

Università degli Studi di Salerno  
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E STATISTICHE

Alessandra Amendola - Marcella Niglio –  
Cosimo Damiano Vitale

**A Note on the Invertibility  
of the Threshold Moving Average Model**

WORKING PAPER 3.210



# A Note on the Invertibility of the Threshold Moving Average Model

Alessandra Amendola\*    Marcella Niglio†    Cosimo Damiano Vitale‡

WP 3.210

## Abstract

The Threshold Moving Average model with  $k$  regimes of order  $q$  is examined. In particular we provide sufficient conditions for its invertibility by generalizing some results reported in the literature. In the first part of the paper these conditions are presented assuming that the innovations of the model do not differ among regimes whereas, in the second part, they are extended to a more general case, to our knowledge never treated before, where the innovations change among regimes.

**Keywords:** Invertibility, nonlinear time series, threshold models.

## 1 Introduction

The study of stochastic processes is often focused on the investigation of the probability properties (such as stationarity, ergodicity and invertibility) that give important requirements under which to make statistical inference and generate predictions. In this domain the most relevant results have been reached in the context of linear models (see [1] among the others) whereas a small number of contributions has been provided for nonlinear structures.

Based on these considerations, in this paper we present the invertibility of nonlinear moving average models. In particular we focus on the so called Threshold Moving Average (TMA) models that belong to the class of threshold nonlinear structures widely presented in [8].

The TMA model has been extensively investigated in [2] whereas [6] propose a quasi-LR test for linear moving average (MA) against TMA models (recently generalized in [5] to

---

\*Di.S.E.S., University of Salerno, e-mail: [alamendola@unisa.it](mailto:alamendola@unisa.it)

†Di.S.E.S., University of Salerno, e-mail: [mniglio@unisa.it](mailto:mniglio@unisa.it)

‡Di.S.E.S., University of Salerno, e-mail: [vitale@unina.it](mailto:vitale@unina.it)

the TMA-GARCH models) and give some contribution on the TMA invertibility. This last topic has been empirically treated in [3] and, more recently, it has been examined in [7]. They establish necessary and sufficient conditions for the invertibility of TMA models with moving average order  $q = 1$  and  $k = 2$  regimes, even depicting some developments for the more general TMA model with  $k > 2$ .

In the present paper the invertibility of these models is further discussed. In particular we provide sufficient conditions under which a general TMA model of order  $q > 1$  with  $k > 2$  regimes, is invertible.

More specifically, in Section 2 we present the invertibility conditions of a TMA( $k; q$ ) model and, starting from them, the TMA(2;1) model is treated in detail as illustrative example. In Section 3 a graphical representation of the invertibility region, over the parametric space, is presented showing that the invertibility of the TMA model cannot be limited to that of each regime. Further developments to more general TMA models, with innovations that differ in their distributions among regimes, are given in Section 4 where some concluding remarks are reported at the end.

## 2 Invertibility of TMA( $k; q$ ) models

Given a strictly stationary process  $X_t$ , it follows a TMA(2;1) model if

$$X_t = \epsilon_t - [\phi + \psi I(X_{t-d} \leq r)]\epsilon_{t-1}, \quad (1)$$

where  $\{\epsilon_t\}$  is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables,  $|r| \leq \infty$  is the threshold variable,  $d \in \mathcal{N}^+$  is the threshold delay and  $I(X_{t-d} \leq r)$  is the indicator function:

$$I(X_{t-d} \leq r) \equiv I_{t-d} = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{t-d} \leq r \\ 0 & \text{if } X_{t-d} > r. \end{cases} \quad (2)$$

The statistical properties of model (1) have been investigated in [7]. They give the conditions under which the model admits a unique strictly stationary and ergodic solution and further show, under proper assumptions on  $\psi$  and on the distribution of  $\{\epsilon_t\}$ , a sufficient condition for its invertibility. In particular they state that given a strictly stationary and ergodic process  $X_t \sim TMA(2; 1)$  with  $E[|\ln |X_t||] < \infty$ , model (1) is invertible if:

$$|\phi|^{1-F_X(r)} |\phi + \psi|^{F_X(r)} < 1, \quad (3)$$

where  $0 \leq F_X(r) = P(X_t \leq r) = E[I_{t-d}] = p \leq 1$ .<sup>1</sup>

Starting from these results, it is interesting to remark:

---

<sup>1</sup> $F_X(r)$  defines the probability that  $X_t$  belongs to the first regime or, in other words  $E[I_{t-d}]$ ; conversely  $1 - F_X(r)$  is the probability that  $X_t$  belongs to the second regime, or  $1 - E[I_{t-d}]$ .

**Remark 1.** When  $E[I_{t-d}] = 1$  (or  $E[I_{t-d}] = 0$ ) model (1) degenerates to a linear moving average process (widely discussed in [1]) and the inequality (3) matches the invertibility conditions given for this class of models;

**Remark 2.** The invertibility region (over the parametric space) (3) is wider than that obtained overlapping the invertibility regions of the two regimes (that, in any case, is included in (3)).

The conditions and the results established on the invertibility of the TMA(2;1) model in Theorem 2 of [7] represent the starting point of the issues given in the following pages where more general results for a TMA( $k$ ;  $q$ ) model are provided.

To simplify the presentation of the theoretical results without constrain their generality, we show all results for a TMA( $k$ ;  $q$ ) model, with  $k = 2$  and  $q \geq 1$ .

Let  $X_t \sim TMA(2; q)$ :

$$X_t = \epsilon_t - \sum_{i=1}^q [\phi_i + \psi_i I(X_{t-d} \leq r)] \epsilon_{t-i}, \quad (4)$$

model (4) can be given as

$$\begin{aligned} X_t &= \epsilon_t - \sum_{i=1}^q (\phi_i + \psi_i) I_{t-d} \epsilon_{t-i} - \sum_{i=1}^q \phi_i (1 - I_{t-d}) \epsilon_{t-i} \\ &= [1 - I_{t-d} \Theta(B) - (1 - I_{t-d}) \Phi(B)] \epsilon_t \end{aligned} \quad (5)$$

where  $B$  is the lag operator such that  $B^s X_t = X_{t-s}$ ,  $\Phi(B) = \sum_{i=1}^q \phi_i B^i$ ,  $\Theta(B) = \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$

and  $\theta_i = \phi_i + \psi_i$ , for  $i = 1, 2, \dots, q$ .

The model (4), can be also presented in the following notation. Let:

$$\epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix}$$

four ( $q \times 1$ ) vectors and

$$\mathbf{A}_{t-d} = I_{t-d} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}' \\ \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \end{bmatrix} + (1 - I_{t-d}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}' \\ \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \end{bmatrix} = I_{t-d} \boldsymbol{\Theta} + (1 - I_{t-d}) \boldsymbol{\Phi},$$

where  $\mathbf{0}$  is a  $[(q-1) \times 1]$  null vector and  $\mathbf{I}$  is a  $(q-1)$  identity matrix, the Markovian representation of model (5) is:

$$\epsilon_t = \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_{t-d} \epsilon_{t-1}. \quad (6)$$

After  $n$  iterations, model (6) becomes:

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{X}_t + \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \mathbf{X}_{t-j} + \left( \prod_{i=0}^n \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \boldsymbol{\epsilon}_{t-n-1},$$

where  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ , if pre-multiplied by the vector  $\mathbf{1}' = (1, 0, \dots, 0)$  such that  $\epsilon_t = \mathbf{1}'\boldsymbol{\epsilon}_t$ , becomes:

$$\epsilon_t = X_t + \mathbf{1}' \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \mathbf{X}_{t-j} + \mathbf{1}' \left( \prod_{i=0}^n \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \boldsymbol{\epsilon}_{t-n-1}. \quad (7)$$

Model (7) is used to discuss the invertibility of the TMA(2; $q$ ) model as follows.

**Theorem 1.** *Let  $X_t \sim TMA(2; q)$  a strictly stationary and ergodic process with  $E[|\ln |X_t||] < \infty$ ,  $X_t$  is invertible if:*

$$|\lambda(\boldsymbol{\Theta})|^p |\lambda(\boldsymbol{\Phi})|^{1-p} < 1, \quad (8)$$

where  $\lambda(\boldsymbol{\Theta})$  [or  $\lambda(\boldsymbol{\Phi})$ ] is the dominant eigenvalue of  $\boldsymbol{\Theta}$  [or  $\boldsymbol{\Phi}$ ] and  $p = E[I_{t-d}]$ .

*Proof.* Starting from model (7), then

$$\epsilon_t - X_t - \mathbf{1}' \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \mathbf{X}_{t-j} = \mathbf{1}' \left( \prod_{i=0}^n \mathbf{A}_{t-d-i} \right) \boldsymbol{\epsilon}_{t-n-1}$$

and  $X_t$  is invertible if

$$\prod_{i=0}^n |\mathbf{A}_{t-d-i}| \xrightarrow{p} \mathbf{0}, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Using standard results of matrix algebra (see among the others [4]) and the notation in Appendix, it follows that:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n |\mathbf{A}_{t-d-i}| &= \prod_{i=0}^n |I_{t-d-i}\boldsymbol{\Theta} + (1 - I_{t-d-i})\boldsymbol{\Phi}| \\ &< \prod_{i=0}^n |I_{t-d-i}\lambda(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{I} + (1 - I_{t-d-i})\lambda(\boldsymbol{\Phi})\mathbf{I}| \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=0}^n \ln |I_{t-d-i}\lambda(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{I} + (1 - I_{t-d-i})\lambda(\boldsymbol{\Phi})\mathbf{I}| \right\}. \end{aligned}$$

Recalling that  $I_{t-d-i}$  is the indicator function defined in (2), we have:

$$\prod_{i=0}^n |\mathbf{A}_{t-d-i}| < \exp \left\{ \ln |\lambda(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{I}| \sum_{i=0}^n I_{t-d-i} + \ln |\lambda(\boldsymbol{\Phi})\mathbf{I}| \sum_{i=0}^n (1 - I_{t-d-i}) \right\}.$$

Noting that  $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n I_{t-d-i} = p + O_p(n^{-1/2})$ , then:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n |\mathbf{A}_{t-d-i}| &< \exp \left\{ \ln |\lambda(\Theta)\mathbf{I}| (n+1)(p + O_p(n^{-1/2})) \right. \\ &\quad \left. + \ln |\lambda(\Phi)\mathbf{I}| (n+1)(1-p + O_p(n^{-1/2})) \right\} \\ &= |\lambda(\Theta)\mathbf{I}|^{(n+1)(p+O_p(n^{-1/2}))} |\lambda(\Phi)\mathbf{I}|^{(n+1)(1-p+O_p(n^{-1/2}))} \\ &= (|\lambda(\Theta)|^p |\lambda(\Phi)|^{1-p})^{(n+1)} |\lambda(\Theta)\lambda(\Phi)|^{(n+1)O_p(n^{-1/2})} \mathbf{I}, \end{aligned}$$

where, observing that  $(|\lambda(\Theta)|^p |\lambda(\Phi)|^{1-p})^{(n+1)}$  is of order  $O(n)$ , the convergence (9) is obtained if:

$$|\lambda(\Theta)|^p |\lambda(\Phi)|^{1-p} < 1.$$

□

Under the conditions of Theorem 1, model (7) can be given as:

$$\epsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}' \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (\Theta I_{t-d-i} + \Phi(1 - I_{t-d-i})) \right] \mathbf{X}_{t-j}. \quad (10)$$

**Remark 3.** When  $\Theta = \Phi$  (or  $p = 0, 1$ ) in model (6), the inequality (8) corresponds to the invertibility condition of a linear MA( $q$ ) model whereas if  $q = 1$  then  $\lambda(\Theta) = \theta$ ,  $\lambda(\Phi) = \phi$  and the condition (8) matches (3).

The inequality (8) and model (10) can be generalized to the case of a TMA( $k; q$ ) model,

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{s=1}^k (\psi_{s,1}\epsilon_{t-1} + \psi_{s,2}\epsilon_{t-2} + \dots + \psi_{s,q}\epsilon_{t-q}) I_{s,t-d}, \quad (11)$$

where  $\psi_{s,i}$  is the parameter  $i$  of regime  $s$  (for  $s = 1, 2, \dots, k$  and  $i = 1, 2, \dots, q$ ),  $I_{s,t-d}$  is the indicator function that now becomes:

$$I_{s,t-d} = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{s-1} \leq X_{t-d} < r_s \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

with  $\sum_{s=1}^k I_{s,t-d} = 1$  and threshold values  $-\infty = r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k = \infty$ . Model (11) has markovian form (6) with

$$\mathbf{A}_{t-d} = \sum_{s=1}^k I_{s,t-d} \Psi_s, \quad \text{where } \Psi_s = \begin{bmatrix} \psi' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{and } \psi' = (\psi_{s,1}, \dots, \psi_{s,q}),$$

from which the invertibility conditions are provided in the following corollary.

**Corollary 1.** Let  $X_t \sim TMA(k; q)$ , under the assumptions of Theorem 1,  $X_t$  is invertible if:

$$\prod_{s=1}^k |\lambda(\Psi_s)|^{p_s} < 1, \quad \text{with } p_s = E[I_{s,t-d}],$$

and  $\epsilon_t$  can be given as:

$$\epsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}' \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (\Psi_1 I_{1,t-d-i} + \Psi_2 I_{2,t-d-i} + \dots + \Psi_k I_{k,t-d-i}) \right] \mathbf{X}_{t-j}. \quad (12)$$

*Proof.* The proof follows the same steps illustrated in Theorem 1.  $\square$

The above results can now be used to illustrate in detail the invertibility conditions of TMA models of order  $(k; 1)$ . In this case the moving average order  $q = 1$  allows to simplify the presentation of what stated in Theorem 1 and Corollary 1 as shown in the following.

**Corollary 2.** Let  $X_t$  a stochastic process that follows the TMA(2;1) model (1), under the assumptions of Theorem 1, then the process is invertible if the inequality (3) holds.

*Proof.* The proof is strictly related to what has been illustrated for Theorem 1. Starting from  $A_{t-d} = (\phi + \psi I_{t-d})$  then, after  $n$  iterations, the TMA(2;1) model becomes

$$\epsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-d-i} \right) X_{t-j} + \left( \prod_{i=0}^n A_{t-d-i} \right) \epsilon_{t-n-1},$$

or equivalently

$$\epsilon_t - X_t - \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-d-i} \right) X_{t-j} = \left( \prod_{i=0}^n A_{t-d-i} \right) \epsilon_{t-n-1}. \quad (13)$$

The invertibility of the model under analysis can be shown giving the conditions under which:

$$\prod_{i=0}^n |A_{t-d-i}| \xrightarrow{p} 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$



In particular, given:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^n |A_{t-d-i}| &= \prod_{i=0}^n |\phi + \psi I_{t-d-i}| \\
&= \exp \left\{ \sum_{i=0}^n \ln |\phi + \psi I_{t-d-i}| \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{i=0}^n (\ln |\phi + \psi| I_{t-d-i} + \ln |\phi| (1 - I_{t-d-i})) \right\} \\
&= \exp \left\{ \ln |\phi + \psi| \sum_{i=0}^n I_{t-d-i} + \ln |\phi| \sum_{i=0}^n (1 - I_{t-d-i}) \right\}
\end{aligned}$$

then, following the steps presented in the proof of Theorem 1, the inequality (3) is obtained.  $\square$

The main consequence of Corollary 2 is that model (13) can be given as:

$$\epsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (\phi + \psi) I_{t-d-i} + \phi(1 - I_{t-d-i}) \right] X_{t-j}, \quad \text{with } k > 2, \quad (14)$$

and its invertibility conditions can be generalized to the TMA( $k$ ; 1) model

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{s=1}^k \psi_s I_{s,t-d} \epsilon_{t-1}. \quad (15)$$

**Corollary 3.** *Let  $X_t \sim TMA(k; 1)$ , under the assumptions of Theorem 1, then  $X_t$  is invertible if:*

$$\prod_{s=1}^k |\psi_s|^{p_s} < 1, \quad \text{with } p_s = E[I_{s,t-d}], \quad (16)$$

and model (15) can be given as:

$$\epsilon_t = X_t - \sum_{j=1}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^{j-1} \psi' \mathbf{I}_{t-d-i} \right) X_{t-j},$$

where  $\psi' = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$  and  $\mathbf{I}'_{t-d} = (I_{1,t-d}, I_{2,t-d}, \dots, I_{k,t-d})$ .

*Proof.* The proof follows steps similar to those depicted in Corollary 2.  $\square$

### 3 Invertibility regions

As already remarked, the invertibility conditions given in Theorem 1 and in the subsequent Corollaries, generalize what stated in [7].

The condition (16) in Corollary 3 can be further discussed observing that it can be seen as the geometric mean of the discrete random variable

$$V_t(\boldsymbol{\psi}) = |\psi_s| I_{s,t-d}, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

having expected value  $E[V_t(\boldsymbol{\psi})] = \sum_{s=1}^k |\psi_s| p_s$ .

Note that if

$$\sum_{s=1}^k |\psi_s| p_s < 1 \tag{17}$$

then the condition (16) is fulfilled.

The main consequence of this result is that the invertibility of the TMA(2;  $q$ ) model is assured even when the inequality (17) is true, but it can be easily observed that this last inequality defines an invertibility region, over the parametric space, narrower than that obtained from (16).

To better illustrate this point, in figure 1 the two invertibility regions are compared for a TMA(2;1) model with three different values of  $p = 0.3, 0.5, 0.7$ . The regions on the left, resulting from (16), includes those on the right, defined from (17). Besides, both regions include the space with  $|\psi_s| < 1$ ,  $s = 1, 2$ , obtained when the two regimes are locally invertible. It highlights that the region over which the TMA model is globally invertible cannot be limited to the space where each regime is locally invertible.

What has been pointed out for the TMA(2;1) model, can be generalized to the TMA( $k$ ;1) case, with  $k > 2$ . In fact, given the probability vector  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ , then  $(1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{R}^k$  is the point where the plane defined in  $\mathcal{R}^k$  by (17) is tangent to the hyperbola (defined in  $\mathcal{R}^k$ ) obtained from (16).

The results in figure 1 can be further discussed comparing the depicted regions, based on the inequality (16), with those presented in [3], where a sufficient condition for the invertibility of a TMA(2;1) model, is given as

$$|\psi_1| |\psi_2| < 1, \tag{18}$$

that, in practice, disregards the expectation  $E[I_{t-d}] = p$ .

In figure 2 the two regions obtained from (18) and (16), with  $k = 2$ , are examined. As expected when  $p = 0.5$  the regions are completely overlapped whereas their behavior changes in the other two cases giving emphasis on the expectation  $p$  in defining sufficient conditions for the invertibility of the class of models under analysis.

## 4 Further developments and concluding remarks

All results presented in the previous sections are based on the assumption that the innovations,  $\epsilon_t$ , cannot differ among regimes.

Here we discuss some consequences that occur when  $\epsilon_t$  changes among regimes. In this case we denote with  $\epsilon_{s,t}$  the innovation in regime  $s$ , with  $s = 1, 2, \dots, k$ , so that the TMA( $k; 1$ ) model becomes:

$$X_t = \sum_{s=1}^k (\epsilon_{s,t} + \psi_s \epsilon_{s,t-1}) I_{s,t-d}, \quad (19)$$

with i.i.d. innovations  $\epsilon_{s,t}$  having the first two moments finite. Noting that model (19) can be given as

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t \mathbf{I}'_{t-d} = X_t - \boldsymbol{\epsilon}'_{t-1} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{I}_{t-d}, \quad (20)$$

with

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = (\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}, \dots, \epsilon_{k,t}), \quad \mathbf{I}_{t-d} = (I_{1,t-d}, I_{2,t-d}, \dots, I_{k,t-d}), \quad \boldsymbol{\Psi} = \text{diag}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k),$$

we consider the case where  $\epsilon_{s,t}$  is a linear transformation of  $\epsilon_t \sim iid(0, 1)$ :

$$\epsilon_{s,t} = a_s + b_s \epsilon_t, \quad \text{with } a_s \in \mathcal{R} \quad \text{and } b_s \in \mathcal{R} - \{0\}, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (21)$$

such that model (20) becomes:

$$\epsilon_t = \frac{X_t - \mathbf{a}'(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{I}_{t-d}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d}} - \frac{\mathbf{b}'\boldsymbol{\Psi}\mathbf{I}_{t-d}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d}} \epsilon_{t-1},$$

with  $\mathbf{a}' = (0, a_2, a_3, \dots, a_k)$  and  $\mathbf{b}' = (1, b_2, b_3, \dots, b_k)$ .

It can be shown that the geometric mean of  $\left| \frac{\mathbf{b}'\boldsymbol{\Psi}\mathbf{I}_{t-d}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d}} \right|$  is  $\prod_{s=1}^k |\psi_s|^{p_s}$  from which this corollary follows:

**Corollary 4.** *Let  $X_t$  be a TMA( $k; 1$ ) model defined in (19) and with innovations (21), then the model is invertible if the inequality (17) holds.*

*Proof.* The proof is based on the use of the Jensen inequality. □

The main consequence of Corollary 4 is that the TMA( $k; 1$ ) model can be formulated as:

$$\epsilon_t = \frac{X_t - \mathbf{a}'(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{I}_{t-d}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^{j-1} (-1)^i \frac{\mathbf{b}'\boldsymbol{\Psi}\mathbf{I}_{t-d}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d}} \right) \frac{X_{t-j} - \mathbf{a}'(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{I}_{t-d-j}}{\mathbf{b}'\mathbf{I}_{t-d-j}}.$$

It further improves the results given in the previous sections and it can be generalized to the TMA( $k; q$ ) model through a heavy (but not difficult) algebra.

To sketch this generalization, consider the TMA(2;  $q$ ) model (5), with innovations (21). This model can be given as:

$$\epsilon_t = \frac{X_t - a_1 I_{t-d}(1 + \Theta(1)) - a_2(1 - I_{t-d})(1 + \Phi(1))}{b_1 I_{t-d} + b_2(1 - I_{t-d})} - \frac{b_1 I_{t-d} \Theta(B) + b_2(1 - I_{t-d}) \Phi(B)}{b_1 I_{t-d} + b_2(1 - I_{t-d})} \epsilon_t. \quad (22)$$

To simplify the notation of model (22) consider

$$Y_t = \frac{X_t - a_1 I_{t-d}(1 + \Theta(1)) - a_2(1 - I_{t-d})(1 + \Phi(1))}{b_1 I_{t-d} + b_2(1 - I_{t-d})}$$

and

$$D_{t-d} = \frac{b_1 I_{t-d}}{b_1 I_{t-d} + b_2(1 - I_{t-d})}, \quad \text{where } D_{t-d} = \begin{cases} 0 & \text{if } I_{t-d} = 0 \\ 1 & \text{if } I_{t-d} = 1 \end{cases},$$

then model (22) becomes

$$\epsilon_t = Y_t - [D_{t-d} \Theta(B) + (1 - D_{t-d}) \Phi(B)] \epsilon_t. \quad (23)$$

When the model above is compared to model (5), it results that they have a similar structure, therefore even in this case, Theorem 1 properly applies.

**Remark 4.** The result (23) also shows that the TMA class is closed with respect to linear transformations of the process innovations. This closure can be even checked if we consider the linear transformation of  $X_t \sim \text{TMA}(2; q)$ :

$$Y_t = a_1 + b_1 X_t, \quad \text{with } a_1 \in \mathcal{R} \quad \text{and} \quad b_1 \in \mathcal{R} - \{0\},$$

or when the process becomes

$$Y_t = (a_1 + b_1 X_t) I_{t-d} + (a_2 + b_2 X_t)(1 - I_{t-d}),$$

where  $a_2 \in \mathcal{R}$  and  $b_2 \in \mathcal{R} - \{0\}$ . Finally note that in both cases the transformations do not impact the invertibility conditions given in the previous pages.

The results in Corollary 4 are completely new, to our knowledge. Further research, in this domain, can be addressed to general TMA models with innovations  $\epsilon_{s,t}$ , for  $s = 1, 2, \dots, k$ , not limited to the linear transformation (21).

Consider for example the TMA(2;  $q$ ) model (5), with  $\epsilon_t = I_{t-d} \epsilon_{1,t} + (1 - I_{t-d}) \epsilon_{2,t}$ , where  $\epsilon_{1,t}$  and  $\epsilon_{2,t}$  have different distribution. After an easy algebra, and using the properties of  $I_{t-d}$  such that:

$$I_{t-d}^w = I_{t-d}, \quad (1 - I_{t-d})^w = 1 - I_{t-d}, \quad I_{t-d}^w (1 - I_{t-d})^z = 0, \quad \text{for } w, z \in \mathcal{N}^+,$$

then model (5) becomes:

$$X_t = [\epsilon_{1,t} - \Theta(B)\epsilon_{1,t}] I_{t-d} + [\epsilon_{2,t} - \Phi(B)\epsilon_{2,t}] (1 - I_{t-d})$$

for which the invertibility conditions of Theorem 1 still hold.

These proposals of future research are strictly related to the theoretical results proved in the present paper where the invertibility of TMA( $k; q$ ) models has been discussed extending some developments given in the literature. Starting from the contribution of [7] mainly related to the TMA( $k; 1$ ) model, we have established sufficient conditions for the TMA( $k; q$ ) model. We have discussed these results through an illustrative example that allows to depict the invertibility regions on the parametric space. Further developments are left for future research.

## Appendix

In the proof on Theorem 1 the following notation is used.

Given the sequence of ( $q \times q$ ) matrices  $\mathbf{A}_n$  and let  $\lambda_i(\mathbf{A}_n)$  the  $i$ -th eigenvalue of  $\mathbf{A}_n$  (for  $i = 1, 2, \dots, q$ ), then we say that the sequence  $\mathbf{B}_n$  is dominant with respect to  $\mathbf{A}_n$  ( $\mathbf{A}_n \prec \mathbf{B}_n$ ), if the dominant eigenvalue (the maximum absolute eigenvalue) of  $\mathbf{B}_n$ , denoted  $\lambda(\mathbf{B}_n)$ , is greater or equal to the dominant eigenvalue of  $\mathbf{A}_n$ ,  $\lambda(\mathbf{A}_n)$ , for  $n = 1, 2, \dots$ .

In other words:

$$\mathbf{A}_n \prec \mathbf{B}_n, \quad \text{if } \lambda(\mathbf{A}_n) \leq \lambda(\mathbf{B}_n) \quad (24)$$

From (24) it follows that:

1. if  $\lambda(\mathbf{B}_n) \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ , then  $\mathbf{B}_n \rightarrow \mathbf{0}_{(q \times q)}$  and  $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{0}_{(q \times q)}$ , with  $\mathbf{0}$  a matrix of zeros;
2. given the sequence  $\mathbf{A}_n$ , then  $\mathbf{A}_n \prec \lambda(\mathbf{A}_n)\mathbf{I}$ , where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix of order  $q$ .

## References

- [1] G.E.P. Box and G.M. Jenkins, *Time series analysis, forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco, 1976.
- [2] J.G. De Gooijer, *On threshold moving-average models*, J. Time Ser. Anal. 19 (1998), pp. 1-18.
- [3] J.G. De Gooijer and K. Brännäs, *Invertibility of non-linear time series models*, Commun. Stat.: Theory and Methods, 24 (1995), pp. 2701-2714.

- [4] J.E. Gentle, *Matrix algebra. Theory, computations and applications in statistics*, Springer, 2007.
- [5] G. Li and W.K. Li, *Testing for threshold moving average with conditional heteroscedasticity*, *Statist. Sinica* 18 (2008), pp. 647-665.
- [6] S. Ling and H. Tong, *Testing for a linear MA model against threshold MA models*, *Ann. Statist.* 33 (2005), pp. 2529-2552.
- [7] S. Ling, H. Tong and D. Li, *Ergodicity and invertibility of threshold moving-average models*, *Bernoulli* 13 (2007), pp. 161-168.
- [8] H. Tong, *Non-linear time series. A dynamical system approach*, Clarendon Press Oxford, 1990.

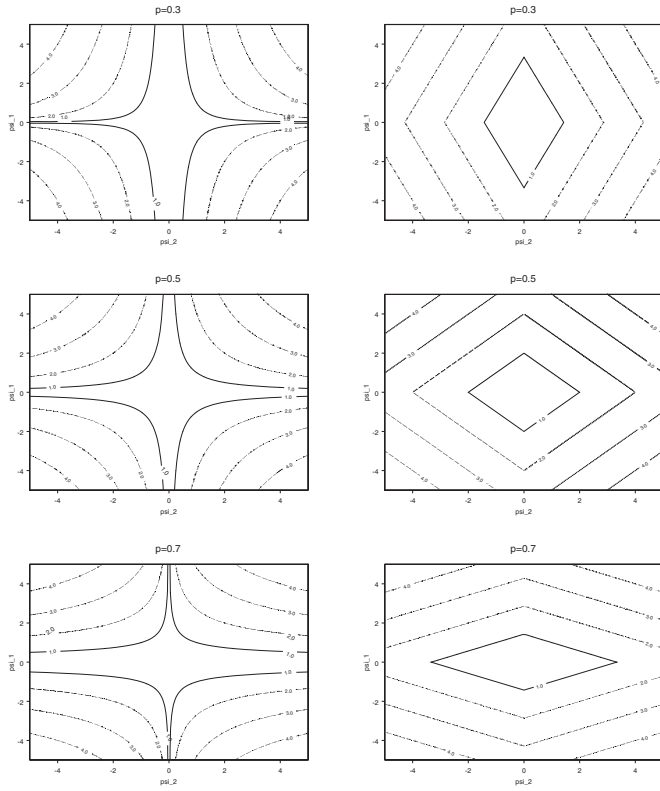


Figure 1: Invertibility region of the TMA(2;1) model. On the right the solid line delimits the regions defined by the inequality (17) and on the left the regions defined by (16)

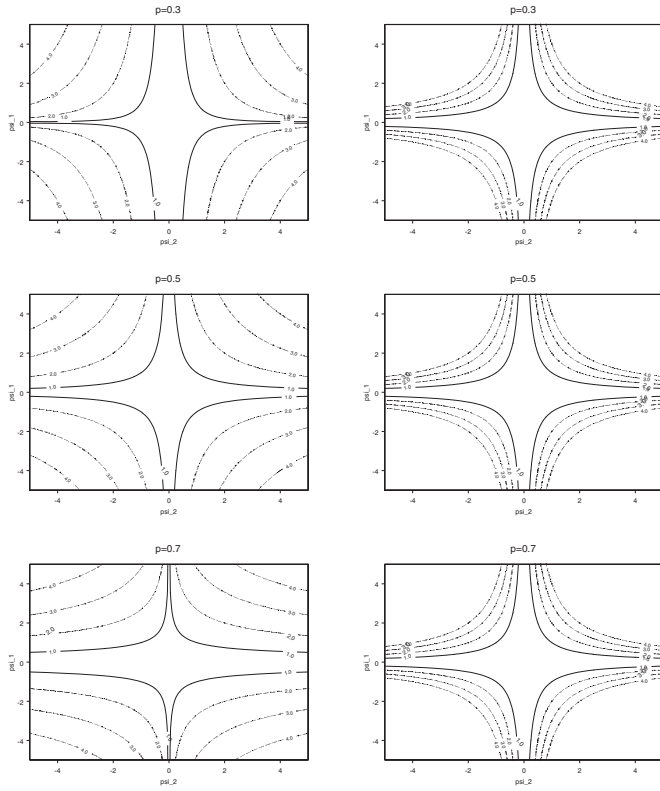


Figure 2: Invertibility region of the TMA(2;1) model. On the right the solid line delimits the regions defined by the inequality (18) and on the left the regions defined by (16).



WORKING PAPERS DEL DIPARTIMENTO

- 1988, 3.1 Guido CELLA  
*Linkages e moltiplicatori input-output.*
- 1989, 3.2 Marco MUSELLA  
*La moneta nei modelli di inflazione da conflitto.*
- 1989, 3.3 Floro E. CAROLEO  
*Le cause economiche nei differenziali regionali del tasso di disoccupazione.*
- 1989, 3.4 Luigi ACCARINO  
*Attualità delle illusioni finanziarie nella moderna società.*
- 1989, 3.5 Sergio CESARATTO  
*La misurazione delle risorse e dei risultati delle attività innovative: una valutazione dei risultati dell'indagine CNR- ISTAT sull'innovazione tecnologica.*
- 1990, 3.6 Luigi ESPOSITO - Pasquale PERSICO  
*Sviluppo tecnologico ed occupazionale: il caso Italia negli anni '80.*
- 1990, 3.7 Guido CELLA  
*Matrici di contabilità sociale ed analisi ambientale.*
- 1990, 3.8 Guido CELLA  
*Linkages e input-output: una nota su alcune recenti critiche.*
- 1990, 3.9 Concetto Paolo VINCI  
*I modelli econometrici sul mercato del lavoro in Italia.*
- 1990, 3.10 Concetto Paolo VINCI  
*Il dibattito sul tasso di partecipazione in Italia: una rivisitazione a 20 anni di distanza.*
- 1990, 3.11 Giuseppina AUTIERO  
*Limiti della coerenza interna ai modelli con la R.E.H..*
- 1990, 3.12 Gaetano Fausto ESPOSITO  
*Evoluzione nei distretti industriali e domanda di istituzione.*
- 1990, 3.13 Guido CELLA  
*Measuring spatial linkages: input-output and shadow prices.*
- 1990, 3.14 Emanuele SALSANO  
*Seminari di economia.*

- 1990, 3.15 Emanuele SALSANO  
*Investimenti, valore aggiunto e occupazione in Italia in contesto biregionale: una prima analisi dei dati 1970/1982.*
- 1990, 3.16 Alessandro PETRETTO- Giuseppe PISAURO  
*Uniformità vs selettività nella teoria della ottima tassazione e dei sistemi tributari ottimali.*
- 1990, 3.17 Adalgiso AMENDOLA  
*Inflazione, disoccupazione e aspettative. Aspetti teorici dell'introduzione di aspettative endogene nel dibattito sulla curva di Phillips.*
- 1990, 3.18 Pasquale PERSICO  
*Il Mezzogiorno e le politiche di sviluppo industriale.*
- 1990, 3.19 Pasquale PERSICO  
*Priorità delle politiche strutturali e strategie di intervento.*
- 1990, 3.20 Adriana BARONE - Concetto Paolo VINCI  
*La produttività nella curva di Phillips.*
- 1990, 3.21 Emiddio GALLO  
*Varianze ed invarianze socio-spaziali nella transizione demografica dell'Italia post-industriale.*
- 1991, 3.22 Alfonso GAMBARDELLA  
*I gruppi etnici in Nicaragua. Autonomia politica ed economica.*
- 1991, 3.23 Maria SCATTAGLIA  
*La stima empirica dell'offerta di lavoro in Italia: una rassegna.*
- 1991, 3.24 Giuseppe CELI  
*La teoria delle aree valutarie: una rassegna.*
- 1991, 3.25 Paola ADINOLFI  
*Relazioni industriali e gestione delle risorse umane nelle imprese italiane.*
- 1991, 3.26 Antonio e Bruno PELOSI  
*Sviluppo locale ed occupazione giovanile: nuovi bisogni formativi.*
- 1991, 3.27 Giuseppe MARIGLIANO  
*La formazione del prezzo nel settore dell'intermediazione commerciale.*
- 1991, 3.28 Maria PROTO  
*Risorse naturali, merci e ambiente: il caso dello zolfo.*
- 1991, 3.29 Salvatore GIORDANO  
*Ricerca sullo stato dei servizi nelle industrie del salernitano.*

- 1992, 3.30 Antonio LOPES  
*Crisi debitoria e politiche macroeconomiche nei paesi in via di sviluppo negli anni 80.*
- 1992, 3.31 Antonio VASSILLO  
*Circuiti economici semplici, complessi, ed integrati.*
- 1992, 3.32 Gaetano Fausto ESPOSITO  
*Imprese ed istituzioni nel Mezzogiorno: spunti analitici e modalità di relazione.*
- 1992, 3.33 Paolo COCCORESE  
*Un modello per l'analisi del sistema pensionistico.*
- 1994, 3.34 Aurelio IORI  
*Il comparto dei succhi di agrumi: un caso di analisi interorganizzativa.*
- 1994, 3.35 Nicola POSTIGLIONE  
*Analisi multicriterio e scelte pubbliche.*
- 1994, 3.36 Adriana BARONE  
*Cooperazione nel dilemma del prigioniero ripetuto e disoccupazione involontaria.*
- 1994, 3.37 Adriana BARONE  
*Le istituzioni come regolarità di comportamento.*
- 1994, 3.38 Maria Giuseppina LUCIA  
*Lo sfruttamento degli idrocarburi offshore tra sviluppo economico e tutela dell'ambiente.*
- 1994, 3.39 Giuseppina AUTIERO  
*Un'analisi di alcuni dei limiti strutturali alle politiche di stabilizzazione nei LCDs.*
- 1994, 3.40 Bruna BRUNO  
*Modelli di contrattazione salariale e ruolo del sindacato.*
- 1994, 3.41 Giuseppe CELI  
*Cambi reali e commercio estero: una riflessione sulle recenti interpretazioni teoriche.*
- 1995, 3.42 Alessandra AMENDOLA, M. Simona ANDREANO  
*The TAR models: an application on italian financial time series.*
- 1995, 3.43 Leopoldo VARRIALE  
*Ambiente e turismo: Parco dell'Iguazù - Argentina.*

- 1995, 3.44 A. PELOSI, R. LOMBARDI  
*Fondi pensione: equilibrio economico-finanziario delle imprese.*
- 1995, 3.45 Emanuele SALSANO, Domenico IANNONE  
*Economia e struttura produttiva nel salernitano dal secondo dopoguerra ad oggi.*
- 1995, 3.46 Michele LA ROCCA  
*Empirical likelihood and linear combinations of functions of order statistics.*
- 1995, 3.47 Michele LA ROCCA  
*L'uso del bootstrap nella verosimiglianza empirica.*
- 1996, 3.48 Domenico RANESI  
*Le politiche CEE per lo sviluppo dei sistemi locali: esame delle diverse tipologie di intervento e tentativo di specificazione tassonomica.*
- 1996, 3.49 Michele LA ROCCA  
*L'uso della verosimiglianza empirica per il confronto di due parametri di posizione.*
- 1996, 3.50 Massimo SPAGNOLO  
*La domanda dei prodotti della pesca in Italia.*
- 1996, 3.51 Cesare IMBRIANI, Filippo REGANATI  
*Macroeconomic stability and economic integration. The case of Italy.*
- 1996, 3.52 Annarita GERMANI  
*Gli effetti della mobilitazione della riserva obbligatoria. Analisi sull'efficienza del suo utilizzo.*
- 1996, 3.53 Massimo SPAGNOLO  
*A model of fish price formation in the north sea and the Mediterranean.*
- 1996, 3.54 Fernanda MAZZOTTA  
*RTFL: problemi e soluzioni per i dati Panel.*
- 1996, 3.55 Angela SPAGNUOLO  
*Concentrazione industriale e dimensione del mercato: il ruolo della spesa per pubblicità e R&D.*
- 1996, 3.56 Giuseppina AUTIERO  
*The economic case for social norms.*
- 1996, 3.57 Francesco GIORDANO  
*Sulla convergenza degli stimatori Kernel.*
- 1996, 3.58 Tullio JAPPELLI, Marco PAGANO  
*The determinants of saving: lessons from Italy.*

- 1997, 3.59 Tullio JAPPELLI  
*The age-wealth profile and the life-cycle hypothesis: a cohort analysis with a time series of cross sections of Italian households.*
- 1997, 3.60 Marco Antonio MONACO  
*La gestione dei servizi di pubblico interesse.*
- 1997, 3.61 Marcella ANZOLIN  
*L'albero della qualità dei servizi pubblici locali in Italia: metodologie e risultati conseguiti.*
- 1997, 3.62 Cesare IMBRIANI, Antonio LOPES  
*Intermediazione finanziaria e sistema produttivo in un'area dualistica. Uno studio di caso.*
- 1997, 3.63 Tullio JAPPELLI  
*Risparmio e liberalizzazione finanziaria nell'Unione europea.*
- 1997, 3.64 Alessandra AMENDOLA  
*Analisi dei dati di sopravvivenza.*
- 1997, 3.65 Francesco GIORDANO, Cira PERNA  
*Gli stimatori Kernel per la stima non parametrica della funzione di regressione.*
- 1997, 3.66 Biagio DI SALVIA  
*Le relazioni marittimo-commerciali nell'imperiale regio litorale austriaco nella prima metà dell'800.*  
*I. Una riclassificazione delle Tafeln zur Statistik der Österreichischen Monarchie.*
- 1997, 3.67 Alessandra AMENDOLA  
*Modelli non lineari di seconda e terza generazione: aspetti teorici ed evidenze empiriche.*
- 1998, 3.68 Vania SENA  
*L'analisi econometrica dell'efficienza tecnica. Un'applicazione agli ospedali italiani di zona.*
- 1998, 3.69 Domenico CERBONE  
*Investimenti irreversibili.*
- 1998, 3.70 Antonio GAROFALO  
*La riduzione dell'orario di lavoro è una soluzione al problema disoccupazione: un tentativo di analisi empirica.*
- 1998, 3.71 Jacqueline MORGAN, Roberto RAUCCI  
*New convergence results for Nash equilibria.*

- 1998, 3.72 Rosa FERRENTINO  
*Niels Henrik Abel e le equazioni algebriche.*
- 1998, 3.73 Marco MICOCCI, Rosa FERRENTINO  
*Un approccio markoviano al problema della valutazione delle opzioni.*
- 1998, 3.74 Rosa FERRENTINO, Ciro CALABRESE  
*Rango di una matrice di dimensione  $K$ .*
- 1999, 3.75 Patrizia RIGANTI  
*L'uso della valutazione contingente per la gestione del patrimonio culturale: limiti e potenzialità.*
- 1999, 3.76 Annamaria NESE  
*Il problema dell'inefficienza nel settore dei musei: tecniche di valutazione.*
- 1999, 3.77 Gianluigi COPPOLA  
*Disoccupazione e mercato del lavoro: un'analisi su dati provinciali.*
- 1999, 3.78 Alessandra AMENDOLA  
*Un modello soglia con eteroschedasticità condizionata per tassi di cambio.*
- 1999, 3.79 Rosa FERRENTINO  
*Su un'applicazione della trasformata di Laplace al calcolo della funzione asintotica di non rovina.*
- 1999, 3.80 Rosa FERRENTINO  
*Un'applicazione della trasformata di Laplace nel caso di una distribuzione di Erlang.*
- 1999, 3.81 Angela SPAGNUOLO  
*Efficienza e struttura degli incentivi nell'azienda pubblica: il caso dell'industria sanitaria.*
- 1999, 3.82 Antonio GAROFALO, Cesare IMBRIANI, Concetto Paolo VINCI  
*Youth unemployment: an insider-outsider dynamic approach.*
- 1999, 3.83 Rosa FERRENTINO  
*Un modello per la determinazione del tasso di riequilibrio in un progetto di fusione tra banche.*
- 1999, 3.84 DE STEFANIS, PORZIO  
*Assessing models in frontier analysis through dynamic graphics.*
- 1999, 3.85 Annunziato GESUALDI  
*Inflazione e analisi delle politiche fiscali nell'U.E..*
- 1999, 3.86 R. RAUCCI, L. TADDEO  
*Dalle equazioni differenziali alle funzioni  $e^x$ ,  $\log x$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $x^x$ .*

- 1999, 3.87 Rosa FERRENTINO  
*Sulla determinazione di numeri aleatori generati da equazioni algebriche.*
- 1999, 3.88 C. PALMISANI, R. RAUCCI  
*Sulle funzioni circolari: una presentazione non classica.*
- 2000, 3.89 Giuseppe STORTI, Pierluigi FURCOLO, Paolo VILLANI  
*A dynamic generalized linear model for precipitation forecasting.*
- 2000, 3.90 Rosa FERRENTINO  
*Un procedimento risolutivo per l'equazione di Dickson.*
- 2000, 3.91 Rosa FERRENTINO  
*Un'applicazione della mistura di esponenziali alla teoria del rischio.*
- 2000, 3.92 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA  
*Bootstrap variance estimates for neural networks regression models.*
- 2000, 3.93 Alessandra AMENDOLA, Giuseppe STORTI  
*A non-linear time series approach to modelling asymmetry in stock market indexes.*
- 2000, 3.94 Rosa FERRENTINO  
*Sopra un'osservazione di De Vylder.*
- 2000, 3.95 Massimo SALZANO  
*Reti neurali ed efficacia dell'intervento pubblico: previsioni dell'inquinamento da traffico nell'area di Villa S. Giovanni.*
- 2000, 3.96 Angela SPAGNUOLO  
*Concorrenza e deregolamentazione nel mercato del trasporto aereo in Italia.*
- 2000, 3.97 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO  
*Teoremi ingannevoli.*
- 2000, 3.98 Francesco GIORDANO  
*Una procedura per l'inizializzazione dei pesi delle reti neurali per l'analisi del trend.*
- 2001, 3.99 Angela D'ELIA  
*Some methodological issues on multivariate modelling of rank data.*
- 2001, 3.100 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO  
*Nuove classi di funzioni scalari quasiconcave generalizzate: caratterizzazioni ed applicazioni a problemi di ottimizzazione.*
- 2001, 3.101 Adriana BARONE, Annamaria NESE  
*Some insights into night work in Italy.*
- 2001, 3.102 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO

*Predictive distributions of nonlinear time series models.*

- 2001, 3.103 Roberto RAUCCI  
*Sul concetto di certo equivalente nella teoria HSSB.*
- 2001, 3.104 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO  
*On stackelberg games: a result of unicity.*
- 2001, 3.105 Roberto RAUCCI  
*Una definizione generale e flessibile di insieme limitato superiormente in  $\mathfrak{R}^n$*
- 2001, 3.106 Roberto RAUCCI  
*Stretta quasiconcavità nelle forme funzionali flessibili.*
- 2001, 3.107 Roberto RAUCCI  
*Sugli insiemi limitati in  $\mathfrak{R}^m$  rispetto ai coni.*
- 2001, 3.108 Roberto RAUCCI  
*Monotonie, isotonie e indecomponibilità deboli per funzioni a valori vettoriali con applicazioni.*
- 2001, 3.109 Roberto RAUCCI  
*Generalizzazioni del concetto di debole Kuhn-Tucker punto-sella.*
- 2001, 3.110 Antonia Rosa GURRIERI, Marilene LORIZIO  
*Le determinanti dell'efficienza nel settore sanitario. Uno studio applicato.*
- 2001, 3.111 Gianluigi COPPOLA  
*Studio di una provincia meridionale attraverso un'analisi dei sistemi locali del lavoro. Il caso di Salerno.*
- 2001, 3.112 Francesco GIORDANO  
*Reti neurali per l'analisi del trend: un approccio per identificare la topologia della rete.*
- 2001, 3.113 Marcella NIGLIO  
*Nonlinear time series models with switching structure: a comparison of their forecast performances.*
- 2001, 3.114 Damiano FIORILLO  
*Capitale sociale e crescita economica. Review dei concetti e dell'evidenza empirica.*
- 2001, 3.115 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO  
*Generalizzazione del concetto di continuità e di derivabilità.*
- 2001, 3.116 Marcella NIGLIO  
*Ricostruzione dei dati mancanti in serie storiche climatiche.*



- 2001, 3.117 Vincenzo VECCHIONE  
*Mutamenti del sistema creditizio in un'area periferica.*
- 2002, 3.118 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA  
*Bootstrap variable selection in neural network regression models.*
- 2002, 3.119 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO  
*Insiemi debolmente convessi e concavità in senso generale.*
- 2002, 3.120 Vincenzo VECCHIONE  
*Know how locali e percorsi di sviluppo in aree e settori marginali.*
- 2002, 3.121 Michele LA ROCCA, Cira PERNA  
*Neural networks with dependent data.*
- 2002, 3.122 Pietro SENESI  
*Economic dynamics: theory and policy. A stability analysis approach.*
- 2002, 3.123 Gianluigi COPPOLA  
*Stima di un indicatore di pressione ambientale: un'applicazione ai comuni della Campania.*
- 2002, 3.124 Roberto RAUCCI  
*Sull'esistenza di autovalori e autovettori positivi anche nel caso non lineare.*
- 2002, 3.125 Maria Carmela MICCOLI  
*Identikit di giovani lucani.*
- 2002, 3.126 Sergio DESTEFANIS, Giuseppe STORTI  
*Convexity, productivity change and the economic performance of countries.*
- 2002, 3.127 Giovanni C. PORZIO, Maria Prosperina VITALE  
*Esplorare la non linearità nei modelli Path.*
- 2002, 3.128 Rosa FERRENTINO  
*Sulla funzione di Seal.*
- 2003, 3.129 Michele LA ROCCA, Cira PERNA  
*Identificazione del livello intermedio nelle reti neurali di tipo feedforward.*
- 2003, 3.130 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO, Cosimo VITALE  
*The exact multi-step ahead predictor of SETARMA models.*
- 2003, 3.131 Mariangela BONASIA  
*La dimensione ottimale di un sistema pensionistico: means tested vs programma universale.*
- 2003, 3.132 Annamaria NESE  
*Abitazione e famiglie a basso reddito.*

- 2003, 3.133 Maria Lucia PARRELLA  
*Le proprietà asintotiche del Local Polynomial Bootstrap.*
- 2003, 3.134 Silvio GIOVE, Maurizio NORDIO, Stefano SILVONI  
*Stima della prevalenza dell'insufficienza renale cronica con reti bayesiane: analisi costo efficacia delle strategie di prevenzione secondaria.*
- 2003, 3.135 Massimo SALZANO  
*Globalization, complexity and the holism of the italian school of public finance.*
- 2003, 3.136 Giuseppina AUTIERO  
*Labour market institutional systems and unemployment performance in some Oecd countries.*
- 2003, 3.137 Marisa FAGGINI  
*Recurrence analysis for detecting non-stationarity and chaos in economic times series.*
- 2003, 3.138 Marisa FAGGINI, Massimo SALZANO  
*The reverse engineering of economic systems. Tools and methodology.*
- 2003, 3.139 Rosa FERRENTINO  
*In corso di pubblicazione.*
- 2003, 3.140 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI  
*Sui problemi di ottimizzazione in giochi di Stackelberg ed applicazioni in modelli economici.*
- 2003, 3.141 Carmine SICA  
*In corso di pubblicazione.*
- 2004, 3.142 Sergio DESTEFANIS, Antonella TADDEO, Maurizio TORNATORE  
*The stock of human capital in the Italian regions.*
- 2004, 3.143 Elena Laureana DEL MERCATO  
*Edgeworth equilibria with private provision of public good.*
- 2004, 3.144 Elena Laureana DEL MERCATO  
*Externalities on consumption sets in general equilibrium.*
- 2004, 3.145 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI  
*Su alcuni criteri delle serie a termini non negativi.*
- 2004, 3.146 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI  
*Legame tra le soluzioni di Minty e di Stempacenhia nelle disequazioni variazionali.*

- 2004, 3.147 Gianluigi COPPOLA  
*In corso di pubblicazione.*
- 2004, 3.148 Massimo Spagnolo  
*The Importance of Economic Incentives in Fisheries Management*
- 2004, 3.149 F. Salsano  
*La politica monetaria in presenza di non perfetta osservabilità degli obiettivi del banchiere centrale.*
- 2004, 3.150 A. Vita  
*La dinamica del cambiamento nella rappresentazione del territorio. Una mappa per i luoghi della Valle dell'Irno.*
- 2004, 3.151 Celi  
*Empirical Explanation of vertical and horizontal intra-industry trade in the UK: a comment.*
- 2004, 3.152 Amendola – P. Vitale  
*Self-Assessment and Career Choices: An On-line resource for the University of Salerno.*
- 2004, 3.153 A. Amendola – R. Troisi  
*Introduzione all'economia politica dell'organizzazione: nozioni ed applicazioni.*
- 2004, 3.154 A. Amendola – R. Troisi  
*Strumenti d'incentivo e modelli di gestione del personale volontario nelle organizzazioni non profit.*
- 2004, 3.155 Lavinia Parisi  
*La gestione del personale nelle imprese manifatturiere della provincia di Salerno.*
- 2004, 3.156 Angela Spagnuolo – Silvia Keller  
*La rete di accesso all'ultimo miglio: una valutazione sulle tecnologie alternative.*
- 2005, 3.157 Davide Cantarelli  
*Elasticities of Complementarity and Substitution in Some Functional Forms. A Comparative Review.*
- 2005, 3.158 Pietro Coretto – Giuseppe Storti  
*Subjective Expectations in Economics: a Statistical overview of the main findings.*
- 2005, 3.159 Pietro Coretto – Giuseppe Storti  
*Moments based inference in small samples.*

- 2005, 3.160 Massimo Salzano  
*Una simulazione neo-keynesiana ad agenti eterogeni.*
- 2005, 3.161 Rosa Ferrentino  
*Su alcuni paradossi della teoria degli insiemi.*
- 2005, 3.162 Damiano Fiorillo  
*Capitale sociale: uno o molti? Pochi.*
- 2005, 3.163 Damiano Fiorillo  
*Il capitale sociale conta per outcomes (macro) economici?.*
- 2005, 3.164 Damiano Fiorillo – Guadalupi Luigi  
*Attività economiche nel distretto industriale di Nocera inferiore – Gragnano.  
Un'analisi su Dati Tagliacarne.*
- 2005, 3.165 Rosa Ferrentino  
*Pointwise well-posedness in vector optimization and variational inequalities.*
- 2005, 3.166 Roberto Iorio  
*La ricerca universitaria verso il mercato per il trasferimento tecnologico e rischi per l'Open Science": posizioni teoriche e filoni di indagine empirica.*
- 2005, 3.167 Marisa Faggini  
*The chaotic system and new perspectives for economics methodology. A note.*
- 2005, 3.168 Francesco Giordano  
*Weak consistent moving block bootstrap estimator of sampling distribution of CLS estimators in a class of bilinear models*
- 2005, 3.169 Edgardo Sica  
*Tourism as determinant of economic growth: the case of south-east asian countries.*
- 2005, 3.170 Rosa Ferrentino  
*On Minty variational inequalities and increasing along rays functions.*
- 2005, 3.171 Rosa Ferrentino  
*On the Minty and Stampacchia scalar variational inequalities*
- 2005, 3.172 Destefanis - Storti  
*A procedure for detecting outliers in frontier estimation*
- 2005, 3.173 Destefanis - Storti  
*Evaluating business incentives through DEA. An analysis on capitalia firm data*

- 2005, 3.174 Nese – O'Higgins  
*In and out of the capitalia sample: evaluating attrition bias.*
- 2005, 3.175 Maria Patrizia Vittoria  
*Il Processo di terziarizzazione in Campania. Analisi degli indicatori principali nel periodo 1981-2001*
- 2005, 3.176 Sergio Destefanis – Giuseppe Mastromatteo  
*Inequality and labour-market performance. A survey beyond an elusive trade-off.*
- 2007, 3.177 Giuseppe Storti  
*Modelling asymmetric volatility dynamics by multivariate BL-GARCH models*
- 2007, 3.178 Lucio Valerio Spagnolo – Mario Cerrato  
*No euro please, We're British!*
- 2007, 3.179 Maria Carmela Miccoli  
*Invecchiamento e seconda transizione demografica*
- 2007, 3.180 Maria Carmela Miccoli – Antonio Cortese  
*Le scuole italiane all'estero: una realtà poco nota*
- 2007, 3.181 Rosa Ferrentino  
*Variational inequalities and optimization problems*
- 2007, 3.182 Lavinia Parisi  
*Estimating capability as a latent variable: A Multiple Indicators and Multiple Causes Approach. The example of health*
- 2007, 3.183 Rosa Ferrentino  
*Well-posedness, a short survey*
- 2007, 3.184 Roberto Iorio – Sandrine Labory – Daniele Paci  
*Relazioni tra imprese e università nel biotech-salute dell'Emilia Romagna. Una valutazione sulla base della co-authorship delle pubblicazioni scientifiche*
- 2007, 3.185 Lavinia Parisi  
*Youth Poverty after leaving parental home: does parental income matter?*
- 2007, 3.186 Pietro Coretto – Christian Hennig  
*Identifiability for mixtures of distributions from a location-scale family with uniform*
- 2007, 3.187 Anna Parziale  
*Il fitness landscape: un nuovo approccio per l'analisi del federalismo fiscale*
- 2007, 3.188 Christian Di Pietro – Elena L. del Mercato  
*Seminal contributions to the theory of Knowledge and technological change*

- 2007, 3.189 Valeria D'Amato  
*Pricing di Opzioni esotiche: Rassegna Teorica e Strumenti Informatici per il Prezzamento*
- 2007, 3.190 Roberto Iorio – Sandrine Labory – Daniele Paci  
*The Determinants of Research Quality in Italy: Empirical Evidence using Bibliometric Data in the Biotech Sector*
- 2008, 3.191 Luca Romaniello – Roberto Iorio  
*Soddisfazione ed insoddisfazione nel lavoro. Determinanti individuali dell'insoddisfazione lavorativa ed analisi dei fattori di disagio. Un'analisi del caso del Triveneto*
- 2008, 3.192 Antonio Cortese – Maria Carmela Miccoli  
*L'immigrazione nei paesi dell'Europa mediterranea: il caso del Portogallo*
- 2008, 3.193 Marialuisa Restaino  
*Dropping out of University of Salerno: a Survival Approach*
- 2008, 3.194 Mari Carmela Miccoli  
*Stranieri sempre più numerosi, con figli sempre più istruiti. Le seconde generazioni nel nostro sistema scolastico*
- 2008, 3.195 Carlo Capuano – Giuseppe De Feo  
*Privatization in oligopoly: the Impact of the shadow cost of public funds*
- 2008, 3.196 Giuseppe De Feo  
*Efficiency gains and mergers*
- 2008, 3.197 Maria Olivella Rizza  
*Gunnar Myrdal's Critiques of Utility Theory. Some implications*
- 2008, 3.198 Sergio De Stefanis – Giuseppe Mastromatteo  
*Winds of change and policies. The nequality-Employment trade-off in the OECD*
- 2008, 3.199 Giuseppe Giordano – Michele La Rocca – Maria Prosperina Vitale  
*Strumenti di analisi per esplorare reti di collaborazione scientifica*
- 2008, 3.200 Domenico De Stefano – Giancarlo Ragozzini - Maria Prosperina Vitale  
*Un approccio di rete all'analisi delle relazioni amicali dei disoccupati nella città di Napoli*
- 2008, 3.201 Francesco Giordano  
*Weak consistent moving block bootstrap estimator for the variance of cls estimators in a class of bilinear models*

- 2008, 3.202 Antonio Guariglia  
*L'evoluzione del regime degli scambi nel commercio internazionale agroalimentare: dal GATT alla WTO*
- 2008, 3.203 Giovanni Camillo Porzio – Maria Prosperina Vitale  
*Assessing Linearity in Structural Equation Models through Graphics*
- 2009, 3.204 Antonio Cortese  
*La rilevazione statistica dei senza tetto e delle alter persone non occupanti un'abitazione*
- 2009, 3.205 Roberto Iorio – Daniele Paci  
*La ricerca in collaborazione con l'industria dei docenti universitari: aggiornamento sugli esiti di un questionario*
- 2009, 3.206 Rosamaria D'Amore - Roberto Iorio  
*Internal and external sources of innovation in the Italian biotech sector*
- 2009, 3.207 Maria Carmela Miccoli – Giovanni Ancona – Antonella Biscione  
*Dinamica demografica, crescita economica e povertà in Albania*
- 2009, 3.208 Giuseppina Albano – Francesco Giordano – Cira Perna  
*Parameter Estimation In Continuous Stochastic Volatility Models*
- 2009, 3.209 Francesco Giordano – Maria Lucia Parrella  
*A locally adaptive bandwidth selector for kernel based regression*

Stampa a cura della C.U.S.L. Cooperativa Universitaria Studio e  
Lavoro, Via Ponte Don Melillo, Fisciano  
Finito di stampare il 7 Aprile 2010