

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI FISICA "E.R. CAIANELLO"



CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN
MATEMATICA, FISICA ED APPLICAZIONI XXXIII CICLO

TESI DI DOTTORATO IN

*Stochastic processes governed by the
generalized telegraph process and by
Brownian motion and their applications*

S.S.D. MAT/06 Probabilità e Statistica Matematica

Dottorando: Fabio Travaglino

Fabio Travaglino

**Tutor: Prof.
Antonio Di Crescenzo**

Antonio Di Crescenzo

**Coordinatore: Prof.
Carmine Attanasio**

Carmine Attanasio

ANNO ACCADEMICO 2019-2020

Abstract

The aim of this research thesis is to broaden the treatment of stochastic processes derived from the telegraph process and Brownian motion. First, the classical telegraph process is presented. The Kolmogorov equations and the telegraph equation for the transition density are derived, as well as an explicit form for the latter. The results are extended to a generalization of the telegraph process that admits velocities with different absolute value, whose alternation is governed by a generic counting process with independent increments. Then, a generalization of the telegraph process whose sample-paths fluctuates around the zero state is considered. The latter process describes the motion of a particle on the real line, which is characterized by constant velocities and state-dependent intensities that vanish when the motion is toward the origin. This assumption allows to adopt an approach based on renewal theory to obtain formal expressions of the forward and backward transition densities of the process. The special case when certain random times of the motion possess gamma distribution leads to closed-form expressions of the transition densities, given in terms of the generalized Mittag-Leffler function. A first-passage-time problem for the considered process is also addressed. Then a stochastic process defined as the sum of a Brownian motion and a generalized integrated telegraph process is presented, focusing in particular on the case in which the inter-arrival times have an exponential distribution. Explicit forms are derived for the transition density and flow function of the process, as well as a differential system that generalizes the Kolmogorov equations. Based on the latter process, a stochastic model to describe the vertical motions in the Campi Flegrei volcanic region is proposed. After a brief description of the phenomenon and of the available data sets, a statistical procedure is presented to identify the points of changes in the trend of the motion and the corresponding inflation and deflation episodes, as well as to estimate the velocities of motion, the turning rates and the infinitesimal variance of motion. The estimates obtained, combined with the knowledge of the probability laws that regulate the motion, enables predictions of ground displacements and their changing tendency at future time

instants. To verify the admissibility of the model, a statistical test on the Brownian component is performed. Finally, there is room for some remarks on the obtained results and considerations on possible future developments.

Abstract

Lo scopo di questa tesi di ricerca è di ampliare il trattamento dei processi stocastici derivati dal processo del telegrafo e dal moto browniano. In primo luogo, viene presentato il processo del telegrafo classico. Sono ricavate le equazioni di Kolmogorov e l'equazione del telegrafo per la densità di transizione, e una forma esplicita per quest'ultima. I risultati sono estesi a una generalizzazione del processo del telegrafo che ammette velocità con diverso valore assoluto, la cui alternanza è governata da un generico processo di conteggio con incrementi indipendenti. È poi considerata una generalizzazione del processo del telegrafo le cui traiettorie fluttuano intorno allo stato zero. Quest'ultimo processo descrive il moto di una particella sulla retta reale, caratterizzato da velocità costanti e intensità dipendenti dallo stato che si azzerano quando il moto è verso l'origine. Questa assunzione permette di adottare un approccio basato sulla teoria del rinnovo per ottenere espressioni formali delle densità di transizione in avanti e all'indietro del processo. Il caso speciale in cui certi tempi casuali del moto hanno distribuzione gamma porta a espressioni in forma chiusa delle densità di transizione, date in termini della funzione generalizzata di Mittag-Leffler. Viene affrontato anche un problema di tempo di primo passaggio per il processo considerato. È poi presentato un processo stocastico definito come la somma di un moto browniano e di un processo del telegrafo integrato generalizzato, concentrandosi in particolare sul caso in cui i tempi di inter-arrivo hanno una distribuzione esponenziale. Sono ricavate forme esplicite per la densità di transizione e la funzione di flusso del processo, così come un sistema differenziale che generalizza le equazioni di Kolmogorov. Sulla base di quest'ultimo processo, viene proposto un modello stocastico per descrivere i moti verticali nella regione vulcanica dei Campi Flegrei. Dopo una breve descrizione del fenomeno e dei dati disponibili, viene presentata una procedura statistica per identificare i punti di cambio di tendenza del moto e i corrispondenti episodi di inflazione e deflazione, così come per stimare le velocità di movimento, le intensità di cambio di tendenza e la varianza infinitesimale del moto. Le stime ottenute, combinate con la conoscenza delle leggi di probabilità che regolano il moto,

permettono di effettuare previsioni sugli spostamenti del suolo e sulla tendenza al cambiamento di velocità in istanti di tempo futuri. Per verificare l'ammissibilità del modello, viene eseguito un test statistico sulla componente browniana. Infine, c'è spazio per alcune osservazioni sui risultati ottenuti e considerazioni su possibili sviluppi futuri.