UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA "RENATO M. CAPOCELLI"

CORSO DI DOTTORATO IN INFORMATICA
X CICLO – NUOVA SERIE

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

TESI DI DOTTORATO IN INFORMATICA

Logit Dynamics for Strategic Games

Mixing time and Metastability

Tutor
prof. **Vincenzo Auletta**

Candidato
Diodato Ferraioli

Coordinatore
prof. **Giuseppe Persiano**

Abstract

Un *sistema complesso* è generalmente definito come un sistema che emerge dalle interazioni di diverse e differenti componenti, ciascuna cono le loro proprietà e i loro obiettivi, eventualmente soggette ad influenze esterne. Oggigiorno, i sistemi complessi sono molto diffusi e sono stati trovati in numerose aree di ricerca: è possibile trovarne esempi in Economia (es., i mercati), in Fisica (es. gas ideali, spin systems), in Biologia (es., l'evoluzione della vita) e in Informatica (es., Internet e le reti sociali). Modellare i sistemi complessi, capire come si evolvono e fare predizioni sullo stato futuro di un sistema complesso sono tra i principali argomenti di ricerca.

Storicamente, i fisici, gli economisti, i sociologi e i biologi hanno studiato separatamente i sistemi complessi, sviluppando i propri strumenti che, comunque, spesso non erano adatti per essere adottati in aree differenti. Recentemente, la stretta relazione tra fenomeni in differenti aree di ricerca è stata evidenziata. Quindi, l'obiettivo è di avere un potente strumento che sia capace di fornirci intuizioni riguardo la Natura e la Società, un linguaggio universale compreso sia nelle scienze naturali che nelle scienze sociali, un moderno codice della natura. In un saggio apparso di recente [16], Tom Siegfried ha indicato la *teoria dei giochi* come una possibile scelta per tale potente strumento, capace di includere sistemi complessi in Economia [3, 4, 5], in Biologia [13], in Fisica [8], in Informatica [10, 11], in Sociologia [12] e in molte altre discipline.

La teoria dei giochi riguarda agenti egoisti o *giocatori*, ognuno con un insieme di possibili azioni o *strategie*. Un agente seleziona una strategia e ne valuta l'utilità o *payoff* che non dipende sola dalla propria strategia, ma anche dalle strategie giocate dagli altri giocatori. Il modo in cui i giocatori aggiornano le loro strategie in risposta ai cambi generati dagli altri giocatori definisce la *dinamica* del gioco e descrive come il gioco si evolve. Se il gioco alla fine raggiunge un punto fisso, cioè uno stato stabile secondo la dinamica considerata, allora si dice che il gioco è in un *equilibrio*, attraverso il quale possiamo fare predizioni riguardo lo stato futuro di un gioco.

L'approccio della teoria dei giochi classica assume che i giocatori abbiamo *conoscenza completa* del gioco e siano sempre capaci di selezionare la strategia che massimizza la loro utilità: in questa situazione *razionale*, l'evoluzione di un sistema è modellata dalla *best response dynamics* e le predizioni possono essere fatte guardando al ben noto *equilibrio Nash*. Un altro approccio è adottato dalle *dinamiche di learning*: qui, si suppone che i giocatori "imparino" come giocare nei turni successivi analizzando la storia dei giochi precedenti.

Esaminando le caratteristiche e le deficienze di queste dinamiche, possiamo individuare i requisiti basilari per modellare l'evoluzione di sistemi complessi e per predire il loro stato futuro. Solitamente in questi sistemi fattori ambientali possono influenzare il modo in cui gli agenti selezionano la propria strategia: per esempio, la temperatura e la pressione hanno un ruolo fondamentale nelle dinamiche dei sistemi di particelle, mentre il limitato potere computazionale è la principale influenza in ambiti informatici e sociali. Inoltre, come già indicato dal Harsanyi e Selten [9], l'assunzione di conoscenza completa può fallire a causa si informazioni limitate riguardo ai fattori esterni che potrebbero influenzare il gioco (es., se pioverà domani), o riguardo l'attitudine degli altri giocatori (se a loro piace prendere rischi), o riguardo la quantità di conoscenza a disposizione degli altri giocatori.

Gli equilibri sono solitamente usati per fare predizioni riguardo allo stato futuro del gioco: per questa ragione, noi desideriamo che un equilibrio esiste sempre e che il gioco converga ad esso. Inoltre, nel caso che esistano molteplici equilibri, piacerebbe conoscere quale equilibrio sarà selezionato, altrimenti noi potremmo fare predizioni sbagliate. Infine, se la dinamica impiega troppo tempo per raggiungere il suo punto fisso, allo questo equilibrio non può essere adottato per descrivere lo stato dei giocatori, a meno che si sia disposti ad attendere una quantità di tempo super-polinomiale.

Così, ci piacerebbe avere dinamiche che modellino la razionalità limitate e che inducano un equilibrio che esiste sempre, è unico ed è raggiunto velocemente. La *logit dynamics*, introdotta da Blume [6], modella un comportamento di razionalità rumorosa in una maniera chiara e trattabile. Nella logit dynamics per un gioco, ad ogni passo, un giocatore viene selezionato a caso per aggiornare la propria strategia e l'aggiornamento è eseguito tenendo

conto di un parametro di *rumore inverso* β (che rappresenta il livello di razionalità o di conoscenza) e dello stato del sistema, cioè le strategie attualmente giocate dai giocatori. Intuitivamente, un valore basso per β rappresenta la situazione in cui i giocatori scelgono le loro strategie "quasi a caso" poiché soggetti a un forte rumore o poiché hanno una conoscenza molto limitata del gioco; invece un valore alto di β rappresenta situazioni in cui i giocatori "quasi sicuramente" giocano la best response, cioè selezionano la strategia che dà un payoff alto con una maggiore probabilità. Questo modello è simile a quello usato dai fisici per descrivere i sistemi di particelle, dove il comportamento di ogni particella è influenzato dalla temperatura: qui, bassa temperatura significa alta razionalità e alta temperatura significa scarsa razionalità. È ben noto [6] che questa dinamica definisce una *catena di Markov* finita ergodica sull'insieme dei profili di strategia del gioco, e così è noto che una *distribuzione stazionaria* esiste sempre, è unica e la catena converge a tale distribuzione, indipendentemente dal profilo di partenza.

Dato che la logit dynamics modella la razionalità limitata in maniera chiara e trattabile, molti lavori sono stati dedicati a questo soggetto. I primi lavori relativi a questa dinamica si sono concentrati sul *comportamento a lungo termine* della dinamica: Blume [6] ha mostrato che per i *giochi di coordinazione* 2×2 e per i *giochi di potenziale*, il comportamento a lungo termine del sistema è concentrato in uno specifico equilibrio Nash; Alós-Ferrer and Netzer [1] hanno dato una caratterizzazione generale del comportamento a lungo termine della logit dynamics per classi più ampie di giochi. Molti lavori sono stati dedicati a valutare il tempo che la dinamica impiega a raggiungere specifici equilibri Nash del gioco, chiamato *hitting time*: Ellison [7] ha considerato la logit dynamics per *graphical coordination games* sui grafi completi e sugli anelli; Peyton Young [15] ha esteso questo lavoro per famiglie più generali di grafi; Montanari and Saberi [14] hanno individuato l'esatta proprietà di teoria dei grafi per la rete di interazione sottostante che caratterizza l'hitting time nei graphical coordination games; Asadpour and Saberi [2] hanno studiato l'hitting time per una classe di *congestion games*.

Il nostro approccio è differente: infatti, il nostro primo contributo è di proporre la distribuzione stazionaria della catena di Markov della logit dynamics come un nuovo concetto di equilibrio in teoria dei giochi. Il nostro nuovo concetto di soluzione, a volte chiamato *logit equilibrium*, esiste sempre,è unico e il gioco converge ad esso da ogni punto di partenza. Invece, i lavori precedenti prendono in considerazione soltanto il classico concetto di equilibrio Nash, che è noto non soddisfare tutte le proprietà richieste. Inoltre, l'approccio dei lavori precedenti forza a considerare soltanto specifici valori del parametro di razionalità, mentre noi siamo interessati ad analizzare il comportamento del sistema per ogni valore di β.

Al fine di validare il concetto di logit equilibrium noi intraprendiamo due linee di ricerca differenti: da un lato valutiamo le performance di un sistema quando esso raggiunge questo equilibrio; dall'altro lato, cerchiamo dei limiti al tempo che la dinamica impiega a raggiungere questo equilibrio, chiamato *mixing time*. Questo approccio è messo in pratica su giochi semplici ma interessanti come i 2×2 coordination games, i congestion games e due team games (cioè, giochi dove ogni giocatore ha la stessa utilità).

Successivamente, diamo dei bound al tempo di convergenza della logit dynamics per classi di giochi molto interessanti, come i potential games, i *giochi con strategie dominanti* e i graphical coordination games. Nello specifico, noi proviamo un comportamento duplice del mixing time: ci sono giochi per cui esso dipende esponenzialmente da β, mente per altri giochi esiste una funzione indipendente da β tale che il mixing time è sempre limitato da questa funzione. Sfortunatamente, noi mostriamo anche che ci sono giochi dove il mixing time può essere esponenziale nel numero dei giocatori.

Quando il mixing è lento, al fine di descrivere lo stato futuro del sistema attraverso il logit equilibrium, abbiamo bisogno di attendere una lunga fase transiente. Ma in questo caso, è naturale chiedersi se è possibile fare predizioni riguardo allo stato futuro del gioco anche se l'equilibrio non è stato ancora raggiunto. Per rispondere a questa domanda noi introduciamo il concetto di *metastable distribution*, una distribuzione di probabilità che viene raggiunta velocemente dalla dinamica che trascorrerà molto tempo in un intorno della stessa: noi mostriamo che ci sono graphical coordination games dove ci sono alcune distribuzioni tali che da ogni profilo di partenza la logit dynamics converge velocemente a una di queste distribuzioni e rimane vicina ad essa per un gran numero di passi. In questo modo, anche se il logit equilibrium non è più una descrizione significativa dello stato futuro di un gioco, le distribuzioni metastabili ristabiliscono il potere predittivo della logit dynamics.

References

[1] Carlos Alós-Ferrer and Nick Netzer. The logit-response dynamics. *Games and Economic Behavior*, 68(2):413 – 427, 2010.

[2] Arash Asadpour and Amin Saberi. On the inefficiency ratio of stable equilibria in congestion games. In *Proc. of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics (WINE'09)*, volume 5929 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 545–552. Springer, 2009.

[3] Robert J. Aumann and S. Hart, editors. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 1. Elsevier, 1992.

[4] Robert J. Aumann and S. Hart, editors. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 2. Elsevier, 1994.

[5] Robert J. Aumann and S. Hart, editors. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 3. Elsevier, 2002.

[6] Lawrence E. Blume. The statistical mechanics of strategic interaction. *Games and Economic Behavior*, 5:387–424, 1993.

[7] Glenn Ellison. Learning, local interaction, and coordination. *Econometrica*, 61(5):1047–1071, 1993.

[8] Serge Galam and Bernard Walliser. Ising model versus normal form game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(3):481 – 489, 2010.

[9] John C. Harsanyi and Reinhard Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, 1988.

[10] Elias Koutsoupias and Christos H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. *Computer Science Review*, 3(2):65–69, 2009. Preliminary version in STACS 1999.

[11] Hagay Levin, Michael Schapira, and Aviv Zohar. Interdomain routing and games. In *STOC*, pages 57–66, 2008.

[12] Jan Lorenz, Heiko Rauhut, Frank Schweitzer, and Dirk Helbing. How social influence can undermine the wisdom of crowd effect. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(22):9020–9025, 2011.

[13] John Maynard Smith. *Evolution and the theory of games*. Cambridge University Press, 1982.

[14] Andrea Montanari and Amin Saberi. Convergence to equilibrium in local interaction games. In *Proc. of the 50th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'09)*. IEEE, 2009.

[15] Hobart Peyton Young. *The diffusion of innovations in social networks*, chapter in "The Economy as a Complex Evolving System", vol. III, Lawrence E. Blume and Steven N. Durlauf, eds. Oxford University Press, 2003.

[16] Tom Siegfried. *A Beautiful Math: John Nash, Game Theory, and the Modern Quest for a Code of Nature*. Joseph Henry Press, 1st ed edition, 2006.