

PhD Thesis: Federica Laureana

Abstract (INGLESE)

There is a widespread need to use a quantitative approach for the solution of decision problems that arise in many different areas of real life. The goal is to choose which decisions to take to manage a real system as efficiently as possible using mathematical tools. *Operations Research* provides a scientific basis to try to analyze and understand situations even with very complex structures and then use the gathered information to predict the behaviour of a system and improve the performance of the system itself. The analysis of a real problem occurs in two phases: the representation of the problem through a *mathematical model* and the development of efficient *mathematical methods* to determine an optimal solution of the problem or a good approximation of it. Therefore, the Operations Research is the science that deals with giving a unitary context to mathematical and computer science concepts and that starting from theoretical bases arrives at the construction of concrete models and their solution. *Combinatorial optimization problems* are those in which mathematical techniques are applied to find optimal solutions within a discrete set of possible solutions. Many combinatorial optimization problems are defined on graphs and are *hard* to solve, which means that no polynomial time algorithm exists for them. To solve these problems it can be used *heuristic approaches*, which aim to return good solutions in a reasonable time, or *exact approaches*, which return the optimal solutions and are often based on implicit enumeration techniques.

This dissertation involves the study of two problems defined on graphs: the *Generalized Minimum Branch Vertices (GMBV) problem* and the *2-Edge-Connected Minimum Branch Vertices (2ECMBV) problem*. Both problems aim to identify a subgraph of a given graph satisfying some feasibility conditions and for which is minimum the number of *branch vertices*, namely vertices with degree greater than two. Branch vertices have a very important role in the design of optical networks. Indeed, when in an optical network the signal enters a node having degree greater than two, it has to be split by a switch. For reasons related to cost containment, it is necessary to minimize the use of switches within the network, and thus minimize the number of branch vertices. Below are the definitions of the problems.

- Let $G = (V, E)$ be an undirected graph, where the set V is partitioned into k clusters, V_1, \dots, V_k . The GMBV problem consists of finding a tree in G spanning exactly one vertex for each cluster and with the minimum number of branch vertices. This problem is NP-hard, indeed when each cluster is a singleton it reduces to the well-known *Minimum Branch Vertices problem*.
- Given an undirected graph $G = (V, E)$, the 2ECMBV problem consists of finding a spanning 2-edge-connected subgraph in G with the minimum number of branch vertices. Let us recall that a subgraph is 2-edge-connected if there exist at least two edge-disjoint paths between any pair of vertices. This problem is NP-hard, indeed finding an optimal solution to the 2ECMBV problem on a graph G in polynomial time is equivalent to establishing in polynomial time whether G is Hamiltonian.

This thesis is organized as follows.

Chapter 1 provides an overview of some basic concepts on combinatorial optimization, graph theory, polyhedral analysis and a brief description of the Branch and Cut algorithm.

Chapter 2 describes some Network Design Problems related to those han-

dled in this thesis: the *Minimum Spanning Tree problem*, *Generalized Network Design Problems* and the *survivability requirements* in Network Design Problems.

In Chapter 3 we show some sufficient and necessary conditions for a graph to be Hamiltonian and we devise a procedure for the generation of a family of 3-connected non-Hamiltonian graphs.

In Chapter 4 we introduce an integer linear programming formulation for the GMBV problem. Furthermore, we derive some properties regarding feasible GMBV solutions and we design a procedure to identify and remove useless vertices, namely vertices that do not belong to any feasible solution. We determine the dimension of the polyhedron of integer solutions as well as some valid inequalities and prove some facet results. We develop a Branch and Cut algorithm and computational tests are carried out on a set of 675 instances. Computational results show that the Branch and Cut algorithm optimally solve almost the 80% of the instances in 7 minutes.

In Chapter 5 we model the 2ECMBV problem as an integer linear program. We derive the dimension of the polyhedron of integer solutions, propose new classes of valid inequalities and we prove that some of them are facet-defining. We solve the 2ECMBV problem by a Branch and Cut algorithm. The computational tests are conducted over a set of 3-connected non-Hamiltonian graphs, generated as described in Chapter 3. Computational results show the effectiveness of the valid inequalities proposed in this dissertation.

Final remarks on the presented problems and future work projects are reported at the end of this thesis.

Abstract (ITALIANO)

La necessità di utilizzare un approccio quantitativo per la soluzione di problemi decisionali che sorgono in molteplici settori della vita reale è sempre più diffusa. L'obiettivo è quello di scegliere quali decisioni prendere per gestire un sistema reale nel modo più efficiente possibile utilizzando strumenti matematici. La *Ricerca Operativa* fornisce una base scientifica per analizzare e comprendere situazioni reali aventi strutture molto complesse e quindi utilizzare le informazioni raccolte per prevedere il comportamento di un sistema e migliorarne le prestazioni. L'analisi di un problema reale avviene in due fasi: la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* e lo sviluppo di efficienti *metodi matematici* per determinare una soluzione ottima del problema o una buona approssimazione di essa. Pertanto, la Ricerca Operativa è la scienza che si occupa di dare un contesto unitario a concetti matematici e informatici e che a partire da basi teoriche arriva alla costruzione di modelli concreti e alla loro soluzione. I *Problemi di Ottimizzazione Combinatoria* sono quelli in cui vengono applicate tecniche matematiche per trovare soluzioni ottime all'interno di un insieme discreto di possibili soluzioni. Molti problemi di ottimizzazione combinatoria sono definiti su grafi e sono *difficili* da risolvere, il che significa che non esiste alcun algoritmo polinomiale in grado di trovare una soluzione ottima per tali problemi. Per risolvere questi problemi possono essere usati *approcci euristici*, che mirano a fornire soluzioni ammissibili in tempi ragionevoli, o *approcci esatti*, che restituiscono soluzioni ottime e sono spesso basati su tecniche di enumerazione implicita.

Questa tesi prevede lo studio di due problemi definiti su grafi: il problema del *Generalized Minimum Branch Vertices (GMBV)* e il problema del *2-Edge-Connected Minimum Branch Vertices (2ECMBV)*. Entrambi hanno come obiettivo l'identificazione di un sottografo di un dato grafo, che soddisfi alcune condizioni di ammissibilità e per il quale sia minimo il numero di vertici con grado maggiore di due (*vertici branch*). I vertici branch hanno un ruolo molto importante nella progettazione di reti

ottiche. Infatti, quando in una rete ottica il segnale attraversa un nodo con grado maggiore di due, deve essere frazionato attraverso un dispositivo elettronico chiamato switch. Per motivi legati al contenimento dei costi, è necessario ridurre al minimo l'uso di switch all'interno della rete e quindi ridurre al minimo il numero di vertici branch. Di seguito sono riportate le definizioni dei problemi.

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, dove l'insieme dei vertici V è partizionato in k cluster, V_1, \dots, V_k . Il problema del GMBV consiste nell'individuare un albero in G che copra esattamente un vertice per ciascun cluster e con il numero minimo di vertici branch. Questo problema è NP-hard, infatti quando ciascun cluster contiene solamente un vertice si riduce al noto *Minimum Branch Vertices problem*.
- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, il problema del 2ECMBV consiste nel trovare in G un sottografo di copertura 2-edge-connected con il numero minimo di vertici branch. Ricordiamo che un sottografo è 2-edge-connected se tra qualsiasi coppia di vertici esistono almeno due cammini non aventi archi in comune. Questo problema è NP-hard, in quanto trovare una soluzione ottima al problema del 2ECMBV su un grafo G in tempo polinomiale equivale a stabilire in tempo polinomiale se G è Hamiltoniano.

Questa tesi è organizzata come segue.

Il Capitolo 1 fornisce una panoramica di alcuni concetti di base riguardanti l'ottimizzazione combinatoria, la teoria dei grafi, l'analisi poliedrale e una breve descrizione dell'algoritmo di Branch and Cut.

Il Capitolo 2 descrive alcuni problemi di Network Design strettamente legati a quelli trattati in questa tesi: il *Minimum Spanning Tree Problem*, alcuni *Generalized Network Design Problem* e i *requisiti di sopravvivenza* di una rete nei problemi di Network Design.

Nel Capitolo 3 presentiamo alcune condizioni necessarie e sufficienti af-

finché un grafo sia Hamiltoniano e introduciamo una procedura per la generazione di una famiglia di grafi non-Hamiltoniani e 3-connessi.

Nel Capitolo 4 introduciamo un modello di programmazione lineare intera per il problema del GMBV. Vengono presentate alcune proprietà delle soluzioni ammissibili per il problema del GMBV e progettiamo una procedura per identificare e rimuovere vertici inutili, vale a dire vertici che non appartengono a nessuna soluzione ammissibile. Determiniamo la dimensione del poliedro delle soluzioni intere nonché alcune disuguaglianze valide per il poliedro e proviamo che alcune di esse sono faccette. Il problema del GMBV viene risolto tramite un algoritmo di Branch and Cut e i test computazionali vengono eseguiti su un insieme di 675 istanze. I risultati computazionali dimostrano che l'algoritmo di Branch and Cut risolve all'ottimo quasi l'80% delle istanze in 7 minuti.

Nel Capitolo 5 modelliamo il problema del 2ECMBV tramite un modello di programmazione lineare intera. Deriviamo la dimensione del poliedro delle soluzioni intere, proponiamo nuove classi di disuguaglianze valide e dimostriamo che alcune di esse sono faccette. Risolviamo il problema del 2ECMBV con un algoritmo di Branch and Cut. I test computazionali sono condotti su una famiglia di grafi non-Hamiltoniani e 3-connessi, generati secondo la procedura descritta nel Capitolo 3. I risultati computazionali dimostrano l'efficacia delle disuguaglianze valide proposte in questa tesi.

Al termine di questa tesi vengono riportate delle osservazioni finali sui problemi presentati e sugli sviluppi futuri di questo lavoro.