[\sqrt{-g} a_k R \frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{m=2}^{2k+1} (-1)^m \partial_{i_0 \dots i_m} \left[\sqrt{-g} a_k R \frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right] \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

dove $\lambda = i_1$, $n = 2p + 4$ e

$$\frac{\partial \square^k R}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} = 0 \quad \text{se } m > 2k + 1 \quad (5.3.8)$$

quindi, si ottiene

$$\sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=j+1}^{n-1} (-1)^j \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_m}} \right)_{,i_0 \dots i_j}$$

$$= \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2p+2} \sum_{m=j+1}^{2p+3} (-1)^j \left(\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right)_{, i_0 \dots i_j} \quad (5.3.9)$$

Così, dato che $j+1 \leq m \leq 2h+1 \rightarrow j \leq 2h$, infine abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=j+1}^{n-1} (-1)^j \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right)_{, i_0 \dots i_j} \\ = \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} \sum_{m=j+1}^{2h+1} (-1)^j \left(\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right)_{, i_0 \dots i_j} \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni in (5.1.11), otteniamo lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale per la lagrangiana (5.3.1)

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}^{\eta} = \tau_{\alpha|GR}^{\eta} + \frac{1}{2\chi\sqrt{-g}} \left\{ \sqrt{-g} \left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \left[\frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta}} g_{\mu\nu, \alpha} + \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta\lambda}} g_{\mu\nu, \lambda\alpha} \right] \right. \\ - \partial_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta\lambda}} \right] g_{\mu\nu, \alpha} \\ + \Theta_{[1, +\infty[}(p) \sum_{h=1}^p \left\{ \sum_{q=0}^{2h+1} (-1)^q \partial_{i_0 \dots i_q} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_q}} \right] g_{\mu\nu, \alpha} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{2h} \sum_{m=j+1}^{2h+1} (-1)^j \partial_{i_0 \dots i_j} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right] g_{\mu\nu, i_{j+1} \dots i_m \alpha} \right\} \\ \left. - \delta_{\alpha}^{\eta} \left(a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R \right) \sqrt{-g} \right\} \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

dove abbiamo usato la notazione $\partial_{i_0} = \mathbb{1}$ e dove con $\tau_{\alpha|GR}^{\eta}$ indichiamo lo pseudotensore energia-impulso della relatività generale [81] cioè

$$\tau_{\alpha|GR}^{\eta} = \frac{1}{2\chi} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial g_{\mu\nu, \eta}} g_{\mu\nu, \alpha} - \delta_{\alpha}^{\eta} \bar{R} \right) \quad (5.3.11)$$

Sostituiamo il termine $\sqrt{-g}R$, che è una densità scalare, con quello effettivo $\sqrt{-g}\bar{R}$ che non è più una densità scalare. Questo perché solo il termine effettivo della curvatura R contribuisce alle equazioni di campo e non quello che dipende dalle derivate seconde della metrica. Questa considerazione rende lo pseudotensore energia-impulso più facilmente

integrabile ad un tempo t fissato su di un dominio spaziale tridimensionale e quindi permette calcoli indipendenti di energia e momento. Questo risultato è una generalizzazione di quello di [79].

Un'importante generalizzazione della lagrangiana locale (5.3.1) può essere ottenuta per $p \rightarrow \infty$. In tali casi essa diventa non locale. Lo studio di questo tipo di lagrangiane non locali, esatte o in approssimazione di campo debole, è fondamentale per regolarizzare termini locali che presentano problemi di divergenze. Sotto opportune assunzioni per i coefficienti a_k (e.g. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$) e per il dominio degli operatori differenziali lineari D^p

$$D^p = \sum_{k=0}^p a_k \square^k \quad (5.3.12)$$

che ci garantisce la convergenza debole e forte:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p a_k \square^k = F(\square) \quad (5.3.13)$$

la nostra azione locale diventa non locale, cioè

$$I = \int_{\Omega} d^4x [\bar{R} + RF(\square)R] \sqrt{-g} \quad (5.3.14)$$

In questo caso la non località rende gli operatori di ordine infinito e cioè operatori integrali

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^4y F(x-y) R(x) = F(\square) R(x) \quad (5.3.15)$$

Passiamo al limite per $n \rightarrow \infty$ lo pseudotensore energia-impulso in (5.1.11) derivato per una lagrangiana di ordine n . Vogliamo quindi studiare il comportamento dello pseudotensore (5.1.11) in una teoria non locale, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\alpha}^{\eta}(x) = \bar{\tau}_{\alpha}^{\eta}(x) \quad (5.3.16)$$

Sotto l'ipotesi che $\tau_{\alpha}^{\eta}(x)$ si trasforma come un tensore affine mostriamo che anche il suo limite $n \rightarrow \infty$, cioè $\bar{\tau}_{\alpha}^{\eta}(x)$, è uno pseudotensore. Per una trasformazione affine

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad |\Lambda| \neq 0 \quad (5.3.17)$$

il seguente pseudotensore si trasforma come:

$$\tau_{\alpha}^{\eta}(x) = \Lambda^{-1\eta}_{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\tau} \tau_{\tau}^{\prime\sigma}(x') \quad (5.3.18)$$

Sostituendo (5.3.18) in (5.3.16), noi abbiamo:

$$\bar{\tau}_{\alpha}^{\eta}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{-1\eta}_{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\tau} \tau_{\tau}^{\prime\sigma}(x') = \Lambda^{-1\eta}_{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\tau} \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\tau}^{\prime\sigma}(x') = \Lambda^{-1\eta}_{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\tau} \bar{\tau}_{\tau}^{\prime\sigma}(x') \quad (5.3.19)$$

che significa che $\bar{\tau}_{\tau}^{\sigma}(x)$ si trasforma come un oggetto affine anche nel limite $n \rightarrow \infty$.

5.4 Il limite di campo debole dello pseudotensore energia-impulso

Lo pseudotensore energia-impulso (5.3.10) derivato dalla lagrangiana (5.3.1) può essere sviluppato in serie per poter applicare il limite di campo debole. Per questo scopo, possiamo scrivere la metrica spaziotemporale come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{essendo} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (5.4.1)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica di Minkowski e $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ la traccia della perturbazione. Sviluppiamo lo pseudotensore energia-impulso in potenze di h all'ordine più basso considerando termini fino ad h^2 . Iniziamo a sviluppare lo pseudotensore della relatività generale in coordinate armoniche (5.3.11) dove $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = 0$. La parte quadratica dello scalare di Ricci \bar{R} diventa:

$$\bar{R} = -g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}) \quad (5.4.2)$$

cioè

$$\bar{R} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} g^{\rho\epsilon} (g_{\epsilon\mu,\sigma} + g_{\epsilon\sigma,\mu} - g_{\mu\sigma,\epsilon}) (g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda}) \quad (5.4.3)$$

Approssimando fino al second'ordine h^2 , abbiamo:

$$\left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} \right)^{(1)} (g_{\alpha\beta,\delta})^{(1)} \stackrel{h^2}{=} \left(\frac{1}{2} h^{\alpha\beta,\gamma} h_{\alpha\beta,\delta} - h^{\gamma\alpha,\beta} h_{\alpha\beta,\delta} \right) \quad (5.4.4)$$

essendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} g_{\alpha\beta,\delta} = -\frac{1}{4} \left\{ (g^{\mu\beta} g^{\sigma\alpha} g^{\epsilon\gamma} + g^{\mu\gamma} g^{\sigma\alpha} g^{\beta\epsilon} - g^{\mu\alpha} g^{\sigma\gamma} g^{\beta\epsilon}) (g_{\epsilon\mu,\sigma} + g_{\epsilon\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\epsilon}) \right. \\ \left. + (g^{\beta\nu} g^{\gamma\lambda} g^{\rho\alpha} + g^{\gamma\nu} g^{\beta\lambda} g^{\rho\alpha} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\nu} g^{\rho\gamma}) (g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda}) \right\} g_{\alpha\beta,\delta} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

ed anche

$$\bar{R}^{(2)} = -\frac{1}{4} (h^{\sigma\lambda} h_{\lambda\sigma}{}^\rho{}_\rho - 2h^{\sigma\lambda}{}_{,\rho} h^\rho{}_{\lambda,\sigma}) \quad (5.4.6)$$

Quindi sostituiamo questi termini in (5.3.11) e troviamo l'espressione esplicita per lo pseudotensore energia-impulso della relatività generale fino all'ordine h^2

$$\tau_{\alpha|GR}^\eta = \frac{1}{2\chi} \left[\frac{1}{2} h^{\mu\nu,\eta} h_{\mu\nu,\alpha} - h^{\eta\mu,\nu} h_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{4} \delta_\alpha^\eta (h^{\sigma\lambda}{}_{,\rho} h_{\lambda\sigma}{}^\rho{}_\rho - 2h^{\sigma\lambda}{}_{,\rho} h^\rho{}_{\lambda,\sigma}) \right] \quad (5.4.7)$$

Ora per poter sviluppare la parte della gravità estesa dello pseudotensore (5.3.10) al second'ordine in h , è sufficiente considerare i seguenti termini approssimati ad h^2 in gauge armonica

$$\left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \frac{\partial R}{g_{\mu\nu,\eta\lambda}} g_{\mu\nu,\lambda\alpha} \stackrel{h^2}{\underset{\text{h.g.}}{=} } \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^p a_k \square^{k+1} h \right) h^\eta{}_\alpha + \frac{1}{4} a_0 h^\eta{}_\alpha \square h \quad (5.4.8)$$

$$\begin{aligned} -\partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \left(2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu,\eta\lambda}} \right] g_{\mu\nu,\alpha} \stackrel{h^2}{\underset{\text{h.g.}}{=} } a_0 \square h_{,\lambda} (h^{\lambda\eta} - \eta^{\lambda\eta} h)_{,\alpha} \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p a_k \square^{k+1} h_{,\lambda} (h^{\lambda\eta} - \eta^{\lambda\eta} h)_{,\alpha} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^p \sum_{q=0}^{2h+1} (-1)^q \partial_{i_0 \dots i_q} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu,\eta i_0 \dots i_q}} \right] g_{\mu\nu,\alpha} \\ \stackrel{h^2}{\underset{\text{h.g.}}{=} } \frac{1}{2} \sum_{h=1}^p a_h \square^{h+1} h_{,\lambda} (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} + (A_p)_\alpha^\eta \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} \sum_{m=j+1}^{2h+1} (-1)^j \partial_{i_0 \dots i_j} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right] g_{\mu\nu, i_{j+1} \dots i_m \alpha} \stackrel{\text{h.g.}}{=} \frac{1}{4} \sum_{h=1}^p a_h \square^h \square^h h^{\eta}_{\alpha} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^1 \sum_{j=h}^{p-1+h} \sum_{m=j+1-h}^p (-1)^h a_m \square^{m-j} (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,i_h \alpha} \square^{j+1-h} h_{,\lambda}^{i_h} + (B_p)_{\alpha}^{\eta}
\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

dato che all'ordine più basso in h abbiamo:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta\lambda}} \right)^{(0)} = \frac{1}{2} (g^{\mu\eta} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\eta} - 2g^{\mu\nu} g^{\eta\lambda})^{(0)} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\eta} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\eta} - 2\eta^{\mu\nu} \eta^{\eta\lambda}) \tag{5.4.12}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta\lambda}} \right)^{(0)} (g_{\mu\nu, \lambda\alpha})^{(1)} = (h^{\lambda\eta}_{,\lambda\alpha} - h^{\eta}_{\alpha}) = (h^{\lambda\eta} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\lambda\alpha} \stackrel{\text{h.g.}}{=} -\frac{1}{2} h^{\eta}_{\alpha} \tag{5.4.13}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu, \eta\lambda}} \right)^{(0)} (g_{\mu\nu, \alpha})^{(1)} = (h^{\lambda\eta} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \tag{5.4.14}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_m}} \right)^{(0)} &= \left(\frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_q}} \right)^{(0)} = \left(\frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta i_0 \dots i_{2h+1}}} \right)^{(0)} \\
&= \eta^{i_2 i_3} \dots \eta^{i_{2h} i_{2h+1}} (\eta^{\mu i_1} \eta^{\nu\eta} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\eta i_1}) + \dots \tag{5.4.15}
\end{aligned}$$

Nelle equazione (5.4.10), (5.4.11) e (5.4.15), calcoliamo esplicitamente solo il termine derivante da (B.1.1) senza considerare la permutazione degli indici $(\mu\nu)$ e $(\eta^{i_1} \dots i_{2h+1})$. Questo perché, tenendo conto dei termini ottenuti dalle permutazioni in $(A_p)_{\alpha}^{\eta}$ ed $(B_p)_{\alpha}^{\eta}$, mediando su di una opportuna regione spaziotemporale, otteniamo zero come vedremo in seguito. Questo trucco matematico è essenziale per calcolare la media dello pseudotensore energia-impulso gravitazionale e della potenza emessa.

Infine, sostituendo le eguaglianze (5.4.8), (5.4.9), (5.4.10) e (5.4.11) in (5.3.10), otteniamo l'ulteriore termine della gravità estesa dello pseudotensore τ_{α}^{η} al second'ordine, che chiameremo $\tilde{\tau}_{\alpha}^{\eta}$, cioè

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \frac{1}{2\chi} \left\{ \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^p a_k \square^{k+1} h \right) h^\cdot{}_\alpha^\eta + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^p a_t \square^{t+1} h_{,\lambda} (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \right. \\
+ \frac{1}{2} \sum_{h=0}^1 \sum_{j=h}^p \sum_{m=j}^p (-1)^h a_m \square^{m-j} (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha i_h} \square^{j+1-h} h_{,\lambda}^{i_h} \\
\left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^p a_l \square^l (h^\cdot{}_\alpha^\eta - \square h \delta_\alpha^\eta) \square h + \Theta_{[1,+\infty[}(p) [(A_p)_\alpha^\eta + (B_p)_\alpha^\eta] \right\} \quad (5.4.16)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le convenzioni:

$$(\)_{,\alpha i_0} = (\)_{,\alpha} \quad h_{,\lambda}^{i_0} = h_{,\lambda}$$

In sintesi possiamo suddividere lo pseudotensore energia-impulso totale in parte di relatività generale e parte di gravità estesa, cioè

$$\tau_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \tau_{\alpha|GR}^\eta + \tilde{\tau}_\alpha^\eta \quad (5.4.17)$$

Come semplici esempi di correzioni relative ad $\tilde{\tau}_\alpha^\eta$, consideriamo i casi dove l'indice p vale 0 e 1.

Per $p = 0$, abbiamo $L_g = (\bar{R} + a_0 R^2) \sqrt{-g}$ come nel caso discusso in [79]. Otteniamo per la gravità del quart'ordine

$$\tau_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \tau_{\alpha|GR}^\eta + \tilde{\tau}_\alpha^\eta$$

con

$$\tilde{\tau}_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \frac{a_0}{2\chi} \left(\frac{1}{2} h^\cdot{}_\alpha^\eta \square h + h^\cdot{}_{\lambda,\alpha} \square h^{\eta\lambda} - h_{,\alpha} \square h^\cdot{}^\eta - \frac{1}{4} (\square h)^2 \delta_\alpha^\eta \right) \quad (5.4.18)$$

Per $p = 1$, cioè $L_g = (\bar{R} + a_0 R^2 + a_1 R \square R) \sqrt{-g}$, si ha per la gravità del sest'ordine

$$\tau_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \tau_{\alpha|GR}^\eta + \tilde{\tau}_\alpha^\eta$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\alpha^\eta \stackrel{h^2}{=} \frac{1}{2\chi} \left\{ \frac{1}{4} (2a_0 \square h + a_1 \square^2 h) h^{\eta\alpha} + \frac{1}{2} (2a_0 \square h_{,\lambda} + a_1 \square^2 h_{,\lambda}) (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_1 \square (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \square h_{,\lambda} + \frac{1}{2} a_1 (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \square^2 h_{,\lambda} - \frac{1}{2} a_1 (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\sigma\alpha} \square h_{,\lambda}^\sigma \right. \\ \left. + \frac{1}{4} a_1 \square h^{\eta\alpha} \square h - \frac{1}{4} \delta_\alpha^\eta [a_0 (\square h) + a_1 (\square^2 h)] \square h + (A_1)_\alpha^\eta + (B_1)_\alpha^\eta \right\} \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Chiaramente l'iterazione può essere calcolata per ogni p introducendo così nuovi contributi alla dinamica.

5.5 La media dello pseudotensore energia-impulso

Consideriamo le soluzioni delle equazioni di campo linearizzate nel limite di campo debole nel vuoto associate alla dinamica data dalla (5.3.1) ovvero (4.3.31). Dal punto di vista fisico tali soluzioni sono estremamente importanti per poter calcolare quantità relative alla radiazione gravitazionale. In generale si ha:

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_{m=1}^{p+2} \int_{\Omega} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} (B_m)_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{i(k_m)_\alpha x^\alpha} + c.c. \quad (5.5.1)$$

dove

$$(B_m)_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \begin{cases} C_{\mu\nu}(\mathbf{k}) & \text{per } m = 1 \\ \frac{1}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_{(m)}^2} \right] A_m(\mathbf{k}) & \text{per } m \geq 2 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Qui "c.c." sta per complesso coniugato. La traccia è:

$$(B_m)_\lambda^\lambda(\mathbf{k}) = \begin{cases} C_\lambda^\lambda(\mathbf{k}) & \text{per } m = 1 \\ A_m(\mathbf{k}) & \text{per } m \geq 2 \end{cases} \quad (5.5.3)$$

e $k_m^\mu = (\omega_m, \mathbf{k})$ con $k_m^2 = \omega_m^2 - |\mathbf{k}|^2 = M^2$ dove $k_1^2 = 0$ e $k_m^2 \neq 0$ per $m \geq 2$. A \mathbf{k} fissato, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
h_{,\alpha}{}^\eta &= 2Re \left\{ \sum_{j=1}^{p+2} (-1) (k_j)_\alpha (k_j)^\eta A_j e^{ik_j x} \right\} \\
\Box^m h_{,\lambda} &= 2Re \left\{ (-1)^m i \sum_{j=1}^{p+2} (k_j)_\lambda (k_j^2)^m A_j e^{ik_j x} \right\} \\
\Box^q (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} &= 2Re \left\{ (-1)^q i \sum_{l=1}^{p+2} (k_l)_\alpha (k_l^2)^q [(B_l)^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} (B_l)_\rho^\rho] e^{ik_l x} \right\} \\
\Box^m h_{,\lambda}{}^\sigma &= 2Re \left\{ (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{p+2} (k_j)_\lambda (k_j)^\sigma (k_j^2)^m A_j e^{ik_j x} \right\} \\
\Box^q (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\sigma\alpha} &= 2Re \left\{ (-1)^{q+1} \sum_{l=1}^{p+2} (k_l)_\sigma (k_l)_\alpha (k_l^2)^q [(B_l)^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} (B_l)_\rho^\rho] e^{ik_l x} \right\} \\
\Box^n h &= 2Re \left\{ (-1)^n \sum_{r=2}^{p+2} (k_r^2)^n A_r e^{ik_r x} \right\}
\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Usando le seguenti identità:

$$Re\{f\}Re\{g\} = \frac{1}{2}Re\{fg\} + \frac{1}{2}Re\{f\bar{g}\} \tag{5.5.5}$$

$$(k_l)_\lambda [(B_l)^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} (B_l)_\rho^\rho] = -\frac{(k_l)^\eta}{2} A_l \tag{5.5.6}$$

possiamo mediare lo pseudotensore energia-impulso τ_α^η su di una regione dello spaziotempo Ω tale che $|\Omega| \gg \frac{1}{|k|}$ [50]. È importante notare che tutti gli integrali contenenti termini del tipo $e^{i(k_i - k_j)_\alpha x^\alpha}$ sono nulli. Se imponiamo la gauge armonica dopo aver mediato e con un po' di algebra otteniamo (vedi appendice B.1):

$$\begin{aligned}
\left\langle \Box^m h_{,\lambda} \Box^q (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\alpha} \right\rangle &= (-1)^{m+q+1} \sum_{l=2}^{p+2} (k_l)_\alpha (k_l)^\eta (k_l^2)^{(m+q)} |A_l|^2 \\
\left\langle \Box^m h_{,\lambda}{}^\sigma \Box^q (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h)_{,\sigma\alpha} \right\rangle &= (-1)^{m+q+1} \sum_{l=2}^{p+2} (k_l)_\alpha (k_l)^\eta (k_l^2)^{(m+q)+1} |A_l|^2 \\
\left\langle \Box^q h_{,\alpha}{}^\eta \Box^m h \right\rangle &= 2 (-1)^{m+q+1} \sum_{r=2}^{p+2} (k_r)_\alpha (k_r)^\eta (k_r^2)^{(m+q)} |A_r|^2
\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

$$\langle \square^m h \square h \rangle = 2(-1)^{m+1} \sum_{j=2}^{p+2} (k_j^2)^{m+1} |A_j|^2$$

$$\langle (A_p)_\alpha^\eta \rangle = \langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle = 0$$

Una base di soluzioni linealizzate $h_{\mu\nu}$ è data da (4.4.15). Usando queste disuguaglianze, possiamo calcolare il valore medio dello pseudotensore gravitazionale energia-impulso:

$$\begin{aligned} \langle \tau_\alpha^\eta \rangle = & \frac{1}{2\chi} \left[(k_1)^\eta (k_1)_\alpha \left(C^{\mu\nu} C_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} |C_\lambda^\lambda|^2 \right) \right] \\ & + \frac{1}{2\chi} \left[\left(-\frac{1}{6} \right) \sum_{j=2}^{p+2} \left((k_j)^\eta (k_j)_\alpha - \frac{1}{2} k_j^2 \delta_\alpha^\eta \right) |A_j|^2 \right] \\ & + \frac{1}{2\chi} \left\{ \left[\sum_{l=0}^p (l+2) (-1)^l a_l \sum_{j=2}^{p+2} (k_j)^\eta (k_j)_\alpha (k_j^2)^{l+1} |A_j|^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^p (-1)^l a_l \sum_{j=2}^{p+2} (k_j^2)^{l+2} |A_j|^2 \delta_\alpha^\eta \right\} \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

dove come sopra $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$. Assumiamo la gauge TT per il primo modo di oscillazione k_1 e solo la gauge armonica per i modi residui k_m cioè:

$$\begin{cases} (k_1)_\mu C^{\mu\nu} = 0 \quad \wedge \quad C_\lambda^\lambda = 0 & \text{se } m = 1 \\ (k_m)_\mu (B_m)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B_m)_\lambda^\lambda k^\nu & \text{se } m \geq 2 \end{cases} \quad (5.5.9)$$

Tenendo a mente tali considerazioni, consideriamo onde gravitazionali che si propagano nella direzione $+z$ a \mathbf{k} fissato, con il quadrivettore onda dato da $k^\mu = (\omega, 0, 0, k_z)$ dove $\omega_1^2 = k_z^2$ se $k_1^2 = 0$ e $k_m^2 = m^2 = \omega_m^2 - k_z^2$ altrimenti con $k_z > 0$. Quindi otteniamo le componenti tensoriali mediate:

$$\begin{aligned} \langle \tau_0^3 \rangle = & \frac{c^4}{8\pi G} \omega_1^2 (C_{11}^2 + C_{12}^2) + \frac{c^4}{16\pi G} \left[\left(-\frac{1}{6} \right) \sum_{j=2}^{p+2} \omega_j k_z |A_j|^2 \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^p (l+2) (-1)^l a_l \sum_{j=2}^{p+2} \omega_j k_z m_j^{2(l+1)} |A_j|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Come applicazione di questo risultato, possiamo calcolare la potenza emessa per unità

di angolo solido Ω irradiata in direzione \hat{x} a \mathbf{k} fissato. Sotto una opportuna gauge si ha:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{x}^i \langle \tau_0^i \rangle \quad (5.5.11)$$

Casi specifici possono essere considerati a seconda dell'indice p dello pseudotensore (5.4.16). Abbiamo quindi i casi:

$p=0$

$$\langle \tau_0^3 \rangle = \frac{c^4 \omega_1^2}{8\pi G} [C_{11}^2 + C_{12}^2] + \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \left(-\frac{1}{6} \right) \omega_2 |A_2|^2 k_z + 2a_0 \omega_2 m_2^2 |A_2|^2 k_z \right\}$$

$p=1$

$$\begin{aligned} \langle \tau_0^3 \rangle = & \frac{c^4 \omega_1^2}{8\pi G} [C_{11}^2 + C_{12}^2] + \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \left(-\frac{1}{6} \right) (\omega_2 |A_2|^2 + \omega_3 |A_3|^3) k_z \right. \\ & \left. + 2a_0 [(\omega_2 m_2^2 |A_2|^2 + \omega_3 m_3^2 |A_3|^2) k_z] - 3a_1 [(\omega_2 m_2^4 |A_2|^2 + \omega_3 m_3^4 |A_3|^2) k_z] \right\} \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

$p=2$

$$\begin{aligned} \langle \tau_0^3 \rangle = & \frac{c^4 \omega_1^2}{8\pi G} [C_{11}^2 + C_{12}^2] + \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \left(-\frac{1}{6} \right) (\omega_2 |A_2|^2 + \omega_3 |A_3|^3 + \omega_4 |A_4|^2) k_z \right. \\ & + 2a_0 [(\omega_2 m_2^2 |A_2|^2 + \omega_3 m_3^2 |A_3|^2 + \omega_4 m_4^2 |A_4|^2) k_z] \\ & - 3a_1 [(\omega_2 m_2^4 |A_2|^2 + \omega_3 m_3^4 |A_3|^2 + \omega_4 m_4^4 |A_4|^2) k_z] \\ & \left. + 4a_2 [(\omega_2 m_2^6 |A_2|^2 + \omega_3 m_3^6 |A_3|^2 + \omega_4 m_4^6 |A_4|^2) k_z] \right\} \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

dove abbiamo esplicitato l'accoppiamento χ . Da una rapida analisi della formula è chiaro che il primo termine è il contributo della relatività generale mentre le correzioni dipendono esclusivamente da p . In quei contesti dove le correzioni alla relatività generale sono importanti questo approccio potrebbe essere un paradigma per trovare effetti agli ordini superiori.

5.6 Le conclusioni

Le correzioni alla lagrangiana standard di Hilbert-Einstein ed in particolare i termini non locali, hanno suscitato sempre maggiore interesse nel corso degli anni perché fonamen-

tali per studiare i fenomeni gravitazionali alle scale ultraviolette ed infrarosse. Questo ha comportato che alcune delle principali caratteristiche della relatività generale debbono essere rifiutate perché la teoria sia coerente. In particolare le proprietà dello pseudotensore gravitazionale energia-impulso debbono essere approfondite per poter trattare sia i fondamenti che le applicazioni della teoria della gravitazione.

Qui abbiamo derivato lo pseudotensore energia-impulso del campo gravitazionale τ_α^η per una lagrangiana della forma $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,i_1}, g_{\mu\nu,i_1i_2}, g_{\mu\nu,i_1i_2i_3}, \dots, g_{\mu\nu,i_1i_2i_3\dots i_n})$ di qualsiasi ordine nelle derivate della metrica mostrando che in generale è uno pseudotensore. In particolare, abbiamo considerato una lagrangiana tipo $L_g = (\bar{R} + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R) \sqrt{-g}$, nel limite di campo debole fino all'ordine h^2 nella perturbazione metrica. Sotto specifiche condizioni di gauge, abbiamo mediato su di un opportuno dominio quadridimensionale. Il tensore mediato (5.5.8) dipende dai parametri liberi a_m e p , dalle ampiezze $A_j(\mathbf{k})$, $C_{11}(\mathbf{k})$ e $C_{22}(\mathbf{k})$ oltre che dai numeri d'onda $k_m^2 = M^2$ che a loro volta dipendono da a_m . Come risultato generale le onde gravitazionali (5.5.1) associate alle lagrangiane di ordine superiore possono essere espresse, sotto una opportuna gauge per le onde che si propagano lungo la direzione $+z$, in termini della base dei sei tensori di polarizzazione

$$h_{\mu\nu}(t; z) = \mathbf{A}^{(+)}(t - z) \epsilon_{\mu\nu}^{(+)} + \mathbf{A}^{(\times)}(t - z) \epsilon_{\mu\nu}^{(\times)} + \mathbf{A}^{(TT)}(t - v_{G_m} z) \epsilon_{\mu\nu}^{(TT)} \\ + \mathbf{A}^{(TS)}(t - v_{G_m} z) \epsilon_{\mu\nu}^{(TS)} + \mathbf{A}^{(1)}(t - v_{G_m} z) \epsilon_{\mu\nu}^{(1)} + \mathbf{A}^{(L)}(t - v_{G_m} z) \epsilon_{\mu\nu}^{(L)} \quad (5.6.1)$$

dove v_{G_m} è la velocità di gruppo del m_{th} modo massivo (vedi anche [77, 82]). Usando la conservazione totale del tensore energia-impulso gravitazionale e della materia (5.1.22), le ampiezze $A_j(\mathbf{k})$, $C_{11}(\mathbf{k})$ e $C_{22}(\mathbf{k})$ e quindi il tensore energia-impulso mediato gravitazionale (5.5.8) può essere espresso in termine delle componenti del tensore energia-impulso di materia $T^{\mu\nu}$ (come T^{00}) cioè della sorgente che genera le onde gravitazionali. In principio è possibile trovare la potenza gravitazionale emessa da una sorgente astrofisica locale in approssimazione di slow-motion in termini di T^{00} e grazie alle osservazioni è possibile fissare i parametri gravitazionali a_m e p dei modelli compatibili. La diminuzione nel tempo del periodo di rotazione della pulsar binaria di Hulse-Taylor [19] è un esempio in tal senso. Vedi anche [88, 89] per la gravità $f(R)$. Questa procedura permette di fissare il grado derivativo $2p + 4$ della teoria della gravità [87, 51] e potrebbe essere un banco di prova per le Teorie Estese della Gravità³. In generale questa procedura ci permette di investigare ulteriori stati di polarizzazione delle onde gravitazionali oltre le polarizzazioni

³È importante notare che $p = 0$ ci dà, in generale, una teoria del quart'ordine tipo $f(R)$. La sola teoria del second'ordine è la relatività generale che è un caso particolare $f(R) = R$.

standard $\epsilon_{\mu\nu}^{(+)}$ ed $\epsilon_{\mu\nu}^{(\times)}$ della relatività generale. Inoltre, lo pseudotensore $\langle\tau_\alpha^\eta\rangle$ dipende dai k_m^2 che sono legati ai modi massivi: questo ci potrebbe permettere di fissare i limiti inferiori e superiori dei modi massivi. Infine, considerando il valore medio $\langle\tau_\alpha^\eta\rangle$ è possibile calcolare la potenza trasportata dalle onde gravitazionali emessa da un sistema binario di buchi neri che si fondono e confrontare i risultati con le misure già eseguite dalla collaborazione LIGO-VIRGO [20]. In questo modo si potrebbe fissare il grado $2p+4$ della teoria e fornire una "segnatura" per ulteriori polarizzazioni. In successivi lavori applicazioni astrofisiche dei risultati ottenuti potrebbero essere considerati.

È importante enfatizzare che il tensore energia-impulso del campo gravitazionale τ_α^η è in generale uno pseudotensore. Questo oggetto, come le connessioni affini $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$, si trasforma come le componenti di un tensore sotto trasformazioni lineari di coordinate ma non sotto il gruppo generale delle trasformazioni di coordinate. Anche se la classe dei diffeomorfismi è più generale di quella delle trasformazioni affini, cioè le affinità sono un sottoinsieme dei diffeomorfismi, l'insieme degli oggetti affini è più generale di quello degli oggetti covarianti: questo significa che un oggetto che si comporta come un tensore sotto diffeomorfismi si comporterà come un tensore anche sotto trasformazioni affini ma l'inverso non è sempre vero. In altre parole lo pseudotensore τ_α^η perde la generale covarianza sebbene è definito partendo da oggetti covarianti. Questo fatto è legato alla presenza delle derivate parziali del tensore metrico che non sono tensori. Infine le proprietà affini dello pseudotensore energia-impulso gravitazionale potrebbero essere rilevanti per discriminare tra la formulazione teleparallela e quella metrica della gravità. Per i dettagli della discussione di questo punto vedere [42].

Capitolo 6

Lo pseudotensore energia-impulso gravitazionale: i casi $f(R)$ e $f(T)$

La necessità di estendere la relatività generale nasce soprattutto dall'esigenza di spiegare l'accelerazione dell'Universo all'epoca della fase inflattiva 10^{-35} secondi dopo il Big Bang, l'accelerazione cosmica ai giorni nostri confermata da un gran numero di osservazioni nonché per fare luce sulla piatezza delle curve galattiche. Per spiegare i primi due fenomeni di espansione dell'Universo in un quadro di relatività classica sono state introdotte componenti esotiche come l'energia oscura ed un campo scalare come l'inflazione mentre è stata ipotizzata l'esistenza della materia oscura per giustificare la piatezza delle curve galattiche. Un modo alternativo di procedere invece è quello di modificare la teoria della gravitazione di Einstein costruendo delle teorie che abbiano la GR come caso particolare. Nasce così tutta una classe di teorie estese della gravitazione [21] le più semplici della quali sono le teorie $f(R)$ che partono dalla modifica dell'azione di Hilbert-Einstein in una formulazione della gravitazione basata sulla curvatura adottando la connessione metrica senza torsione di Levi Civita. In tale schema la gravità viene interpretata in termini della curvatura della varietà dello spaziotempo cioè l'interazione gravitazionale viene geometrizzata, i corpi liberi si muovono lungo le geodetiche e le variabili dinamiche sono le componenti del tensore metrico. Una formulazione alternativa della gravità di Einstein ad essa equivalente è la Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR) [90, 91] basata sul parallelismo assoluto delle tetrad, una base ortonormale nello spazio tangente Minkoskiano alla varietà in ogni punto, che odotta una connessione metrica a curvatura nulla ma a torsione diversa da zero ovvero la connessione di Weitzenböck [92, 14, 41]. Nel teleparallelismo le variabili dinamiche sono le tetrad, la gravità torna ad essere interpretata come una forza ed i corpi seguono il moto governato dall'e-

quazioni della forza gravitazionale prodotta dalla torsione: quindi è la torsione a produrre la gravità. In TEGR l'azione equivalente a quella di Hilbert-Einstein viene costruita con lo scalare di torsione T che sostituisce la curvatura scalare R . A questo punto si è pensato di modificare la TEGR come si è fatto con le teorie $f(R)$ e costruire tutta una famiglia di teorie parallele modificate, le teorie $f(T)$ [42, 93], che però non sono equivalenti alle $f(R)$. Infatti mentre le teorie $f(R)$ sono invarianti per trasformazioni di Lorentz locali ed hanno equazioni di campo del quart'ordine, le teorie torsionali modificate $f(T)$ non sono invarianti per trasformazioni locali di Lorentz delle vierbein ed hanno equazioni del second'ordine oltre ad avere extra gradi di libertà. La perdita dell'invarianza locale di Lorentz è dovuta alla scelta della connessione di Weitzenböck che implica l'annullarsi della connessione di spin mettendoci in una particolare tetrad detta "tetrad pura". Possiamo recuperare tale invarianza scegliendo una connessione di spin diversa da zero sviluppando la cosiddetta gravità teleparallela covariante che rende così le teorie $f(T)$ non più frame dipendenti [94, 95, 96, 97, 43]. Inoltre mentre le teorie $f(R)$ sono conformemente equivalenti alla teoria di Einstein più un campo scalare le teorie $f(T)$ non sono conformemente equivalenti alla TEGR più un campo scalare. È possibile inoltre interpretare le teorie teleparallele come teorie di gauge per il gruppo di traslazioni che agiscono sulla fibra del fibrato tangente in ogni punto della varietà [14, 98]. Si possono inoltre ulteriormente generalizzare le $f(R)$ ed $f(T)$ teorie considerando termini derivativi sia di curvatura che torsionali di ordine superiore che contrazioni dando vita ad altre famiglie di teorie estese della gravitazione di ordine n [99, 100]. Lo scopo del lavoro è di generalizzare il pseudotensore del campo gravitazionale [1, 101] alle teorie modificate $f(R)$ ed $f(T)$ scrivere le relative equazioni di campo e ricavare le leggi di conservazione in presenza di materia come già fatto in paper [102] per lagrangiane dipendenti dalla metrica e dalle sue derivate fino all' n -esimo ordine. Dopo aver fatto notare che le nostre due teorie metriche della gravitazione differiscono per un termine $\omega(T, B)$ contenente lo scalare di torsione ed un termine ai bordi responsabile della perdita dell'invarianza locale di Lorentz abbiamo calcolato il relativo pseudotensore gravitazionale energia-impulso grazie al quale possiamo passare dalle teorie $f(R)$ a quelle $f(T)$ [B].

6.1 Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità $f(R)$

Consideriamo l'azione libera della generica lagrangiana $f(R)$:

$$\mathcal{S}_{f(R)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (6.1.1)$$

con $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$. Calcoliamone la variazione $\tilde{\delta}$ facendo variare campi $g^{\mu\nu}$ e coordinate x^μ per una generica trasformazione infinitesima di entrambi:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) + \tilde{\delta} g^{\mu\nu} \quad g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu} \quad (6.1.2)$$

$$\tilde{\delta} \mathcal{S}_{f(R)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \left[\delta(\sqrt{-g} f(R)) + \partial_{\mu}(\sqrt{-g} f(R) \delta x^{\mu}) \right] \quad (6.1.3)$$

dove con $\tilde{\delta}$ intendiamo la variazione locale e con δ la variazione globale ad x fissato. Otteniamo dopo un po' di conti [21, 22, 103, 54, 104, 105]:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \mathcal{S}_{f(R)} = & \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) \right] \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int_{\Omega} d^4x \partial_{\alpha} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \left[\partial_{\beta} f'(R) (g^{\eta\rho} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\eta} g^{\rho\beta}) \delta g_{\eta\rho} + f'(R) \left[\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho\eta\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta\sigma}{}_{\sigma} g^{\alpha\rho} \right) \delta g_{\eta\rho} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (g^{\alpha\eta} g^{\tau\rho} - g^{\eta\rho} g^{\alpha\tau}) \delta g_{\eta\rho, \tau} \right] + f(R) \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta x^{\lambda} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

dove $f'(R) = \partial f / \partial R$. Imponendo la stazionarietà dell'azione a x fisso ossia $\delta \mathcal{S}_{f(R)} = 0$ in un opportuno dominio Ω ai cui bordi si annullano la variazione totale sia della metrica e che delle sue derivate prime cioè $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ ed $\delta(\partial_{\alpha} g_{\mu\nu})|_{\partial\Omega} = 0$ si ottengono le equazioni di campo nel vuoto per le teorie $f(R)$ gravity ovvero :

$$-P_{\mu\nu}^{f(R)} = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_{f(R)}}{\delta g^{\mu\nu}} = f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = 0 \quad (6.1.5)$$

dove $2\kappa^2 L_{f(R)} = \sqrt{-g} f(R)$. Per una trasformazione infinitesima tipo traslazioni rigide si ha:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -\epsilon^{\lambda} g_{\mu\nu, \lambda} \quad (6.1.6)$$

perché $\partial \epsilon = 0$. Se la variazione locale dell'azione si annulla ed i campi $g_{\mu\nu}$ soddisfano le equazioni di campo nel vuoto ottenute si ha:

$$\tilde{\delta} \mathcal{S}_{f(R)} = 0 \Rightarrow \partial_{\sigma} (\sqrt{-g} \tau^{\sigma}{}_{\lambda|f(R)}) = 0 \quad (6.1.7)$$

con

$$\boxed{2\kappa^2 \tau^\sigma{}_\lambda|_{f(R)} = 2\partial_\beta f'(R) g^{\eta[\rho} g^{\sigma]\beta} g_{\eta\rho,\lambda} + f'(R) \left[(\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho\eta\sigma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta\alpha}{}_\alpha g^{\sigma\rho}) g_{\eta\rho,\lambda} + 2g^{\sigma[\eta} g^{\tau]\rho} g_{\eta\rho,\tau\lambda} \right] - f(R) \delta^\sigma{}_\lambda} \quad (6.1.8)$$

pseudotensore energia-impulso della gravità $f(R)$ ed $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho\eta\sigma} = g^{\eta\epsilon} g^{\sigma\varphi} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\epsilon\varphi}$ ed $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta\alpha}{}_\alpha = g^{\alpha\epsilon} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\eta}{}_{\epsilon\alpha}$. In presenza di campi e materia consideriamo l'azione materiale:

$$\mathcal{S}_m = \int_{\Omega} d^4x L_m \quad (6.1.9)$$

con L_m dipendente al più dalle derivate prime della metrica $g_{\mu\nu}$ variandola rispetto alla metrica $g^{\mu\nu}$ ed imponendo che la variazione totale della metrica si annulli ai bordi otteniamo:

$$\delta\mathcal{S}_m = \int_{\Omega} d^4x \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\sqrt{-g}}{2} \right) T_{\mu\nu}^{(m)} \delta g^{\mu\nu} \quad (6.1.10)$$

avendo posto il tensore energia momento dei campi e della materia $T_{\mu\nu}^{(m)}$ uguale a:

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.1.11)$$

Quindi minimizzando l'azione totale $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \mathcal{S}_{f(R)} + \mathcal{S}_m$ si ottengono le seguenti equazioni in presenza di materia:

$$f(R) P_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (6.1.12)$$

Dalla identità contratta di Bianchi si ha:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \nabla^\nu (f(R) P_{\mu\nu}) = 0 \leftrightarrow \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0 \quad (6.1.13)$$

dove per dimostrare la quadridivergenza centrale abbiamo utilizzato la formula (C.1.1). Quindi dalla variazione (6.1.4) per una traslazione rigida (6.1.6) e dalle equazioni di campo in materia (6.1.12) si ha:

$$\begin{aligned} \delta L_{f(R)} + \partial_\sigma (L_{f(R)} \delta x^\sigma) &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} P_{f(R)}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma (\sqrt{-g} \tau^\sigma{}_\lambda) \epsilon^\lambda \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{(m)}^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} - \partial_\sigma (\sqrt{-g} \tau^\sigma{}_\lambda) \right] \epsilon^\lambda \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Dalla seguente identità valida perché T^η_α è simmetrico :

$$\sqrt{-g}\nabla_\eta T^\eta_\alpha = \partial_\eta (\sqrt{-g}T^\eta_\alpha) - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma,\alpha}T^{\rho\sigma}\sqrt{-g} \quad (6.1.15)$$

si ha:

$$\delta L_{f(R)} + \partial_\sigma (L_{f(R)}\delta x^\sigma) = [-\partial_\sigma (\sqrt{-g}T^\sigma_\lambda) + \sqrt{-g}T^\sigma_{\lambda;\sigma} - \partial_\sigma (\sqrt{-g}\tau^\sigma_\lambda)] \epsilon^\lambda \quad (6.1.16)$$

Se per traslazioni rigide la variazione locale è uguale a zero si ha:

$$\delta L_{f(R)} + \partial_\sigma (L_{f(R)}\delta x^\sigma) = 0 \rightarrow \partial_\sigma [\sqrt{-g}(\tau^\sigma_\lambda + T^\sigma_\lambda)] = \sqrt{-g}\nabla_\sigma T^\sigma_\lambda \quad (6.1.17)$$

Quindi dalla identità contratta di Bianchi (6.1.13) si ottiene la legge di conservazione dell'energia ed impulso sia gravitazionale che dei campi/materia ossia:

$$\partial_\sigma [\sqrt{-g}(\tau^\sigma_{\lambda|f(R)} + T^\sigma_\lambda)] = 0 \quad (6.1.18)$$

6.2 Lo pseudotensore energia-impulso nella gravità $f(T)$

Consideriamo una generica lagrangiana che dipende dallo scalare di torsione T tramite una funzione analitica $f(T)$ la cui azione è:

$$\mathcal{S}_{f(T)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x h f(T) \quad (6.2.1)$$

dove h è il determinante della tetrad $h = \det(h^a_\rho)$ e $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$. Variando l'azione rispetto alla tetrad h^a_ρ ad x fisso ed imponendo la sua stazionarietà si ha :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{f(T)} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x [h f_T \delta T + f(T) \delta h] \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x \left\{ [4\partial_\sigma (h f_T S_a^{\rho\sigma}) - 4h f_T T^\mu_{\nu a} S_\mu^{\nu\rho} + f(T) h h_a^\rho] \delta h^a_\rho \right. \\ &\quad \left. + \partial_\sigma (4S_a^{\rho\sigma} h f_T \delta h^a_\rho) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Utilizzando le (C.1.2, C.1.3, C.2.2 e C.2.3) ed imponendo l'annullarsi ai bordi della variazione totale della tetrad $\delta h^a_\rho|_{\partial\Omega} = 0$ otteniamo le seguenti equazioni di campo nel vuoto delle h^a_ρ

$$4h^{-1}\partial_\sigma [h f_T S_a^{\rho\sigma}] - 4f_T T^\mu_{\nu a} S_\mu^{\nu\rho} + f(T) h_a^\rho = 0 \quad (6.2.2)$$

Variamo l'azione lagrangiana $\mathcal{S}_{f(T)}$ ora senza tenere fisso il dominio permettendo anche alle coordinate di variare come fatto in (6.1.3) :

$$\tilde{\delta}\mathcal{S}_{f(T)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x [\delta(hf(T)) + \partial_{\mu}(hf(T)\delta x^{\mu})] \quad (6.2.3)$$

otteniamo per una traslazione rigida (6.1.6) imponendo alla tetrad che verifichi la (6.2.2):

$$\delta h^a_{\rho} = -\epsilon^{\mu} \partial_{\mu} h^a_{\rho} \quad (6.2.4)$$

$$\tilde{\delta}\mathcal{S}_{f(T)} = 0 \iff \partial_{\sigma}(h\tau^{\sigma}_{\lambda|f(T)}) = 0 \quad (6.2.5)$$

dove

$$\boxed{2\kappa^2 \tau^{\sigma}_{\lambda|f(T)} = -4f_T S_a^{\rho\sigma} h^a_{\rho,\lambda} - f(T) \delta^{\sigma}_{\lambda}} \quad (6.2.6)$$

è il *gravitational energy-momentum pseudotensor of $f(T)$ gravity* che si conserva ed $S_a^{\rho\sigma} = h_a^{\mu} S_{\mu}^{\rho\sigma}$. Per una azione libera teleparallela equivalente a quella della relatività generale:

$$\mathcal{S}_{TEGR} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x h T \quad (6.2.7)$$

si ottiene il seguente pseudotensore energia impulso del campo gravitazionale

$$\boxed{\tau^{\sigma}_{\lambda|TEGR} = -\frac{2}{\kappa^2} S_{\eta}^{\rho\sigma} \tilde{\Gamma}^{\eta}_{\rho\lambda} - \frac{T}{2\kappa^2} \delta^{\sigma}_{\lambda}} \quad (6.2.8)$$

dove $\tilde{\Gamma}$ è la connessione di Weitzenböck. In presenza di materia variando l'azione di materia e campi ed imponendola uguale a zero insieme alla variazione delle vierbein ai bordi si ha l'equazione completa:

$$2h^{-1} \partial_{\sigma} [h f_T S_a^{\rho\sigma}] - 2f_T T^{\mu}_{\nu a} S_{\mu}^{\nu\rho} + \frac{1}{2} f(T) h_a^{\rho} = \kappa^2 \mathcal{T}_a^{(m)\rho} \quad (6.2.9)$$

dove abbiamo posto il tensore energia impulso dei campi e della materia:

$$\mathcal{T}_a^{(m)\rho} = -\frac{1}{h} \frac{\delta L_m}{\delta h^a_{\rho}} \quad (6.2.10)$$

Utilizzando le (1.2.46) e (1.2.47) si può mettere l'equazione (6.2.9) nella forma:

$$H_{\mu\nu} = f_T G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(T) - f_T T] + 2f_{TT} S_{\nu\mu\sigma} \nabla^{\sigma} T = \kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (6.2.11)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein e $\mathcal{T}_\mu{}^\nu = h^a{}_\mu \mathcal{T}_a{}^\nu$. Facendo la quadridivergenza del primo termine della (6.2.11) indicato con $H_{\mu\nu}$ ed utilizzando le (1.2.46) e l'antisimmetria della contorsione $K_{(\rho\mu)\nu} = 0$ si ha:

$$\nabla^\mu H_{\mu\nu} = -2f_{TT} S^{\rho\sigma}{}_\mu K_{\sigma\rho\nu} \nabla^\mu T = -H_{\lambda\alpha} K^{\lambda\alpha}{}_\nu = -H_{(\lambda\alpha)} K^{\lambda\alpha}{}_\nu - H_{[\lambda\alpha]} K^{\lambda\alpha}{}_\nu \quad (6.2.12)$$

Sfruttando la simmetria del tensore energia impulso dei campi $\mathcal{T}_\mu{}^\nu$ l'antisimmetria nei primi due indici della contorsione, $K_{(\rho\mu)\nu} = 0$ ed il fatto che $H_{[\mu\nu]} = 0$ si ottiene:

$$\nabla^\mu H_{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.13)$$

Quindi anche in teleparallelismo valgono le seguenti relazioni di Bianchi:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \nabla^\mu H_{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \nabla^\nu \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(m)} = 0 \quad (6.2.14)$$

La variazione locale dell'azione di $f(T)$ per una traslazione rigida posta uguale a zero e per le equazione di campo in materia (6.2.9) ci dà:

$$0 = \frac{\hbar}{\kappa^2} (P_{f(T)})_a{}^\rho \delta h^a{}_\rho - \partial_\sigma (h\tau^\sigma{}_\lambda) \epsilon^\lambda = [-h\mathcal{T}_a{}^\rho h^a{}_{\rho,\lambda} - \partial_\sigma (h\tau^\sigma{}_\lambda)] \epsilon^\lambda \quad (6.2.15)$$

dove

$$(P_{f(T)})_a{}^\rho = \frac{\kappa^2}{h} \frac{\delta L_{f(T)}}{\delta h^a{}_\rho} \quad (6.2.16)$$

Dalla relazione valida per la simmetria di $\mathcal{T}_a{}^\rho$:

$$h\nabla_\eta \mathcal{T}_\alpha{}^\eta = \partial_\eta (h\mathcal{T}_\alpha{}^\eta) - hh^a{}_{\rho,\alpha} \mathcal{T}_a{}^\rho \quad (6.2.17)$$

e dalla variazione (6.2.15) si ottiene quindi:

$$h\nabla_\eta \mathcal{T}_\lambda{}^\eta - \partial_\eta (h\mathcal{T}_\lambda{}^\eta) - \partial_\sigma (h\tau^\sigma{}_\lambda) = 0 \Rightarrow \partial_\sigma [h(\mathcal{T}_\lambda{}^\sigma + \tau^\sigma{}_\lambda)] = h\nabla_\eta \mathcal{T}_\lambda{}^\eta \quad (6.2.18)$$

per l'arbitrarietà di ϵ^λ . Quindi dalle identità di Bianchi (6.2.14) si ottiene la legge di conservazione per il tensore energia impulso di materia e lo pseudotensore energia impulso gravitazione:

$$\partial_\sigma [h(\tau^\sigma{}_{\lambda|f(T)} + \mathcal{T}_\lambda{}^\sigma)] = 0 \quad (6.2.19)$$

Si sarebbe potuto molto più semplicemente derivare la (6.2.19) sfruttando l'antisimmetria del superpotenziale $S_\mu{}^{\nu\rho}$ dopo aver scritto l'equazione di campo (6.2.9) in presenza di

materia e campi solo con gli indici spaziotemporali ossia:

$$2h^{-1}\partial_\sigma \left[hf_T S_\lambda^{\rho\sigma} \right] + 2f_T \tilde{\Gamma}^\mu_{\eta\lambda} S_\mu^{\eta\rho} + \frac{1}{2}f(T) \delta_\lambda^\rho = \kappa^2 \mathcal{T}_\lambda^\rho \quad (6.2.20)$$

Quindi avremo per l'antisimmetria del superpotenziale e la commutatività delle derivate parziali:

$$\partial_\rho \partial_\sigma \left[hf_T S_\lambda^{\rho\sigma} \right] = -\partial_\rho \partial_\sigma \left[hf_T S_\lambda^{\rho\sigma} \right] = 0 \quad (6.2.21)$$

Ovvero:

$$2\partial_\rho \partial_\sigma \left[hf_T S_\lambda^{\rho\sigma} \right] = \partial_\rho \left[h\kappa^2 \mathcal{T}_\lambda^\rho + h\kappa^2 \left(-\frac{2}{\kappa^2} f_T S_\mu^{\eta\rho} \tilde{\Gamma}^\mu_{\eta\lambda} - \frac{f(T)}{2\kappa^2} \delta_\lambda^\rho \right) \right] = 0 \quad (6.2.22)$$

da cui si ha la (6.2.19).

6.3 Lo pseudotensore energia-impulso del termine $\omega(T, B)$

Le teorie metriche della gravitazione $f(R)$ ed $f(T)$ non sono equivalenti come la relatività generale e la TEGR. Infatti mentre è possibile riformulare le teorie $f(R)$ tramite una trasformazione conforme della metrica come la teoria di Einstein più un campo scalare per le teorie $f(T)$ questo non è possibile. Inoltre le teorie $f(R)$ sono governate da equazioni del quant'ordine mentre quelle teleparallele modificate $f(T)$ da equazioni differenziali del second'ordine. Infine le teorie $f(R)$ sono invarianti per trasformazioni locali di Lorentz mentre quelle teleparallele modificate $f(T)$ dipendono dal frame di tetradi scelto oltre ad avere ulteriori gradi di libertà. Tuttavia possiamo considerare in linea teorica la lagrangiana teleparallela equivalente della $f(R)$ theory ovvero:

$$f(R(h)) = f(T) + \omega(T, B) \quad (6.3.1)$$

dove T è lo scalare di torsione e $B = (2/h) \partial_\mu (hT^\mu) = 2\nabla_\mu T^\mu$ il termine al bordo ed $R(h) = -T - B$ [106, 107]. Calcoliamo il contributo dovuto dal termine ai bordi B allo pseudotensore energia impulso gravitazionale considerando l'azione \mathcal{S}_B associata solo ai termini ai bordi che ci permetterà di passare dallo pseudotensore energia impulso del campo gravitazionale $\tau^\alpha_{\lambda|f(R)}$ della teoria della gravità $f(R)$ allo pseudotensore energia impulso del campo gravitazionale $\tau^\alpha_{\lambda|f(T)}$ della $f(T)$ gravity. Quindi consideriamo \mathcal{S}_B ossia:

$$\mathcal{S}_B = \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x h \omega(T, B) \quad (6.3.2)$$

Variamo l'azione \mathcal{S}_B rispetto alle tetradi $h^a{}_\rho$ ad x fisso utilizzando le variazioni in appendice C.2 e le relazioni (C.1.7, C.1.8 e C.1.9)

$$\delta\mathcal{S}_B = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} d^4x [\omega(T, B) \delta h + h\omega_T \delta T + h\omega_B \delta B] \quad (6.3.3)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta L_B = & \left[4\partial_\sigma (h\omega_T S_a{}^{\rho\sigma}) - 4h\omega_T T^\mu{}_{\nu a} S_\mu{}^{\nu\rho} + \omega h h_a{}^\rho \right. \\ & - B\omega_B h h_a{}^\rho + 2h h_a{}^\rho \square \omega_B - 2h h_a{}^\sigma \nabla_\sigma \nabla^\rho \omega_B + 4h \partial_\lambda \omega_B S_a{}^{\lambda\rho} \left. \right] \delta h^a{}_\rho \\ & - \partial_\sigma \left\{ \left[4h\omega_T S_a{}^{\rho\sigma} + 2h \partial_\lambda \omega_B (h_a{}^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a{}^\sigma g^{\lambda\rho}) \right. \right. \\ & - 2\omega_B T^\sigma h h_a{}^\rho + 2\omega_B h (T^{\rho\sigma} + h_a{}^\sigma T^\rho + g^{\sigma\rho} T_a) \left. \right] \delta h^a{}_\rho \\ & \left. - 2\omega_B h (h_a{}^\rho g^{\sigma\eta} - h_a{}^\eta g^{\sigma\rho}) \delta (\partial_\eta h^a{}_\rho) \right\} \quad (6.3.4) \end{aligned}$$

dove $\omega_T = \partial\omega/\partial T$, $\omega_B = \partial\omega/\partial B$ ed $2\kappa^2 L_B = h\omega(T, B)$. Se imponiamo che ai bordi del dominio si annullino le variazioni delle tetradi $\delta h^a{}_\rho$ e delle derivate prime $\delta(\partial_\eta h^a{}_\rho)$ si ottengono le equazioni di campo relative ai termini ai bordi ossia:

$$\begin{aligned} 4\partial_\sigma [h\omega_T S_a{}^{\rho\sigma}] - 4h\omega_T T^\mu{}_{\nu a} S_\mu{}^{\nu\rho} + \omega(T, B) h h_a{}^\rho - h\omega_B B h_a{}^\rho \\ + 2h h_a{}^\rho \square \omega_B - 2h h_a{}^\sigma \nabla_\sigma \nabla^\rho \omega_B + 4h \partial_\mu \omega_B S_a{}^{\mu\rho} = 0 \quad (6.3.5) \end{aligned}$$

Per una generica variazione di campi e coordinate si ha:

$$\delta L_B + \partial_\mu (L_B \delta x^\mu) = (P_B)_a{}^\rho \delta h^a{}_\rho + \partial_\sigma (h J^\sigma) \quad (6.3.6)$$

dove J^σ è la corrente di Noether ed $(P_\omega)_a{}^\rho$ è:

$$(P_B)_a{}^\rho = \frac{1}{h} \frac{\delta L_B}{\delta h^a{}_\rho} \quad (6.3.7)$$

Quindi abbiamo

$$-2\kappa^2 J^\sigma = \left[4\omega_T S_a{}^{\rho\sigma} + 2\partial_\lambda \omega_B (h_a{}^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a{}^\sigma g^{\lambda\rho}) - 2\omega_B T^\sigma h_a{}^\rho \right]$$

$$+ 2\omega_B (T^{\rho\sigma}_a + h_a^\sigma T^\rho + g^{\sigma\rho} T_a) \delta h^a_\rho - 2\omega_B (h_a^\rho g^{\sigma\eta} - h_a^\eta g^{\sigma\rho}) \delta (\partial_\eta h^a_\rho) - \omega \delta x^\sigma \quad (6.3.8)$$

Se l'azione è invariante per traslazione rigida e la tetrad verifica le equazioni di campo (6.3.5) si ha tenendo presente che $\delta (\partial_\eta h^a_\rho) = -h^a_{\rho,\lambda\eta} \epsilon^\lambda$ per la nostra traslazione:

$$\tilde{\delta} \mathcal{S}_B = 0 \Rightarrow \partial_\sigma (h \tau^\sigma_{\mu|\omega}) = 0 \quad (6.3.9)$$

dove $J^\sigma = -\tau^\sigma_{\lambda|\omega} \epsilon^\lambda$:

$$\boxed{2\kappa^2 \tau^\sigma_{\lambda|\omega(T,B)} = - \left[4\omega_T S_a^{\rho\sigma} + 2\omega_B (T^{\rho\sigma}_a + h_a^\sigma T^\rho + g^{\sigma\rho} T_a - T^\sigma h_a^\rho) + 2\partial_\eta \omega_B (h_a^\rho g^{\eta\sigma} - h_a^\sigma g^{\eta\rho}) \right] h^a_{\rho,\lambda} + 2\omega_B (h_a^\rho g^{\sigma\eta} - h_a^\eta g^{\sigma\rho}) h^a_{\rho,\lambda\eta} - \omega \delta^\sigma_\lambda} \quad (6.3.10)$$

con $\tau^\sigma_{\lambda|\omega}$ il *gravitational energy-momentum pseudotensor of $\omega(T, B)$* dovuto ai termini ai bordi. Il calcolo dello pseudotensore $\tau^\sigma_{\lambda|\omega}$ si sarebbe potuto fare anche direttamente con le derivate anziché utilizzare le variazioni ma è molto più lungo. Infatti esprimiamo il termine ai bordi B in termini delle tetradi h_a^ρ e delle sue derivate ossia:

$$B = 4 \left[h_a^{[\rho} g^{\sigma]\mu} \partial_\mu \partial_\sigma h^a_\rho + (h_a^\rho h_b^{[\tau} g^{\lambda]\mu} - h_a^{[\lambda} h_b^{\tau]} g^{\mu\rho} - h_a^\mu h_b^{[\tau} g^{\lambda]\rho} - h_a^\tau h_b^{[\rho} g^{\mu]\lambda}) \partial_\mu h^a_\rho \partial_\lambda h^b_\tau \right] \quad (6.3.11)$$

Utilizzando la formula dello pseudotensore energia impulso del campo gravitazionale per una generica lagrangiana L che dipende fino alle derivate seconde della tetrad [102] (C.1.4, C.1.5, C.1.6) ovvero:

$$h \tau^\sigma_\mu = \left(\frac{\partial L_B}{\partial \partial_\sigma h^a_\rho} - \partial_\lambda \frac{\partial L_B}{\partial \partial_{\lambda\sigma} h^a_\rho} \right) h^a_{\rho,\mu} + \frac{\partial L_B}{\partial \partial_{\lambda\sigma} h^a_\rho} h^a_{\rho,\mu\lambda} - \delta^\sigma_\mu L_B \quad (6.3.12)$$

si ha:

$$2\kappa^2 \tau^\sigma_{\mu|\omega} = \left[\omega_T \frac{\partial T}{\partial \partial_\sigma h^a_\rho} + \omega_B \frac{\partial B}{\partial \partial_\sigma h^a_\rho} - h^{-1} \partial_\lambda (h \omega_B \frac{\partial B}{\partial \partial_{\lambda\sigma} h^a_\rho}) \right] h^a_{\rho,\mu} + \omega_B \frac{\partial B}{\partial \partial_{\lambda\sigma} h^a_\rho} h^a_{\rho,\mu\lambda} - \omega(T, B) \delta^\sigma_\mu \quad (6.3.13)$$

Tenendo presente le seguenti derivate dei termini ai bordi B e dello scalare di torsione T ovvero:

$$\frac{\partial B}{\partial \partial_\sigma h^a{}_\rho} = 2 (h_a{}^\rho T^\sigma - T_a g^{\sigma\rho} - h_a{}^\sigma T^\rho - T^{\rho\sigma}{}_a) + 4 \left(h_a{}^\tau h_b{}^{[\sigma} g^{\rho]\lambda} + h_a{}^{[\rho} h_b{}^\tau g^{|\sigma]\lambda} - h_a{}^{[\rho} h_b{}^{\sigma]} g^{\tau\lambda} - h_a{}^{[\rho} h_b{}^\lambda g^{|\sigma]\tau} \right) \partial_\lambda h^b{}_\tau \quad (6.3.14)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \partial_{\lambda\sigma} h^a{}_\rho} = 2 (h_a{}^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a{}^\sigma g^{\lambda\rho}) = 4 h_a{}^{[\rho} g^{\sigma]\lambda} \quad (6.3.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \partial_\sigma h^a{}_\rho} = -4 S_a{}^{\rho\sigma} \quad (6.3.16)$$

si ottiene la (6.3.10).

6.4 Dalla gravità $f(R)$ alla gravità $f(T)$ e viceversa grazie al termine al bordo $\tau_{\lambda|\omega(T,B)}^\sigma$

Anche se le due teorie della gravitazione non sono equivalenti è possibile finalmente scrivere la seguente relazione che ci permette di passare tramite lo pseudotensore $\tau_{\lambda|\omega(T,B)}^\sigma$ da $f(R)$ ad $f(T)$ e viceversa ossia:

$$\boxed{\tau_{\lambda|f(R)}^\sigma = \tau_{\lambda|f(T)}^\sigma + \tau_{\lambda|\omega(T,B)}^\sigma} \quad (6.4.1)$$

Infatti variando localmente l'azione della $f(R)$ rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ e le due azioni relative ad $f(T)$ ed $\omega(T, B)$ rispetto alla tetrad $h^a{}_\rho$ si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{g,x} \mathcal{S}_{f(R)} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x \left[\sqrt{-g} P_{f(R)}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \partial_\lambda (2\kappa^2 \sqrt{-g} J_{f(R)}^\lambda) \right] \\ \tilde{\delta}_{h,x} \mathcal{S}_{f(T)} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x \left[2h (P_{f(T)})_a{}^\rho \delta h^a{}_\rho + \partial_\lambda (2\kappa^2 h J_{f(T)}^\lambda) \right] \\ \tilde{\delta}_{h,x} \mathcal{S}_{\omega(T,B)} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega d^4x \left[2h (P_\omega)_a{}^\rho \delta h^a{}_\rho + \partial_\lambda (2\kappa^2 h J_{\omega(T,B)}^\lambda) \right] \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

dove le J^λ sono le correnti di Noether. Da:

$$\mathcal{S}_{f(R)}(h) = \mathcal{S}_{f(T)} + \mathcal{S}_{\omega(T,B)} \quad (6.4.3)$$

si ha:

$$\tilde{\delta}_{g,x}\mathcal{S}_{f(R)} = \tilde{\delta}_{h,x}\mathcal{S}_{f(T)} + \tilde{\delta}_{h,x}\mathcal{S}_{\omega(T,B)} \quad (6.4.4)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}P_{f(R)}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \partial_\lambda (2\kappa^2\sqrt{-g}J_{f(R)}^\lambda) &= 2h [(P_{f(T)})_a^\rho + (P_\omega)_a^\rho] \delta h^a_\rho \\ &+ \partial_\lambda [2\kappa^2h (J_{f(T)}^\lambda + J_{\omega(T,B)}^\lambda)] \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Essendo quindi vera la seguente identità esprimendo il primo membro in termini delle tetradi:

$$\sqrt{-g}P_{f(R)}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}[[h] = 2h [(P_{f(T)})_a^\rho + (P_\omega)_a^\rho] \delta h^a_\rho \quad (6.4.6)$$

si ha:

$$\partial_\lambda (\sqrt{-g}J_{f(R)}^\lambda) = \partial_\lambda [h (J_{f(T)}^\lambda + J_{\omega(T,B)}^\lambda)] \quad (6.4.7)$$

da cui la (6.4.1) per traslazioni rigide.

6.5 Le conclusioni

Lo pseudotensore gravitazionale energia-impulso τ^α_λ è una importante proprietà dell'interazione gravitazionale perchè ci permette di discriminare tra le varie teorie della gravitazione. In questo capitolo abbiamo ricavato e confrontato i pseudotensori della GR e della TEGR con quelli della loro immediata generalizzazione ossia $f(R)$ ed $f(T)$ sia adottando il formalismo metrico che quello delle tetradi. Il principale risultato è che si può passare da uno pseudotensore all'altro tramite uno pseudotensore $\tau^\alpha_{\lambda|\omega(T,B)}$ derivato grazie al termine ai bordi B che connette la curvatura R e lo scalare di torsione T come $-R = T + B$. Questa caratteristica potrebbe assumere un ruolo rilevante nei test di gravità evidenziando ulteriori termini e gradi libertà rispetto alla GR. In particolare come discusso in dettaglio nella [88] lo pseudotensore gravitazionale è importante per rilevare differenze nella radiazione gravitazionale quadrupolare della GR e della gravità $f(R)$. Usando un simile approccio nella gravità metrica e teleparallela una distinzione tra le teorie può essere fatta tramite la radiazione gravitazionale: ulteriori polarizzazioni e contributi allo pseudotensore energia-impulso possono essere ricavati e classificati in vista di possibili osservazioni. Per esempio come discusso in [108, 109] le onde gravitazionali in $f(T)$ e nelle sue generalizzazioni sono differenti rispetto a quelle della gravità $f(R)$ cosicché rivelare ulteriori modi di polarizzazione della radiazione potrebbe essere un modo per discriminare tra le teorie.

Capitolo 7

La gravità teleparallela di ordine superiore

Abbiamo ricavato le equazioni di campo per due lagrangiane teleparallele in presenza di materia sia per la gravità del sest'ordine che per quella di ordine $2p+2$ [D]. Quella teleparallela del sest'ordine è equivalente alla lagrangiana $L_{R\Box R} = \sqrt{-g} (-R + a_0 R^2 + a_1 R\Box R)$ mentre la seconda $L_{\Box^k R} = \sqrt{-g} (R + \sum_{k=0}^p a_k R\Box^k R)$ no.

7.1 La gravità teleparallela del sest'ordine

Studiamo la gravità del sest'ordine trovando l'equivalente teleparallelo della lagrangiana $-\overset{\circ}{R} + a_0 \overset{\circ}{R}^2 + a_1 \overset{\circ}{R} \Box \overset{\circ}{R}$ espressa in termini della connessione lineare di Levi Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$, lavorando con la connessione di Weitzenböck Γ a curvatura nulla e non torsion free e con la relazione $-\overset{\circ}{R} = T + B$:

$$\begin{aligned}
 -\overset{\circ}{R} + a_0 \overset{\circ}{R}^2 + a_1 \overset{\circ}{R} \Box \overset{\circ}{R} &= \underbrace{T + a_0 T^2 + a_1 T \Box T}_{\text{First term}} \\
 &\quad + \underbrace{a_0 \left(\frac{2}{h} \partial_\sigma (h T^{\nu\sigma}{}_\nu) \right) \left(2T + \frac{2}{h} \partial_\sigma (h T^{\nu\sigma}{}_\nu) \right)}_{\text{Second Term}} \\
 &\quad + \underbrace{a_1 \partial^\mu \left(\frac{2}{h} \partial_\sigma (h T^{\nu\sigma}{}_\nu) \right) \partial_\mu \left(2T + \frac{2}{h} \partial_\sigma (h T^{\nu\sigma}{}_\nu) \right)}_{\text{Third term}}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{h} \partial_\sigma \left\{ \underbrace{a_1 h \partial^\sigma \left[\frac{2}{h} \partial_\eta (h T^{\nu\eta}{}_\nu) T - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} \partial_\eta (h T^{\nu\eta}{}_\nu) \right)^2 \right]}_{\text{Fourth term}} + 2h T^{\nu\sigma}{}_\nu \right\} \quad (7.1.1)$$

dove $B = (2/h) \partial_\mu (h T^\mu)$ è il termine di bordo con la torsione scalare T ed il superpotenziale $S^{\rho\mu\nu}$ già definiti

$$T = T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu} \quad S^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T^{\sigma\mu}{}_\sigma + g^{\rho\mu} T^{\sigma\nu}{}_\sigma) \quad (7.1.2)$$

ed il tensore di contorsione e la connessione di Weitzenböck

$$K^{\nu}{}_{\rho\mu} = \frac{1}{2} (T_{\rho\mu}{}^\nu + T_{\mu\rho}{}^\nu - T^{\nu}{}_{\rho\mu}) \quad \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu \quad (7.1.3)$$

con

$$T^{\nu}{}_{\rho\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} \quad (7.1.4)$$

La derivata covariante usata è quella teleparallela intesa però come espressa in termini della connessione di Levi-Civita rifasata rispetto alla connessione di Weitzenböck ovvero

$$\nabla_\mu \Theta^\nu{}_\lambda = \partial_\mu \Theta^\nu{}_\lambda + (\Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} - K^{\nu}{}_{\rho\mu}) \Theta^\rho{}_\lambda - (\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - K^{\rho}{}_{\mu\lambda}) \Theta^\nu{}_\rho \quad (7.1.5)$$

Il quarto termine nella (7.1.1) è una quadridivergenza che imponendo alla variazione della tetrad con le sue derivate di annullarsi ai bordi del dominio va a zero. Il primo termine è quello che vorremmo ma anche il secondo deve esserci perché dipende dalle $\partial^2 h_a{}^\rho$ della tetrad e ci assicura equazioni del quart'ordine in assenza dei \square altrimenti solo con lo scalare T che dipende dalle derivate prime della tetrad $\partial h_a{}^\rho$ non potremmo andare oltre il second'ordine (questo è il motivo per cui la teorie $f(T)$ sono descritte da equazioni solo del second'ordine e non del quarto come le $f(R)$ che invece dipendono dalle derivate seconde della metrica). Il terzo termine è quello più delicato che almeno in apparenza sembra non potersi scrivere come quadridivergenza: dipende dalle derivate terze della tetrad $\partial^3 h_a{}^\rho$ assicurandoci equazioni di campo del sest'ordine anche se per questo basterebbe il solo termine $T \square T$.

7.2 Le equazioni di campo della gravità teleparallela di ordine superiore

Data la lagrangiana teleparallela del sest'ordine ovvero:

$$L_{SOTP} = h (T + a_0 T^2 + a_1 T \square T + a_1 B (2T + B) + a_1 \partial^\mu B \partial_\mu (2T + B)) \quad (7.2.1)$$

consideriamo la seguente azione anche con il termine materiale L_m :

$$I = \int_{\Omega} d^4 x (L_{SOTP} + L_m) \quad (7.2.2)$$

Variamo la seguente azione rispetto alla tetrad h^a_ρ imponiamo che si annulli $\delta I = 0$ e che si annullino le variazioni del campo delle tetradi con le sue derivate fino al second'ordine ai bordi del dominio d'integrazione ed otteniamo le seguenti equazioni di campo del sest'ordine nella tetrad:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h} \partial_\sigma [h (1 + 2a_0 T + 2a_1 \square T) S_a^{\rho\sigma}] - 4 (1 + 2a_0 T + 2a_1 \square T) T_{\nu a}^\mu S_\mu^{\nu\rho} \\ & + (T + a_0 T^2 + a_1 T \square T) h_a^\rho - a_1 [h_a^\nu T (\nabla^\rho \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla^\rho) T \\ & - (h_a^\eta h_b^\rho \partial^\nu h_\nu^b + T_a^{\eta\rho} - h_a^\eta T^\rho - g^{\eta\rho} T_a) T \partial_\eta T] \\ & + \frac{1}{h} \partial_\sigma [h (h_a^\rho g^{\eta\sigma} - h_a^\sigma g^{\eta\rho} - h_a^\eta g^{\rho\sigma}) T \partial_\eta T] \\ & + [a_0 B (2T + B) + a_1 \partial^\mu B \partial_\mu (2T + B)] h_a^\rho \\ & + \frac{2}{h} \partial_\lambda \{h [a_0 (T + B) - a_1 \square (T + B)]\} (T^{\rho\lambda} + h_a^\lambda T^\rho + g^{\lambda\rho} T_a) \\ & - \frac{2}{h} \partial_\sigma \{ \partial_\lambda [h (a_0 (T + B) - a_1 \square (T + B))] (h_a^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a^\sigma g^{\lambda\rho}) \} \\ & - 8 [a_0 B - a_1 \square B] (T_{\nu a}^\mu S_\mu^{\nu\rho}) + \frac{8}{h} \partial_\sigma [h (a_0 B - a_1 \square B) S_a^{\rho\sigma}] = \mathcal{T}_a^{(m)\rho} \quad (7.2.3) \end{aligned}$$

con $T^\lambda = T^{\nu\lambda}$, o in modo alternativo:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h} \partial_\sigma [h (1 + 2a_0 T + 2a_1 \square T) S_a^{\rho\sigma}] - 4 (1 + 2a_0 T + 2a_1 \square T) T_{\nu a}^\mu S_\mu^{\nu\rho} \\ & + (T + a_0 T^2 + a_1 T \square T) h_a^\rho - a_1 [h_a^\nu T (\nabla^\rho \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla^\rho) T \\ & - (h_a^\eta h_b^\rho \partial^\nu h_\nu^b + T_a^{\eta\rho} - h_a^\eta T^\rho - g^{\eta\rho} T_a) T \partial_\eta T] \\ & + \frac{1}{h} \partial_\sigma [h (h_a^\rho g^{\eta\sigma} - h_a^\sigma g^{\eta\rho} - h_a^\eta g^{\rho\sigma}) T \partial_\eta T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [a_0 B (2T + B) + a_1 \partial^\mu B \partial_\mu (2T + B)] h_a^\rho - 2BGh_a^\rho \\
& + 4h_a^\rho \square G - 4h_a^\sigma \nabla_\sigma \nabla^\rho G - 8[a_0 B - a_1 \square B] (T_{\nu a}^\mu S_\mu^{\nu\rho}) \\
& + \frac{8}{h} \partial_\sigma [h (a_0 B - a_1 \square B) S_a^{\rho\sigma}] = \mathcal{T}_a^{(m)\rho} \quad (7.2.4)
\end{aligned}$$

dove $G = a_0 (T + B) - a_1 \square (T + B)$ e dove abbiamo definito il tensore energia impulso della materia $\mathcal{T}_a^{(m)\rho}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{T}_a^{(m)\rho} = -\frac{1}{h} \frac{\delta L_m}{\delta h_a^\rho} \quad (7.2.5)$$

Per maggiori dettagli sui contributi dei singoli termini variati vedere App. C.2.

7.3 Le equazioni di campo della gravità teleparallela di ordine superiore non equivalente alla gravità riemanniana

Consideriamo in analogia con la lagrangiana $L_{\square^k R} = \sqrt{-g} (R + \sum_{k=0}^p a_k R \square^k R)$ già studiata la lagrangiana teleparallela di ordine superiore

$$L_{\square^k T} = h \left(T + \sum_{k=0}^p a_k T \square^k T \right) \quad (7.3.1)$$

Le equazioni di ordine $2p+2$ ottenute variando l'azione della lagrangiana libera $L_{\square^k T}$ con il termine di materia L_m rispetto alla base della tetrad h_a^ρ ed imponendo che ai bordi si annullino le variazioni delle tetradi e delle sue derivate fino all'ordine $2p$ [110] sono:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{h} \partial_\sigma \left[h \left(1 + 2a_0 T + 2 \sum_{k=1}^p a_k \square^k T \right) S_a^{\rho\sigma} \right] - 4 \left(1 + 2a_0 T + 2 \sum_{k=1}^p a_k \square^k T \right) T_{\nu a}^\mu S_\mu^{\nu\rho} \\
& + \left(T + a_0 T^2 + \sum_{k=1}^p a_k T \square^k T \right) h_a^\rho - h_a^\rho \sum_{k=1}^p a_k \sum_{h=1}^k \square^{h-1} T (\nabla^\rho \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla^\rho) \square^{k-h} T \\
& + \sum_{k=1}^p a_k \sum_{h=1}^k \square^{h-1} T \partial_\eta \square^{k-h} T (h_a^\eta h_b^\rho \partial^\nu h_\nu^b + T_a^{\eta\rho} - h_a^\eta T^\rho - g^{\eta\rho} T_a) \\
& - \sum_{k=1}^p a_k \sum_{h=1}^k \partial_\sigma [(h_a^\rho g^{\eta\sigma} - h_a^\sigma g^{\eta\rho} - h_a^\eta g^{\sigma\rho}) \square^{h-1} T \partial_\eta \square^{k-h} T] = \mathcal{T}_a^{(m)\rho} \quad (7.3.2)
\end{aligned}$$

A differenza della lagrangiana espressa in termini di curvatura R che dà equazioni di ordine $2p + 4$ quella con lo scalare di torsione T dà equazioni di ordine $2p + 2$. Questo è in accordo con il caso $p = 0$ dove mentre $L_{R+a_0R^2}$ dà equazioni del quart'ordine quella teleparallela $L_{T+a_0T^2}$ dà equazioni del second'ordine.

Capitolo 8

Le conclusioni

Il 14 settembre del 2015 alle 09:50:45 UTC i due interferometri di Michelson di LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) uno situato ad Hanford (Washington) e un altro a Livingston (Louisiana) misurano simultaneamente un segnale di onda gravitazionale. È la prima misurazione diretta di un segnale di onda gravitazionale probabilmente prodotto dalla fusione di un sistema binario di buchi neri. Questa è stata una importantissima verifica della teoria della relatività di Einstein soprattutto perché siamo a scale intergalattiche ben oltre la scala solare tipica dei test classici. Fino ad allora c'era solo stata una verifica indiretta della radiazione gravitazionale attraverso la misurazione dalla diminuzione del periodo orbitale del sistema binario di pulsar PSR B1913+16 in accordo con la radiazione di quadrupolo prevista della relatività generale. Tutto ciò non sminuisce l'interesse per le teorie estese della gravitazione ma anzi lo rinvigorisce. Infatti anche le teorie estese prevedono nel limite di campo debole soluzioni tipo onde gravitazionali con polarizzazione ed elicità ulteriori rispetto a quelle della relatività generale. Tra le teorie della gravità studiate nel lavoro di tesi abbiamo analizzato teorie descritte dalla lagrangiana $L_{\square^k R} = \sqrt{-g}(R + \sum_{k=0}^p a_k R \square^k R)$. Dopo averne ricavato le equazioni, imponendo la stazionarietà dell'azione con opportune condizioni al contorno sul bordo del dominio, le abbiamo risolte nel limite di campo debole sia nel vuoto che in presenza di materia ottenendo così anche per queste teorie estese della gravitazione le onde gravitazionali anche se modificate rispetto a quelle di Einstein. Tali onde hanno sei polarizzazioni, tre trasversali e tre longitudinali. A parte le due polarizzazione classiche trasversali ad elicità due a cui è possibile associare un modo massless abbiamo ottenuto altre quattro polarizzazioni ad elicità nulla associate ad altri $p + 1$ modi di oscillazione con massa diversa da zero. Grazie alla generalizzazione a queste lagrangiane dipendenti linearmente da $\square^k R$ dello pseudotensore energia-impulso τ^σ_λ e della equazio-

ne di continuità energia-impulso che tiene conto sia dei contributi gravitazionali che non, dopo aver dimostrato in generale la pseudotensorialità di τ^σ_λ ovvero il suo comportamento covariante solo sotto trasformazioni affini, ne abbiamo fatto il limite alle basse energie. Mediando tale pseudotensore nel limite di campo debole su di un opportuno dominio sufficientemente grande, utilizzando le onde modificate abbiamo ricavato la potenza emessa da una generica sorgente radiante. Ecco che avere lo pseudotensore energia-impulso giusto diventa fondamentale per il calcolo dell'energia trasportata dall'onda gravitazionale. Quindi da una misura di energia si può tramite lo pseudotensore energia-impulso risalire alla giusta teoria estesa della gravitazione. Lo pseudotensore energia-impulso è stato ricavato variando localmente l'azione associata alla teoria della gravitazione imponendo che la variazione si annulli per traslazioni rigide infinitesime e che i campi siano soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana data. Con questo metodo abbiamo ricavato lo pseudotensore energia-impulso oltre che per la lagrangiana menzionata anche per la generica lagrangiana di ordine n cioè che dipende fino all' n esima derivata della metrica $g_{\mu\nu}$, $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,i_1}, g_{\mu\nu,i_1i_2}, g_{\mu\nu,i_1i_2i_3}, \dots, g_{\mu\nu,i_1i_2i_3\dots i_n})$ nonché per le gravità $f(R)$. Adottando poi una connessione metrica ma non più simmetrica come quella di Levi-Civita bensì con torsione ed a curvatura nulla come quella di Weitzenböck nel formalismo delle tetradi abbiamo per la TEGR ricavato lo pseudotensore energia-impulso. Successivamente abbiamo generalizzato per le teorie estese teleparallele tipo $f(T)$ lo pseudotensore energia-impulso e tramite un termine ai bordi B che lega la curvatura alla torsione ne abbiamo calcolato il contributo in energia e momento lineare tramite ai bordi con il relativo pseudotensore $\tau^\sigma_{\alpha|\omega(T,B)}$ verificando che esiste una semplice relazione tra pseudotensori nelle teorie $f(R)$ ed $f(T)$. Abbiamo infine studiato anche teorie teleparallele del sest'ordine e di ordine $2p + 2$ descritte dalle seguenti lagrangiane taleparallele $L_{SOTP} = h(T + a_0T^2 + a_1T\Box T + a_1B(2T + B) + a_1\partial^\mu B\partial_\mu(2T + B))$ ed $L_{\Box^k T} = h(T + \sum_{k=0}^p a_k T\Box^k T)$ ricavandone le equazioni associate. Un altro punto fondamentale che potrebbe portare all'ulteriore sviluppo delle teorie estese è il carattere non locale della meccanica quantistica, basti pensare al principio di indeterminazioni di Heisenberg o all'entanglement quantistico, che mal si concilia con il carattere locale della relatività generale dovuto al principio di equivalenza. È importante formulare teorie estese non locali dove la gravità diventa non locale per poterla quantizzare. Ecco che un'importante generalizzazione della lagrangiana locale $L_{\Box^k R} = \sqrt{-g}(R + \sum_{k=0}^p a_k R\Box^k R)$ può essere ottenuta per $p \rightarrow \infty$ dove gli operatori differenziali \Box diventano di ordine infinito

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p a_k \Box^k = F(\Box) \quad (8.0.1)$$

le azioni non locali sono del tipo

$$I = \int_{\Omega} d^4x [R + RF(\square)R] \sqrt{-g} \quad (8.0.2)$$

e la non località si tradurrà nell'introduzione e lo studio degli operatori integrali

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^4y F(x-y) R(x) = F(\square) R(x) \quad (8.0.3)$$

Infine avendo derivato lo pseudotensore energia-impulso per lagrangiane di ordine n mandando $n \rightarrow \infty$ possiamo ricavare lo pseudotensore energia-impulso per lagrangiane non locali ponendo le basi di una gravità non locale.

Appendice A

A.1 Formule utili

$$g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \delta g_{\lambda\sigma} \quad (\text{A.1.2})$$

$$R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.1.3})$$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} + 2R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta (R) \delta g^{\alpha\beta} = -\nabla^\alpha \nabla^\beta (R) \delta g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\delta R_{\nu\alpha} = \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu) \quad (\text{A.1.8})$$

$$\delta \nabla_\alpha R = \nabla_\alpha \delta R \quad (\text{A.1.9})$$

$$\delta \nabla_\alpha A_\beta = \nabla_\alpha \delta A_\beta - \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma \quad (\text{A.1.10})$$

$$\delta (\nabla_\alpha \nabla_\beta R) = \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta R - \delta (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) \nabla_\gamma R \quad (\text{A.1.11})$$

$$\delta (\square R) = \delta (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R) = \square \delta R + (\nabla_\alpha \nabla_\beta R) \delta g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \nabla_\gamma R \quad (\text{A.1.12})$$

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (\delta g_{\sigma\alpha;\beta} + \delta g_{\sigma\beta;\alpha} - \delta g_{\alpha\beta;\sigma}) \quad (\text{A.1.13})$$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu (g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \delta g^{\alpha\beta} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) = -g^{\alpha\beta} \square \delta g_{\alpha\beta} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.14})$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta R = \nabla_\beta \nabla_\alpha R$$

d'Alembertiano covariante usato fino ad ora

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$$

d'Alembertiano ordinario usato da ora in poi

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^\rho + h_{\nu,\mu\rho}^\rho - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) \quad (\text{A.1.15})$$

$$R^{(1)} = h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h \quad (\text{A.1.16})$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^\rho + h_{\nu,\mu\rho}^\rho - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} + \eta_{\mu\nu} \square h) \quad (\text{A.1.17})$$

A.2 I conti in dettaglio

A.2.1 Le equazioni di campo nel limite di campo debole

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} &= GR^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F g^{\mu\nu} - G^{;\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square G \\ &\quad + \sum_{A=1}^p \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(F_A (\square^{A-1} R)^{;\lambda} \right)_{;\lambda} - F_A^{;\mu} (\square^{A-1} R)^{;\nu} \end{aligned}$$

$$F = R + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R$$

$$F_A = \sum_{j=A}^p \square^{j-A} \frac{\partial F}{\partial \square^j R} = \sum_{j=A}^p \square^{j-A} \left(\sum_{k=1}^p a_k R \delta_{kj} \right) = \sum_{j=A}^p a_j \square^{j-A} R$$

$$G = F_0 = \sum_{j=0}^p \square^j \frac{\partial F}{\partial \square^j R} = \frac{\partial F}{\partial R}$$

$$+ \sum_{j=1}^p \square^j \frac{\partial F}{\partial \square^j R} = 1 + 2a_0 R + \sum_{k=1}^p a_k \square^k R + \sum_{j=1}^p \square^j \left(\sum_{k=1}^p a_k R \delta_{kj} \right)$$

$$= 1 + 2a_0 R + 2 \sum_{k=1}^p a_k \square^k R$$

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu} = & \left(1 + 2a_0R + 2 \sum_{k=1}^p a_k \square^k R \right) R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(R + a_0 R^2 + \sum_{k=1}^p a_k R \square^k R \right) \\
& - \left(2a_0 R^{;\mu\nu} + 2 \sum_{k=1}^p a_k (\square^k R)^{;\mu\nu} \right) + g^{\mu\nu} \left(2a_0 \square R + 2 \sum_{k=1}^p a_k \square^{k+1} R \right) \\
& + \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} a_j \left((\square^{j-A} R) (\square^{A-1} R)^{;\lambda} \right)_{;\lambda} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} a_j \left[(\square^{j-A} R)^{;\mu} (\square^{A-1} R)^{;\nu} + (\square^{j-A} R)^{;\nu} (\square^{A-1} R)^{;\mu} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Quindi ordinando diversamente ho:

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu} = & R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + 2a_0 \left(RR^{\mu\nu} - \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - R^{;\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square R \right) \\
& + 2 \sum_{j=1}^p a_j \left(R^{\mu\nu} \square^j R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \square^j R - (\square^j R)^{;\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square^{j+1} R \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j \left\{ g^{\mu\nu} \left[(\square^{j-A} R)_{;\lambda} (\square^{A-1} R)^{;\lambda} + (\square^{j-A} R) (\square^A R) \right] \right. \\
& \left. - (\square^{j-A} R)^{;\mu} (\square^{A-1} R)^{;\nu} - (\square^{j-A} R)^{;\nu} (\square^{A-1} R)^{;\mu} \right\}
\end{aligned}$$

Facciamo vedere che in realtà gli ultimi due pezzi sono uguali raggruppando prima diversamente i termini della sommatoria e poi facendo un cambio d'indice:

$$\begin{aligned}
\sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p H_{jA} &= \sum_{j=1}^p H_{j1} + \sum_{j=2}^p H_{j2} + \sum_{j=3}^p H_{j3} + \sum_{j=4}^p H_{j4} + \cdots + \sum_{j=p-1}^p H_{j(p-1)} + \sum_{j=p}^p H_{jp} \\
&= (H_{11} + H_{21} + H_{31} + H_{41} + \cdots + H_{(p-1)1} + H_{p1}) \\
&\quad + (H_{22} + H_{32} + H_{42} + \cdots + H_{(p-1)2} + H_{p2}) \\
&\quad + (H_{33} + H_{43} + \cdots + H_{(p-1)3} + H_{p3}) + (H_{44} + \cdots + H_{(p-1)4} + H_{p4}) \\
&\quad + \cdots + (H_{(p-1)(p-1)} + H_{p(p-1)}) + H_{pp} \\
&= H_{11} + (H_{21} + H_{22}) + (H_{31} + H_{32} + H_{33}) + (H_{41} + H_{42} + H_{43} + H_{44}) \\
&\quad + \cdots + (H_{(p-1)1} + H_{(p-1)2} + H_{(p-1)3} + H_{(p-1)4} + \cdots + H_{(p-1)(p-1)}) \\
&\quad + \cdots + (H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} + H_{p4} + \cdots + H_{p(p-1)} + H_{pp}) \\
&= \sum_{A=1}^1 H_{1A} + \sum_{A=1}^2 H_{2A} + \sum_{A=1}^3 H_{3A} + \sum_{A=1}^4 H_{4A} + \cdots + \sum_{A=1}^{(p-1)} H_{(p-1)A} + \sum_{A=1}^p H_{pA} = \sum_{j=1}^p \sum_{A=1}^j H_{jA}
\end{aligned}$$

con $1 \leq A \leq j \leq p$. Se cambiamo l'indice A nel seguente modo:

$$A' = j - A + 1 \Rightarrow \begin{cases} j - A \rightarrow A' - 1 \\ A - 1 \rightarrow j - A' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} A' = j & \text{se } A = 1 \\ A' = 1 & \text{se } A = j \end{cases}$$

cioè A conta da 1 a j mentre A' conta da j ad 1 ed inoltre si scambia $j - A$ con $A' - 1$ ed $A - 1$ con $j - A'$. Ora facciamo vedere che sono uguali questi due pezzi:

$$\begin{aligned} & \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j (\square^{j-A} R)^{i\mu} (\square^{A-1} R)^{i\nu} = \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j (\square^{j-A} R)^{i\nu} (\square^{A-1} R)^{i\mu} \\ & \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j (\square^{j-A} R)^{i\mu} (\square^{A-1} R)^{i\nu} = \sum_{j=1}^p \sum_{A=1}^j a_j (\square^{j-A} R)^{i\mu} (\square^{A-1} R)^{i\nu} = \\ & \sum_{j=1}^p \sum_{A'=1}^j a_j (\square^{A'-1} R)^{i\mu} (\square^{j-A'} R)^{i\nu} = \sum_{j=1}^p \sum_{A=1}^j a_j (\square^{j-A} R)^{i\nu} (\square^{A-1} R)^{i\mu} = \\ & = \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j (\square^{j-A} R)^{i\nu} (\square^{A-1} R)^{i\mu} \end{aligned}$$

essendo A' un indice muto che abbiamo rinominato A . Quindi possiamo scrivere $P^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + 2a_0 \left(RR^{\mu\nu} - \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - R^{i\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square R \right) \\ &+ 2 \sum_{j=1}^p a_j \left(R^{\mu\nu} \square^j R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \square^j R - (\square^j R)^{i\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square^{j+1} R \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{A=1}^p \sum_{j=A}^p a_j \left\{ g^{\mu\nu} \left[(\square^{j-A} R)_{;\lambda} (\square^{A-1} R)^{i\lambda} + (\square^{j-A} R) (\square^A R) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 (\square^{j-A} R)^{i\mu} (\square^{A-1} R)^{i\nu} \right\} \end{aligned}$$

L'equazione finale si ottiene quindi così

$$\begin{cases} \frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}} = +\chi \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \\ \frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} P^{\mu\nu} \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta L_T}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{-g} P^{\mu\nu} + \chi \sqrt{-g} T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow P^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}$$

Approssimazione campo debole

Consideriamo ora tutti gli indici covarianti cosa che si può fare perché in approssimazione di campo debole le η ci abbassano o alzano gli indici come se fossimo in metrica Minkowskiana, gli unici termini che sopravvivono trascurando i termini di ordine superiore a $|h|$ sono:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} + 2a_0\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} - 2a_0R_{,\mu\nu}^{(1)} + 2\sum_{j=1}^p a_j \left(\eta_{\mu\nu}\square^{j+1}R^{(1)} - (\square^j R^{(1)})_{,\mu\nu} \right) = \chi T_{\mu\nu}^{(0)} \quad (\text{A.2.1})$$

dove il d'Alembertiano diventa al prim'ordine $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ e le derivate covarianti diventano derivate parziali e quindi commutano tra di loro. Dalla A.2.1, A.1.15 ed A.1.16 si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^\rho + h_{\nu,\mu\rho}^\rho - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) \\ & + 2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Calcoliamone la traccia con $\eta^{\mu\nu}$ ed abbiamo:

$$(h_{,\mu\rho}^{\mu\rho} - \square h) - 2(h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) + 2(4\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\delta_\sigma^\mu) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi T \quad (\text{A.2.3})$$

$$- (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) + 2(4\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\lambda\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi T \quad (\text{A.2.4})$$

$$- (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) + 6 \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) = \chi T \quad (\text{A.2.5})$$

Quindi si ha dalla (A.2.2) ed (A.2.5):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^\rho + h_{\nu,\mu\rho}^\rho - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left(6 \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) - \chi T \right) \\ & + 2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - 3\eta_{\mu\nu} \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) \\ & + 2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - 3\eta_{\mu\nu} \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) \\ & + 2\eta_{\mu\nu} \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h) \\ & - 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} \\ & - 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j (h_{,\rho\tau}^{\rho\tau} - \square h)^{\lambda\sigma} \\ & = 4\pi (2T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T) \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

perchèè $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ con $G = c = 1$. Nella gauge armonica si ha:

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \right)_{,\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_{,\tau\kappa}^{\tau\kappa} = \frac{1}{2}\square h \\ h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - h_{,\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

e sostituendo otteniamo:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^j \left(-\frac{1}{2}\square h \right)^{\lambda\sigma} = 4\pi (2T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T) \quad (\text{A.2.12})$$

da cui:

$$\square h_{\mu\nu} - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} h^{\lambda\sigma} = -8\pi (2T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T) \quad (\text{A.2.13})$$

Calcoliamone ora la traccia moltiplicando primo e secondo membro per $\eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \square h - (4\eta_{\lambda\sigma} + 2\delta_{\sigma}^{\mu}\eta_{\mu\lambda}) \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} h^{\lambda\sigma} &= -8\pi (2T - 4T) \\ \square h - 6\eta_{\lambda\sigma} \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+1} h^{\lambda\sigma} &= 16\pi T \\ \square h - 6 \sum_{j=0}^p a_j \square^{j+2} h &= 16\pi T \end{aligned}$$

A.2.2 Il limite newtoniano

Nell'approssimazione Minkowskiana, solo campo debole, il d'Alembertiano covariante si riduce a quello classico ovvero:

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}R = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)} = \square R^{(1)}$$

Dalla staticità del campo nell'approssimazione Newtoniana si ha:

$$\begin{aligned} (\partial_0\partial_0 - \Delta) h_{\mu\nu} &= -\Delta h_{\mu\nu} \\ \square^{k+1} h &= (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h \end{aligned}$$

Dalla condizione di moto lento il tensore energia impulso della materia diventa $T_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0\rho$ e la sua traccia $T = \rho$. Quindi l'equazione di campo in approssimazione newtoniana diventa:

$$\Delta h_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h^{\lambda\sigma} = 8\pi (2\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 - \eta_{\mu\nu}) \rho \quad (\text{A.2.14})$$

Calcolo la traccia moltiplicando primo e secondo membro per $\eta^{\mu\nu}$ ed ottengo:

$$\Delta h + 6\eta_{\lambda\sigma} \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h^{\lambda\sigma} = -16\pi\rho$$

$$\eta_{\lambda\sigma} h^{,\lambda\sigma} = h_{\sigma}^{\sigma} = -\Delta h \Rightarrow \Delta h + 6 \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+2} \Delta^{k+2} h = -16\pi\rho$$

La componente *time – time* dell'equazione è sapendo che $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$:

$$\Delta h_{00} + (\eta_{00}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{0\lambda}\eta_{0\sigma}) \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h^{,\lambda\sigma} = 8\pi (2\delta_0^0\delta_0^0 - \eta_{00}) \rho$$

$$\Delta h_{00} + \eta_{\lambda\sigma} \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h^{,\lambda\sigma} + 2 \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} h_{,00} = 8\pi\rho$$

$$\Delta h_{00} + \sum_{k=0}^p a_k (-1)^{k+2} \Delta^{k+2} h = 8\pi\rho$$

Tenendo presente che $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$ si ottengono le componenti spaziali.

La gauge armonica in approssimazione newtoniana diventa:

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right)_{,\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_{,\mu}^{\mu 0} - \frac{1}{2} h^{,0} = 0 \\ h_{,\mu}^{\mu i} - \frac{1}{2} h^{,i} = 0 \Rightarrow h_0^{\prime i} + h_{,j}^{ji} - \frac{1}{2} h^{,i} = 0 = h_{,j}^{ji} + \frac{1}{2} h_{,i} \end{cases}$$

In generale valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} h^{,0} &= h_{,0} & h^{,i} &= -h_{,i} & h^{,ij} &= -h_{,j}^i = h_{ij} \\ h^{00} &= h_0^0 = h_{00} & h &= h_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} & \eta_{00} &= \eta^{00} = 1 \\ \eta^{ij} &= \eta_{ij} = -\delta^{ij} & \eta^{ij} &= -\eta_j^i = -\delta_j^i & \eta^{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} &= \delta_{\mu}^{\mu} = 4 \end{aligned}$$

La traccia h è:

$$h = h_0^0 + h_1^1 + h_2^2 + h_3^3 = h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33} = -2h_{00}$$

perché $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$.

A.2.3 La soluzione particolare

Dalle seguente relazioni:

$$\partial_{x^{\mu}} e^{ik^{\alpha}(x_{\alpha}-x'_{\alpha})} = \partial_{x^{\mu}} e^{ik_{\alpha}(x^{\alpha}-x'^{\alpha})} = ik_{\mu} e^{ik^{\alpha}(x_{\alpha}-x'_{\alpha})} \quad (\text{A.2.15})$$

$$\partial_{x^{\mu}} \partial_{x^{\nu}} e^{ik^{\alpha}(x_{\alpha}-x'_{\alpha})} = -k_{\mu} k_{\nu} e^{ik^{\alpha}(x_{\alpha}-x'_{\alpha})} \quad (\text{A.2.16})$$

$$\square_x e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} = -k^2 e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad (\text{A.2.17})$$

$$\square_x^k e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} = (-1)^k k^{2k} e^{ik^\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \quad (\text{A.2.18})$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} \sum_{l=0}^p a_l \square^{l+1} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) e^{ik^\alpha x_\alpha} \right)^{,\lambda\sigma} \\ &= \eta_{\mu\nu} \sum_{l=0}^p a_l \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \square^{l+2} e^{ik^\alpha x_\alpha} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \eta_{\mu\nu} \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k^{2(l+2)} e^{ik^\alpha x_\alpha} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \eta_{\mu\nu} k^2 \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k^{2(l+1)} e^{ik^\alpha x_\alpha} \\ & 2\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} \sum_{l=0}^p a_l \square^{l+1} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) e^{ik^\alpha x_\alpha} \right)^{,\lambda\sigma} \\ &= 2 \left(\sum_{l=0}^p a_l \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \square^{l+1} e^{ik^\alpha x_\alpha} \right)_{,\mu\nu} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \sum_{l=0}^p a_l 2 (-k_\mu k_\nu) (-1)^{l+1} k^{2(l+1)} e^{ik^\alpha x_\alpha} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{h}(k) \sum_{l=0}^p a_l (2k_\mu k_\nu) (-1)^{l+2} k^{2(l+1)} e^{ik^\alpha x_\alpha} \end{aligned}$$

da cui la (4.3.10).

A.2.4 La soluzione omogenea

$$\begin{aligned} & (\partial_0^2 - \Delta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \partial_0^2 h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} h(t, \mathbf{k}) \Delta e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \partial_0^2 h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} h(t, \mathbf{k}) (-q^2) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 + q^2) h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\partial_0^2 - \Delta)^l \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 - \Delta)^{l-1} (\partial_0^2 + q^2) h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 - \Delta)^{l-2} (\partial_0^2 + q^2) (\partial_0^2 - \Delta) h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 - \Delta)^{l-2} (\partial_0^2 + q^2)^2 h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 + q^2)^l h(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \square \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} h_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
& - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} + 2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}) \sum_{l=0}^p a_l \square^{l+1} \left(\sum_{m=1}^{p+2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)^{,\lambda\sigma} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 + q^2) h_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
& - \eta_{\mu\nu} \sum_{l=0}^p a_l \square^{l+2} \left(\sum_{m=1}^{p+2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right) \\
& - 2 \sum_{l=0}^p a_l \square^{l+1} \left(\sum_{m=1}^{p+2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)^{,\mu\nu} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_0^2 + q^2) h_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
& - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{p+2} \eta_{\mu\nu} \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+2)} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \\
& - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{p+2} \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+1} 2(-k_\mu k_\nu) k_m^{2(l+1)} A_m(\mathbf{k}) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = 0
\end{aligned}$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ (\partial_0^2 + q^2) h_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) - \sum_{m=1}^{p+2} \eta_{\mu\nu} k_m^2 \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} A_m(\mathbf{k}) e^{i\omega_m t} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{p+2} 2(k_m)_\mu (k_m)_\nu \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} A_m(\mathbf{k}) e^{i\omega_m t} \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

da cui si ha:

$$(\partial_0^2 + q^2) h_{\mu\nu}(t, \mathbf{k}) - \sum_{m=1}^{p+2} \left(\eta_{\mu\nu} k_m^2 + 2(k_m)_\mu (k_m)_\nu \right) \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} k_m^{2(l+1)} A_m(\mathbf{k}) e^{i\omega_m t} = 0$$

I k_m sono soluzioni dell'equazione:

$$\sum_{l=1}^{p+2} c_l (-1)^l (k_m^2)^l = 0 \Rightarrow c_1 (-1) (k_m^2) + \sum_{l=2}^{p+2} c_l (-1)^l (k_m^2)^l = 0$$

Ricordando che:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_l = -6a_{l-2} \quad \text{se } l > 1 \end{cases}$$

si ha:

$$-k_m^2 - 6 \sum_{l=2}^{p+2} a_{l-2} (-1)^l (k_m^2)^l = 0 \Rightarrow \text{ponendo } l' = l - 2$$

$$\text{si ha } \Rightarrow -k_m^2 - 6 \sum_{l'=0}^p a_{l'} (-1)^{l'+2} (k_m^2)^{l'+2} = 0$$

Ovvero ridefinendo $l' = l$ si ha

$$-k_m^2 - 6k_m^2 \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} (k_m^2)^{l+1} = 0 \Rightarrow -k_m^2 \left[1 + 6 \sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} (k_m^2)^{l+1} \right] = 0$$

Per $k_m^2 \neq 0$ si ha:

$$\sum_{l=0}^p a_l (-1)^{l+2} (k_m^2)^{l+1} = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=2}^{p+2} \int d^4 x' G_{\square}(x, x') \rho_{\mu\nu}(x'; m) \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int d^4 x' G_{\square}(x, x') \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik_m^\alpha x'_\alpha} \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int d^4 x' \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\square}(k') e^{ik'^\alpha (x_\alpha - x'_\alpha)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik_m^\alpha x'_\alpha} \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^4 k' \left[\int \frac{d^4 x'}{(2\pi)^4} e^{i(k_m^\alpha - k'^\alpha) x'_\alpha} \right] \tilde{G}_{\square}(k') \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik'^\alpha x_\alpha} \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\int d^4 k' \delta_4(k_m^\alpha - k'^\alpha) \tilde{G}_{\square}(k') e^{ik'^\alpha x_\alpha} \right] \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{G}_{\square}(k_m) \rho_{\mu\nu}(\mathbf{k}; m) e^{ik_m^\alpha x_\alpha} \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{k_m^2} \right) \left\{ -\frac{k_m^2}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_m^2} \right] \right\} A_m(\mathbf{k}) e^{ik_m^\alpha x_\alpha} \\
&= \sum_{m=2}^{p+2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \frac{(k_m)_\mu (k_m)_\nu}{k_m^2} \right] \right\} A_m(\mathbf{k}) e^{ik_m^\alpha x_\alpha}
\end{aligned}$$

A.2.5 La polarizzazione e gli stati di elicit  nel vuoto

Dalla seguente trasformazione infinitesima $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ si ha per il tensore metrico:

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\mu\alpha} \xi_{,\nu}^\alpha - g_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha$$

che in approssimazione di campo debole trascurando termini di ordine $\xi^\alpha h_{\mu\nu,\alpha}$ e $h_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha$ diventa:

$$h'_{\mu\nu}(x') \simeq h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

Se $\xi^\mu = i\theta^\mu e^{ik^\alpha x_\alpha}$ con k fissato si ha per un'onda piana che il tensore di polarizzazione si trasforma:

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}(x) &= \epsilon_{\mu\nu} e^{ik^\alpha x_\alpha} & \xi_{\mu,\nu} &= -k_\nu \theta_\mu e^{ik^\alpha x_\alpha} \\
\epsilon'_{\mu\nu} e^{ik^\alpha x_\alpha} &= \epsilon_{\mu\nu} e^{ik^\alpha x_\alpha} + k_\nu \theta_\mu e^{ik^\alpha x_\alpha} + k_\mu \theta_\nu e^{ik^\alpha x_\alpha} & \text{da cui} & \epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_\nu \theta_\mu + k_\mu \theta_\nu
\end{aligned}$$

avendo posto $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$ ed $\theta_\mu = \eta_{\mu\nu}\theta^\nu$. La gauge armonica per un'onda piana diventa:

$$h_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{2}h_{,\nu} \Rightarrow (ik^\mu) \epsilon_{\mu\nu} e^{ik^\alpha x_\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon (ik_\nu) e^{ik^\alpha x_\alpha} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} k^\mu = \frac{1}{2}\epsilon k_\nu$$

dove possiamo sempre alzare ed abbassare gli indici con il tensore di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ in approssimazione lineare.

Appendice B

B.1 La media dei termini $\langle (A_p)_\alpha^\eta \rangle$ e $\langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle$

Dimostriamo ora le ultime due relazioni in (5.5.7), cioè $\langle (A_p)_\alpha^\eta \rangle = \langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle = 0$. La formula generale per derivate $\square^h R$, che tiene conto delle simmetrie di $g_{\mu\nu}$ e delle sue derivate, è [51]:

$$\frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta^1 \dots i_{2h+1}}} = g^{j_2 j_3} \dots g^{j_{2h} j_{2h+1}} g^{ab} g^{cd} \left\{ \delta_a^{(\mu} \delta_d^{\nu)} \delta_c^{(\eta} \delta_b^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \dots \delta_{j_{2h}}^{i_{2h}} \delta_{j_{2h+1}}^{i_{2h+1}}) \right. \\ \left. - \delta_a^{(\mu} \delta_b^{\nu)} \delta_c^{(\eta} \delta_d^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \dots \delta_{j_{2h}}^{i_{2h}} \delta_{j_{2h+1}}^{i_{2h+1}}) \right\} \quad (\text{B.1.1})$$

Dobbiamo verificare $\langle (B_p)_\alpha^\eta \rangle = 0$. Inserendo la (B.1.1) nel membro di sinistra della (5.4.11) cioè, nel limite di campo debole fino all'ordine h^2 diventa

$$\sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} \sum_{m=j+1}^{2h+1} (-1)^j \partial_{i_0 \dots i_j} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta^1 \dots i_m}} \right] g_{\mu\nu, i_{j+1} \dots i_m \alpha} \\ \stackrel{h^2}{=} \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} (-1)^j \sqrt{-g}^{(0)} a_h \partial_{i_0 \dots i_j} R^{(1)} \eta^{j_2 j_3} \dots \\ \dots \eta^{j_{2h} j_{2h+1}} \eta^{ab} \eta^{cd} \left\{ \delta_a^{(\mu} \delta_d^{\nu)} \delta_c^{(\eta} \delta_b^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \dots \delta_{j_{2h}}^{i_{2h}} \delta_{j_{2h+1}}^{i_{2h+1}}) \right. \\ \left. - \delta_a^{(\mu} \delta_b^{\nu)} \delta_c^{(\eta} \delta_d^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \dots \delta_{j_{2h}}^{i_{2h}} \delta_{j_{2h+1}}^{i_{2h+1}}) \right\} h_{\mu\nu, i_{j+1} \dots i_{2h+1} \alpha} \\ = \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} (-1)^j a_h \partial_{i_0 \dots i_j} R^{(1)} Q_{(\mu\nu)}^{(\eta^1 \dots i_{2h+1})} h_{, i_{j+1} \dots i_{2h+1} \alpha}^{\mu\nu} \quad (\text{B.1.2})$$

con

$$Q_{(\mu\nu)}^{(\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}})} = \frac{1}{2! (2h+2)!} \sum_{\substack{\mu\nu \in \sigma(\mu\nu) \\ \eta^{i_1 \dots i_{2h+1}} \in \sigma(\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}})}} Q_{\mu\nu}^{\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}}}$$

e

$$Q_{(\mu\nu)}^{(\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}})} = \delta_{(\mu}^{(\eta} \delta_{\nu)}^{i_1} \eta^{i_2 i_3} \dots \eta^{i_{2h} i_{2h+1}}) - \eta_{(\mu\nu)} \eta^{(\eta^{i_1} \eta^{i_2 i_3} \dots \eta^{i_{2h} i_{2h+1}})}$$

dove $\sigma(\mu\nu)$ e $\sigma(\eta^{i_1} \dots i_{2h+1})$ sono l'insieme delle permutazioni degli indici nelle parentesi. Mediando la (B.1.2) tenendo fisso k su di una opportuna regione spaziotemporale ed adottando la gauge armonica, otteniamo

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} (-1)^j a_h \partial_{i_0 \dots i_j} R^{(1)} Q_{(\mu\nu)}^{(\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}})} h^{\mu\nu}_{,i_{j+1} \dots i_{2h+1} \alpha} \right\rangle \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} \frac{1}{2! (2h+2)!} (-1)^j a_h \sum_{\substack{\mu\nu \in \sigma(\mu\nu) \\ \eta^{i_1 \dots i_{2h+1}} \in \sigma(\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}})}} \langle \partial_{i_0 \dots i_j} R^{(1)} Q_{\mu\nu}^{\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}}} h^{\mu\nu}_{,i_{j+1} \dots i_{2h+1} \alpha} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

La media di (B.1.3) è indipendente dalle permutazioni degli indici inferiori e superiori di $Q_{\mu\nu}^{\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}}}$, cioè

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_{i_0 \dots i_j} \left(-\frac{1}{2} \square^h \right) Q_{\mu\nu}^{\eta^{i_1 \dots i_{2h+1}}} h^{\mu\nu}_{,i_{j+1} \dots i_{2h+1} \alpha} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{p+2} (-1)^{j+h} (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Dalla sostituzione di (B.1.4) in (B.1.3), otteniamo

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} \sum_{m=j+1}^{2h+1} (-1)^j \partial_{i_0 \dots i_j} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta^{i_1 \dots i_m}}} \right] g_{\mu\nu, i_{j+1} \dots i_m \alpha} \right\rangle \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{j=0}^{2h} (-1)^j a_h \sum_{m=2}^{p+2} (-1)^{j+h} (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{m=2}^{p+2} \left(h + \frac{1}{2} \right) a_h (-1)^h (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

Mediando il termine di destra in (5.4.11), abbiamo

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{4} \sum_{h=1}^p a_h \square^h h \square^h h, \eta_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^1 \sum_{j=h}^{p-1+h} \sum_{m=j+1-h}^p (-1)^h a_m \square^{m-j} (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h), i_{h\alpha} \square^{j+1-h} h, \lambda^{i_h} \right\rangle \\
& = \sum_{h=1}^p \sum_{m=2}^{p+2} \left(h + \frac{1}{2} \right) a_h (-1)^h (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \quad (\text{B.1.6})
\end{aligned}$$

Infine, dalla media nel limite di campo debole (5.4.11) da (B.1.5) ed (B.1.6), otteniamo:

$$\langle\langle B_p \rangle\rangle_\alpha = 0 \quad (\text{B.1.7})$$

Un simile argomento dà $\langle\langle A_p \rangle\rangle_\alpha = 0$. Esso è

$$\begin{aligned}
& \left\langle \sum_{h=1}^p \sum_{q=0}^{2h+1} (-1)^q \partial_{i_0 \dots i_q} \left[\sqrt{-g} a_h R \frac{\partial \square^h R}{\partial g_{\mu\nu, \eta^{i_1 \dots i_q}}} \right] g_{\mu\nu, \alpha} \right\rangle \\
& \stackrel{h^2}{=} \frac{1}{2} \sum_{h=1}^p \sum_{m=2}^{p+2} a_h (-1)^{h+1} (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \quad (\text{B.1.8})
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \sum_{h=1}^p a_h \square^{h+1} h, \lambda (h^{\eta\lambda} - \eta^{\eta\lambda} h), \alpha \right\rangle \stackrel{h^2}{=} \frac{1}{2} \sum_{h=1}^p \sum_{m=2}^{p+2} a_h (-1)^{h+1} (k_m^2)^{h+1} (k_m)^\eta (k_m)_\alpha |A_m|^2 \quad (\text{B.1.9})$$

e allora mediando la (5.4.10) a sinistra ed a destra, nel limite di campo debole, otteniamo

$$\langle\langle A_p \rangle\rangle_\alpha = 0 \quad (\text{B.1.10})$$

che completa la nostra dimostrazione.

Appendice C

C.1 Formule utili

$$\nabla^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu f(R) = R^\alpha{}_\mu \nabla_\alpha f(R) + \nabla_\mu \square f(R) \quad (\text{C.1.1})$$

$$\frac{\partial h_c{}^\nu}{\partial h_a{}^\rho} = -h_a{}^\nu h_c{}^\rho \quad (\text{C.1.2})$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial h_c{}^\rho} = -g^{\rho\nu} h_c{}^\mu - g^{\rho\mu} h_c{}^\nu \quad (\text{C.1.3})$$

$$\partial_\alpha h_a{}^\rho = -h_a{}^\mu h_b{}^\rho \partial_\alpha h_\mu{}^b = -\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\alpha} h_a{}^\lambda \quad (\text{C.1.4})$$

$$\frac{\partial h}{\partial h_a{}^\rho} = h_a{}^\rho h \quad (\text{C.1.5})$$

$$\partial_\mu h = h \tilde{\Gamma}^\nu{}_{\mu\nu} - h K^\nu{}_{\mu\nu} = h \tilde{\Gamma}^\nu{}_{\nu\mu} = h h_a{}^\rho h_{\rho,\mu}^a \quad (\text{C.1.6})$$

$$\partial_\sigma (h F^{\rho\sigma}) = h \nabla_\sigma F^{\rho\sigma} \quad \text{se} \quad F^{(\rho\sigma)} = 0 \quad (\text{C.1.7})$$

$$\nabla_\sigma h_a{}^\rho = -h_a{}^\eta K^\rho{}_{\eta\sigma} \quad \nabla_\sigma h_a{}^\sigma = T_a \quad (\text{C.1.8})$$

$$K_a{}^\rho{}^\lambda = K^\rho{}^\lambda{}_a + T_a{}^{\rho\lambda} \quad (\text{C.1.9})$$

C.2 Le principali variazioni

$$\delta h_a{}^\rho = -h_a{}^\mu h_b{}^\rho \delta h_\mu{}^b \quad (\text{C.2.1})$$

$$\delta h = h h_a{}^\rho \delta h_\rho{}^a = -h h_a{}^\rho \delta h_a{}^\rho \quad (\text{C.2.2})$$

$$\delta T = -4T^\mu{}_{\nu a} S_\mu{}^{\nu\rho} \delta h_\rho{}^a - 4S_a{}^{\rho\sigma} \delta (\partial_\sigma h_\rho{}^a) \quad (\text{C.2.3})$$

$$\delta T^\lambda = - \left(T_a{}^{\rho\lambda} + h_a{}^\lambda T^\rho + g^{\lambda\rho} T_a \right) \delta h_\rho{}^a + (h_a{}^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a{}^\sigma g^{\lambda\rho}) \delta (\partial_\sigma h_\rho{}^a) \quad (\text{C.2.4})$$

$$\delta B = \delta \left[\frac{2}{h} \partial_\sigma (h T^{\nu\sigma}{}_\nu) \right] = -\frac{B}{h} \delta h + \frac{2}{h} \partial_\mu [T^\mu \delta h + h \delta T^\mu] \quad (\text{C.2.5})$$

$$h\omega_T \delta T = [-4h\omega_T T^\mu{}_{\nu a} S_\mu{}^{\nu\rho} + 4\partial_\sigma (h\omega_T S_a{}^{\rho\sigma})] \delta h^a{}_\rho - \partial_\sigma (4h\omega_T S_a{}^{\rho\sigma} \delta h^a{}_\rho) \quad (\text{C.2.6})$$

$$\begin{aligned} h\omega_B \delta B = & [-B\omega_B h h_a{}^\rho + 2h h_a{}^\rho \square \omega_B - 2h h_a{}^\sigma \nabla_\sigma \nabla^\rho \omega_B + 4h \partial_\lambda \omega_B S_a{}^{\lambda\rho}] \delta h^a{}_\rho \\ & - \partial_\sigma [2h \partial_\lambda \omega_B (h_a{}^\rho g^{\lambda\sigma} - h_a{}^\sigma g^{\lambda\rho}) \delta h^a{}_\rho - 2\omega_B (T^\sigma \delta h + h \delta T^\sigma)] \end{aligned} \quad (\text{C.2.7})$$

L'elenco dei lavori

- A** S. Capozziello, M. Capriolo and M. Transirico, *The gravitational energy-momentum pseudo-tensor of higher-order theories of gravity* , Ann. Phys. **525**, 1600376 (2017);
- B** S. Capozziello, M. Capriolo and M. Transirico, *The Gravitational Energy-Momentum Pseudotensor: the cases $f(R)$ and $f(T)$ Gravity*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., doi: 10.1142/S0219887818501645;
- C** S. Capozziello, M. Capriolo and M. Transirico, *The weak field limit of higher order gravity* in preparazione;
- D** S. Capozziello, M. Capriolo and M. Transirico, *Higher Order Teleparallel Gravity* in preparazione.

Bibliografia

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1971)
- [2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry*, Vol. I, Wiley Interscience, New York (1963)
- [3] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM 218, Springer-Verlag, New York, (2013)
- [4] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds*, GTM 176, Springer-Verlag, New York, (1997)
- [5] P. M. Michor, *Topics in Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI (2008)
- [6] M. Abate and F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag, Italia (2011)
- [7] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, GSSP, Second Edition, Institute of Physics Publishing, London (2003)
- [8] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1980)
- [9] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein's Equation*, Oxford University Press, New York (2009)
- [10] S. M. Carroll, *Spacetime And Geometry*, Addison Wesley, San Francisco (2004)
- [11] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [12] M. Gasperini, *Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*, Springer-Verlag, Italia (2010)
- [13] K. Hayashi and T. Shirafuji, *New General Relativity*, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979)

- [14] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, Fundamental Theories of Physics, vol. **173** (Springer, Dordrecht, 2013)
- [15] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific, Singapore (1995) **77**, 107 (2017)
- [16] N. Straumann, *General Relativity*, Springer-Verlag, Dordrecht (2013)
- [17] H. Kleinert, *Gravity And Defect*, <http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b9/psfiles/grtall.pdf>
- [18] L. Fatibene, M. Ferraris, M. Francaviglia, M. Raiteri, *Noether Charges, Brown-York Quasilocal Energy and Related Topics*, J. Math. Phys. **42**, 1173 (2001)
- [19] R. A. Hulse and J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975).
- [20] B. P. Abbott *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [21] S. Capozziello and M. De Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, *Phys. Rept.* **509**, 167 (2011)
- [22] S. Capozziello and V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity*, FTP 170, Springer, New York (2011)
- [23] S. Capozziello and M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, Liguori, Napoli (2005)
- [24] M. De Laurentis, *Invariance Principles and Extended Gravity: Theories and Probes*, PhD Thesis, www.infn.it/thesis/PDF/getfile.php?filename=3520-De+Laurentis-dottorato.pdf
- [25] P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970).
- [26] R. A. Sunyaev, *Large Scale Structure of the Universe*, M. S. Longair and J. Einasto, (Dordrecht, Reidel, 1978).
- [27] G. F. Smoot *et al.*, *Astrophysic. J.* **396**, L1 (1992).
- [28] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J.* **464**, L1 (1996).
- [29] A. D. Miller *et al.*, *Astrophys. J.* **524**, L1 (1999).

- [30] P. de Bernardis et al., *Nature* **404**, 955 (2000).
- [31] S. Hanany et al., *Astrophys. J.* **545**, L5 (2000).
- [32] W. Hu and M. White, *Astrophys. J.* **471**, 30 (1996).
- [33] E. J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands, *Phys. Rev. D* **57**, 4686 (1998).
- [34] P. G. Ferreira and M. Joyce, *Phys. Rev. D* **58**, 023503 (1998).
- [35] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999).
- [36] A. R. Liddle and R. J. Scherrer, *Phys. Rev. D* **59**, 023509 (1999).
- [37] P. J. Steinhardt, L. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).
- [38] I. Zlatev and P. J. Steinhardt, *Phys. Lett. B* **459**, 570 (1999).
- [39] V. Sahni and L. Wang, *Phys. Rev. D* **62**, 103517 (2000).
- [40] M. Ferraris and J. Kijowski, *Gen. Relat. Gravit.* **14**, 37 (1982), <https://doi.org/10.1007/BF00756195>
- [41] J. W. Maluf, *The teleparallel equivalent of general relativity*, *Ann. Phys.* **525**, 339 (2013)
- [42] Y. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, *$f(T)$ teleparallel gravity and cosmology*, *Rept. Prog. Phys.* **79**, 106901 (2016)
- [43] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, *Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry*, *Phys. Rev. D* **83**, 104030 (2011)
- [44] S. S. Xulu, *The Energy-Momentum Problem in General Relativity*, PhD thesis, <https://arxiv.org/abs/hep-th/0308070v1>
- [45] A. Komar, *Phys. Rev.* **113**, 934 (1959)
- [46] J. Katz, *A note on Komar's anomalous factor*, *Classical and Quantum Gravity* **2** (3)
- [47] M. Ferraris, M. Francaviglia, *Covariant first-order Lagrangians, energy-density and superpotentials in general relativity*, *General Relativity and Gravitation* **22** (9), 965–985 (1990)

- [48] L. Fatibene, M. Ferraris, M. Francaviglia, *Augmented Variational Principles and Relative Conservation Laws in Classical Field Theory*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **2**, 373-392 (2005), arXiv:math-ph/0411029
- [49] G. Lessner, *Møller Energy-Momentum Complex-Once Again*, Gen. Relativ. Gravit., **28**, 527 (1996)
- [50] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, (1972).
- [51] S. Gottlober, H. J. Schmidt and A. A. Starobinsky, *Sixth Order Gravity and Conformal Transformations*, Class. Quant. Grav. **7**, 893 (1990).
- [52] H. J. Schmidt, *Variational derivatives of arbitrarily high order and multi-inflation cosmological models*, Class. Quantum Grav. **7**, 1023 (1990)
- [53] I. Quandt and H.J. Schmidt, *The Newtonian limit of fourth and higher order gravity*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0109005v1>
- [54] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2009)
- [55] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Co., New York (1971).
- [56] S. Capozziello, A. Stabile, *Astrophys. Space Sci.* **358**, 27 (2015)
- [57] B. Mashhoon, *Nonlocal Gravity*, Oxford Uni. Press, Oxford (2017).
- [58] S. Das and E. C. Vagenas, *Universality of Quantum Gravity Corrections*, Phys. Rev. Lett. **101**, 221301 (2008)
- [59] I. Pikovski, M. R. Vanner, M. Aspelmeyer, M. Kim and C. Brukner, *Probing Planck-scale physics with quantum optics*, Nature Phys. **8**, 393 (2012).
- [60] S. Masood, M. Faizal, Z. Zaz, A. F. Ali, J. Raza and M. B. Shah, *The most general form of deformation of the Heisenberg algebra from the generalized uncertainty principle*, Phys. Lett. B **763**, 218 (2016)
- [61] M. Faizal, A. F. Ali and A. Nassar, *Generalized uncertainty principle as a consequence of the effective field theory*, Phys. Lett. B **765**, 238 (2017)

-
- [62] L. Modesto and I.L. Shapiro, *Super-renormalizable quantum gravity with complex ghosts*, Phys.Lett. B **755**, 279 (2016).
- [63] L. Modesto, *Super-renormalizable or finite Lee-Wick quantum gravity*, Nucl.Phys. B **909**, 584 (2016).
- [64] G. Calcagni and L. Modesto, *Nonlocality in string theory* J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 355402 (2014).
- [65] G. Calcagni and G. Nardelli, *Nonlocal gravity and the diffusion equation*, Phys. Rev. D **82**, 123518 (2010)
- [66] S. A. Major and M. D. Seifert, *Modeling space with an atom of quantum geometry*, Class. Quant. Grav. **19**, 2211 (2002).
- [67] M. Maggiore, *A generalized uncertainty principle in quantum gravity*, Phys. Lett. B **304**, 65 (1993).
- [68] M. I. Park, *The generalized uncertainty principle in (A)dS space and the modification of Hawking temperature from the minimal length*, Phys. Lett. B **659**, 698 (2008)
- [69] L. Modesto, J. W. Moffat and P. Nicolini, *Black holes in an ultraviolet complete quantum gravity*, Phys. Lett. B **695**, 397 (2011).
- [70] C. Chicone and B. Mashhoon, *Linearized gravitational waves in nonlocal general relativity*, Phys. Rev. D **87**, 064015 (2013)
- [71] S. Deser and R. P. Woodard, *Nonlocal Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **99**, 111301 (2007)
- [72] C. Deffayet and R. P. Woodard, *Reconstructing the Distortion Function for Nonlocal Cosmology*, JCAP 0908, 023 (2009)
- [73] M. Kim, M. H. Rahat, M. Sayeb, L. Tan, R. P. Woodard and B. Xu, *Determining cosmology for a nonlocal realization of MOND*, Rev. D **94**, 104009 (2016).
- [74] S. Deser and R. P. Woodard, *Observational Viability and Stability of Nonlocal Cosmology*, JCAP **11**, 036 (2013)
- [75] S. Capozziello and M. Francaviglia, *Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, Gen. Rel. Grav. **40**, 357 (2008).

- [76] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Oxford, (1958).
- [77] Ch. Bogdanos, S. Capozziello, M. De Laurentis and S. Nesseris, *Massive, massless and ghost modes of gravitational waves from higher-order gravity*, *Astropart. Phys.* **34**, 236 (2010).
- [78] F. Canfora, G. Vilasi, and P. Vitale, *Nonlinear gravitational waves and their polarization*, *Phys. Lett. B* **545**, 373 (2002).
- [79] S. Capozziello, A. Stabile and A. Troisi, *The Post-Minkowskian Limit of $f(R)$ -gravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 1251, (2010).
- [80] R. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- [81] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Princeton Univ. Press, Princeton (1996).
- [82] S. Capozziello, A. Stabile, *Gravitational waves in fourth order gravity* *Astrophys. Space Sci.* **358**, 27 (2015).
- [83] K. S. Stelle, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978).
- [84] L. Modesto and L. Rachwal, *Universally finite gravitational and gauge theories*, *Nucl. Phys. B* **900**, 147 (2015).
- [85] S. Giaccari, L. Modesto, *Classical and Quantum Nonlocal Supergravity*, e-Print:arXiv:1605.03906[hep-th] (2016).
- [86] F. Briscese, M. L. Pucheu, *Palatini formulation of non-local gravity*, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219887817500190> (2016).
- [87] I. Quandt and H. J. Schmidt, *The Newtonian limit of fourth and higher order gravity*, *Astron. Nachr.* **312**, 97 (1991).
- [88] M. De Laurentis and S. Capozziello, *Quadrupolar gravitational radiation as a test-bed for $f(R)$ -gravity*, *Astropart. Phys.* **35**, 257 (2011).
- [89] M. De Laurentis, I. De Martino, *Testing $f(R)$ -theories using the first time derivative of the orbital period of the binary pulsars*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **431**, 741 (2014).

- [90] A. Einstein, *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*, Math. Annal. **102**, 685 (1930).
- [91] A. Unzicker, T. Case, *Unied Field Theory based on Riemannian Metrics and distant Parallelism*, arXiv:physics/0503046v1
- [92] R. Weitzenböck, *Invarianten Theorie*, Nordhoff, Groningen (1923)
- [93] R. Ferraro and F. Fiorini, *Non-trivial frames for $f(T)$ theories of gravity and beyond*, Phys. Lett. B **702**, 75 (2011)
- [94] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, *$f(T)$ gravity and local Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **83**, 064035 (2011)
- [95] L. Combi, G. E. Romero, *Is Teleparallel Gravity Really Equivalent to General Relativity?*, Ann. Phys., **530**, 1700175 (2018)
- [96] T. W. B. Kibble, *Lorentz Invariance and the Gravitational Field*, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961)
- [97] R. Ferraro and F. Fiorini, *Remnant group of local Lorentz transformation in $f(T)$ theories*, Phys. Rev. D, **91**, 064019 (2015)
- [98] Y. M. Cho, *Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian*, Phys. Rev. D **14**, 2521 (1976)
- [99] G. Otalora and E. N. Saridakis, *Modified teleparallel gravity with higher-derivative torsion terms*, Phys. Rev. D **94**, 084021 (2016)
- [100] G. Kofinas and E. N. Saridakis, *Teleparallel equivalent of Gauss-Bonnet gravity and its modifications*, Phys. Rev. D **90**, 084044 (2014)
- [101] F. I. Mikhail, M. I. Wanas, A. Hindawi and E. I. Lashin, *Energy-Momentum Complex in Møller's Tetrad Theory Of Gravitation*, Int. J. Theor. Phys. **32**, 1627 (1993), <https://doi.org/10.1007/BF00672861>
- [102] S. Capozziello, M. Capriolo and M. Transirico, *The gravitational energy-momentum pseudo-tensor of higher-order theories of gravity*, Ann. Phys. **525**, 1600376 (2017)
- [103] S. W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973)

-
- [104] H. C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, Cambridge University Press, New York (2013)
- [105] V. Barone, *Relatività*, Bollati Boringhieri, Torino (2004)
- [106] S. Bahamonde, C. G. Boehmer and M. Wright, *Modified teleparallel theories of gravity*, Phys. Rev. D **92** 104042 (2015)
- [107] S. Bahamonde, S. Capozziello, *Noether symmetry approach in $f(T, B)$ teleparallel cosmology*, Eur. Phys. J. C
- [108] K. Bamba, S. Capozziello, M. De Laurentis, S. Nojiri and D. Saez-Gomez, *No further gravitational wave modes in $F(R)$ gravity*, Phys. Lett. B **727**, 194 (2013)
- [109] H. Abedi and S. Capozziello, *Gravitational waves in modified teleparallel theories of gravity*, <https://arXiv:1712.05933> [gr-qc] (2017)
- [110] V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, Vol IV Parte Prima, Editori Riuniti, Roma (1980)