SOME GROUP PROPERTIES ASSOCIATED WITH TWO-VARIABLE WORDS

MAURIZIO MERIANO

Abstract

Sia $w(x, y)$ una parola in due variabili e $\mathscr{W}$ la varietà determinata da w. In questa tesi, che include un lavoro svolto in collaborazione con C. Nicotera [5], viene considerato il seguente problema: se per ogni coppia di elementi a, b in un gruppo G esiste un elemento $g \in G$ tale che $w(a^g, b) = 1$, in quali ipotesi il gruppo G appartiene a $\mathscr{W}$?

Per ogni $g \in G$ si considerano gli insiemi

$$W_L^w(g) = \{a \in G \mid w(g, a) = 1\}$$

e

$$W_R^w(g) = \{a \in G \mid w(a, g) = 1\} .$$

In [2], M. Herzog, P. Longobardi e M. Maj hanno osservato che se un gruppo G appartiene alla classe $\mathscr{Y}$ dei gruppi che non possono essere ricoperti dai coniugati di un sottogruppo proprio, allora G è abeliano se per ogni $a, b \in G$ esiste un elemento $g \in G$ per cui $[a^g, b] = 1$. Pertanto quando G è un $\mathscr{Y}$-gruppo e w è la parola commutatore $[x, y]$, l'insieme $W_L^w(g) = W_R^w(g)$ coincide con il centralizzante di g in G e la risposta al problema è affermativa. Più in generale, se G appartiene alla classe $\mathscr{Y}$ il problema ha risposta positiva se ciascuno dei sottoinsiemi $W_L^w(g)$ è un sottogruppo di G o, equivalentemente, se ciascun sottoinsieme $W_R^w(g)$ è un sottogruppo di G. Gli insiemi $W_L^w(g)$ e $W_R^w(g)$ possono essere definiti i *centralizer-like subsets* relativi alla parola w. In generale non sono dei sottogruppi del gruppo G. Dunque vengono esaminate alcune condizioni sufficienti affinché in un gruppo G i sottoinsiemi $W_L^w(g)$ e $W_R^w(g)$ siano dei sottogruppi per ogni g in G. Si denotano con $\mathscr{W}_L^w$ e $\mathscr{W}_R^w$ rispettivamente la classe dei gruppi G per cui l'insieme $W_L^w(g)$ è un sottogruppo di G per ogni $g \in G$ e la classe di tutti i gruppi G per cui ciascun sottoinsieme $W_R^w(g)$ è un sottogruppo.

In particolare, viene considerata la parola n-Engel

$$w(x, y) = [x,_n y],$$

con $n \geq 2$. Un gruppo G si dice nella classe $\mathscr{C}_n$ se per ogni coppia di elementi $a, b \in G$ esiste un elemento $g \in G$ per cui $[a^g,_n b] = 1$. L.-C. Kappe e P.M. Ratchford [3] hanno provato che se G è un gruppo metabeliano i centralizer-like subsets relativi alla seconda variabile di w sono dei sottogruppi di G. Da questa proprietà segue che ogni $\mathscr{C}_n$-gruppo metabeliano è n-Engel. Nel caso $n = 2$ tale risultato viene esteso alla classe di tutti i gruppi risolubili, mentre se $n > 2$ si prova che ogni $\mathscr{C}_n$-gruppo risolubile finitamente generato è m-Engel, per qualche intero non negativo m.

Nel Capitolo 3 della tesi vengono studiati i centralizer-like subsets associati ad alcune parole di commutatori in due variabili. Dapprima si considerano le parole in due variabili della forma

$$w(x, y) = C_n[y, x],$$

dove C_n è un commutatore di peso $n \geq 3$, con entrate dall'insieme $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$. N.D. Gupta [1] ha esaminato le leggi della forma

$$C_n = [x, y],$$

osservando che ogni gruppo finito o risolubile che soddisfa una tale legge è abeliano. È stato in seguito dimostrato in [4] e [6] che se $n \leq 4$ la varietà dei gruppi che soddisfano una delle leggi della forma $C_n = [x, y]$ è la varietà dei gruppi abeliani.

Si mostra che ogni gruppo localmente nilpotente appartiene alle classi $\mathscr{W}_L^w$ e $\mathscr{W}_R^w$ associate alla parola w. Inoltre, se $w(x, y)$ è una delle 2^{n-1} parole della forma

$$[y, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_{n-1}}][y, x]$$

o una delle 2^{n-1} parole della forma

$$[x^{\alpha_1}, y, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_{n-1}}][y, x],$$

dove $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, allora ogni gruppo metabeliano appartiene alla classe $\mathscr{W}_L^w$. Nei gruppi metabeliani vale una simmetria dei centralizer-like subsets relativi alle parole della forma

$w(x, y) = C_n[y, x]$: se

$$w(x, y) = [r_1, r_2, r_3, \dots, r_n][y, x],$$

con $r_i \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora per ogni elemento g in un gruppo metabeliano G si ottiene

$$W_R^w(g) = W_L^{\overline{w}}(g)$$

e

$$W_L^w(g) = W_R^{\overline{w}}(g),$$

dove $\overline{w}(y, x) = [r_2, r_1, r_3, \dots, r_n][x, y]$.

Più nello specifico vengono analizzati i centralizer-like subsets associati alla parola w quando $n = 3$. Se G è un gruppo metabeliano, nel caso $n = 3$ si mostra che G appartiene alla classe $\mathscr{W}_L^w$ per esattamente undici delle parole w, esibendo dei controesempi per le parole rimanenti.

In conclusione del Capitolo 3 vengono studiate le parole della forma

$$w(x, y) = (xy)^n y^{-n} x^{-n},$$

per qualche intero n. La parola w è anche detta *n-commutatore*. Si prova che $\mathscr{W}_L^w = \mathscr{W}_R^w$ e che se i centralizer-like subsets $W_L^w(g)$ e $W_R^w(g)$ sono entrambi sottogruppi di G, allora si ottiene anche $W_L^w(g) = W_R^w(g)$.

R. Baer ha definito l'*n-centro* $Z(G, n)$ di un gruppo G come l'insieme di tutti gli elementi $g \in G$ che *n-commutano* con ogni elemento $h \in G$, ossia

$$(gh)^n = g^n h^n \ \text{ e } \ (hg)^n = h^n g^n.$$

Per ogni elemento g in un gruppo G viene definito l'*n-centralizzante* $C_G(g, n)$ di g in G come l'insieme di tutti gli elementi di G che n-commutano con g, vale a dire

$$C_G(g, n) = W_L^w(g) \cap W_R^w(g)$$

quando w è la parola n-commutatore. L'n-centralizzante $C_G(g, n)$ non è necessariamente un sottogruppo, anche se il gruppo è metabeliano. Si prova che se un gruppo G è 2-Engel, allora $C_G(g, n) = W_L^w(g) = W_R^w(g)$ è un sottogruppo di G per ogni $g \in G$.

Riferimenti bibliografici

[1] N.D. GUPTA, *Some group-law equivalent to the commutative law.* Arch. Math., 17 (1966), 97-102.

[2] M. HERZOG, P. LONGOBARDI, M. MAJ, *On a commuting graph on conjugacy classes of groups.* Communications in Algebra, 37:10 (2009), 3369-3387.

[3] L.-C. KAPPE, P.M. RATCHFORD, *On centralizer-like subgroups associated with the n-Engel word.* Algebra Colloq. 6 (1999), 1-8.

[4] L.-C. KAPPE, M.J. TOMKINSON, *Some conditions implying that a group is abelian.* Algebra Colloquium, 3 (1996), 199-212.

[5] M. MERIANO, C. NICOTERA, *On groups with a property of two-variable laws.* Submitted (2013).

[6] P. MORAVEC, *Some commutator group laws equivalent to the commutative law*, Communications in Algebra, 30(2) (2002), 671-691.