

**Analisi di un processo di nascita-morte con tassi alternanti e
del processo del telegrafo con passeggiata aleatoria
sottostante
ABSTRACT**

Antonella Iuliano

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno, Fisciano, Italy

email: aiuliano@unisa.it

La mia tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica (dal 1/11/2008 al 31/10/2011, Università degli Studi di Salerno, Italia) è stata dedicata allo studio di alcune distribuzioni di probabilità e relative caratteristiche. La mia attenzione si è concentrata in modo particolare sulle distribuzioni di processi di nascita-morte bilaterali caratterizzati da tassi di arrivo e di partenza dipendenti dallo stato iniziale e su quelle del processo del telegrafo generalizzato, caratterizzato da passeggiata aleatoria sottostante, con la determinazione delle leggi di probabilità nel caso in cui i tempi hanno una distribuzione di tipo esponenziale quando i tassi sono costanti e lineari. Sottolineo che la discussione finale della tesi avverrà il giorno 20 Marzo 2012.

La prima parte della tesi ha per oggetto l'analisi di un processo di nascita-morte con tassi alternanti sull'insieme dei numeri interi. Una dettagliata analisi di questo processo è presente nel lavoro di Parthasarathy and Lenin [3], dove si utilizzano metodi analitici standard (serie di potenze e trasformate di Laplace) per trovare le distribuzioni di probabilità del processo al fine di applicare le stesse in diversi campi specifici (sistemi di comunicazione, modelli chimici e biologici). In particolare, essi utilizzano tali processi per descrivere i cambiamenti nel tempo delle concentrazioni delle com-

ponenti di una reazione chimica. Pertanto, il ruolo dei processi di nascita-morte diventa di estrema importanza nello studio delle catene molecolari biatomiche. Precedentemente, StockMayer et al. [4] hanno dato un esempio di applicazione dei processi stocastici nello studio della diffusione delle catene molecolari. In modo particolare, essi descrivono una molecola come una catena di atomi alternati tra loro di uguale lunghezza α e β , rispettivamente. Ispirato da questo lavoro, Conolly [1] analizza il caso di una catena infinita di atomi uniti tra loro da legami di uguale lunghezza soggetti ad urti casuali, che permettono agli atomi di muoversi e alle molecole di diffondersi. Il meccanismo d'urto è differente se l'atomo occupa una posizione pari o dispari nella catena. Si osserva che il modello stocastico di partenza è quello di una passeggiata aleatoria (Randomized Random Walk) sull'insieme dei numeri interi dove i tempi di intervallo hanno una distribuzione di tipo esponenziale. Inoltre in tale lavoro, gli autori analizzano alcune proprietà di cui gode il processo e un caso particolare in cui la passeggiata è ristretta all'insieme dei numeri interi non negativi.

Sulla conoscenza di tali ricerche, nella prima parte della tesi si analizza un processo di nascita-morte $\{N(t), t \geq 0\}$ definito sull'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} , caratterizzato da un tasso di transizione λ , se lo stato è pari (tasso di arrivo), e un tasso di transizione μ , se lo stato è dispari (tasso di partenza). Dopo una descrizione dettagliata del modello si calcolano le funzioni generatrici di probabilità del processo e le corrispondenti probabilità di transizione per lo stato pari e lo stato dispari, rispettivamente, nel caso in cui i tassi di transizione dipendono solo dallo stato iniziale k , per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Successivamente sono stati analizzati alcuni casi particolari al variare dello stato iniziale e le proprietà di simmetria delle relative probabilità di transizione.

Inoltre, si è analizzato il caso in cui il processo di nascita-morte è definito sull'insieme dei numeri non negativi con zero stato riflettente. In particolare, facendo uso della trasformata di Laplace, sono state trovate le rispettive probabilità di transizione, nel caso in cui lo stato iniziale è 0 e quando lo

stato iniziale è 1. Infine, sono state trovate formule per la media e la varianza per entrambi i processi analizzati.

La seconda parte della tesi è invece dedicata allo studio del processo del telegrafo con passeggiata aleatoria sottostante. Il processo del telegrafo descrive il moto aleatorio di una particella che si muove alternativamente con velocità costante. I cambiamenti di velocità sono scanditi dal processo di Poisson (see Orsingher [2]). La novità di questo modello, rispetto a quello classico, è che in ogni istante la nuova velocità è determinata da una prova di Bernoulli. Pertanto, si determina un processo di rinnovo tale che i cambiamenti di velocità della particella in ogni istante sono governati da una distribuzione generica. La particella parte dall'origine dell'asse reale muovendosi alternativamente con velocità c e $-v$ ($c, v > 0$). La direzione della particella è determinata dal segno della velocità che dipende dall'esito della prova di Bernoulli. Pertanto, questo genera un passeggiata aleatoria sottostante governata dal segno della velocità, positivo o negativo, in ogni istante. Utilizzando tecniche basate sulla teoria del rinnovo, si determina la forma generale delle leggi di probabilità che governano il processo. In particolare sono stati analizzati due casi in cui (a) i tempi hanno una distribuzione di tipo esponenziale con tassi alternanti costanti λ e μ e (b) i tempi hanno distribuzione esponenziale con tassi lineari λk and μk , per $k = 1, 2, \dots$. In entrambi i casi sono state trovate le espressioni esplicite della densità di probabilità e della media condizionata (quando la velocità iniziale è c). In particolare, nel primo caso le densità di probabilità sono espresse in termini di funzioni ipergeometriche Gaussiane, nel secondo caso, in cui il processo è di tipo smorzato, si osserva che la densità di probabilità trovata è esattamente la densità logistica stazionaria.

References

- [1] Conolly B.W. (1971) *On randomized random walks*. SIAM Review, 13, 81-99.
- [2] Orsingher, E. (1990) *Probability law, flow functions, maximum distribution of wave-governed random motions and their connections with Kirchoff's laws*. Stoch. Process. Appl., 34, 49-66.
- [3] Parthasarathy P.R. and Lenin R.B. (2004) *Birth and death process (BDP) models with applications—queueing, communication systems, chemical models, biological models: the state-of-the-art with a time-dependent perspective*. American Series in Mathematical and Management Sciences, vol. 51, American Sciences Press, Columbus (2004)
- [4] Stockmayer W.H., Gobush W. and Norvich R. (1971) *Local-jump models for chain dynamics*. Pure Appl. Chem., 26, 555-561.

NOTE

La tesi è organizzata in quattro capitoli:

Capitolo 1. Alcune definizioni e proprietà dei processi stocastici.

Capitolo 2. Analisi di un processo di nascita-morte con tassi alternanti.

Capitolo 3. Alcuni risultati sul processo del telegrafo.

Capitolo 4. Studio del processo del telegrafo con passeggiata aleatoria sottostante governata da cambiamenti di velocità.