Abstract

Fractional derivative of the Riemann zeta function

Emanuel Guariglia

In questo lavoro di tesi, la funzione zeta di Riemann è stata studiata attraverso un approccio non convenzionale. Le ragioni di tale scelta risiedono nelle molteplici applicazioni che tale funzione ha non sono nella matematica pura ma anche in fisica teorica ed ingegneria. L'uso del fractional calculus ha permesso il calcolo della derivata frazionaria $\zeta^{(\alpha)}$. La maggiore difficoltà è stata rappresentata della differenziazione nel piano complesso. In particolare, due generalizzazioni della derivata frazionaria (derivata di Caputo e derivata di Grünwald-Letnikov) al campo complesso sono state utilizzate in questa tesi.

Il primo capitolo include diverse nozioni preliminari sulla teoria analitica dei numeri e sul fractional calculus. Nel secondo capitolo, il calcolo di $\zeta^{(\alpha)}$ è stato effettuato e il suo semipiano di convergenza studiato. $\zeta^{(\alpha)}$ è espresso come una serie complessa e rappresenta la generalizzazione frazionaria della derivata intera di ζ. Alcune proprietà di questa derivata frazionaria sono state ottenute al fine di mostrare sia il suo decadimento caotico a zero che i diversi collegamenti con la teoria analitica dei numeri.

Il terzo capitolo è dedicato all'equazione funzionale insieme con alcune sue versioni semplificate, in accordo con la teoria classica della funzione zeta di Riemann. Siccome la derivata di Caputo-Ortigueira non soddisfa la regola generalizzata di Leibniz, la generalizzazione della derivata di Grünwald-Letnikov al piano complesso è stata introdotta. L'equazione funzionale cercata è così dedotta semplicemente dalla forma asimmetrica dell'equazione funzionale della ζ. Ulteriori proprietà di questa equazione sono fornite e discusse in questo capitolo. Alcune generalizzazioni di questa derivata frazionaria sono state ottenute introducendo la funzione zeta di Hurwitz, la serie di Dirichlet e la funzione zeta di Lerch. In questo modo, l'equazione funzionale di $\zeta^{(\alpha)}$ è generalizzata ai tre casi sopra esposti. In particolare, l'equazione funzionale della zeta di Lerch ha fornito sorprendenti risultati e nuovi orizzonti di ricerca

sembrano aprirsi nelle applicazioni del fractional calculus in analisi funzionale. Inoltre, una rappresentazione integrale di $\zeta^{(\alpha)}$ in termini di numeri di Bernoulli è presentata. Tutti I risultati sopra descritti sono in accordo con la teoria classica della funzione zeta di Riemann.

Nel quarto capitolo, il legame tra $\zeta^{(\alpha)}$ e la distribuzione dei numeri primi è discussa introducendo i prodotti euleriani. La derivata frazionaria logaritmica della ζ di Riemann fornisce un risultato parziale in questa direzione. L'introduzione della funzione eta di Dirichlet ed il calcolo della sua derivata frazionaria hanno fornito una migliore comprensione di $\zeta^{(\alpha)}$ nella striscia critica $0<\mathrm{Re}(s)<1$. Essendo il semipiano di convergenza di $\eta^{(\alpha)}$ dato da $\mathrm{Re}\ s > \alpha$, $\zeta^{(\alpha)}$ e $\eta^{(\alpha)}$ suggeriscono chiaramente di interpretare la striscia $\alpha < \mathrm{Re}\ s < 1+\alpha$ come la controparte frazionaria della striscia critica. Questo risultato mostra un chiaro legame tra $\zeta^{(\alpha)}$ e la distribuzione dei numeri primi.

Il quinto capitolo mostra il comportamento di due reti basate su $\eta^{(\alpha)}$. Le proprietà spettrali sia di $\zeta^{(\alpha)}$ che di $\eta^{(\alpha)}$ sono derivate e la loro simmetria è mostrata.

La derivata frazionaria della ζ di Riemann sembra avere molte promettenti applicazioni sia nelle matematiche pure che applicate. Alcune funzioni complesse possono essere studiate in un opportuno spazio funzionale al fine di risolvere un dato problema, come nel caso degli spazi di Hilbert per le funzioni intere. E' ben noto in letteratura come de Branges ha connesso l'ipotesi di Riemann con una condizione di positività su questi particolari spazi di funzioni. Tenendo conto di tutto ciò e del crescente interesse dei ricercatori verso il fractional calculus negli ultimi anni, $\zeta^{(\alpha)}$ potrebbe avere diverse applicazioni negli spazi di Hilbert frazionari.