

## Abstract

Diversi problemi reali, così come problemi di importanza teorica nel campo della Ricerca Operativa sono di natura combinatoria. L'Ottimizzazione Combinatoria tratta problemi decisionali definiti in spazi discreti. All'interno di un insieme finito o numerabile di soluzioni, bisogna scegliere la migliore soluzione in accordo con una funzione obiettivo. Molti di questi problemi possono essere modellati su grafi, orientati e non orientati. Tra i più importanti problemi studiati in quest'area vi sono il *Minimum Spanning Tree Problem*, il *Traveling Salesman Problem*, il *Vehicle Routing Problem*, il *Matching Problem*, il *Maximum Flow Problem*. Alcuni problemi di ottimizzazione combinatoria, poi, sono stati modellati su grafi colorati (labellati). I colori possono essere associati ai vertici ma anche agli archi dei grafi, a seconda del problema. Il *Minimum Labeling Spanning Tree Problem* e il *Minimum Labeling Hamiltonian Cycle Problem* sono due esempi di problemi definiti su grafi colorati sugli archi.

I problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere divisi in due gruppi, a seconda della loro complessità. Problemi *facili* da risolvere, ovvero problemi risolvibili in tempo polinomiale, e problemi che sono *difficili*, ovvero per i quali non esiste un algoritmo polinomiale che ne consenta la risoluzione. Molti dei più noti problemi di ottimizzazione combinatoria definiti su grafi sono problemi difficili in generale. In ogni caso, se si hanno più informazioni circa la struttura del grafo, i problemi possono diventare più trattabili. In alcuni casi (soprattutto su alberi), essi possono anche essere risolvibili in tempo polinomiale.

Negli ultimi 80 anni, problemi di ottimizzazione combinatoria sono stati affrontati utilizzando diversi approcci modellistici e algoritmici, e

sono stati pubblicati molti paper in cui venivano proposti algoritmi risolutivi molto efficienti. Questi approcci risolutivi per problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere classificati come *esatti* o *euristici*. Tecniche esatte sono applicate al fine di trovare soluzioni ottime per i problemi. A causa della complessità dei problemi, gli approcci esatti non possono essere utilizzati per risolvere all'ottimo *istanze grandi*. Il concetto di grande istanza è connesso al problema considerato. Quando approcci esatti falliscono, vengono utilizzate tecniche euristiche. L'obiettivo di un'euristica è produrre soluzioni buone in tempi ragionevoli. Le euristiche possono anche essere inserite in approcci esatti, per esempio possono essere usate per generare buone soluzioni iniziali ammissibili.

Questa dissertazione è rivolta allo studio di tre diversi problemi di ottimizzazione combinatoria definiti su grafi e appartenenti alla classe dei problemi di Spanning Tree e Cycle Cover: il Rainbow Cycle Cover Problem (RCCP), il Rainbow Spanning Forest Problem (RSFP) e il Minimum Branch Vertices Spanning Tree Problem (MBVP).

Dato un grafo connesso e non orientato  $G = (V, E, L)$  e una funzione di colorazione  $\ell$  che assegna un colore ad ogni arco del grafo  $G$  da un insieme finito  $L$ , un ciclo i cui archi hanno tutti colori diversi è detto *rainbow cycle*. Il *Rainbow Cycle Cover Problem* (RCCP) consiste nell'identificare il minimo numero di cicli rainbow disgiunti che coprono  $G$ . Il RCCP è noto essere un problema NP-hard. In questa tesi il problema viene modellato e risolto. Viene presentata una formulazione matematica lineare intera e vengono descritte alcune proprietà che un rainbow cycle cover deve soddisfare. Inoltre vengono derivate alcune disuguaglianze valide per il problema, che viene risolto mediante un algoritmo branch-and-cut. Risultati computazionali sono riportati su istanze generate in maniera random.

Dato un grafo  $G = (V, E, L)$  e una funzione di colorazione  $\ell$  che assegna un colore ad ogni arco del grafo  $G$  da un insieme finito di colori  $L$ , il

*Rainbow Spanning Forest Problem* (RSFP) consiste nell'individuare una foresta ricoprente del grafo  $G$  tale che il numero di componenti rainbow è minimo. Una componente di una foresta i cui archi hanno tutti colori diversi è detta componente rainbow. Il RSFP su grafi generali è noto essere NP-hard. In questo lavoro viene provato che il problema è NP-hard su alberi e viene proposto un caso polinomiale. Inoltre vengono proposte due nuove formulazioni matematiche, (ILP1) ed (ILP2), e per la seconda vengono proposte alcune disuguaglianze valide. Per risolvere poi istanze grandi, viene presentato un algoritmo greedy e uno schema multi-start applicato all'algoritmo greedy per migliorare i suoi risultati. Vengono infine mostrati i risultati computazionali ottenuti risolvendo il ILP1, l'algoritmo greedy e lo schema multi-start.

Dato un grafo connesso non orientato  $G = (V, E)$ , il *Minimum Branch Vertices Problem* (MBVP) consiste nell'individuare un albero ricoprente di  $G$  con il minor numero di vertici aventi grado maggiore o uguale di tre. Questi vertici sono detti vertici branch. Il problema è noto essere NP-hard. Il MBVP viene modellato mediante un modello di programmazione lineare intera, con variabili non orientate e vengono studiate anche alcune proprietà. Inoltre, viene derivata la dimensione del poliedro delle soluzioni intere così come alcune disuguaglianze valide e viene dimostrato che alcune di esse rappresentano alcune faccette del poliedro. Inoltre viene proposta una formulazione matematica su un grafo biorientato e una formulazione ibrida contenente variabili orientate e non orientate. Il modello non orientato e il modello ibrido vengono risolti con un algoritmo di branch-and-cut. Risultati computazionali dimostrano che la formulazione ibrida è superiore a quella non orientata e che il nostro algoritmo di branch-and-cut applicato alla formulazione ibrida risolve tutte le istanze della letteratura all'ottimo.