Sunto

In questo lavoro ci occupiamo di soluzioni forti per il problema di Dirichlet associato ad un operatore lineare uniformemente ellittico del secondo ordine.

A questo scopo, sia Ω un sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Dato un qualunque $p \in]1, +\infty[$, un problema al bordo per l'operatore suddetto in forma di non divergenza consiste nel seguente

$$\begin{cases} Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + au = f \qquad \text{in} \ \ \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega, \qquad f \in L^p(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

per una funzione non nota u definita su Ω.

Ci riferiremo al problema (1) come al problema di Dirichlet omogeneo per l'operatore lineare L e siamo interessati a soluzioni *forti* per esso, cioè a funzioni due volte differenziabili $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$, che soddisfano l'equazione $Lu = f$ *quasi ovunque* (q.o.) in Ω e assumono valori al bordo nel senso di $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Questo concetto ha senso quando

$f \in L^p(\Omega)$ e quando i coefficienti a_{ij} sono funzioni misurabili tali che

$$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Una ragionevole teoria della solubilità di (1) non può essere costruita senza opportune ipotesi aggiuntive sui coefficienti principali. Infatti, se a_{ij} sono funzioni continue in $\bar{\Omega}$

$$a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega}) \tag{3}$$

esiste una soddisfacente teoria (nota come "teoria L^p"), che assicura risolubilià e regolarità per (1) negli spazi di Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ per $p > 1$.

Il passo successivo della teoria consiste nell'indebolire la condizione di continuità sui coefficienti (3). Tale indebolimento genera problemi al bordo in quanto l'ellicità dell'operatore viene "*disturbata*" nel senso che essa provoca delle *degenerazioni* o *singolarità* sull'operatore.

Per equazioni alle derivate parziali degeneri, cioè, equazioni con vari tipi di singolarità sui coefficicenti, è naturale cercare soluzioni in spazi di Sobolev pesati.

Il ruolo delle funzioni peso consiste nel fissare il comportamento, all'infinito e vicino a parti non regolari della frontiera del dominio, delle funzioni appartenenti agli spazi di Sobolev pesati e delle loro derivate.

In questo contesto si inserisce questo lavoro. Nel capitolo 1, sono state introdotte nuove classi di funzioni peso e i corrispondenti spazi di Sobolev pesati per esaminare, in primo luogo, perchè sccegliere uno spazio di Sobolev pesato anzichè uno spazio di Sobolev classico e, successivamente, come scegliere un certo tipo di funzione peso piuttosto che un altro. Questa scelta dipende dalla necessità di ottenere un nuovo spazio di Sobolev che sia anche uno spazio di Banach. A questo scopo, su un sottinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, non necessariamente limitato, sono state introdotte due nuove classi di funzioni peso e sono state esaminate le loro proprietà:

1. $\mathcal{G}(\Omega)$: questa classe, introdotta già da M.Troisi, è definita come unione degli insiemi $\mathcal{G}_d(\Omega)$ per ogni $d \in \mathbb{R}_+$:

   $$\mathcal{G}(\Omega) = \bigcup_{d \in \mathbb{R}_+} \mathcal{G}_d(\Omega),$$

   dove $\mathcal{G}_d(\Omega)$ è la classe delle funzioni misurabili $m : \Omega \to \mathbb{R}_+$ tali che

   $$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ |x-y|<d}} \frac{m(x)}{m(y)} < +\infty \,, \tag{4}$$

2. $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$: questa classe, è stata definita come l'insieme delle funzioni $\rho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ tali che $\rho \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$, and

   $$\sup_{x \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha \rho(x)|}{\rho(x)} < +\infty, \quad \forall\, |\alpha| \leq k. \tag{5}$$

Si noti che le funzioni peso $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ sono più regolari delle funzioni $\mathcal{G}(\Omega)$. Tuttavia i pesi $\mathcal{G}(\Omega)$ hanno la proprietà di amettere tra i loro membri una ***funzione regolarizzante***, cioè una funzione dello stesso tipo di peso ma appartenente in più a $C^\infty(\Omega)$, cioè una funzione molto più regolare di un peso di classe $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.

Nei capitoli 2 e 3 ci si è occupati dello studio della risolubilità del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} u \in W_s^{2,p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_s^{1,p}(\Omega) \\ Lu = f, \;\; f \in L_s^p(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

dove Ω è un aperto non limitato e sufficientemente regolare di $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $p \in]1, +\infty[$, L è l'operatore differenziale, lineare ed uniformemente ellittico del secondo ordine definito da

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a \,, \tag{7}$$

con i coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in]1, +\infty[$, $W_s^{2,p}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_s^{1,p}(\Omega)$ e $L_s^p(\Omega)$ opportuni spazi di Sobolev su Ω.

In primo luogo è stato considerato il problema pesato mediante funzioni $\mathcal{G}(\Omega)$. In dettaglio, si è assunto che:

- nel capitolo 2, Ω fosse un dominio non limitato di $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 3$;
- nel capitolo 3, Ω fosse un dominio non limitato del piano ($n = 2$).

Invece, nel capitolo 4, ci si è occupati della solubilità del problema pesato mediante funzioni di classe $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} u \in W^{2,2}_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_s(\Omega) \\ \\ Lu = f\,, \quad f \in L^2_s(\Omega)\,, \end{cases} \tag{8}$$

dove Ω è un dominio non limitato di $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 2$.

Nel capitolo 2, sono state determinate delle stime a priori per l'operatore L, ottenute grazie alle proprietà seguenti introdotte già nel capitolo 1:

(I) ***isomorfismo topologico***:

$$u \longrightarrow \sigma^s u$$

(da $W^{k,p}_s(\Omega)$ a $W^{k,p}(\Omega)$ o da $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_s(\Omega)$ a $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$). Questo permette di passare da spazi di Sobolev pesati a spazi non pesati e sfruttarne i relativi risultati in ambito classico.

(II) ***compattezza e limitatezza***: dell'operatore moltiplicativo

$$u \longrightarrow \beta u \tag{9}$$

definito in uno spazio di Sobolev pesato e che assume valori in uno spazio di Lebesgue pesato.

Invero, assumiamo le seguenti ipotesi su i coefficienti e sulle funzioni peso:

- a_{ij} (in aggiunta alla simmetria e alla limitatezza) localmente $VMO(\Omega)$

e all'infinito vicino a certi e_{ij}, appartenenti ad opportuno sottinsieme di $VMO(\Omega)$,

- a_i e a aventi condizioni di sommabilità di carattere locale,
- funzioni peso $m \in \mathcal{G}(\Omega)$, o sue potenze s-esime, non limitate all'infinito e con derivate della funzione regolarizzante soddisfacenti opportune condizioni all'infinito, otteniamo la seguente stima a priori:

$$||u||_{W^{2,p}_s(\Omega)} \leq c\Big(||Lu||_{L^p_s(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega_1)} \Big) \quad \forall\, u \in W^{2,p}_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_s(\Omega), \tag{10}$$

dove $s \in \mathbb{R}$, Ω è sufficientemente regolare e Ω_1 è un sottinsieme aperto di Ω. Questa stima a priori permette di dedurre che l'operatore L è semi-Fredholmiano, cioè ha rango chiuso e nucleo di dimensione finita, proprietà essenziale al fine di ottenere la solubilità del problema (6).

Successivamente, grazie al metodo di continuità lungo un parametro, usando la stima a priori (10), l'isomorfismo topologico, e sfruttando un risultato noto di esistenza ed unicità per il seguente problema non pesato

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega), \\ Lu = f\,, \quad f \in L^p(\Omega)\,, \end{cases} \tag{11}$$

è stato possibile ottenere un teorema di esistenza ed unicità per il problema $\mathcal{G}(\Omega)$ pesato per ogni $n \geq 3$.

Nel capitolo 3, è stata ottenuta la solubilità del problema $\mathcal{G}(\Omega)$ - pesato (6) per un dominio non limitato del piano. Infatti, a partire da una stima pesata (10) per le soluzioni del problema (6) su Ω dominio $C^{1,1}$ non limitato del piano, si è dedotto un teorema di esistenza ed unicità.

Nel capitolo 4, ci si è occupati del poblema $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ - pesato su un dominio non limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Come risultati primcipali sono state ottenute sia una stima non pesata che pesata del tipo $W^{2,2}$. Esse sono state ottenute sotto ipotesi di tipo Miranda sui coefficienti principali e supponendo che le loro derivate $(a_{ij})_{x_k}$ appartengano a opportuni spazi di tipo Morrey, che sono la generalizzazione a domini non limitati dei classici spazi di Morrey. Notiamo che l'esistenza delle derivate dei coefficienti è di cruciale importanza nella nostra analisi, perchè permette di mettere l'operatore L in froma di divergenza ed usare alcuni noti risultati riguardanti la teoria degli operatori in forma di divergenza. Grazie a tali risultaati si è riuscito ad ottenere la seguente $W^{2,2}$- stima, avente il solo termine $\|Lu\|_{L^2(\Omega)}$ nel lato destro della disuguaglianza,

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c\|Lu\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, u \in W^{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega), \tag{12}$$

questo tipo di stima chiaramente porta immediatamente all'unicità del problema (11) per $p = 2$.

Nell'ambito dei domini non limitati, si è dimostrato che la $W^{2,2}$ - stima ottenuta in (12) può essere estesa al caso $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ pesato. Infatti, usando (12) è stata ottenuta la seguente $W^{2,2}_s$-stima $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ pesata :

$$\|u\|_{W^{2,2}_s(\Omega)} \leq c\|Lu\|_{L^2_s(\Omega)} \quad \forall\, u \in W^{2,2}_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_s(\Omega).$$

Da questa stima a priori, assumendo che la funzione peso soddisfi anche condizioni all'infinito

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\rho(x)+\frac{1}{\rho(x)}\right)=+\infty \quad \text{and} \quad \lim_{|x|\to+\infty}\frac{\rho_x(x)+\rho_{xx}(x)}{\rho(x)}=0,$$

è stata ottenuta la solubilità del problema (8).