

Università degli Studi di Salerno



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica e Informatica

Dottorato di Ricerca in Matematica

IX Ciclo – Nuova Serie

TESI DI DOTTORATO

Le potenzialità dell'e-learning nell'apprendimento della matematica

CANDIDATO: **GIUSEPPE MARESCA**

COORDINATORE: **PROF. PATRIZIA LONGOBARDI**

TUTOR: **PROF. GIOVANNINA ALBANO**

| | |
|--|----|
| INTRODUZIONE..... | 4 |
| CAPITOLO I – INTRODUZIONE ALL’E-LEARNING | 9 |
| 1.1 Introduzione | 9 |
| 1.2 Un po’ di storia | 10 |
| 1.3 Verso una definizione di e-learning | 12 |
| 1.4 Le piattaforme di e-learning..... | 14 |
| 1.5 Infrastruttura di una piattaforma e-learning | 16 |
| CAPITOLO II – IL QUADRO TEORICO | 20 |
| 2.1 Introduzione | 20 |
| 2.2 Teorie dell’e-learning..... | 21 |
| 2.3 Comunicazione e discorso matematico..... | 22 |
| 2.4 Rappresentazione e semiosis..... | 23 |
| 2.5 e-learning e apprendimento della matematica | 24 |
| CAPITOLO III – PERSONALIZZAZIONE DELL’APPRENDIMENTO..... | 26 |
| 3.1 Introduzione | 26 |
| 3.2 Gli studi psico-pedagogici | 26 |
| 3.3 La personalizzazione dei percorsi di apprendimento..... | 28 |
| 3.4 I caratteri distintivi della progettazione personalizzata..... | 31 |
| 3.5 Modelli, metodi, strategie e tecnologie didattiche per la personalizzazione dei percorsi di apprendimento e di insegnamento..... | 33 |
| 3.5.1 Il modello di apprendimento ipertestuale..... | 33 |
| 3.5.2 Il metodo De La Garanderie..... | 34 |
| 3.5.3 La strategia del cooperative learning | 35 |
| CAPITOLO IV – LA PIATTAFORMA IWT | 37 |
| 4.1 Un esempio di piattaforma intelligente e adattativa :IWT | 37 |
| 4.2 Modellazione della conoscenza | 37 |
| 4.3 Modellazione dello studente | 40 |
| 4.4 La creazione intelligente del learning path | 42 |
| CAPITOLO V - IL CORSO PERSONALIZZATO DI GEOMETRIA SU IWT | 44 |
| 5.1 I Learning Object | 44 |
| 5.2 Hypermedia..... | 44 |
| 5.3 Video strutturati | 45 |
| 5.4 Esercizi statici e dinamici | 45 |
| 5.5 Slide animate..... | 46 |
| 5.6 Quiz..... | 47 |
| CAPITOLO VI – LE ATTIVITA’ DI APPRENDIMENTO ON-LINE..... | 48 |
| 6.1 Il lavoro individuale | 48 |
| 6.1.1 I compiti a casa | 49 |
| 6.2 Il lavoro cooperativo | 53 |
| 6.3 Alcune procedure di valutazione aperta | 54 |
| 6.3.1 Corrispondenza uno a uno tra docente e studente..... | 54 |
| 6.3.2 Corrispondenza uno a uno tra docente e studente e disponibilità on-line di un modello di soluzione | 55 |
| 6.3.3 Disponibilità on-line di un modello di soluzione..... | 55 |
| 6.3.4 Forum su errori comuni..... | 55 |
| CAPITOLO VII – RISULTATI SPERIMENTALI..... | 56 |
| 7.1 Alcune considerazioni preliminari | 56 |
| 7.2 Catalogo degli errori: alcuni esempi e loro analisi | 56 |

| | |
|---|----|
| 7.3 Un feedback qualitativo | 66 |
| 7.4 Risvolti affettivi: il rapporto con la matematica e il rapporto col docente | 68 |
| RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI | 70 |

INTRODUZIONE

La mia tesi di dottorato si inserisce nell'ambito degli studi che mirano all'integrazione tra i risultati della ricerca in educazione matematica e quelli della ricerca riguardante l'e-learning. In particolare la tesi indaga e discute le potenzialità dell'e-learning nell'apprendimento della matematica.

Oggi la tecnologia dell'informazione e della comunicazione non è più strettamente legata a qualche quadro teorico. In passato essa è stata spesso associata, consapevolmente o no, a particolari teorie cognitive se non addirittura a interpretazioni della matematica. Questo potrebbe spiegare il ruolo limitato della tecnologia in molte ricerche in educazione matematica, e forse anche la preferenza di molti ricercatori per un insieme ristretto di programmi.

È anche ormai diffusa la consapevolezza che l'uso della tecnologia non è immediato, ma richiede la progettazione minuziosa di percorsi didattici e molta ricerca per capire come sfruttare al meglio le diverse opportunità disponibili e come evitare effetti collaterali indesiderati. Anche la ricerca in educazione matematica ha ampiamente dimostrato la complessità dei processi di insegnamento e apprendimento, e quindi l'inaffidabilità dei metodi unidimensionali. In particolare ogni modello per l'educazione matematica deve tener conto che i comportamenti degli studenti sono influenzati da fattori che appartengono ad almeno tre distinti livelli: il livello cognitivo, che riguarda l'apprendimento di concetti e metodi specifici della disciplina, anche in relazione agli ostacoli individuati dalla ricerca e dalla pratica; il livello meta-cognitivo, che riguarda il controllo dei soggetti sui propri processi di apprendimento; il livello non-cognitivo, che riguarda convinzioni, emozioni e atteggiamenti, che sono in molti casi cruciali nell'orientare le decisioni e i comportamenti del soggetto che apprende.

La tecnologia può giocare un ruolo in ciascuno di questi livelli, compreso quello non-cognitivo, in quanto da un lato può influenzare profondamente convinzioni, emozioni e atteggiamenti di chi apprende, dall'altro è essa stessa oggetto di convinzioni radicate e può suscitare forti emozioni.

Così ogni progetto che integri ricerca sull'educazione matematica e tecnologia deve prendere in considerazione i fattori non-cognitivi in relazione alla tecnologia, oltre che alla matematica. Anche la comunicazione gioca un ruolo fondamentale, sia dal punto di vista dei diversi tipi di interazione che possono essere associati ai processi educativi, sia da quello dei sistemi semiotici adottati. La tecnologia consente infatti di progettare e gestire forme di interazione originali e mirate, e anche l'uso integrato di diversi sistemi semiotici, quali la lingua, le notazioni simboliche, le rappresentazioni figurali.

In questo quadro nella tesi mi propongo di descrivere la ricerca che ho sviluppato presso l'Università di Salerno, orientato a sfruttare piattaforme per l'e-learning per offrire possibilità di

apprendimento costruttivo, individuale o no, di interazioni finalizzate all'apprendimento, di conversioni fra sistemi semiotici. Le modalità di uso delle piattaforme sono orientate a influenzare le convinzioni degli studenti sulla matematica e sulla tecnologia stessa, e a suscitare emozioni più positive di quelle usualmente associate alle attività matematiche dalla maggioranza degli studenti.

Tra i maggiori temi affrontati particolare attenzione è stata data alla creazione di percorsi di apprendimento personalizzato. È ormai condiviso dai ricercatori in pedagogia che i processi di apprendimento sono strettamente legati alle differenze individuali: “non tutti imparano allo stesso modo”, ovvero non c'è un modello didattico “ottimale” in senso assoluto, ma ogni individuo è caratterizzato da un proprio stile cognitivo e necessita dunque di una soluzione formativa in grado di favorire i propri processi di apprendimento (Baldacci, 1999). La nuova generazione delle piattaforme di e-learning, i cosiddetti sistemi di didattica adattativi e intelligenti basati sul web, è stata progettata proprio in base a tale assunto. Essi, sfruttando le ricerche provenienti dall'ambito dell'intelligenza artificiale non fanno altro che, analizzare “automaticamente” in maniera più o meno dettagliata le “esigenze didattiche” dello studente e in base a queste creare percorsi di apprendimento personalizzati.

Per il lavoro di ricerca, tra le piattaforme adattative e intelligenti disponibili, ho preso in esame la piattaforma IWT (Intelligent Web Teacher), realizzata presso il Polo d'Eccellenza “Learning & Knowledge” dell'Università di Salerno. IWT è in grado di offrire unità didattiche personalizzate in base ad una modellazione del dominio di conoscenza e dello studente (Albano *et al.*, 2007). La prima viene fatta attraverso l'uso di ontologie, intese come grafi che consentono di connettere tra loro i concetti del dominio in esame, con relazioni che sono prevalentemente di due tipi: pre-requisito e sottoparte. La modellazione del discente viene fatta attraverso l'individuazione del cosiddetto “profilo utente” che contiene informazioni di vario tipo: anagrafico, didattico (tipo di scuola o università che si sta frequentando, preferenze ovvero parametri che riguardano lo stile cognitivo, come ad es. livello di interattività, tipo di media, ...), cognitivo (le conoscenze pregresse dello studente come lista di concetti e livello di conoscenza), tecnico (velocità di connessione). La piattaforma in esame, inoltre, nasce dalla considerazione che ogni contesto didattico necessita della propria soluzione di e-learning specifica. In particolar modo il suo sviluppo, essendo utilizzato in modo massiccio ad ingegneria su corsi scientifici, con una particolare attenzione per la matematica, è stato molto spinto per apprendimento di questa materia; al suo interno infatti sono stati sviluppati molti applicativi per facilitare l'apprendimento dei concetti matematici.

I percorsi di apprendimento individuali, realizzati in termini di interazione con Learning Objects, vengono poi corredati di altre attività cooperative o collaborative possibili su piattaforma, che sfruttano tecniche e strumenti del Web 2.0, quali ad es. wiki e forum. Nella tesi vengono presentate e

discusse alcune attività realizzate. Notiamo che un nodo problematico di tali attività è la fase di valutazione, che resta un problema aperto. A tal riguardo, sono stati disegnati e sperimentati alcuni metodi di auto-valutazione o valutazione tra pari.

Nei primi tre capitoli presento i principali risultati del quadro teorico di riferimento. Per la particolarità dell'oggetto della tesi, tale quadro si riferisce alla ricerca tanto nel campo dell'e-learning (dal punto di vista sia tecnico che teoretico) quanto in quello dell'insegnamento/apprendimento della matematica.

Nel capitolo I esamino, dopo una breve introduzione storica, i punti caratteristici dell'e-learning e dei sistemi di gestione delle risorse di apprendimento. In particolare definisco il termine "piattaforma" e ne vado ad analizzare i suoi contenuti descrivendone brevemente le più diffuse.

Nel capitolo II ho preso in considerazione il problema dell'apprendimento individualizzato e personalizzato in ambienti di e-learning ed in particolare analizzo qual è il valore aggiunto che l'e-learning può dare nello specifico all'insegnamento/apprendimento della matematica. Chiudo il capitolo esaminando il risvolto affettivo in matematica prendendo in considerazione sia il rapporto dello studente con la disciplina che con il docente, e come l'utilizzo di una piattaforma migliori tali rapporti.

Nel capitolo III, dopo un breve richiamo sugli studi psico-pedagogici riguardanti l'individualizzazione e la personalizzazione dell'apprendimento, passo ad esaminare in modo puntuale i modelli, i metodi, le strategie e le tecnologie didattiche per realizzare la personalizzazione dei percorsi di apprendimento.

Nel capitolo IV vado a descrivere in modo dettagliato la piattaforma IWT evidenziando quella che rappresenta la sua caratteristica peculiare, e cioè la sua capacità di creare, gestire e aggiornare in itinere, in maniera automatica, per ogni studente, unità di apprendimento personalizzate. Essa, inoltre, è dotata di caratteristiche di Learning Content Management System (LCMS), sistema adattativo di apprendimento che consente la definizione di esperienze personalizzate e collaborative di insegnamento / apprendimento attraverso la rappresentazione esplicita della conoscenza e l'uso di tecniche e strumenti del Web .

Nel capitolo V descrivo l'intera esperienza di un corso personalizzato di Geometria a livello universitario, dalla progettazione alla implementazione nella piattaforma IWT. A tal fine è stata sfruttata in IWT la possibilità di modellare in maniera intellegibile al computer i tre scenari fondamentali del processo di insegnamento/apprendimento: il dominio di conoscenza, lo studente e l'approccio didattico. Qui mi sono occupato prioritariamente del primo, attraverso l'uso di ontologie, learning object (LO) e metadata, sul dominio della geometria (algebra lineare e geometria

analitica). A tal fine è stato creato innanzitutto un dizionario di circa 150 concetti (ad esempio, rango, vettori lineari indipendenti, autovalori, ecc), che sono stati messi in relazione attraverso un grafo (ontologia). Gli archi del grafo rappresentano le possibili relazioni tra i vari concetti. Le relazioni usate sono di tre tipi: HasPart, ovvero sottoconcetto, IsRequired, ovvero prerequisito, SuggestedOrder, ovvero preferenza di ordine di spiegazione. E' stato poi rappresentato il materiale didattico relativo al dominio scelto, attraverso la creazione di LO, intesi come "qualsiasi risorsa digitale che possa supportare l'apprendimento" (Wiley, 2000). Particolare attenzione è stata rivolta a questa attività, tenendo conto di molti risultati della ricerca in Educazione Matematica. Le tipologie di LO creati sono: ipermedia, video strutturati, esercizi statici e dinamici, slide animate. Ogni LO è stato infine opportunamente annotato attraverso un metadata, che è un'etichetta che permette di indicare a quale concetto dell'ontologia creato esso è associato. Se il LO A è associato al concetto B, intenderemo che il contenuto di A spiega il concetto B.

Nel capitolo VI descrivo le attività di apprendimento on-line individuali e di gruppo che hanno affiancato i percorsi personalizzati. Le prime sono state realizzate attraverso lo strumento "Compito a casa" disponibile in IWT, mentre per le seconde sono stati usati strumenti del Web 2.0 quali "wiki" e "forum". Lo strumento "Compito a casa" permette di impostare alcuni problemi con risposta aperta, e fissare alcune scadenze per la consegna del lavoro svolto. Questi problemi sono stati progettati per coinvolgere gli studenti in una partecipazione più attiva al corso e per fornire orientamenti sulle abitudini di studio. Per i problemi a risposta aperta, si pone il problema della valutazione. Sono stati sperimentati due possibili tipologie di valutazione, una guidata dal docente e un'altra rientra nelle procedure di auto-valutazione. Gli strumenti "Wiki" e "Forum" sono stati usati ancora per proporre problemi a risposta aperta, per i quali però la risposta doveva essere costruita in maniera cooperativa. Infatti il wiki permette la scrittura cooperativa di un documento. Anche in questo caso sono state sperimentate modalità di valutazione innovative e cooperative, rientranti nell'ambito della valutazione tra pari.

Nel capitolo VII espongo quelli che sono stati i risultati di una sperimentazione attuata presso la Facoltà di Ingegneria di Salerno con classi tradizionali, supportate da lezioni a distanza. Queste ultime sono state organizzate in corsi personalizzati, generati automaticamente da IWT e ulteriormente personalizzate dagli studenti stessi, oltre attività di apprendimento cooperativo o individuali guidate, come descritte nei capitoli precedenti.

Vorrei ringraziare infine alcune persone:

- un grazie al prof. Ciro D'Apice perché è stato quello che mi ha indirizzato e incoraggiato ad intraprendere il dottorato di ricerca;
- un grazie alla prof.ssa Patrizia Longobardi, coordinatrice del dottorato, per la sua infinita disponibilità e squisita garbatezza dimostrata in questi anni;
- un grazie particolare, infine, alla persona che ha contribuito in modo determinante a questo mio lavoro di ricerca, la mia tutor, la prof.ssa Giovannina Albano. Non solo per le tante correzioni apportate a questo testo, ma per avermi aiutato con pazienza infinita, per aver condiviso tutte le mie

ansie, e per i consigli utilissimi che mi hanno permesso di rendere più chiara l'esposizione delle mie ricerche.

CAPITOLO I – INTRODUZIONE ALL’E-LEARNING

1.1 Introduzione

Oggi la tecnologia dell’informazione e della comunicazione non è più strettamente legata a qualche quadro teorico. In passato essa è stata spesso associata, consapevolmente o no, a particolari teorie cognitive se non addirittura a interpretazioni della matematica. Questo potrebbe spiegare il ruolo limitato della tecnologia in molte ricerche in educazione matematica, e forse anche la preferenza di molti ricercatori per un insieme ristretto di programmi.

È anche ormai diffusa la consapevolezza che l’uso della tecnologia non è immediato, ma richiede la progettazione minuziosa di percorsi didattici e molta ricerca per capire come sfruttare al meglio le diverse opportunità disponibili e come evitare effetti collaterali indesiderati. L’e-learning rappresenta un nuovo paradigma di riferimento per pensare, progettare e gestire la formazione a distanza, capace di garantire rapidità, flessibilità, controllo dei costi e soprattutto capillarità di diffusione.

In questo capitolo si analizzeranno in modo dettagliato alcuni degli elementi portanti di un sistema di e-learning e la loro possibile organizzazione, finalizzata alla reale integrabilità del sistema stesso nel contesto che intende farne uso.

Si esaminerà in particolare una delle componenti base dell’e-learning: la piattaforma tecnologica; analizzando le sue caratteristiche generali, le sue principali funzioni, il modo in cui si possono integrare i diversi strumenti della piattaforma tecnologica con le principali caratteristiche della formazione online, focalizzando principalmente l’attenzione sul contesto scolastico.

Il termine e-learning è oggi molto di moda, ma viene impiegato secondo accezioni diverse, riflettendo pratiche e visioni differenti. Anche da un punto di vista strettamente terminologico il termine viene comunemente usato quale sinonimo di altre espressioni, alcune delle quali già in uso nello scorso decennio (Ranieri, 2005): online learning, online education (Harasim, 1990), computer mediated distance learning (Palloff e Pratt, 1999), web based learning o web based training (WBT), distributed learning (Resnick, 1996) e distributed training, computer assisted learning, online resource based learning (ORBL), networked collaborative learning (NCL). Computer supported collaborative learning (CSCL), ecc (Anderson e Elloumi, 2004; Khan, 2004).

Maisie parla in particolare di “e-learning”, non per riferirsi ad un “apprendimento elettronico”, ma come “esperienza”, richiamando la molteplicità dei fattori che oggi concorrono o dovrebbero

concorrere a una ulteriore evoluzione delle dinamiche di insegnamento e dell'apprendimento grazie al diffondersi delle reti, o meglio, dello spazio della rete:

- Nuove forme di coinvolgimento dei discenti
- Aumento della curiosità e della voglia di esplorare
- Possibilità di simulare in rete situazioni con risvolti pratici
- Sviluppo di forme di educazione assistita
- Crescita del tutorato tra pari
- Crescita delle attività formative legate ai bisogni specifici di ogni singolo individuo
- Sviluppo di pratiche formative come supporto alla produttività di chi opera in servizio
- Possibilità di garantire ai discenti feedback immediati e personalizzati rispetto ai loro bisogni formativi.

Janice Lawrence, presidente di *Learning Solutions*, ne parla come un sistema in cui si combinano tre elementi ritenuti fondamentali nella prospettiva del nuovo “mondo della conoscenza”:

- I contenuti, ovvero la necessità di disporre di informazioni continuamente arricchite e aggiornate e di conseguenza degli strumenti per elaborare, mantenere, organizzare, cercare, selezionare e mettere in relazione tra loro le conoscenze, le basi di dati, i materiali formativi;
- La personalizzazione dell'accesso ai contenuti, ovvero la possibilità, in un ottica tipicamente modulare, di avere soluzioni specifiche per propri bisogni formativi;
- La connettività, ovvero la modalità attraverso cui i singoli discenti entrano in contatto con la “comunità che apprende”, sia in modo formale che informale, partendo dal presupposto che la maggior parte delle persone preferisce dedicarsi ad attività di apprendimento all'interno di un contesto sociale.

Tali caratterizzazioni, se pur pragmatiche, sembrano allo stato attuale non bastare a definirlo. Per dire che cosa si intenda oggi per “e-learning”, occorre far riferimento all'evoluzione della formazione a distanza. Ma come nasce l'insegnamento a distanza e quali sono le peculiarità che maggiormente lo caratterizzano?

1.2 Un po' di storia

L'istruzione a distanza ha origini antiche. Si possono individuare le prime forme di istruzione a distanza nei casi di epistolari scritti a scopo di educazione-istruzione, un esempio ne è la lettera di Platone a Dionigi di Siracusa o quella di San Paolo rivolte alla comunità cristiana anche se i sistemi di istruzione a distanza veri e propri nascono solo con la diffusione dei moderni sistemi postali. In definitiva la storia dell'istruzione a distanza vera e propria

riguarda gli ultimi due secoli e attraverso un itinerario che, secondo i lavori di Garrison (1985) e Nipper (1989) e poi dopo dell'italiano Trentin (1998, 1999a), può essere schematizzato in tre “generazioni”:

- *Prima generazione*: le prime applicazioni di una certa significatività prendono piede nell'ottocento con lo sviluppo del sistema ferroviario che ha reso possibile la distribuzione estensiva di materiale di insegnamento nei riguardi di popolazioni disseminate sul territorio: in questo caso ci si basa ovviamente sulla sola corrispondenza scritta.
- *Seconda generazione*: è durante gli anni 60'-70' che l'istruzione a distanza acquisisce una maggiore consapevolezza. Tale generazione è distinta dall'impiego di soluzioni “multimediali” caratterizzate cioè da un uso integrato di materiale a stampa, registrazioni sonore, trasmissioni televisive e computer. La comunicazione è basata su un rapporto di uno-molti (in particolare attraverso l'emittenza televisiva). In particolare, negli anni '70, quando i computer erano già sufficientemente diffusi, si iniziò a parlare di CBT (Computer Based Training) e di CAI (Computer Aided Instruction), ovvero di formazione distribuita tramite il pc, con prodotti informatici pensati appositamente per l'auto-apprendimento. Si trattava generalmente di semplici dischetti con informazioni strutturate (sequenze di schermate), utilizzate soprattutto in ambito aziendale. Negli anni 80' e per buona parte degli anni 90' i CBT continuarono a essere progettati e prodotti o per usi specifici o sempre più spesso per usi più ampi e generalizzati (si pensi ad esempio ai corsi multimediali di lingue diffusi con la stampa).
- *Terza generazione*: è caratterizzata dall'impiego delle reti telematiche. Con l'avvento delle reti e di internet, la sigla CBT ha lasciato spazio alla nuova WBT acronimo per *Web Based Training*. Apparentemente si potrebbe pensare a una semplice trasposizione delle tecniche di istruzione programmata o strutturata basata su prodotti multimediali in ambiente internet. In realtà non si è trattato solo di un salto su un nuovo canale di distribuzione, ma di una svolta sia metodologica che progettuale. Tra le ragioni della diffusione della formazione web-based vi sono certamente i vantaggi organizzativi e logistici, e conseguentemente economici, che un ambiente di apprendimento on-line garantisce. Ma l'elemento più importante, che per molti ha indotto ad una corsa all'uso sempre più intenso del supporto telematico per i prodotti e per i progetti educativi, riguarda l'idea, oramai largamente acquisita, che per rispondere ai bisogni formativi reali, occorra una dose molto alta di flessibilità e di molteplicità dell'offerta. Il Web in tal senso, garantirebbe un “escursione” particolarmente ampia: dalla possibilità di erogare prodotti educativi legati ad una impostazione strutturata all'avvio di programmi informali e attività di educazione aperta. Secondo questa ottica, il Web Based Training si potrebbe caratterizzare come una strategia orientata a dare agli “studenti” la possibilità di plasmare lo

spazio dell'apprendimento secondo i propri bisogni, o meglio ancora, di aumentare la possibilità di interagire in modo flessibile con i materiali formativi.

Col tempo poi sorgono le prime piattaforme di e-Learning (LMC o CMS) con le quali, come sottolinea Trentin (1999a) si aggiunge a una tipologia comunicativa del tipo uno a molti, che ha caratterizzato i modelli di prima e seconda generazione, una tipologia comunicativa del tipo molti a molti, in cui non solo il discente può interagire più rapidamente con il docente, ma può anche stabilire interazioni e rapporti cooperativi con tutti gli altri allievi partecipanti.

La capacità di creare un ambiente emotivamente valido, ricco di rapporti interpersonali e di supporti variegati diventa una componente di grande rilevanza, sottolineata in vari modi da diversi autori (Harasim, 1990, 1995; Palloff e Prat, 1999; White e Weight, 1999; Draves, 2000). È qui che fallisce l'istruzione a distanza di seconda generazione, in cui predomina il senso di un apprendimento come successione di operazioni condotte per lo più in isolamento. In questo contesto si rivaluta il ruolo del dialogo come funzione essenziale per l'apprendimento, in quanto capace di educare all'argomentazione, a valutare criticamente la conoscenza sollevata da altri, a riflettere criticamente e collaborativamente sulla conoscenza acquisita, procedere razionalmente e metodologicamente nella presentazione orale delle proprie idee (Peters, 1998).

1.3 Verso una definizione di e-learning

I brevi cenni storici riportati inducono ad una definizione di e-learning abbastanza generica che ingloba le varie e molto differenti modalità di utilizzo.

In particolare con il termine e-learning ci si riferisce all'insieme di metodologie e tecnologie che consentono di attuare percorsi di "formazione a distanza", avvalendosi prevalentemente, anche se non esclusivamente, della rete. Tale definizione risulta però abbastanza generale e poco indicata a descrivere tutte le peculiarità di cui l'elearning può avvalersi. Facendo un passo avanti in tale direzione ci si può rifare alle tipologie di e-learning esistenti. Mason (2002) della Open University ne distingue quattro:

- *content and support*: si tratta della tipologia più diffusa ed economica e si basa sull'erogazione dei contenuti (materiali stampati o pagine web) e sul supporto minimale di un tutor; si caratterizza per la netta distinzione tra contenuto e supporto;
- *wrap around*: consiste nella combinazione di risorse Internet, attività e discussioni online con libri, cd-rom e tutorial; si lascia maggiore spazio e libertà allo studente, il contenuto è meno strutturato e assume diverse connotazioni a seconda delle attività; il tutor assolve il ruolo di facilitatore interagendo singolarmente o con piccoli gruppi;

- *integrated model*: si basa essenzialmente su attività collaborative in piccoli gruppi; i contenuti del corso sono fluidi e dinamici e in un certo senso viene meno la distinzione tra contenuto e supporto, in questo caso il tutor/docente diventa un moderatore animatore di comunità di apprendimento;
- *informal e-learning*: rinvia a forme di apprendimento che si collocano al di fuori di un corso istituzionale organizzato e che si basano sull'interazione tra colleghi e lo scambio tra esperienze. In tale ambito si possono includere anche forme di esplorazione libera per uso personale: il soggetto ricerca sul web risorse, accedendo ai siti, data base, documenti ecc.

Un'altra significativa classificazione ci viene da Bellier (2001) che, basandosi non tanto sugli aspetti metodologici quanto sulle pratiche correnti, distingue tra le seguenti cinque principali modalità di e-learning:

1. *Completamente a distanza senza l'intervento di un tutor*: il discente è completamente autonomo, si iscrive, paga, accede ai contenuti e viene valutato completamente a distanza. I contenuti sono per la maggior parte procedurali (contabilità, informatica, internet ecc).
2. *Completamente a distanza, ma con il supporto di un tutor*: si tratta di una categoria molto ampia, le modalità con le quali può essere attuato il tutorato sono le più disparate, dando luogo a dispositivi tecnici e pedagogici di natura differente. Il tratto comune sta nel fatto che l'apprendimento avviene completamente a distanza e che i discenti vengono seguiti individualmente da un tutor. Il tutor può avvalersi di strumenti di comunicazione sincrona (video-audio conferenze, chat ecc) o asincrona (e-mail, forum).
3. *Misto distanza/presenza (blended) con autoformazione a distanza*: in questo caso la formazione vera e propria avviene a distanza con incontri in presenza che vengono organizzati in base a un ritmo che può variare secondo diversi schemi. Alcuni corsi prevedono gli incontri in presenza all'inizio per facilitare la conoscenza tra i partecipanti, altri invece utilizzano gli incontri in presenza a metà corso per verificare direttamente che gli apprendimenti abbiano avuto luogo mettendo i discenti in situazione; altri corsi prevedono gli incontri alla fine dell'attività formativa per verificare se ciascuno è riuscito a rendere operative le conoscenze acquisite. Questa modalità mantiene tutti i vantaggi dell'e-learning (quali l'autonomia organizzativa, riduzione degli spostamenti, aumento della possibilità di personalizzazione), inoltre gli incontri in presenza riducono il rischio del "senso di isolamento" e di abbandono che di solito si ascrive alla formazione a distanza.
4. *Misto distanza/presenza (blended) con attività complementari a distanza*: l'attività avviene prevalentemente in presenza, mentre le attività a distanza sono concepite come complementari. Si tratta in questo caso di arricchire e completare un insegnamento che si

svolge essenzialmente in forma immediata. Il corsista può utilizzare le risorse per il lavoro a distanza come userebbe il manuale tradizionale. Possono essere previste anche interazioni in una classe virtuale.

5. *Lavoro collaborativo a distanza*: può essere presente anche nelle modalità precedentemente descritte, ma in questo caso il lavoro collaborativo rappresenta un elemento all'interno di un dispositivo basato sulla trasmissione dei contenuti d'apprendere e lo stesso apprendimento si genera come conseguenza della partecipazione e dello scambio. Il tutor svolge la funzione di organizzatore e animatore di scambi e il suo ruolo consiste essenzialmente nel monitorare che il lavoro sia fonte di apprendimento per tutti.

Al di là delle varie classificazioni, è importante osservare che:

- l'e-learning non è ancora un oggetto definito in maniera stabile, bensì un insieme di metodologie e di tecnologie in continua evoluzione;
- non sempre queste tipologie esistono in forma "pura": ad esempio, all'interno di un percorso formativo basato principalmente su attività collaborative, potrebbe essere comunque necessario prevedere momenti di studio individuale;
- le diverse tipologie di e-learning a cui si è accennato possono essere variamente degradate in base alle differenti modalità di integrazione con incontri in presenza generando una varietà di applicazioni.

1.4 Le piattaforme di e-learning

Dal punto di vista informatico, il vero protagonista di una attività e-learning è l'infrastruttura tecnologica, cioè la piattaforma. Per "piattaforma" si intende appunto l'insieme di tutti gli apparati tecnologici destinati ad accogliere e gestire una esperienza di insegnamento/apprendimento on-line, garantendo ed eventualmente anche integrando la messa a disposizione di ambienti e prodotti didattici, l'amministrazione delle attività di apprendimento, produzioni e verifiche a carico degli studenti, la gestione degli scambi e delle interazioni, più o meno formali, tra docenti e studenti (Maragliano, 2004). In altri termini è un mix di elementi hardware e software che consente di gestire un progetto di formazione in completa autonomia.

Le industrie specializzate si sono molto impegnate, negli ultimi tempi, per sviluppare e proporre sul mercato sistemi capaci di realizzare e coordinare tra loro queste funzioni, sistemi risultati poi diversi sia per il tipo di utenza preso in considerazione sia per le soluzioni tecniche prospettate. Ne consegue che gli impianti complessivi e i singoli strumenti messi a disposizione dalle varie piattaforme di e-learning possono presentare caratteristiche molto diverse tra loro: ci si può limitare ai livelli minimi di una semplice erogazione di contenuti in formato testuale, come si

può raggiungere una complessità funzionale, semiotica, tecnologica e didattica anche molto elevata, sia per quanto riguarda la numerosità e la flessibilità dei gruppi di studenti gestiti contemporaneamente, sia per quanto riguarda le modalità di trattamento/reperimento dell'informazione, sia, infine, per quanto riguarda la tecnologia di comunicazione multimediale alla quale sono affidate le interazioni.

Le piattaforme per l'e-learning sono degli ambienti di apprendimento on-line in cui è possibile:

- 1) costruire una didattica collaborativa, attraverso strumenti di interazione sincrona (chat, aula virtuale) e asincrona (forum) e di lavoro in gruppi virtuali;
- 2) rendere disponibili proposte di attività di formazione e consolidamento, anche individuali, relative all'esperienza didattica;
- 3) attivare con gli utenti una comunicazione diretta, finalizzata alla soluzione dei problemi;
- 4) proporre test di autovalutazione e di valutazione;
- 5) rendere disponibili materiali relativi agli argomenti oggetto dell'esperienza didattica;
- 6) mettere a disposizione degli studenti il programma dell'esperienza didattica.

La piattaforma risulta essere dunque una componente fondamentale per l'e-learning, così come l'aula virtuale (o ambiente collaborativo), presente su molte piattaforme, che permette l'interazione (soprattutto in modalità sincrona) fra gli utenti attraverso strumenti che favoriscono la comunicazione immediata tramite chat, lavagne condivise e videoconferenza e così via. I software di ambiente collaborativo possono gestire anche l'apprendimento asincrono (che non necessita la presenza degli utenti nello stesso momento), come ad esempio i forum di discussione.

Per quanto riguarda i materiali, essi possono essere progettati in diversi formati: HTML, animazioni 2D o 3D, contributi audio e video, simulazioni, esercitazioni interattive, test ecc.; si tratta, in ogni caso, di contenuti realizzati in modalità multimediale e dovrebbero essere costruiti in modo da garantire alcune delle principali caratteristiche della formazione online:

- modularità: il materiale didattico deve essere costituito da moduli didattici, in modo che l'utente possa personalizzare tempi e modalità di approccio ai contenuti.
- interattività: l'utente deve interagire con il materiale didattico, il quale deve rispondere efficacemente alle necessità motivazionali dell'interazione uomo-macchina;
- esaustività: ogni modulo didattico deve rispondere ad un obiettivo formativo e mettere l'utente in condizione di conseguire tale obiettivo;
- interoperabilità: i materiali didattici devono essere predisposti per poter essere distribuiti su qualsiasi piattaforma tecnologica e garantire la tracciabilità dell'azione formativa.

Inizialmente molti pensavano che l'e-learning significasse, semplicemente, trasportare su un supporto elettronico il materiale cartaceo oppure posizionare una telecamera davanti ad un docente

che svolge la sua lezione. Le prime piattaforme, infatti, erano principalmente “orientate al docente” perché ponevano l’accento sulla preparazione e la gestione del materiale didattico. Successivamente, ripercorrendo quanto era successo nella didattica tradizionale, l’enfasi si è pian piano spostata sullo studente, cioè dall’attenzione unicamente per l’insegnamento si è passati all’attenzione per l’apprendimento e così le nuove piattaforme si focalizzano sull’interazione docente-allievo e allievo-allievo.

L’attività di apprendimento dello studente, le metodologie e gli strumenti, che vengono utilizzati per migliorare l’efficacia del percorso di acquisizione della conoscenza assumono un ruolo centrale nei modelli e-learning.

Una delle principali critiche rivolte al modello di e-learning utilizzato nella formazione a distanza riguarda la potenziale assenza del docente, anche se in realtà questa assenza è solo apparente; il docente ha, infatti, la possibilità di controllare e valutare le attività svolte sulla piattaforma da ogni singolo discente e può interagire attivamente con gli studenti in qualsiasi momento.

L’e-learning introduce una importante problematica: la gestione dell’esperienza didattica richiede numerose e varie competenze quali: gestione e responsabilità complessiva del sistema, analisi dei fabbisogni formativi, progettazione, gestione e responsabilità didattica del percorso, conoscenza e competenza sui contenuti, valutazione degli apprendimenti e del processo formativo, conoscenza approfondita della piattaforma di e-learning, amministrazione informatica della piattaforma, implementazione di e-content, e progettazione e conduzione del monitoraggio.

1.5 Infrastruttura di una piattaforma e-learning

Una piattaforma e-learning è una complessa architettura di software costruita, con logica e struttura modulare, intorno a un data-base.

L’architettura delle piattaforme di e-learning è identificabile ad un insieme di moduli per l’apprendimento tra loro connessi; ogni modulo rappresenta un blocco funzionale, corrispondente a esigenze che possono essere didattiche, amministrative o gestionali. Nei prodotti di ultima generazione sono presenti moduli che interfacciano la piattaforma con la rete e mettono a disposizione degli utenti i diversi modi della comunicazione interpersonale, quali la posta elettronica, la chat, il web forum, wiki, blog, la videconferenza ecc. A loro volta, anche i moduli presentano una struttura modulare: ognuno si costituisce infatti a partire da funzionalità elementari, di livello base, e più moduli si aggregano tra loro per formare insiemi di livello più alto e di complessità superiore. La caratteristica peculiare di questa architettura modulare consiste nel poter aggregare alla struttura moduli dello stesso livello, o riordinare la disposizione dei moduli stessi, senza che vengano alterate le principali modalità di funzionamento interno

degli elementi preesistenti, e dunque nel poter espandere il sistema, sia in orizzontale (aggiunta di moduli di pari livello) sia in verticale (aggregazione di più moduli per crearne uno “macro” con funzionalità più elevate e complesse). L’infrastruttura così creata assume un particolare rilievo strategico nell’orientare e guidare la progettazione dei corsi.

Dunque la strategia modulare, applicata alla progettazione di corsi, partendo dalle unità elementari di contenuto e arrivando ad aggregazioni complesse di aree di sapere, può consentire una serie quasi illimitata di combinazioni di micro e macro-oggetti, il che vuol dire garantire il massimo livello di individualizzazione e ancor più di personalizzazione delle pratiche di apprendimento.

Le più diffuse piattaforme Open Source attualmente presenti rispondono alle tipologie LMS e LCMS. Un *Learning Management System* (LMS) consente la gestione di attività quali la preparazione dei corsi e dei curricula, la creazione dei cataloghi e dei calendari degli insegnamenti, l’iscrizione degli studenti, il monitoraggio dello studio, la misurazione e la valutazione dei risultati.

Un *Learning Content Management System* (LCMS) consente, invece, di creare e gestire i contenuti e gli utenti attraverso la condivisione di archivi digitali (*digital repository*); in pratica è il modulo software che permette di interagire con le basi di dati (*database*).

Le piattaforme Open Source sono tutte *web based*; questo significa che sono accessibili tramite *Internet* su protocollo IP e pertanto utilizzabili mediante un *browser* (come Internet Explorer). Le piattaforme *Open Source* hanno tutte raggiunto un buon grado di sviluppo in termini software che si traduce in un buon livello delle funzionalità.

Questi sistemi oggi, almeno in Italia, non costituiscono un’alternativa alla didattica tradizionale, ma piuttosto una integrazione ad essa. La tendenza attuale è di tipo *Blended Learning*, ovvero alla tradizionale lezione frontale in aula si affiancano i potenti strumenti messi a disposizione dalle varie piattaforme di *e-learning*. Tra le piattaforme di maggior rilievo descriviamo le seguenti, tanto per dare un’idea concreta delle possibilità che offrono:

Moodle (acronimo di *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*) è un piattaforma web open source per l’e-learning, di tipo *Course Management System*, progettato per aiutare gli insegnanti e gli educatori a creare e gestire corsi on-line con ampie possibilità di interazione tra studente e docente. Esso è stato creato da Martin Dougiamas, un amministratore web alla Curtin University, in Australia. È scritto in PHP. La sua licenza libera e la sua progettazione modulare consentono alla comunità di sviluppare di continuo funzionalità aggiuntive. Le funzionalità di Moodle spaziano dalla creazione e all’organizzazione di corsi e lezioni on-line a strumenti per la comunità, come: forum, gestione dei contenuti, quiz, blog, wiki, chat, glossari. Moodle è progettato in modo modulare e per questo è possibile ad esempio il supporto di più lingue o l’installazione di

temi grafici diversi da quello predefinito. L'attuale versione di Moodle (1.9) è stata rilasciata nel marzo del 2008. La citata filosofia di Moodle include un approccio costruzionista e sociale all'educazione. Le caratteristiche di Moodle riflettono questo in vari aspetti progettuali, come il rendere possibile agli studenti il commentare i contenuti in un database (o contribuire all'inserimento di dati) o lavorare collaborativamente in un wiki. Detto questo, Moodle è abbastanza flessibile per permettere una gamma completa di insegnamento. Può essere usato sia per la consegna introduttiva e avanzata di contenuti (ad esempio pagine HTML) o di giudizi e non è vincolato a un approccio di insegnamento costruzionista.

DoceboLMS è una piattaforma Open Source per l'*e-learning* nata in Italia anche essa scritta in *PHP/MySQL*. Il progetto, chiamato inizialmente *Spaghetti Learning*, arrivato al terzo anno di vita, è stato riscritto completamente e grazie a collaborazioni con molte università italiane e straniere, include funzioni molto particolari. Tra queste funzioni c'è per esempio quella in cui il docente può personalizzare l'ambiente didattico abilitando e disabilitando voci di menu ed inoltre può assegnare voci personalizzate alle funzioni e gestirne i permessi; per la didattica collaborativa c'è il *project manager*, il forum con possibilità di allegare file e la *chat* con sistema di richiesta per poter parlare e scambiare file all'interno di essa. Da sottolineare la presenza di marcatori semantici ossia la possibilità da parte del docente di poter valutare ogni singolo intervento del forum e averne una reportistica per studente. Il professore può scegliere la modalità di presenza *on air* che permette ai discenti di raggiungerlo in videoconferenza o in chat. Un orologio, presente anche nell'area discente, permette di monitorare il tempo di presenza in un dato corso. Si tratta di una funzionalità che in parte riprende la dinamica scolastica, in cui il tempo è scandito dal passaggio delle ore. Sono inoltre a disposizione del docente una serie di strumenti per la comunicazione: messaggistica, forum e chat. Infine è prevista anche la presenza di test di autovalutazione o verifica creati dal docente stesso.

Esiste poi una categoria ben specifica di piattaforma e-learning che supportati da software intelligenti sono capaci di creare percorsi di apprendimento personalizzati, i cosiddetti **Intelligent and Adaptive web based educational system** capaci di venire incontro alle esigenze di ciascun individuo a partire dal suo profilo che rappresenta l'insieme delle sue preferenze, delle sue conoscenze pregresse, e lo fanno svolgendo un lavoro che prima era caratteristica peculiare dell'essere umano, quale l'analisi di difficoltà, di misconcezioni, attività di tutoring ecc.

Essi sono stati classificati, in una prima pubblicazione di Brusilovsky (1999) che è stata successivamente arricchita da Brusilovsky and Peylo (2003) e ancora dallo stesso Brusilovsky (1999/2001). In base a questa classificazione abbiamo:

ITS (Intelligent Tutoring System) è un sistema intelligente che ha lo scopo di rappresentare la conoscenza e garantire l'interazione con lo studente. Un sistema ITS comprende: un modello cognitivo dello studente (student model) che permette al sistema di adattarsi progressivamente alle esigenze dello studente; un modello pedagogico (tutor model) ossia una rappresentazione delle strategie di insegnamento che il sistema è in grado di attuare; una rappresentazione del dominio (domain model) oggetto dell'insegnamento; una componente per la comunicazione del programma con l'utente (Interface).

AHS (Adaptive Hypermedia System) è un sistema che costruisce un modello di obiettivi, preferenze e conoscenze per ogni utente e usa questo modello per l'erogazione dei contenuti didattici. Il sistema supporta gli utenti nella loro navigazione all'interno del sistema suggerendo i link rilevanti per l'utente e fornendo commenti adattativi su link visibili all'utente.

ICL (Intelligent Collaborative Learning) è un gruppo interessante di tecnologie che utilizzano le tecniche di AI per sostenere la cultura collaborativa.

ICM (Intelligent Class Monitoring): è un sistema che usa l'Intelligenza Artificiale per monitorare le azioni dell'utente e aiuta il docente nell'interpretazione dei comportamenti degli utenti stessi all'interno del sistema. In un contesto classe standard infatti il docente ha la possibilità di monitorare i comportamenti dello studente, cosa che non è semplice fare quando viene a mancare la presenza fisica. Gli Intelligent class monitoring systems cercano di utilizzare Ai per aiutare l'insegnante in questo contesto. Esempi di queste tecnologie sono HyperClassroom (Oda, et al., 1998).

CAPITOLO II – IL QUADRO TEORICO

2.1 Introduzione

Il ruolo della tecnologia nell'insegnamento e apprendimento della matematica è stato, specialmente in passato, alquanto limitato.

Inizialmente molti hanno creduto che e-learning significasse trasportare su supporto elettronico il materiale cartaceo o mettere una telecamera davanti a un docente che svolge la sua lezione tradizionale o creare ambienti ricchi di “effetti speciali”, e di fatti le prime piattaforme erano per così dire “orientate al docente” perché ponevano l'enfasi sulla preparazione e gestione del materiale didattico. Successivamente, ripercorrendo in qualche modo quanto era successo nella didattica tradizionale, l'attenzione si è via via spostata sullo studente, ovvero dall'attenzione unicamente per l'insegnamento si è passati all'attenzione per l'apprendimento. L'e-learning pone al centro dei propri interessi l'attività di apprendimento dello studente, le metodologie e gli strumenti che vengono utilizzati, al fine di migliorare l'efficacia del percorso di acquisizione della conoscenza..

La ricerca in educazione matematica ha ampiamente dimostrato la complessità dei processi di insegnamento e apprendimento, e quindi l'inaffidabilità di modelli di apprendimento unidimensionali. In particolare ogni modello di apprendimento per l'educazione matematica deve tener conto che i comportamenti degli studenti sono influenzati da fattori che appartengono ad almeno tre livelli distinti:

- il livello cognitivo, che riguarda l'apprendimento di concetti e metodi specifici della disciplina;
- il livello meta-cognitivo, che riguarda il controllo dei soggetti sui propri processi di apprendimento;
- il livello affettivo o non-cognitivo, che riguarda convinzioni, emozioni e atteggiamenti, che sono in molti casi cruciali nell'orientare le decisioni e i comportamenti del soggetto che apprende (Zan, 2006).

La tecnologia può giocare un ruolo in ciascuno di questi livelli, compreso quello non-cognitivo, in quanto da un lato può influenzare profondamente convinzioni, emozioni e atteggiamenti di chi apprende, dall'altro è essa stessa oggetto di convinzioni radicate e può suscitare forti emozioni (Albano & Ferrari, 2008).

2.2 Teorie dell'e-learning

Molte sono le definizioni di e-learning che possiamo trovare in letteratura, tutte legate o all'esperienza didattica, che dipende dal mezzo elettronico usato (CD-ROM, Learning Management System, Virtual Worlds, etc) o dai metodi usati (distanza, misto, mobile). Una definizione più generale può essere ritrovata in Kahligi et al. (2008): “un metodo di apprendimento che usa le ICT per trasformare e supportare il processo di insegnamento e apprendimento ovunque”.

All'inizio l'e-learning è stato guidato dalle teorie di apprendimento tradizionali, quali il comportamentismo, il cognitivismo e il costruttivismo. Successivamente sono stati sviluppati alcuni modelli di pedagogia specifici per l'e-learning. Tra questi citiamo il Ciclo di Concettualizzazione di Mayes (1995), il Modello Conversazionale di Laurillard (1993), le E-tivities di Salmon (2002). Il primo è basato su tre passi: (1) concettualizzazione, dove gli studenti acquisiscono informazioni, (2) costruzione, dove gli studenti sono coinvolti nell'elaborazione dell'informazione acquisita svolgendo compiti significativi, (3) dialogo, dove la nuova conoscenza viene valutata durante conversazioni con tutor e pari e vengono forniti feedback utili a superare errori di concetto. Il modello di Laurillard's è basato sulle teorie di Vygotsky secondo cui l'apprendimento avviene per mezzo del dialogo tra tutor e studenti. Laurillard sottolinea che tale dialogo dovrebbe investire sia il livello teorico sia il livello pratico. Le interazioni necessarie possono essere: (1) narrative, ovvero si trasmette il sapere allo studente, (2) comunicative/discorsive, dove il tutor supporta la discussione e la riflessione sull'apprendimento dello studente, (3) interattive, dando gli opportuni feedback allo studente dopo lo svolgimento di compiti al fine di superare misconcezioni e validare la conoscenza acquisita e di guidare ulteriore apprendimento. Infine, le e-tivities di Salmon si riferiscono ad attività didattiche online. Le caratteristiche principali sono: (1) un piccolo pezzo di informazione, stimolo o sfida, (2) un'attività online che include la partecipazione individuale postando un contributo, (3) un elemento interattivo o partecipativo, come rispondere al post di un altro, (4) un sommario, feedback o critica da un moderatore.

La pedagogia dell'e-learning ha dato vita a vari cambiamenti nello stato dell'arte portando alla creazione di risorse di apprendimento più efficaci, al potenziamento degli strumenti di comunicazione, allo spostamento da modelli didattici basati solo sulla fornitura di materiale didattico ad altri basati su processi di apprendimento più completi prevedendo partecipazione ad attività di apprendimento.

2.3 Comunicazione e discorso matematico

L'approccio 'discorsivo' all'apprendimento della matematica sposta l'accento dell'educazione matematica dall'acquisizione di concetti e procedimenti alla partecipazione al cosiddetto 'discorso matematico'.

Dal punto di vista teorico si può affermare che i processi di comunicazione e rappresentazione possono essere visti come successivi rispetto alla costruzione dei concetti, o come più strettamente collegati ad essa; nel primo caso (ipotesi denotazionale) si ritiene che i concetti vengono costruiti indipendentemente e che i sistemi semiotici (comprese le lingue) servano per rappresentarli e comunicarli. Nel secondo caso (ipotesi strumentale) i concetti vengono costruiti anche grazie alla possibilità di utilizzare sistemi di segni e il pensiero stesso viene interpretato come una forma di comunicazione (Sfard, 2000, 2001).

In un'ipotesi di questo tipo la qualità del pensiero sarebbe fortemente influenzata dalla qualità del linguaggio. Una conseguenza didattica permanente di queste considerazioni è l'attenzione per la qualità dei linguaggi adottati e per la corrispondenza fra attività semiotiche e competenza linguistica dei partecipanti.

Questi punti di vista hanno anche altre conseguenze. Una è l'interesse per il linguaggio verbale (in termini tecnici, la lingua), che è centrale in tutte le attività matematiche, comprese quelle di ricerca, senza peraltro trascurare il ruolo di altri sistemi semiotici, come le notazioni simboliche, le figure o i grafici. Un'altra conseguenza è che tutte le analisi linguistiche vanno effettuate in un contesto di comunicazione tra persone, tenendo conto dei fenomeni che inevitabilmente si verificano e che sono studiati in modo efficace dalla pragmatica. La pragmatica, e in particolare la linguistica funzionale, forniscono strumenti in grado di interpretare in modo soddisfacente una grande quantità di comportamenti linguistici degli studenti, difficilmente spiegabili sul piano della sola logica o della grammatica. Un'analisi del linguaggio della matematica condotta dal punto di vista della pragmatica è stata sviluppata da Ferrari (2004) e ha messo in luce la debolezza di quelle posizioni che lo interpretano come il frutto dell'innesto di convenzioni specifiche e simboli su un non meglio identificato 'linguaggio naturale'. La componente verbale del linguaggio della matematica non è affatto 'naturale' ma è costituita da *registri* (cioè varietà d'uso) che presentano in forma massiccia ed estrema buona parte delle caratteristiche linguistiche dei registri evoluti, cioè delle forme usate in letteratura, nella saggistica e in generale nelle comunicazioni scritte (ma talvolta anche orali) fra persone colte. L'apprendimento della matematica non può però basarsi soltanto su registri evoluti: specie nella fase di concettualizzazione, sono necessarie forme linguistiche meno rifinite, tipiche dei registri colloquiali. Inoltre le funzioni cognitive dei testi orali e scritti sono profondamente diverse. Da questo punto di vista una piattaforma può fornire un'ampia gamma di possibilità di uso della

lingua, da usi molto vicini ai registri colloquiali (ad esempio in risorse del tipo ‘forum’) a usi più sofisticati (possibili in risorse del tipo ‘workshop’). Va tenuto presente che il medium con cui viene realizzata la comunicazione gioca una funzione rilevante sia per le opportunità semiotiche che offre, sia per gli atteggiamenti che suscita; la modalità scritta, ad esempio, offre opportunità cognitive enormi ma può anche bloccare alcuni soggetti linguisticamente più deboli.

D'altronde l'e-learning attualmente trova nella comunicazione testuale (scritta) la sua forma prevalente, anche se tende progressivamente a incorporare elementi multimediali.

Il frame della comunicazione non è costituito dal corpo, dalla percezione posturale e dall'espressione fisionomica dei soggetti che interagiscono: la comunicazione è priva, o comunque povera, di elementi para-extralinguistici (Calvani & Rotta, 2003): ciò induce il linguaggio a una riconfigurazione nello sforzo di farsi carico della necessità di esplicitare attraverso la comunicazione scritta quanto nella comunicazione diretta passa in altre forme. In ogni caso oggi si assiste sempre in modo più forte alla nascita di un nuovo linguaggio caratterizzato da una propria specificità: il linguaggio utilizzato in una comunicazione mediata da computer è infatti a metà strada tra lo scritto e il parlato ad esempio per il ricorso a tratti iconografici quali smile o faccine, per l'approccio maggiormente dialogico, per la contrazione degli indici simbolici paralinguistici ed extralinguistici.

Per tal motivo l'attività di e-learning, per le caratteristiche proprie del linguaggio del quale il pc risulta il maggiore artefice, può facilitare la mediazione per il passaggio ai registri colti e dunque all'interpretazione corretta di un testo matematico (Albano&Ascione, 2008).

2.4 Rappresentazione e semiosis

Diciamo subito che non esistono accessi ai concetti della matematica che non siano mediati da rappresentazioni semiotiche, ma addirittura che per alcuni concetti sono necessarie rappresentazioni particolarmente sofisticate. Nessuna rappresentazione visuale, ad esempio, può rappresentare, in modo puramente iconico e senza convenzioni esplicite, un insieme infinito, o la differenza fra una retta reale e una razionale.

Se si ritiene che i concetti matematici esistano al di fuori delle loro rappresentazioni (platonismo matematico) allora queste ultime hanno un ruolo secondario; se invece si dà valore al fatto che non è dato alcun accesso ai concetti matematici senza rappresentazioni semiotiche, allora queste sono fondamentali.

A tal proposito Duval sottolinea la necessità di non identificare i concetti con le loro rappresentazioni e per far ciò è necessario disporre di almeno due rappresentazioni per ogni concetto.

Naturalmente ciascuna rappresentazione svolge funzioni diverse e mette in luce proprietà diverse ma per Duval è fondamentale l'attività di conversione fra rappresentazioni, cioè la capacità di gestire in modo veloce e flessibile più rappresentazioni di uno stesso concetto. Questo non solo consente di distinguere fra i concetti e le loro rappresentazioni, ma consente di scegliere le strategie e gli algoritmi più efficaci. Un problema che riguarda i numeri razionali, ad esempio, può essere risolto utilizzando la rappresentazione frazionaria o quella decimale, o entrambe allo stesso tempo. È fondamentale che nei materiali didattici siano utilizzati diversi sistemi semiotici e siano frequentemente proposte attività di conversione.

La tecnologia dell'informazione mette a disposizione in modo ampio e flessibile diversi sistemi semiotici. Questo vale a maggior ragione per le piattaforme. Per questo è necessario che i sistemi semiotici necessari per fare matematica (oltre alle lingue, ad esempio le notazioni simboliche, le figure geometriche e i grafici) siano facilmente accessibili e utilizzabili in modo flessibile dagli studenti.

2.5 e-learning e apprendimento della matematica

Nel caso della matematica, l'e-learning offre opportunità nuove e alquanto inesplorate. Chiaramente i bisogni degli studenti sono diversi a seconda del tipo e del livello dell'istruzione considerata, e non si possono dare risposte che vadano bene sempre. Tuttavia, alcuni sforzi sono stati fatti (Descamps et al., 2006, Albano & Ferrari, 2008) per capire come usare il potenziale tecnologico per migliorare la qualità e la quantità dell'apprendimento della matematica.

Nella Conferenza Internazionale della matematica 2006 si è discusso ampiamente sull'uso della tecnologia nello scopo di implementare la qualità dell'apprendimento in matematica.

Bass, in particolare, riconosce cinque punti topici nell'educazione matematica che possono essere aiutati dalla tecnologia:

- 1) Estrarre grafici matematicamente accurati e pedagogicamente validi. I grafici possono essere usati per differenti propositi: esplorazione, investigazione di cosa succede se alcuni elementi variano, provare/illustrare idee, spiegazioni, soluzioni.
- 2) Tenere sotto controllo il lavoro degli errori della classe. Questo da una parte fornisce indicazioni (principalmente per insegnante) per reindirizzare il lavoro seguente, dall'altra permette (soprattutto per gli studenti) di vedere i propri miglioramenti incrementando il proprio senso di self-efficacy (propria efficacia o competenza) (Zan, 2000).
- 3) Coordinare le letture e i libri di testo. La tecnologia da l'opportunità di designare incarichi e attività addizionali per gli studenti.

- 4) Un accesso semplice al docente. La tecnologia dà l'opportunità di adottare un orario flessibile per incontrare gli studenti. Inoltre gli scambi di messaggi tra insegnante e alunno contribuiscono a tracciare lo storico di ogni studente e i suoi progressi.
- 5) La natura ripetitiva dell'individuale, sessioni fuori orario. Molto spesso alcuni non capiscono problemi che ciclicamente vengono posti e l'insegnante è costretto a rispiegare ogni volta. Le FAQ permettono agli insegnanti di rendere accessibili a tutti gli studenti le discussioni topiche potenzialmente vantaggiose.

Possiamo individuare ulteriori opportunità e miglioramenti (Albano & Ferrari, 2008):

- a) Personalizzazione: l'idea che esistano metodi di insegnamento migliori di altri è stata da lungo tempo scartata ed oggi è largamente condivisa l'opinione che metodi sono più o meno efficaci per particolari individui a seconda delle loro specifiche competenze e attitudini. In questo senso le piattaforme di e-learning permettono ai docenti di creare situazioni di apprendimento appropriati per ciascuno studente così come la disponibilità di vari materiali didattici (testi scritti, file multimediali, esercizi interattivi etc.) e di un'ampia gamma di stimoli attraverso vari canali sensoriali (uditivo, visivo, manipolativo, etc.) per ogni unità didattica. Il tracciamento del lavoro e degli errori di ciascuno, offerto dalle piattaforme di e-learning, può essere usato per modificare dinamicamente il percorso di apprendimento del singolo studente.
- b) Apprendimento cooperativo e costruttivo: una piattaforma di e-learning permette agli studenti di costruire nuova conoscenza interagendo con l'ambiente attraverso un certo numero di attività che coinvolgono interazioni tra pari o coi tutor. Moduli come 'workshop', 'wiki', 'task', 'quiz' o 'lesson' sono adatti in generale a disegnare attività di questo tipo.
- c) Linguaggio e rappresentazioni: il potenziale delle ICT riguardo problemi semiotici o linguistici è largamente sottostimato. Come visto nei paragrafi precedenti, in accordo a Sfard (2001) e Ferrari (2004), una piattaforma di e-learning fornisce molteplici opportunità per disegnare attività destinate a migliorare le competenze linguistiche, compresa la competenza nel linguaggio verbale, attraverso la disponibilità di un'ampia gamma di situazioni di comunicazione e l'opportunità di disegnare compiti che forzano lo studente a usare risorse linguistiche perfezionate e a raggiungere il coordinamento dei sistemi semiotici.

CAPITOLO III – PERSONALIZZAZIONE DELL'APPRENDIMENTO

3.1 Introduzione

Ormai oggi assistiamo sempre più al passaggio da una didattica centrata sul docente a una didattica centrata sullo studente, allontanandosi da quei modelli di apprendimento che vedevano tutti gli studenti svolgere lo stesso compito con la stessa strategia e con lo stesso metodo. In tale ottica risulta superata la convinzione pedagogica secondo cui esisterebbero trattamenti di istruzione migliori in assoluto, essendo l'apprendimento visto come il risultato di un processo su cui influiscono tanto i metodi di insegnamento quanto le differenze individuali.

Questa attenzione alla dimensione personalizzata dell'apprendimento sta portando a modifiche sostanziali nella gestione dei processi formativi anche se è pur vero che allo stato attuale risulta poco praticabile la promozione di una didattica che tenga conto delle esigenze del fattore personalizzazione, soprattutto se si pensa alle modalità tradizionali di insegnamento in presenza per la gestione di un consistente numero di studenti.

È proprio all'interno di questa realtà, che l'e-learning ha tutte le carte in regola per divenire uno strumento in grado di concretizzare le esigenze richieste dagli attuali contesti formativi. Oggi infatti la rete e le tecnologie offrono opportunità uniche riguardo a questi aspetti, sia dal punto di vista dell'individualizzazione delle esigenze e profili anche per un numero qualsivoglia elevato di studenti, sia da quello dell'offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che possano dunque tener conto delle esigenze individuali di ciascun utente. In tale ottica, l'infrastruttura tecnologica potrebbe essere utilizzata sia come mezzo capace di elaborare dati in maniera intelligente sia per supportare la gestione di processi di apprendimento dinamici.

3.2 Gli studi psico-pedagogici

Da tempo è stata sempre viva la consapevolezza che esistono differenze nei soggetti che apprendono e che di queste si dovrebbe tener conto per l'allestimento di ambienti di apprendimento. Infatti l'argomento personalizzazione non è una novità negli studi pedagogici, poiché già nella cultura novecentesca è stato osservato e analizzato sotto il concetto di individualizzazione da autori autorevoli quali Claparède (1920), Decroly (1929), Montessori (1920). Essi, attraverso i loro lavori,

hanno proposto, sia in prospettiva teorica che pratica, una “scuola su misura” costruita in funzione alle caratteristiche, alle esigenze degli alunni caratterizzata da un metodo di insegnamento basato sull’interesse-bisogno dell’apprendimento. Successivamente, altri autori, quali Kilpatrick (1994), Dottrens (1936) e Freinet (1967) hanno avuto il merito di aver formalizzato criteri di insegnamento che tenevano in considerazione la necessità di individualizzare la didattica senza renderla individualistica.

Il vero grande limite di questi primi studi centrati sull’individualizzazione, consisteva però nel non avere considerato ed esaminato la complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui. In primo luogo il disegno di adeguati percorsi formativi, non può prescindere da un’attenta analisi nei confronti di quegli aspetti della mente che gli approcci cognitivisti hanno osservato.

Sono i cognitivisti a puntare l’attenzione su fattori dell’apprendimento quali la percezione, l’attenzione, la memoria, il linguaggio, il pensiero, la creatività, gli stili cognitivi, gli stili intellettivi e le conoscenze possedute.

In secondo luogo è necessario considerare l’aspetto sociale dell’apprendimento, essendo esso stesso inserito in uno specifico contesto e influenzato dalle complesse relazioni sociali che, nell’interazione fra discente e docente e fra discenti, si attuano.

Studi prodotti da approcci costruttivisti e in particolare dal costruttivismo sociale, ritengono che le persone costruiscono attivamente nuova conoscenza solo quando interagiscono con gli altri all’interno di azioni collaborative .

Da quanto emerge da questa veloce panoramica si può dire che **l’individualizzazione**, che ha caratterizzato la “storia” negli anni 60’-80’ tiene conto del grado di adeguatezza dell’istruzione rispetto alle caratteristiche degli studenti, la misura in cui vengono create condizioni di apprendimento adatte ai diversi alunni. Baldacci (1999, 2002) in particolare la definisce come l’adattamento dell’insegnamento alle caratteristiche individuali dei discenti, tramite specifiche e concrete procedure didattiche.

La **personalizzazione** invece, a differenza dell’individualizzazione, tiene conto, nella sua realizzazione, di tutti quei fattori trascurati dall’individualizzazione e che la rendono capace di stimolare ogni singolo studente al raggiungimento del massimo delle proprie capacità intellettive, cioè al raggiungimento di una propria eccellenza cognitiva (Baldacci, 1999, 2002).

La personalizzazione inoltre, oltre a tener conto della complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui necessita, per la sua realizzazione, che tali fattori siano espressi dagli stessi studenti che dunque vengono a possedere la consapevolezza di scegliere almeno in parte il loro percorso di apprendimento; ciò infatti che in

particolar modo caratterizza la personalizzazione è la consapevolezza che il percorso di apprendimento si presenta agli occhi del soggetto come appartenente ad un orizzonte di senso di cui egli stesso, entro certi limiti contribuisce a determinare. In tal senso in un percorso di apprendimento personalizzato le scelte vengono, almeno in parte poste in essere dal soggetto stesso, se pur attraverso le necessarie negoziazioni con i suoi interlocutori che siano essi il docente, il tutor o, in una prospettiva più “tecnologica”, la stessa macchina.

E’ chiaro, come è già stato accennato nell’introduzione, che tanto l’individualizzazione quanto la personalizzazione sono piuttosto impraticabili per un numero elevato di allievi, con la sola modalità tradizionale della lezione in aula. In questa direzione invece la modalità del *blended learning*, sembra portare un contributo notevole. Va infatti sottolineato il valore aggiunto che la tecnologia può offrire in termini di personalizzazione dell’apprendimento sia dal punto di vista dell’individuazione di esigenze e caratteristiche anche di un numero elevato di utenti (cioè la designazione per ciascun’utente di un “profilo studente”), sia da quello dell’offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che bene si modellano per la creazione di percorsi di apprendimento che tengano conto delle esigenze di ogni singolo utente (Albano & Ferrari, 2007).

3.3 La personalizzazione dei percorsi di apprendimento.

Oggi, nello scenario mondiale, l’irrompere delle nuove tecnologie ha assegnato un significato e una urgenza rinnovata al tema della scolarizzazione di massa di lunga durata.

L’obiettivo della scolarizzazione di massa “prolungata”, lungo tutto l’arco della vita, è tornato ad essere ritenuto fondamentale nelle società democratiche tecnologicamente avanzate che hanno acquisito la consapevolezza di non poter lasciare gruppi consistenti di giovani e meno giovani estranei alla formazione e al mercato del lavoro nazionale e internazionale.

Nei nostri sistemi sociali la scolarizzazione ha avuto una connotazione sostanzialmente emancipativa; il diritto allo studio è stato concepito e praticato come un allargamento degli studi a coloro che ne erano stati esclusi. Ciò ha messo in primo piano i problemi di tutti coloro che per ragioni diverse non riuscivano ad usufruire di quel diritto.

La consapevolezza che esistono differenze nei soggetti che apprendono e che di queste si dovrebbe tener conto era viva da tempo anche se è nel corso di questo secolo che questo aspetto acquista rilevanza ed assume il carattere di un “problema tecnologico”.

Autori più o meno noti, da Montessori a Binet, a Claparede, Parkurst, Washburne, Decroly, hanno contribuito a disegnare una scuola capace di sostenere lo sviluppo cognitivo e sociale di ogni tipo di allievo, e nelle loro opere sono presenti elementi metodologici e soluzioni operative ancora attuali.

Claparede nel suo saggio “la scuola su misura” propone di introdurre, accanto ad un programma minimo comune, obbligatorio, un sistema di opzioni affinché l’alunno possa liberamente scegliere le materie da coltivare ed approfondire secondo le proprie preferenze (si afferma il diritto ad una forma di eccellenza personale distinta dell’uguaglianza formativa semplice).

La Parkurst attua la sostituzione delle aule con un sistema di laboratori specializzati, con l’abolizione dell’orario scolastico, suddivide il programma in blocchi mensili, a loro volta frazionati in unità di lavoro più piccole, chiama gli alunni alla corresponsabilizzazione attraverso la stipulazione di contratti, corredati da un sistema di tabelle per il monitoraggio della progressione del lavoro.

Washburne, approfondisce il settore della progettazione di materiali didattici (workbook), che permettono di progredire con gradi successivi di difficoltà, valutazione in itinere dei progressi di apprendimento, integrazione di esercizi aggiuntivi in caso di errore.

Oggi una delle problematiche maggiormente discusse nell’odierno dibattito scolastico è quella dell’individualizzazione.

A livello didattico l’idea dell’individualizzazione indica l’adattamento dell’insegnamento alle caratteristiche individuali dei discenti, attraverso precise e concrete modalità d’insegnamento.

Pertanto possiamo anche affermare che l’individualizzazione si riferisce alle strategie didattiche che mirano ad assicurare a tutti gli studenti il raggiungimento delle competenze fondamentali del curriculum, attraverso una diversificazione dei percorsi di insegnamento.

Più recentemente la possibilità di rendere pienamente rispondenti i contenuti ai bisogni ed agli stili individuali di apprendimento spinge sempre più frequentemente a parlare di “personalizzazione” dell’apprendimento.

I concetti di individualizzazione e di personalizzazione sono concetti entrambi impiegati per designare approcci didattici antitetici all’insegnamento collettivo.

Anche se non è raro trovare nella letteratura i due termini usati indifferentemente è opportuno tenere presenti alcuni elementi di distinzione e sottolineare che solo in parte essi implicano significati sovrapponibili.

Possiamo dire innanzitutto che l’individualizzazione è stato uno dei temi che ha caratterizzato la storia delle tecnologie dell’istruzione negli anni ’60-’80; è allora facile trovare in tale concetto un riflesso della filosofia dominante di quegli anni.

Il termine di “personalizzazione” invece, pur di antica origine, prende maggiore forza negli anni ’90, e sarebbe preferibile riservare il termine di personalizzazione ad espressioni come “apprendimento personalizzato” essendo infatti la personalizzazione prodotto di attività del tutto interne al soggetto che apprende, e pertanto scarsamente prevedibili e sequenziabili.

In particolare possiamo dire che il concetto di individualizzazione implica l'esistenza di un apparato didattico e curricolare predisposto, che prevede un tragitto con obiettivi, fasi, materiali, metodi di intervento prestabiliti.

In un sistema di istruzione in primo luogo si definiscono con chiarezza quali sono gli obiettivi a cui tutti i soggetti dovranno arrivare; di norma tali obiettivi vengono tradotti in performance obiettivamente osservabili, in modo da poter consentire delle valutazioni più accurate: riuscire a portare tutti ad un alto livello di istruzione rappresenta infatti l'impegno centrale dei sistemi di istruzione individualizzati.

All'interno di tali ambienti l'individualizzazione consiste poi nel fatto che, mantenendo sostanzialmente stabili gli obiettivi da conseguire, il "sistema" dispone di una sua flessibilità, in virtù della quale "si adatta" al soggetto: i tragitti specifici predisposti possono essere più o meno modificati per venire incontro alle istanze e difficoltà specifiche che l'allievo incontra.

Infatti il sistema (sia l'insegnante o la macchina) deve essere pronto a recepire i segnali di difficoltà che provengono dall'allievo e ad adeguarsi conseguentemente; allorchè esso avverte che le risposte del soggetto sono inadeguate interviene proponendo stimolazioni e tragitti diversificati in funzione della tipologia del problema.

I fattori in virtù dei quali il sistema può "giocare", in altri termini le variabili che consentono l'individualizzazione vera e propria sono molteplici.

Il fattore più semplice da manipolare, e storicamente il primo impiegato nei sistemi individualizzati, è la variabile tempo: si può mantenere immutabile il tragitto di istruzione e dare più tempo a chi è più lento nell'apprendimento. Si entra poi nelle diverse possibilità di modifica dei materiali.

La "personalizzazione" indica invece l'insieme delle strategie didattiche finalizzate a garantire ad ogni studente una propria forma di eccellenza cognitiva, attraverso possibilità elettive di coltivare le proprie potenzialità intellettive.

In altre parole, l'individualizzazione ha lo scopo di far sì che certi traguardi siano raggiunti da tutti, la personalizzazione è finalizzata a far sì che ognuno sviluppi i propri personali talenti; nella prima gli obiettivi sono comuni per tutti, nella seconda l'obiettivo è diverso per ciascuno.

Quindi possiamo dire che il concetto di personalizzazione porta con una rilevanza più forte in primo piano il soggetto con le sue inclinazioni profonde. Un apprendimento personalizzato è un apprendimento centrato sul soggetto che apprende. In tal senso in un percorso di apprendimento personalizzato gli obiettivi non possono essere totalmente predefiniti: essi vengono, almeno in parte, scelti o posti in essere dal soggetto stesso nel suo tragitto, se pur attraverso le necessarie negoziazioni che egli instaura via via con i suoi interlocutori (docenti, tutor, macchina, e cc.)

Negli approcci che valorizzano forme di apprendimento personalizzato si tende oggi generalmente a valorizzare di più la diversità. Si tratta di portare la comunità a crescere nella diversità, stabilendo momenti intermedi di condivisione tra i soggetti.

3.4 I caratteri distintivi della progettazione personalizzata

L'Individualizzazione di un percorso di insegnamento consiste nell'adeguare gli interventi educativo-didattici alle caratteristiche individuali del soggetto per aiutarlo a crescere nel migliore modo possibile. E' questo un principio che afferma la necessità di rispettare, nel contesto dell'azione educativa-didattica, le differenze intraindividuali in rapporto a interessi, capacità, difficoltà, attitudini, carattere, inclinazioni, esperienze precedenti di vita e di apprendimento.

Ovvero si è aperto la strada al concetto di personalizzazione del percorso educativo come risposta ad una maggiore attenzione della didattica alle esigenze ed alle caratteristiche cognitive, esperienziali, emozionali e motivazionali degli allievi.

Si tratta pertanto di progettare e realizzare attività personalizzate che affianchino o integrino le attività didattiche svolte nel gruppo classe.

Nel contesto delle rapide trasformazioni che hanno già investito e stanno sempre di più mutando la fisionomia delle realtà formative e produttive si delinea la necessità di prevedere, anche nel caso di un percorso individualizzato, lo sviluppo di nuove forme di organizzazione e di trasmissione dei processi del "saper fare" che consentono agli individui di scegliere non solo "che cosa" ma anche il "come" e il "quando imparare" (è questo l'ambito della formazione in autoistruzione).

In quest'ottica espressioni come "apprendimento aperto", "formazione a distanza", "istruzione individualizzata" ed "autoistruzione" sono solo alcuni dei tasselli che costituiscono il mosaico sul quale si progettano e si realizzano le attività educative in grado di fornire istruzione ed aggiornamento professionale secondo un ritmo personalizzato ed anche discontinuo nel tempo.

Il principio fondamentale della didattica differenziale è infatti quella di "accomodare" la pratica didattica alle peculiari esigenze di ogni studente.

La didattica differenziale, dunque, e tutti i processi ad essa sottesi devono necessariamente prevedere un'attenzione anche a quelle che sono state definite situazioni di eccellenza, ovvero che tra i compiti e gli obiettivi fondamentali dei percorsi educativi ci deve essere anche quello di stimolare gli studenti a raggiungere alti livelli di traguardi formativi.

Un itinerario didattico finalizzato al raggiungimento di certi obiettivi, sia per gli allievi che sono in situazione di ritardo sia per gli allievi che invece possono contare su capacità intellettive più alte, può essere ipotizzato come un susseguirsi logico di tappe, delimitate da traguardi verificabili.

Un primo tipo di individualizzazione è quello che, pur proponendo attività didattiche comuni, adegua obiettivi e criteri di valutazione alle differenti fasce di discenti mentre il secondo tipo di individualizzazione, in un certo senso complementare al precedente, è quello che pur mantenendo costanti obiettivi generali, traguardi, criteri e strumenti di valutazione si propone, tuttavia, di fare variare, per quanto possibile, le attività svolte dagli allievi, nonché le modalità e i ritmi di lavoro. Pertanto l'efficace progettazione e realizzazione di un percorso di apprendimento-insegnamento individualizzato, sia che esso sia rivolto a soggetti con problemi di insuccesso scolastico o formativo sia nel caso che esso sia indirizzato a soggetti che al contrario rappresentano situazioni di eccellenza, non può prescindere da un'attenta considerazione e da un'analitica conoscenza delle seguenti variabili:

- conoscenza approfondita dell'allievo sul piano cognitivo, socio-affettivo e delle relative problematiche;
- costante attenzione ai livelli di motivazione e di partecipazione degli allievi;
- costante monitoraggio del processo formativo;
- valutazione del processo formativo;
- progettazione modulare delle attività didattiche;
- certificazione dei crediti formativi;
- tutoring (in presenza e/o a distanza, personale e didattico).

Ciascuna di queste variabili è a sua volta analizzabile e scomponibile in una serie di fattori strategici e valoriali, che si influenzano reciprocamente e secondo rapporti non sempre prevedibili e conseguenze non sempre precisamente quantificabili.

La corretta conoscenza, la giusta considerazione e l'efficace uso, in fase di progettazione e di realizzazione di un percorso individualizzato, dei fattori legati a ciascuna variabile rappresentano le condizioni necessarie per la migliore gestione dei percorsi di insegnamento e di apprendimento, anche in relazione agli aspetti concernenti la valutazione finale dei risultati.

Quando però parliamo di personalizzazione dei percorsi di insegnamento e di apprendimento non intendiamo fare riferimento in modo esclusivo agli aspetti motivazionali che riguardano gli allievi, in quanto la piena riuscita dei percorsi individualizzati dipende anche dalla motivazione e dal coinvolgimento mirato e intelligente dei docenti. Pertanto se una scuola intende adottare sistemi di insegnamento-apprendimento individualizzati, il primo investimento deve essere fatto sugli insegnanti, che vanno considerati come risorsa strategica per la realizzazione dell'obiettivo.

3.5 Modelli, metodi, strategie e tecnologie didattiche per la personalizzazione dei percorsi di apprendimento e di insegnamento.

Una classificazione necessaria, ma non sempre netta e facile è quella che distingue fra modelli (mastery learning, didattica modulare, ecc.) , strategie didattiche (didattica attiva, istruzione a distanza, ecc.) e metodi per l'apprendimento (Feuerstein, La Garanderie, ecc.).

Un modello educativo, dal punto di vista descrittivo, può essere definito come una particolare strutturazione delle variabili fondamentali che entrano in gioco in una pratica educativa a partire da un insieme di concetti, principi e metodi di riferimento. Al posto del termine modello è del resto spesso utilizzato con analogo significato anche quello di sistema e di metodo.

Le strategie sono invece indicazioni che riguardano l'intero processo di insegnamento/apprendimento rispetto alle sue caratteristiche organizzative e alle trasformazioni che possono mutarne gli effetti. Anche i termini metodi e strategie hanno, nella operatività, molti punti in comune tanto che spesso sono usati come sinonimi, anche se bisogna dire che i metodi hanno come carattere peculiare il concetto di trasferibilità; ciò significa che le esperienze di studiosi del settore come Feuerstein o De La Garanderie sono state sintetizzate e organizzate, dagli autori stessi, per essere riprodotte da insegnanti e formatori nella loro pratica di insegnamento.

Ovviamente, non si ripetono esperienze educative nel vero senso della parola: ogni metodo deve essere adattato al contesto specifico e viene influenzato dal formatore che ne fa uso.

Ogni modello, metodo e/o strategia didattica ha una storia che ne spiega l'origine, la destinazione e le migliori modalità d'uso; ma è da premettere che nessun modello, metodo o strategia è, di per sé, risolutivo di tutti i problemi della didattica. Proprio questa considerazione dovrebbe obbligare il formatore a impadronirsi nell'arco della sua carriera di più modelli e di metodi e ad approfondire il significato delle diverse strategie didattiche.

La conoscenza e la pratica di modelli, metodi e strategie diversi si configura come una cassetta degli attrezzi professionali che amplia lo spettro di intervento del formatore. Andiamo a descriverne alcuni più importanti.

3.5.1 Il modello di apprendimento ipertestuale.

I progressi tecnologici che avevano dapprima interessato la simulazione della realtà per scopi tecnico/scientifici, hanno ormai trovato un naturale campo di applicazione anche nel settore dell'educazione e della formazione. Ci riferiamo in particolare a tutte quelle applicazioni dell'informatica che hanno a che fare con l'interattività, la multimedialità e la telematica.

E' cresciuta la consapevolezza di come la multimedialità dei percorsi di apprendimento possa contribuire a creare un ambiente di apprendimento ideale dove testi, suoni e immagini si integrano per simulare al meglio la realtà, combinando in maniera ideale esperienza ed astrazione. L'interattività dei percorsi di insegnamento/apprendimento rende inoltre possibile l'esecuzione di esercitazioni e di prove di verifica nonché la possibilità di modificare continuamente in corso d'opera lo stesso percorso formativo. Inoltre la multimedialità interattiva offre tanto la presenza contemporanea di più linguaggi quanto modelli comunicativi che integrano la comunicazione interpersonale e quella di massa e si arricchisce di modalità psicologiche di fruizione che stimolano allo stesso tempo i processi percettivi, emotivi e cognitivi.

I percorsi individualizzati di insegnamento/apprendimento che utilizzano strumenti multimediali e interattivi presentano numerosi vantaggi per gli utenti e, in particolare, possono aiutare a raggiungere i seguenti obiettivi:

- sviluppare la metacognizione, evidenziando attraverso i link le relazioni concettuali esistenti tra i documenti e tra i concetti; l'ipertesto, se ben progettato, rende visibili le connessioni, l'architettura logica, i criteri di selezione;
- consentire al discente di apprendere con i meccanismi della mente umana, cioè attraverso associazioni e sincronismi;
- facilitare l'adozione di una metodologia di studio basata sulla tecnica degli approfondimenti successivi, vale a dire partire da una visione globale e generica di un argomento per scendere poi nel dettaglio;
- valorizzare le conoscenze e le esperienze pregresse del discente, le sue aspirazioni e i suoi interessi attraverso test di ingresso e attività di tutorato;
- migliorare la comunicazione docente-discente e tra discenti come esperienza qualificante e irrinunciabile dell'esperienza formativa;
- possibilità di autogestire il proprio percorso formativo;
- ripetere in autonomia un modulo risultato più difficile, soffermandosi e approfondendo gli argomenti ritenuti più interessanti;
- applicare il sapere che si sta apprendendo a casi di studio personali senza quindi spazio temporale tra l'apprendere e il fare.

3.5.2 Il metodo De La Garanderie

Il metodo designato col nome del suo autore, nasce dagli studi condotti sui metodi di apprendimento degli allievi più brillanti.

De La Garanderie individua due modelli di apprendimento: uno basato su stimoli visivi, uno basato su stimoli uditivi. Nel primo caso il soggetto si serve di stimoli visivi per comporre le immagini mentali che permettono di immagazzinare i concetti; nel secondo caso il soggetto si serve di stimoli uditivi. A seconda del canale usato si determina una abitudine, cioè un comportamento, a privilegiare lo stesso canale per ricordare le cose apprese.

De La Garanderie traccia un profilo epistemologico dell'allievo nella convinzione che è possibile lavorare per ampliare queste abitudini.

E' evidente, ad esempio, che docenti che si servono esclusivamente di spiegazioni orali creano un disagio notevole per quegli allievi che privilegiano stimoli visivi, i quali debbono procedere a vere e proprie traduzioni dei messaggi.

Insegnare efficacemente richiede, quindi, una capacità di uso dei due canali o comunque procedere a quello che viene definito "addestramento", cioè una serie di esercizi che consente agli allievi di imparare la seconda lingua pedagogica, quella che manca.

3.5.3 La strategia del cooperative learning

La parola "cooperazione" deriva dal latino cum e operari ed ha il significato di associazione di più individui che operano e lavorano insieme per uno scopo comune.

Il cooperative learning, cioè l'apprendimento cooperativo, è una delle strategie didattiche più studiata e viene ritenuto da molti studiosi uno dei modelli più efficaci con gruppi di allievi eterogenei. Infatti è da tutti ritenuta una delle strategie didattiche più coerenti e convincenti in società complesse che accolgono, sempre di più, diversità di ogni tipo al loro interno, da quelle razziali a quelle sociali a quelle individuali.

L'apprendimento cooperativo è un metodo di apprendimento/insegnamento in cui la variabile significativa è la cooperazione tra studenti (Comoglio, 1996). Esso si avvale di tecniche di conduzione della classe in cui gli studenti lavorano in piccoli gruppi per migliorare reciprocamente il loro apprendimento.

In ambito educativo il principio di cooperazione, nel nostro secolo, da una parte ha assunto il significato di collaborazione costante tra docente e studenti e, dall'altra, indica una collaborazione costante degli allievi tra loro in un mutuo spirito di comprensione e simpatia (Prevot 1963).

Infatti l'apprendimento cooperativo agisce a:

- livello motivazionale, in quanto stimola la motivazione intrinseca ad apprendere e favorisce l'autostima del soggetto;
- livello sociale, perché promuove lo sviluppo di relazioni positive e costruttive fra gli studenti, creando un clima di classe cooperativo e integrante;

- livello cognitivo, poiché migliora il livello di cooperazione di tutti gli allievi, valorizzando gli stili individuali d apprendimento

La pratica collaborativa è stata a lungo utilizzata in ambito didattico senza che ciò implicasse necessariamente l'uso delle telecomunicazioni e delle tecnologie informatiche.

Più recentemente l'attenzione dei ricercatori si è rivolta alle potenzialità offerte dai canali telematici di comunicazione, che agevolano notevolmente le possibilità di interazione a distanza e quindi di cooperazione tra attori remoti del processo educativo.

Quest'area emergente di studio, conosciuta come apprendimento collaborativo supportato dal computer (CSCL: Computer Support Collaborative Learning), si basa sulla nozione che i computer possano essere usati per facilitare, valorizzare e ridefinire le interazioni tra i membri di un gruppo. Ad esempio un'importante possibilità offerta dall'utilizzo della tecnologia ipertestuale rispetto alle tecniche tradizionali è che il materiale raccolto da un gruppo di studenti può essere utilizzato come risorsa da altri gruppi in momenti successivi. E' così che le nuove tecnologie possono avere il ruolo di strumenti attraverso i quali il modello tradizionale di classe e di apprendimento individuale può essere sostituito con il modello di "comunità di apprendimento", in cui i membri del gruppo si pongono come fine comune la costruzione di una conoscenza condivisa e distribuita.

CAPITOLO IV – LA PIATTAFORMA IWT

4.1 Un esempio di piattaforma intelligente e adattativa :IWT

La piattaforma IWT è un sistema di didattica adattativo e intelligente italiano, che può essere classificato come tutoring system, nato dalle esperienze di ricerca del Polo di Eccellenza per l'apprendimento e la conoscenza, condotte in Europa e capaci di inglobare tecnologie all'avanguardia, idee innovative e standard emergenti nel settore dell'e-learning. La piattaforma IWT è attualmente distribuita come prodotto commerciale da MOMA.

Essa nasce dalla considerazione che ogni contesto didattico necessita della propria soluzione di e-learning specifica. E' dotata di caratteristiche di Learning Content Management System (LCMS), sistema adattativo di apprendimento che consente la definizione di esperienze personalizzate e collaborative di insegnamento / apprendimento attraverso la rappresentazione esplicita della conoscenza e l'uso di tecniche e strumenti del Web. In particolar modo il suo sviluppo, essendo utilizzato in modo massiccio ad ingegneria su corsi scientifici, con una particolare attenzione per la matematica, è stato molto spinto per l'apprendimento di questa materia; al suo interno infatti sono stati sviluppati molti applicativi per facilitare l'apprendimento dei concetti matematici.

La caratteristica peculiare della piattaforma è la sua capacità di creare, gestire e aggiornare in itinere, in maniera automatica, per ogni studente, unità di apprendimento personalizzate (Albano et. al. 2007a, Albano et. Al. 2006) grazie alla presenza di tre modelli (Conoscenza, Studente, Didattico) che andiamo di seguito a descrivere.

4.2 Modellazione della conoscenza

IWT possiede un Modello per la Conoscenza che rappresenta tutte le informazioni associate al materiale didattico disponibile in maniera intellegibile al computer. Esso distingue tre livelli:

- 1) le ontologie, che permettono di formalizzare domini cognitive attraverso la definizione di concetti e relazioni tra concetti;
- 2) i learning objects (LOs), che possono essere definite come “una qualsiasi risorsa digitale che può essere usata per supportare l'apprendimento” (Wiley, 2000);
- 3) i metadata, che sono informazioni descrittive e permettono di etichettare ogni LO per associarlo a uno o più concetti definite in un'ontologia.

Andiamo in maggiore dettaglio.

Le ontologie sono state implementate in IWT usando il paradigma dei grafi. Il primo passo è scegliere un opportuno livello di granularità per spezzare in parti atomiche le varie conoscenze. Così abbiamo realizzato un'opportuna decomposizione del dominio di Geometria, costruendo un dizionario di circa 150 termini, ovvero concetti elementari. Questi sono stati usati come nodi di un grafo i cui archi sono relativi a due relazioni di ordine "Is Required By" (pre-requisito) e "Suggested Order", e una relazione di decomposizione "Has Part". Nella figura seguente vediamo un pezzo dell'ontologia creata.

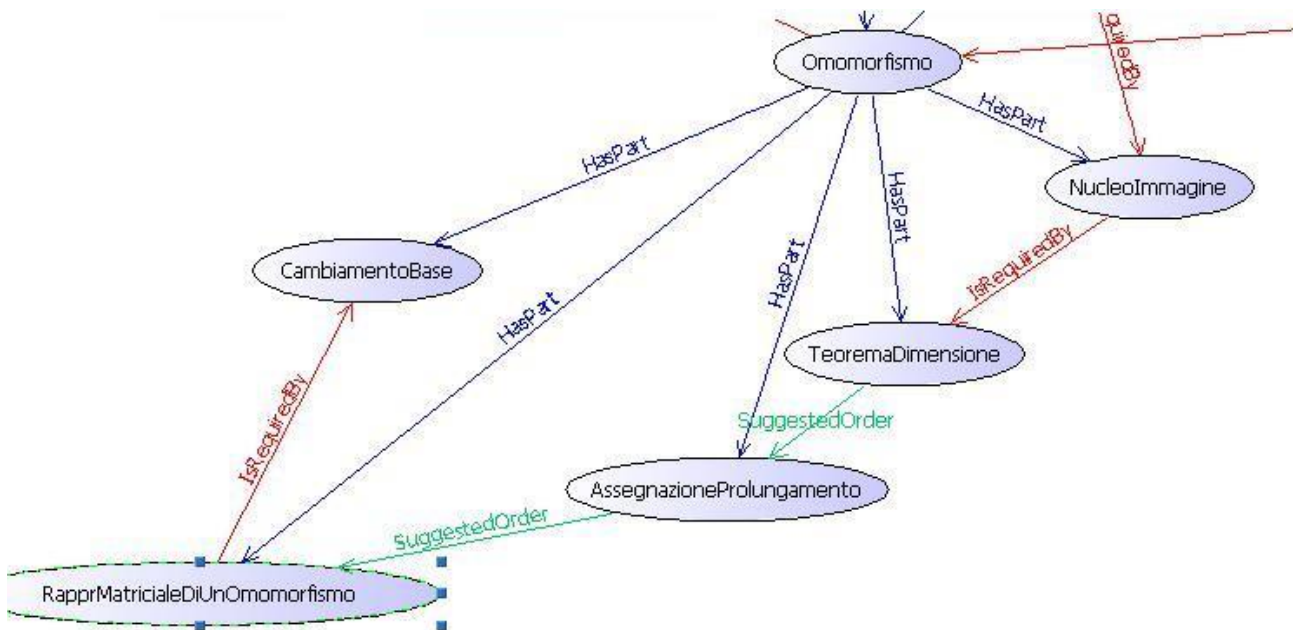
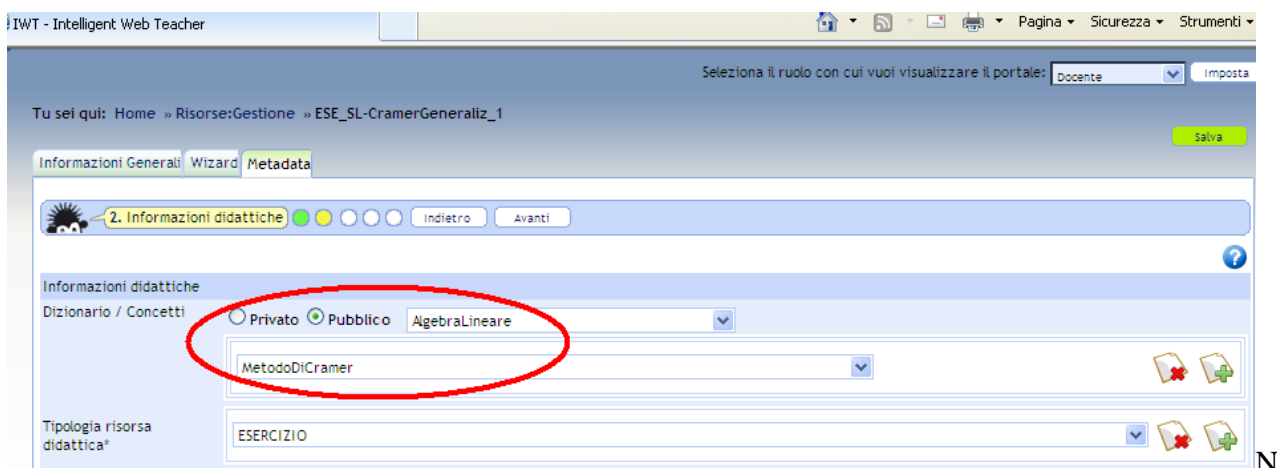


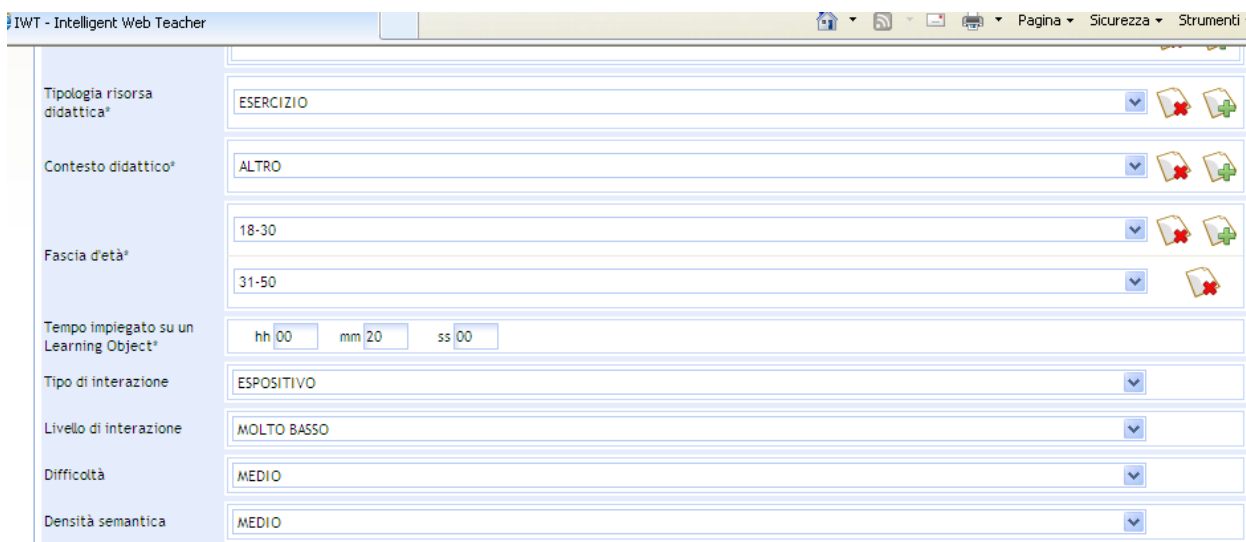
fig. 2.1 Un esempio di ontologia in IWT

Una volta creata l'ontologia, bisogna associare il materiale didattico presente in piattaforma ai nodi del grafo, ovvero IWT dev'essere in grado di riconoscere che un determinato materiale spiega un certo concetto. Il materiale è organizzato in LO, ciascuno dei quali è annotato con un metadata che permette di specificare il concetto (o i concetti) del dominio a cui si riferisce il contenuto del LO in oggetto. Per esempio, nella figura seguente il metadata del LO è associato al concetto "Metodo di Cramer" nell'ontologia "AlgebraLineare" (cfr. ovale rosso).



N

Le altre informazioni del metadata vengono usati per condivisione e riuso della risorsa e per associare la risorsa al dominio di conoscenza. Un esempio di metadata in IWT e quello riportato in fig. 2.2 dove si trovano vari campi divisi in informazioni didattiche e informazioni tecniche.



Tra le informazioni didattiche vi sono i campi che qui di seguito brevemente descriviamo:

- **Concetto:** che è il campo che permette l'associazione della risorsa con il dominio della conoscenza (ontologia). Esso contiene il nome del dizionario di riferimento (in qualche senso è il nome della materia=dominio di conoscenza) e il nome del concetto del dizionario scelto, a cui si riferisce il LO.
- **Tipologia di risorsa didattica:** che può essere un testo, una lezione, un esperimento, una simulazione, un esame, un grafico, una autovalutazione, una figura, delle slide, un esercizio, un questionario ecc.
- **Contesto didattico:** È l'ambiente di apprendimento tipico dove si intenda che l'uso del LO

abbia luogo. Può assumere valore: scuola media inferiore, superiore, altro.

- **Fascia di età:** È l'età tipica degli utenti a cui è consigliata la risorsa
- **Tempo:** È il tempo tipico o approssimativo che serve per lavorare con la risorsa
- **Tipo di interazione:** È il tipo di interazione supportato dal LO. Può assumere valore: espositivo, misto, attivo, non definito. In una risorsa *espositiva*, il flusso di informazioni va dalla risorsa al discente, seguendo il paradigma del learning- by- reading. Esempi sono saggi, videoclip, tutti i tipi di materiale grafico, documenti ipertestuali. In una risorsa *attiva*, l'informazione va invece generalmente dal discente alla risorsa seguendo il paradigma del learning- by- doing. Esempi sono esercizi, questionari, simulazioni
- **Livello di interazione:** È il livello di interattività tra l'utente finale e il LO. Varia da un livello di interazione molto basso and un livello alto.
- **Difficoltà:** Indica quanto difficile è il lavoro da fare con il LO rispetto al target tipico di audience. Varia da molto difficile a molto facile.
- **Densità Semantica:** È la misura dell'utilità del LO comparata rispetto alla sua grandezza (size) o durata. Anch'essa varia da molto alto a molto basso.

Tra le informazioni tecniche troviamo i campi:

- **Dimensione:** È la grandezza della risorsa digitale reale (non compressa) misurata in byte
- **Tipo di file associato:** È il formato del file associato alla risorsa. Può essere usato per identificare il software necessario per accedere alla risorsa.
- **Durata:** È il tempo (in secondi) che prende la risorsa fruita in modo continuo. È particolarmente utile per suoni, filmati, animazioni.

4.3 Modellazione dello studente

IWT possiede un Modello Studente che permette di associare a ciascuno studente un "profilo" cioè una collezione di alcune informazioni generali sullo studente quali ad esempio, le conoscenze acquisite, le preferenze dello studente concernenti la tipologia di contenuti, l'approccio didattico, il livello di interattività desiderata, la densità semantica, ecc (Koch, 1999).

L'analisi da parte della piattaforma dei fattori caratterizzanti ciascun profilo è un processo in cui possono essere identificati due momenti: la profilazione esplicita e quella implicita. La profilazione esplicita deriva da dichiarazioni esplicite da parte dell'utente, tramite ad esempio la compilazione di un opportuno questionario; la profilazione implicita si definisce invece a partire dalle informazioni che il sistema utilizzato è in grado di "catturare" durante l'interazione con l'utente (History) e attraverso il suo comportamento (Behaviour). Per la profilazione implicita vengono presi in

considerazione alcuni parametri che vanno a costituire il log della sessione in una piattaforma: tempo trascorso all'interno di una lezione, risultati conseguiti se sono previste attività di valutazione automatica, controllo delle propedeuticità per garantire o negare l'accesso a moduli successivi, interventi nei forum, partecipazione alle sessioni sincrone.

In IWT la profilazione tanto esplicita quanto implicita dell'utente prevede l'analisi di due fattori:

- **Preferenze cognitive:** dati che spiegano come allo studente piace imparare; consiste nelle preferenze di ogni utente in relazione a parametri pedagogici, come si vede dalla figura seguente.

| | |
|---------------------------------------|--|
| Lingua | IT |
| Contesto didattico* | ALTRO |
| Fascia d'età* | 18-30 |
| Tempo impiegato su un Learning Object | min. hh 00 mm 01 ss 00 max. hh 01 mm 00 ss 00 |
| Difficoltà | MOLTO FACILE MOLTO DIFFICILE |
| Densità semantica | MOLTO BASSO MOLTO ALTO |
| Massima Dimensione Supportata | 75000000 bytes |
| Velocità di connessione | 1 Mbps |
| Tempo di attesa | 10 minuti |
| Tipologia risorsa didattica* | ESERCIZIO |
| Tipo di interazione* | ATTIVO |
| Livello di interazione | MEGIO MOLTO ALTO |

fig. 2.4 le preferenze dello studente

- **Stato cognitivo:** dati che comunicano cosa lo studente conosce del dominio in esame. Consiste dei concetti, relativi a un dominio, per cui lo studente ha la sufficienza e ne conserva la votazione, come si vede dalla figura seguente.

| Dizionario | Concetto | Voto |
|--|-------------------|------|
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | Determinante | 5 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | MatriceAScalini | 8 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | Matrici | 7 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | MetodoDiCramer | 8 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | MetodoDiGauss | 9 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | OperazioniMatrici | 6 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | Rango | 7 |
| <input type="checkbox"/> AlgebraLineare2 | SistemaLineare | 5 |

Numero di righe da visualizzare: 10

Pag. 1 di 1 Val a pagina: 1

fig. 2.5 lo stato cognitivo dello studente

4.4 La creazione intelligente del learning path

Nel presente paragrafo mostriamo come IWT crea un percorso di apprendimento personalizzato sulla base del profilo utente e sulla modellazione della conoscenza creati.

Il processo di costruzione di un percorso di apprendimento personalizzato è attivato da un docente che decide di creare un corso. I passaggi principali attraverso i quali tale processo viene messo in atto sono:

1. Fissare l'obiettivo cognitivo: la selezione dell' obiettivo cognitivo del percorso di apprendimento

In tale fase, il docente sceglie una ontologia tra quelle esistenti in piattaforma, che rappresenta il dominio di conoscenza di interesse. All'interno di quest'ultima egli seleziona gli "obiettivi cognitivi", ovvero i concetti obiettivo, per il proprio corso (cfr. ovali pieni nell'esempio seguente).

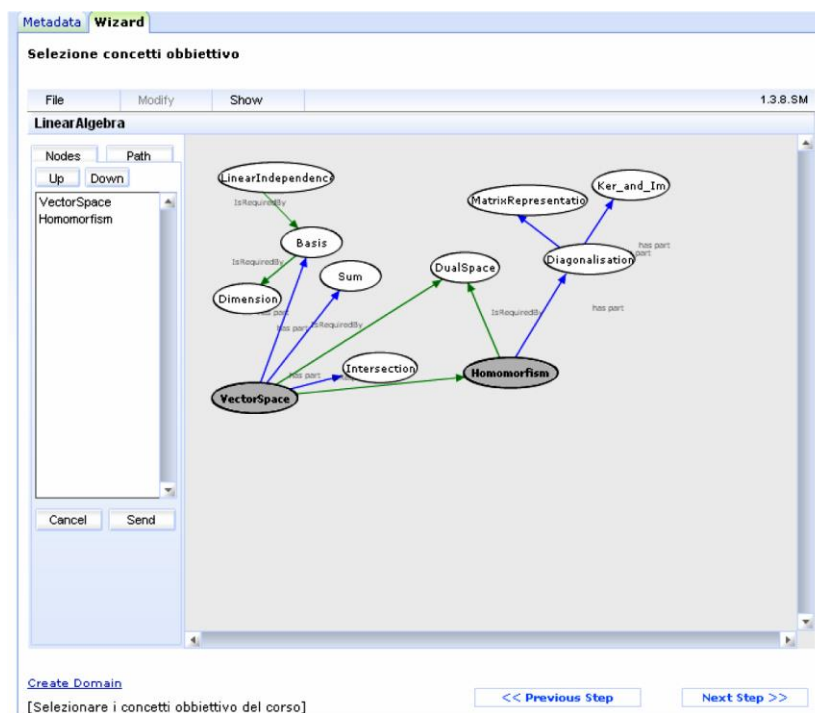


fig. 2.6 La creazione del learning path

Eventualmente in tale fase il docente può decidere di aggiungere anche delle fasi di test durante il corso, ad esempio a metà, alla fine o all'inizio dello stesso.

- La pubblicazione del corso

Dopo la selezione da parte del docente degli obiettivi cognitivi, il corso potrà essere pubblicato in piattaforma e reso accessibile agli studenti che hanno compilato apposita domanda. Fino a

questo momento il corso includerà i concetti obiettivi del corso e tutti i concetti che bisogna conoscere per arrivare a tali obiettivi cognitivi, ma non sarà ancora formalizzato in una sequenza di contenuti, e dunque di risorse, atte a creare il percorso di apprendimento personalizzato per ciascuno studente; tale realizzazione rappresenta infatti lo scopo della terza e più importante fase di questo percorso.

3. *La creazione del percorso di apprendimento personalizzato*

Quando uno studente accede ad un corso per la prima volta, IWT avvia un componente software chiamato LIA (Learner Intelligent Advisor) (Capuano et al., 2002, 2003) capace di generare in maniera automatica per ogni studente un percorso di apprendimento personalizzato in base alle informazioni raccolte dal profilo studente, dalle specifiche del corso, dai LO trovati nel repository della piattaforma. In particolare, la prima operazione eseguita da LIA è quella di usare l'ontologia per creare una sequenza ordinata di concetti che servono per raggiungere i concetti obiettivo. Successivamente LIA elimina dal percorso di apprendimento quei concetti che lo studente già conosce. Tale conoscenze pregresse sono dedotte da LIA attraverso l'analisi del profilo studente. Infine LIA compone una sequenza di opportuni LO capaci di spiegare tutti i concetti contenuti nel percorso personalizzato. LIA deve associare, ad ogni concetto contenuto nel percorso, un LO scelto all'interno del repository. In generale, all'interno della repository, sono presenti più LO capaci di spiegare lo stesso concetto. LIA sceglierà tra i tanti, quello che meglio incontra le preferenze dello studente esplicitate nel profilo. Alla fine di questo processo si otterrà il percorso di apprendimento personalizzato caratterizzato da una sequenza di concetti che lo studente ancora non conosce che si traduce in una sequenza di risorse che spiegano tali concetti avvicinandosi alle preferenze cognitive dello studente. Alla fine di questo percorso IWT avvierà la sequenza di LO assemblata da LIA. Il learning path personalizzato può, qualora necessario, essere aggiornato in maniera automatica considerando i feedbacks prodotti dagli studenti nella fase di assestamento, se prevista. In caso di fallimento, è anche prevista una procedura automatica per sviluppare un percorso di apprendimento alternativo. In questo caso, il processo fin'ora descritto può ripartire generando e aggiornando il percorso di apprendimento.

CAPITOLO V - II CORSO PERSONALIZZATO DI GEOMETRIA SU IWT

5.1 I Learning Object

Lo sfruttamento del potenziale di personalizzazione in IWT necessita della disponibilità di vari LO che spieghino uno stesso concetto. Questo ha un ruolo chiave per supportare la diversità dei metodi di apprendimento adatti ai vari studenti, che nella visione costruttivista è visto come guida dell'apprendimento della matematica (Balacheff&Sutherland, 1999). Inoltre l'interazione con LO (cioè con l'informazione) è il primo passo in tutti i modelli di e-learning citati (Mayes, Laurillard, Salmon). Pertanto particolare attenzione è stata data alla trasposizione didattica (Chevallard, 1995) nella piattaforma, ovvero all'azione di passare dalla conoscenza che viene dalla ricerca alla conoscenza da insegnare e alla conoscenza effettivamente insegnata. Ciò ha portato a disegnare vari LO, tenendo conto tanto delle pedagogie dell'e-learning quanto dei risultati in Educazione Matematica.

Nei paragrafi che seguono diamo una breve descrizione dei vari tipi di LO creati.

5.2 Hypermedia

Nella pratica scolastica, è evidente il diverso stile degli studenti nello studiare che, troppo spesso, è basato su modelli di apprendimento mnemonico e su uno studio molto focalizzato, trascurando eventuali variazioni e possibili connessioni. Come ha sottolineato il National Council of Teachers in Mathematics (2000), quando gli studenti sono capaci di vedere le connessioni tra i vari contenuti matematici, arrivano ad avere una visione globale e integrata della disciplina. Sono stati costruiti, pertanto, alcuni LO che sono una generalizzazione degli hypermedia. Essi sono composti da un testo HTML principale con le parole chiavi; i link portano ad altri LO, differenti sia come tipologia di risorse (ad esempio, diapositive animate, esercitazioni, video, ecc) che come parametri didattici/pedagogici (approccio didattico, la densità semantica, difficoltà, livello di interattività, ecc.). I link nel testo principale, sono stati progettati per consentire agli studenti di effettuare le connessioni tra i diversi temi della conoscenza matematica, e in particolare a vedere lo stesso concetto dal un punto di vista diverso (ad esempio, significato geometrico di un concetto algebrico), oppure per approfondire i riferimenti storici o motivazionale; o ancora ad esplicitare i dettagli tecnici (ad esempio in una prova); utilizzare varie rappresentazioni semiotiche e il loro coordinamento (Duval 2006).

5.3 Video strutturati

Secondo Rav (1999), l'intero know-how matematico è immerso nelle dimostrazioni, le quali contengono tutte le metodologie matematiche, concetti, strategie per la soluzione dei problemi, le connessioni tra le teorie e così via. Sulla base del pensiero di Rav, alcune riflessioni hanno guidato la creazione di LO adatti in particolare allo studio delle dimostrazioni. La nostra osservazione di partenza è che, in generale, una dimostrazione non è un testo tutto inscindibile, ma è possibile individuare una struttura composta da diversi blocchi autonomi, che hanno un significato proprio e un ruolo specifico all'interno del percorso di dimostrazione (ad esempio, sotto-obiettivi) . Ciascuno di tali blocchi può essere considerato come un modulo al quale è possibile fare riferimento in un modo conciso o in modo ampio a seconda delle esigenze. La composizione di più moduli porta alla costruzione di nuove conoscenze, fino ad arrivare a dimostrare la tesi del teorema in gioco. In questo quadro sono stati progettati e implementati alcuni LO che consistono in video strutturati, realizzati con una lavagna multimediale. I video riproducono una sorta di lezione in presenza, focalizzata sui passi scritti e sui loro audio-commenti. Vari colori sono stati utilizzati per indirizzare il bilanciamento dell'attenzione. Pezzi di conoscenze pregresse (anche in un diverso formato digitale) possono essere memorizzati in altre pagine della lavagna e poi opportunamente richiamati. Inoltre, i video sono stati suddivisi in più parti corrispondenti ad un frazionamento didattico della dimostrazione, che sono i moduli. Al fine di rendere evidenti i moduli che costituiscono la dimostrazione, i video sono stati ulteriormente gestiti; ogni pezzo ha un titolo che è una frase sintetica che descrive la caratterizzazione del modulo. La lista di questi titoli costituisce un indice laterale e muovendosi lungo di esso lo studente può accedere direttamente alla parte relativa del video. E' chiaro che, dove più composizioni sono possibili, solo una scelta sarà presentata, e sarà dato come compito a casa agli studenti creare altri indici laterali possibili.

5.4 Esercizi statici e dinamici

Al fine di coprire il dominio di conoscenza con le competenze di problem solving, l'attenzione è stata rivolta ad offrire LO che trattino di tecniche risolutive. A tale scopo due tipi di esercizi sono stati implementati: uno statico e uno dinamico. Il primo consiste in un modello di soluzione in formato testo per vari esercizi, corredato da molti commenti e richiami teorici per contrastare l'acquisizione mnemonica di alcune procedure di solito applicate in maniera meccanica da parte degli studenti, senza una precedente analisi dell'esercizio in gioco. Questo significa che gli studenti non pensano alla correttezza dell'applicazione di una procedura di una certa soluzione, cosa che

spesso porta a risultati non corretti in quanto la procedura scelta non è applicabile. Inoltre, spesso, non tengono conto di alcune specifiche condizioni e l'applicazione automatica della procedura standard porta a perdere tempo (anche raggiungendo il risultato corretto), che è una variabile importante da affrontare per un esame scritto a tempo limitato. Gli esercizi dinamici, invece, sono stati progettati e realizzati utilizzando Mathematica e WebMathematica, attraverso la creazione di opportuni algoritmi di generazione di infiniti e sempre diversi esercizi *on the fly*. Tutti gli algoritmi sono basati sulla strategia del *divide et impera*: ogni esercizio è stato infatti diviso in uno o più passi elementari, cioè lo studente è guidato alla soluzione affrontando sotto-problemi più facili. Ad ogni passo elementare viene dato un suggerimento, e di conseguenza è necessaria una interazione, in modo che gli studenti debbano dare una risposta all'attuale sotto-problema. Una valutazione automatica della correttezza della soluzione data viene realizzata, utilizzando Mathematica. Gli algoritmi sono stati opportunamente pensati al fine di riconoscere e distinguere gli errori di carattere teorico (ad esempio, le incoerenze logiche) e gli errori di calcolo. Di conseguenza, un messaggio diverso di avviso viene generato, il che suggerisce la natura più probabile dell'errore e adeguati mezzi per correggerlo.

5.5 Slide animate

Sono significative soprattutto quando entrano in gioco alcune costruzioni di figure. La costruzione di una figura è spesso la prima cosa da fare e compito chiave per risolvere correttamente un problema. A tale scopo, la conversione tra descrizione verbale e rappresentazione figurale è fondamentale. Ferrari (2004) nota che una quota rilevante di errori degli studenti può essere attribuita a questioni linguistiche. L'animazione e la sincronizzazione tra la descrizione testuale e la corrispondente rappresentazione grafica permette di guidare lo studente in tale conversione. Anche in questo caso l'animazione è stata progettata secondo alcuni opportuni passi elementari. I principali argomenti trattati in questo modo riguardano la geometria analitica. Qui le conversioni tra le rappresentazioni verbali, grafiche e simboliche sono state trattate da animazioni adeguate, che consentono di vedere passo dopo passo, ad esempio, la costruzione delle equazioni della retta o del piano in due e tre dimensioni attraverso una continua migrazione dalla situazione grafica alla descrizione verbale e alla formula algebrica. In questo modo l'allievo può fare l'esperienza della genesi della equazione nota della retta e allo stesso tempo fa esperienza del coordinamento di diversi sistemi semiotici. Quest'ultima è un'utile attività di apprendimento, che ricordiamo non è spontanea ed è la chiave della comprensione in matematica (Duval, 2006);

5.6 Quiz

E' stato creato un ampio database di domande con valutazione automatica, sfruttando tutti i formati ammessi (scelta multipla, vero / falso, di corrispondenza, a risposta breve, risposta numerica). Si tratta prevalentemente di domande a risposta chiusa. Sono possibili diverse modalità di scelta delle domande (quiz mirati su un solo argomento, quiz di riepilogo di un intero corso, quiz le cui domande sono scelte casualmente su una o più categorie, ...) e diverse modalità di gestione da parte degli studenti. In generale, una volta completato il quiz, è previsto che lo studente abbia accesso alla risposta corretta eventualmente corredata di qualche parola di spiegazione. Le caratteristiche dei quiz presentano diverse opportunità didattiche, e anche qualche rischio. È compito di chi costruisce i questionari di sfruttare al massimo le opportunità e di rendere minimi i rischi. Queste due operazioni possono rendere molto laborioso il processo di costruzione dei questionari. Gli studenti, individualmente o a gruppo, possono utilizzare i questionari per valutare in tempo reale alcuni aspetti della loro preparazione. Questo può avere un forte impatto non solo sulle loro conoscenze, ma anche sulla loro sicurezza, sul cosiddetto *senso di autoefficacia*. La possibilità di provare e di sbagliare può sbloccare gli studenti e contribuire a costruire un atteggiamento più positivo riguardo ai loro prodotti. I rischi nell'uso di risorse di questo tipo sono in parte legati alle modalità di preparazione delle domande; ovviamente le domande che non contengono formule o immagini sono molto più facili e veloci da preparare. E' alquanto evidente che questionari costituiti da sole domande a risposta chiusa non siano adeguati per valutare la preparazione degli studenti, in quanto le capacità di costruire una strategia risolutiva, di rappresentarla e di motivarla a parole sono fondamentali e vengono in questo modo trascurate. Inoltre questo potrebbe portare a ricadute negative estremamente gravi: infatti le domande a risposta chiusa consentono in genere strategie poco legate alla comprensione dei temi oggetto di verifica (risposte a caso, per esclusione ecc.) con il rischio di indurre insegnanti e studenti a investire sempre meno sulle capacità di argomentare. Si tratta quindi di far capire agli utenti che le conoscenze e le abilità valutate in questo modo sono soltanto una parte di quelle richieste. Nel capitolo successivo esamineremo possibilità di autovalutazione anche per domande a risposta aperta.

CAPITOLO VI – LE ATTIVITA' DI APPRENDIMENTO ON-LINE

6.1 Il lavoro individuale

Le piattaforme di e-learning forniscono in generale un numero di attività che coinvolgono interazione tra pari o tra studenti e tutori. Dal punto di vista della teoria della Didattica della Matematica, tutte queste attività possono essere collocate nel quadro del cosiddetto approccio “socioculturale” (o “discorsivo”) (cfr. Kieran *et al.*, 2001).

In questo paragrafo descriviamo un'attività di interazione studente-docente, realizzata a supporto nella prima metà del corso frontale di Geometria (prime sei settimane). Essa è consistita nell'assegnare agli studenti dei compiti da svolgere singolarmente fuori dalle lezioni in presenza e da inviare al docente entro una scadenza fissata, utilizzando lo strumento "Compito a casa" presente in IWT, che permette al docente di aprire una corrispondenza privata con ogni studente, pur dando a tutti gli studenti lo stesso compito. Una volta passato il termine per la consegna, lo strumento non permette più allo studente di consegnare il compito svolto. La pedagogia che soggiace a questo tipo di attività si inquadra nel modello conversazionale di Laurillard, poiché la caratteristica del “Compito a casa” promuove il processo di comunicazione tra tutor e discente. Infatti, una volta che lo studente ha consegnato il compito svolto, il docente può dare il suo feedback sia in termini di voto sia come giudizio più ampio che porti al superamento di misconcezioni o alla validazione della conoscenza acquisita. Il docente può richiedere di rifare il compito a valle dei suoi commenti, e quindi lo studente può inviare una nuova consegna, e il ciclo può continuare fino a quando il docente lo ritiene opportuno.

La piattaforma IWT mantiene traccia di tutti i messaggi scambiati tra docente e studente rispetto a un fissato compito, costruendo una “storia” del compito che diventa accessibile in qualsiasi momento e permette di vedere i progressi eventuali dello studente (Bass in Descamps *et al.*, 2006).

I problemi proposti, che sono stati sei (con scadenza settimanale), sono stati progettati per coinvolgere gli studenti in una partecipazione più attiva al corso e per fornire orientamenti sulle abitudini di studio. Le linee guida possono essere trovate nell'approccio discorsivo alla matematica (Sfard, 2001) e nell'uso di vari sistemi semiotici (Duval, 1995) e vari registri linguistici, da quelli colloquiali a quelli avanzati (Ferrari, 2004). In particolare si sono proposti:

- a) problemi su questioni teoriche, che richiedevano agli studenti di costruire ed esplicitare un ragionamento di breve durata;

- b) problemi che richiedevano agli studenti considerazioni su efficienza computazionale o sui gradi di libertà che hanno impatto sulla soluzione successiva;
- c) problemi sulle prove che richiedevano una riscrittura e una rielaborazione.

6.1.1 I compiti a casa

In questo paragrafo riportiamo i testi degli esercizi assegnati nell'attività individuale.

1. Confronto costo computazionale tra Sarrus e Laplace

Data una generica matrice A di ordine 3, calcolare il costo computazionale (cioè il numero di somme e moltiplicazioni algebriche) del calcolo del determinante di A effettuato applicando la regola di Sarrus e applicando il teorema di Laplace (per semplicità, possiamo fissare la prima riga). Stabilire quindi quale dei due metodi di calcolo è il più efficiente.

L'esercizio 1 vuole porre l'attenzione dello studente su problemi di efficienza computazionale. Spesso gli studenti tendono a imparare una tecnica di calcolo o di risoluzione giustificando la propria scelta col fatto che comunque arrivano alla soluzione. Non tengono in alcun conto che talvolta giungere alla soluzione nella maniera più semplice e veloce possibile è fondamentale nella risoluzione di un problema.

Nel caso specifico del calcolo del determinante, osserviamo che la maggior parte degli studenti tende a imparare e a preferire la regola di Sarrus, pur essendo la meno efficiente. Qui potremmo azzardare l'ipotesi che tale preferenza sia giustificata dalla "facilità" mnemonica dovuta alla rappresentazione grafica della regola (figura...). La preferenza è tale che spesso gli studenti sono portati a usare tale regola anche per matrici di ordine maggiore di 3, cosa non ammissibile.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

2. Teorema di Rouchè-Capelli

Rivedere gli appunti presi a lezione e riscrivere l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli.

L'esercizio 2 ha il doppio scopo di indurre gli studenti a rivedere gli appunti presi a lezione, pratica che dovrebbe poi diventare routinaria, e man mano che scrivono a riflettere sul senso di ciò che vanno scrivendo.

3. Vettori linearmente dipendenti - Proporzionalità

Dimostrare che, se v_1, v_2, \dots, v_n sono vettori proporzionali, allora sono linearmente dipendenti. Inversamente dare un controesempio per mostrare che un insieme di n vettori ($n \geq 3$) linearmente dipendenti non sono necessariamente proporzionali.

L'esercizio 3 è diviso in due parti. Nella prima allo studente viene richiesto di fare una piccola dimostrazione, quindi di usare le sue conoscenze pregresse per comporre un ragionamento che porti dall'ipotesi alla tesi. Nella seconda, invece, si pone l'accento sulla sufficienza della condizione precedente, quindi si richiede allo studente di fornire un controesempio. Nella pratica scolastica troppo spesso vengono presentati sempre e solo casi in cui l'enunciato in esame "funziona", raramente casi in cui "non funziona".

4. Vettori linearmente dipendenti – Combinazioni lineari

Considerate il seguente enunciato.

“Sia V un K -spazio vettoriale e siano v_1, \dots, v_t vettori di V . Allora v_1, \dots, v_t sono linearmente dipendenti se e solo se ciascuno di essi è combinazione lineare degli altri.”

Di seguito vi vengono dati i passi essenziali di una sua probabile dimostrazione. Se l'enunciato è vero, utilizzateli per costruirne una dimostrazione. Se è falso, date un contro esempio e individuate quale passo di quelli dati fallisce spiegandone la ragione.

Passo 1: *Per ogni $i=1, \dots, t$ possiamo moltiplicare la combinazione citata al passo 2 per a_i^{-1} , ottenendo $a_i^{-1}a_1v_1 + \dots + a_i^{-1}a_iv_i + \dots + a_i^{-1}a_tv_t = 0$.*

Passo 2: *La combinazione $a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0$ ha soluzioni non nulle.*

Passo 3: *Per ogni $i=1, \dots, t$ esiste a_i^{-1} .*

Passo 4: *Per ogni $i=1, \dots, t$ possiamo scrivere $v_i = -a_i^{-1}a_1v_1 - \dots - a_i^{-1}a_tv_t$.*

Passo 5: *Tutti gli scalari della combinazione citata al passo 2 sono non nulli.*

L'esercizio 4 presenta un enunciato in forma di equivalenza e vengono poi dati i passi per una sua possibile dimostrazione. L'enunciato presentato è vero solo in un verso dell'equivalenza. Il

fallimento dei passi dati sta nell'uso dei quantificatori universale ed esistenziale, che sono legati nel caso in esame alla definizione di lineare dipendenza di vettori.

5. Sistemi di generatori

Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3 $\mathbf{u}=(1,2,0)$ e $\mathbf{v}=(-1,1,1)$, vogliamo mostrare che \mathbf{u} e \mathbf{v} non sono una base di \mathbb{R}^3 perché non riescono a generare tutto lo spazio vettoriale.

A tal fine, consideriamo un qualsiasi vettore $\mathbf{w}=(a,b,c)$ di \mathbb{R}^3 e supponiamo per assurdo che \mathbf{w} sia generato da \mathbf{u} e \mathbf{v} . In tal caso si avrebbe:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0}) + \mu(-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = (\lambda - \mu, 2\lambda + \mu, \mu)$$

per opportuni λ e μ reali, da cui si ha, uguagliando primo e ultimo membro componente per componente:

$$\begin{cases} \lambda - \mu = a \\ 2\lambda + \mu = b \\ \mu = c \end{cases}$$

Trovare un esempio di vettore numerico \mathbf{w} di \mathbb{R}^3 tale che il sistema sopra scritto sia incompatibile, ovvero trovare un vettore \mathbf{w} tale che

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{c} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

L'esercizio 5 punta l'attenzione sulla relazione tra il concetto di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e la incompatibilità di un sistema lineare.

6. Prolungamento lineare

Data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(-1,1,1) = (0,1), f(0,2,1) = (2, -1), f(-2,4,3) = (2,1)$$

vogliamo sapere se esiste il suo prolungamento lineare.

A tal fine andiamo a verificare se i tre vettori su cui è assegnata la funzione sono una base di \mathbb{R}^3 . Calcoliamo pertanto il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (r_3 \rightarrow r_3 - 2r_1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui deduciamo che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Pertanto il prolungamento richiesto esiste se e solo se le immagini date sono linearmente dipendenti allo stesso modo.

Andiamo quindi

a trovare la relazione di dipendenza lineare che intercorre tra i vettori su cui sono assegnate le immagini. Poniamo:

$$a(-1,1,1) + b(0,2,1) + c(-2,4,3) = (0,0,0) \quad (1)$$

$$(-a - 2c, a + 2b + 4c, a + b + 3c) = (0,0,0)$$

da cui il sistema lineare

$$\begin{cases} -a - 2c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

Sapendo che i vettori dati sono linearmente dipendenti, allora il sistema sopra ha infinite soluzioni (xché ne deve avere di non nulle), quindi osservando che il minore della matrice dei coefficienti individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo, si ha il sistema lineare ridotto:

$$\begin{cases} -a = 2c \\ a + 2b = -4c \end{cases}$$

che risolto per sostituzione in avanti dà le soluzioni $(-2c, -c, c)$. Per $c=1$, si ottiene $(-2, -1, 1)$, che sostituito nella (1) dà

$$-2(-1,1,1) - 1(0,2,1) + (-2,4,3) = (0,0,0)$$

da cui si deduce ad esempio che

$$(-2,4,3) = 2(-1,1,1) + 1(0,2,1)$$

Il prolungamento richiesto esiste se e solo se vale

$$f(-2,4,3) = f(2(-1,1,1) + 1(0,2,1)) = 2f(-1,1,1) + f(0,2,1) \quad (2)$$

Andiamo a controllare se la (2) è vera o meno:

$$2f(-1,1,1) + f(0,2,1) = 2(0,1) + (2,-1) = (2,1) = f(-2,4,3)$$

Poiché la (2) è verificata, possiamo concludere che il prolungamento richiesto esiste. Tuttavia, poiché ci sono solo due vettori linearmente indipendenti, tale prolungamento non è univocamente determinato.

Completare l'insieme

$$S = \{(-1,1,1), (0,2,1)\}$$

a una base di \mathbb{R}^3 , assegnare l'immagine del vettore aggiunto e calcolare il relativo prolungamento lineare.

L'esercizio 6 si focalizza sui gradi di libertà del prolungamento lineare in caso di vettori linearmente indipendenti ma non generatori dello spazio vettoriale.

6.2 Il lavoro cooperativo

Dopo il lavoro individuale, nelle successive sei settimane, è stata predisposta un'attività di cooperazione, utilizzando gli strumenti "Wiki" e "Forum". Essa è consistita nel richiedere agli studenti di redigere un documento comune che rispondesse a una precisa consegna del docente. La scrittura del documento è stata realizzata attraverso il *wiki*, che permette a un gruppo di persone di scrivere su uno stesso documento. La pedagogia alla base di questa attività è da assimilarsi al ciclo di concettualizzazione di Mayes e alle e-tivities di Salmon, poiché essa parte dall'interazione con LO disponibili nella piattaforma, poi prevede di elaborare l'informazione acquisita attraverso la partecipazione attiva a un dialogo e la costruzione di un prodotto comune tra pari e docente. Di seguito descriviamo il ciclo dell'attività:

1. Gli studenti sono invitati a prendere visione di alcuni LO, consistenti in problemi risolti messi a disposizione della piattaforma;
2. Successivamente gli studenti sono tenuti ad individuare e scrivere (nell'ambiente wiki) tutte le definizioni, le proprietà e i teoremi che vengono coinvolti in tali problemi, indicando anche, in quale parte precisa del procedimento vengono utilizzati. Questa attività è utile per cambiare l'atteggiamento degli studenti verso i problemi, che sono sempre più risolti con metodi mnemonici, portando ad errori anche pesanti derivanti dal presupposto errato che le procedure di soluzione non sono collegate ai risultati teorici.
3. Per problemi che prevedono più procedure di risoluzione, agli studenti è stato chiesto di applicare almeno una procedura alternativa a quella presentata negli LO. Osserviamo che comunque i vari metodi di risoluzione sono presenti in piattaforma. Questo compito pertanto mira a promuovere negli studenti la consapevolezza della disponibilità di una gamma di opportunità per risolvere lo stesso problema e che la scelta di una o di un'altra può dipendere da vari fattori;
4. Alcuni problemi differiscono solo nel modo in cui i dati sono rappresentati, per cui anche le procedure di risoluzione variano; in tali casi gli studenti sono tenuti a individuare e scrivere i vari tipi di problemi e per ognuno di essi scrivere la soluzione come sequenza di azioni da eseguire.
5. Il docente legge i prodotti degli studenti ed evidenzia le frasi errate, distinguendo tra i concetti sbagliati e risposte imprecise o incomplete.
6. Infine gli studenti hanno l'obbligo di spiegare perché tali procedure non sono corrette, fornendo esempi contrari, se possibile, e poi scrivere le relative risposte corrette.

6.3 Alcune procedure di valutazione aperta

La descrizione delle precedenti attività individuali e cooperative non sarebbe completa se non affrontassimo il problema della valutazione, che costituisce essa stessa un'attività di apprendimento per come l'abbiamo concepita. Poiché le attività sono state svolte durante tutto il processo di insegnamento (frontale) al fine di migliorare il processo di apprendimento, la valutazione dev'essere di tipo "formativo" (Rodriguez Conde, 2008). La ricerca nel campo della valutazione va in questa direzione, come confermato dall'importanza che viene data alla metacognizione (cioè al controllo dello studente del proprio processo di apprendimento) che viene favorita da una continua fase di riflessione dopo i feedback ricevuti lungo il processo di insegnamento. Questo è in particolare vero per attività che prevedono risposte aperte, come quelle descritte sopra. Pertanto abbiamo sperimentato alcune metodologie di valutazione formativa sia per le attività individuali che per quelle cooperative, sfruttando i vari strumenti offerti dalle piattaforme di e-learning, come forum, area condivisa di materiale didattico, compito per casa, wiki. Per ogni modello saranno presi in considerazione pro e contra. In tutti i casi, dopo la scadenza per la consegna, il docente esamina le risposte sottomesse e classifica gli eventuali errori. Successivamente la valutazione continua con uno dei modelli di seguito descritti.

6.3.1 Corrispondenza uno a uno tra docente e studente

Il docente commenta il prodotto, in modo da stimolare la riflessione dello studente e da indurlo all'autocorrezione, se il caso, quindi invia allo studente il prodotto commentato, richiedendo una nuova sottomissione. La corrispondenza tra studente e docente può continuare fin quando il docente lo ritiene opportuno. Questo modello è implementato attraverso lo strumento "Compito a casa". Chiaramente è un modello adatto a piccoli gruppi di studenti, per il lavoro notevole che richiede al docente, oppure il docente dev'essere affiancato da un cospicuo numero di tutor che lo aiutino nella gestione delle correzioni individuali. Osserviamo inoltre che è necessario distribuire bene compiti e scadenze, poiché il carteggio tra studente e docente può essere lungo. Pertanto questo modello si adatta meglio alla valutazione di competenze trasversali piuttosto che di specifiche conoscenze. Infatti lo studente potrebbe essere scoraggiato a continuare il carteggio quando l'argomento di discussione diventa troppo lontano dagli argomenti di studio del momento, cosa che non accade per le competenze trasversali.

6.3.2 Corrispondenza uno a uno tra docente e studente e disponibilità on-line di un modello di soluzione

Il docente evidenzia gli errori, senza né commentarli né correggerli, e rimanda il prodotto così evidenziato allo studente, attraverso lo strumento “Compito a casa”. Contemporaneamente egli rende disponibile on-line nell’Area Condivisa il modello di soluzione più o meno dettagliato. Gli studenti devono comparare la propria soluzione con il modello dato e riflettere sugli errori evidenziati dal docente in modo da autocorreggerli. Questa metodologia di valutazione è applicabile a gruppi numerosi di studenti. A differenza del caso precedente, gli studenti hanno l’intera responsabilità di capire e correggere i propri errori. Allo stesso tempo hanno anche la responsabilità di autovalutarsi, poiché non c’è nessun controllo da parte del docente. Questo può essere un limite, che potrebbe essere superato utilizzando ad esempio lo strumento *blog* e richiedendo allo studente di tenere una sorta di diario dove annotare le proprie osservazioni derivanti dall’attività di comparazione dei propri prodotti col modello di soluzione. Questo potrebbe essere interessante anche per tener traccia del processo di apprendimento.

6.3.3 Disponibilità on-line di un modello di soluzione

Il docente rende disponibile on-line nell’Area Condivisa modello di soluzione più o meno dettagliato. Gli studenti devono comparare la propria soluzione con il modello dato. Questo richiede loro di riflettere sui propri prodotti, sulla loro correttezza, sulla probabile equivalenza tra le proprie strategie di risoluzione e quelle usate dal docente, etc. Oltre alle osservazioni fatte nel caso precedente, osserviamo che qui gli studenti hanno l’ulteriore onere di individuare i propri errori. Questa metodologia è adatta con gruppi grandi di studenti e con problemi procedurali.

6.3.4 Forum su errori comuni

Il docente individua gli errori e li posta in un forum, così che la comunità di apprendimento deve capire e correggerli. Qui ognuno lavora sugli errori di tutti e la comprensione di un singolo arricchisce tutti gli altri. Questo modello di valutazione è stato applicato alle attività cooperative descritte precedentemente. E’ inoltre utile quando gli errori sono ripetitivi, quindi il forum permette al docente di dirigere l’attenzione degli studenti su alcuni punti critici nello studio in oggetto e di promuovere la collaborazione per superare le difficoltà comuni incontrate. Osserviamo che strumenti come forum e wiki di solito non supportano la scrittura matematica. Pertanto l’uso di questi strumenti dovrebbe essere focalizzato sul linguaggio verbale invece che su quello simbolico, altrimenti gli studenti potrebbero scoraggiarsi e non prendere parte all’attività per problemi tecnici.

CAPITOLO VII – RISULTATI SPERIMENTALI

7.1 Alcune considerazioni preliminari

Le attività svolte, sia individuali che cooperative, hanno prodotto tantissimo materiale in forma scritta ed anche una banca di errori che riteniamo fonte preziosa di indicazioni tanto per il recupero di lacune, ma ancor più per prevenire queste ultime.

Una prima cosa che è balzata agli occhi è stata la distinzione degli errori in almeno due categorie, che noi abbiamo chiamato “*cognitivi*” (o “*di concetto*”) e “*semantici*”. Proviamo qui ad azzardare una definizione, o meglio a dare un criterio per distinguere i primi dai secondi.

Diremo *errore semantico* un errore che o è indotto da una scrittura sbagliata e successivamente interpretata coerentemente, o è il prodotto di una conversione non adeguata dal pensiero al testo scritto. In quest’ultimo caso un docente “collaborativo” nei confronti dello studente, riesce a rendersi conto che lo studente “*ha capito ma si è espresso male*”.

Diremo *errore cognitivo* un errore dove si evince come componente prioritaria la carenza cognitiva specifica sul concetto in oggetto.

Osserviamo che spesso dove c’è un errore semantico c’è anche un errore di concetto, ma quello che andiamo qui a sottolineare è quando l’errore di concetto può essere indotto da un errore semantico/linguistico.

Riteniamo che una catalogazione e un’analisi di queste due categorie di errori, possa portare importanti implicazioni dal punto di vista didattico. Perciò, nonostante questa tesi non esaurisca questo argomento, vuole in ogni caso dare un contributo che vuole essere punto di partenza per approfondimenti successivi. Nel seguito, proponiamo alcune esempi di catalogazione e commentiamo i casi presi in esame.

7.2 Catalogo degli errori: alcuni esempi e loro analisi

In questo paragrafo presentiamo alcuni dei più comuni errori di concetto che abbiamo ritrovato nei protocolli delle attività svolte. I testi degli studenti sono riportati in riquadri, a cui segue il nostro commento.

Un sistema lineare $Ax=b$ è compatibile (=ammette soluzioni) se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta:

$rkA=rkA'$ dove A' è la matrice A affiancata dalla colonna dei termini noti b : $A'=(A|b)$

Dimostrazione:

Per dimostrare la validità del teorema, dobbiamo osservare che dato un sistema lineare $Ax=b$, questo sia riducibile a scalino così da ottenere un sistema $Sx=b$ che sia equivalente a quello di partenza $Ax=b$ e che, dato che il rango di una matrice si conserva dopo aver effettuato operazioni elementari, abbia lo stesso rango $rkA=rkS$.

Ora se il rango della matrice completa è maggiore del rango della matrice incompleta il sistema è incompatibile, cioè ha solo la soluzione nulla: rkS diverso rkS'

Se invece le due matrici hanno rango uguale il sistema è compatibile e quindi ammette sempre almeno una soluzione: $rkS=rkS'$

In questo testo possiamo osservare una contraddizione nel significato di “sistema compatibile”:

Nell’enunciato si specifica che sistema compatibile equivale ad “ammette soluzioni”; da qui il docente potrebbe essere portato a inferire che lo studente attribuisca correttamente a “sistema incompatibile” il significato di “nessuna soluzione”. Questo viene palesemente contraddetto nel penultimo capoverso, dove si dice esplicitamente che sistema incompatibile significa “ha solo la soluzione nulla”. La conclusione dell’ultima frase, infine, mette in luce una carenza ben più profonda della definizione di sistema compatibile o non compatibile: lo studente non considera la soluzione nulla una soluzione, ovvero equipara, o quanto meno include, nell’assenza di soluzioni, la presenza della soluzione nulla.

Osserviamo anche il vettore b che nel testo che resta invariato, simbolicamente parlando, tra il sistema di partenza e il sistema equivalente ridotto a scalini (leggiamo $Ax=b$ ed $Sx=b$). Probabilmente, chiedendo allo studente, egli sa che non si tratta dello stesso vettore nelle due scritture, ovvero sa che la riduzione a scalini si applica alla matrice completa. Quello che si può supporre accada, è la non distinzione tra sintassi e semantica, ovvero tra simbolo e significato, e quindi in questo caso b sta semplicemente ad indicare il significato di “termine noto”, e porta con sé sottintesa la modifica che assume con la riduzione a scalini.

Il teorema di Rouchè-Capelli enuncia che un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta.

Bisogna ricordarsi che dato un sistema, quest’ultimo è sempre riducibile a scalino.

Poiché il rango si conserva nonostante l’utilizzo di operazioni elementari si ottiene una matrice completa a scalino con lo stesso rango di quella iniziale. Se la matrice completa ha rango maggiore della matrice incompleta significa che il sistema è incompatibile. Se, invece, i ranghi delle due matrici sono uguali si può risolvere il sistema per sostituzione.

Questo testo evidenzia una difficoltà abbastanza comune negli studenti del primo anno di università: affrontare una dimostrazione. Indubbiamente questa è una competenza non banale, innanzitutto perché più o meno quasi per la prima volta vengono presentate agli studenti dimostrazioni, poi perché in realtà spesso i vincoli temporali dettati dai programmi non consentono di iniziare gli studenti a un processo di giustificazione/argomentazione/dimostrazione e le dimostrazioni appaiono ai loro occhi come una sequenza di affermazioni più o meno senza senso e “semplicemente da imparare”.

Dalla lettura del testo, sembra evidente che lo studente ha in mente lo schema della dimostrazione. Tuttavia alcune cose sono “omesse” o “date per scontate” (ad es. perché se la matrice completa ha rango maggiore della matrice incompleta il sistema è incompatibile?).

Un sistema lineare $Ax = b$ è compatibile $\Leftrightarrow rK(A) = rK(A')$

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

In forma matriciale, tale sistema lineare può essere scritto come $Ax = b$ dove:

- La matrice ottenuta escludendo i termini noti (b) è detta matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Il vettore b è quello formato dai termini noti

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- La matrice completa (A') è quella ottenuta dall'unione di A e B

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

Un sistema a scalini $Sx = b$ (equivalente a $Ax = b$) è compatibile $\Leftrightarrow rK(S) = rK(S')$.

Il testo sopra riportato vorrebbe essere, nelle intenzioni dello studente, la dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli, cosa che evidentemente non è e ci riporta a considerazioni già precedentemente illustrate a riguardo delle difficoltà degli studenti nell'affrontare le dimostrazioni. Esulando da ciò, si possono individuare varie scritte nel testo che evidenziano nella sostanza degli errori semantici. Notiamo ad esempio l'uso, o meglio l'abuso, delle parentesi. Certamente l'esperienza didattica offre sempre più casi, purtroppo, in cui appare come gli studenti non conoscano più la semantica della parentesi nelle operazioni (ovvero l'uso delle parentesi per modificare delle priorità prestabilite) o negli argomenti delle funzioni. Sembra che per loro sia più un decoro o una "fissazione" del docente. Questo comporta in lettura spesso una errata interpretazione del testo, e in scrittura un stile che abbraccia la filosofia "meglio abundare che deficere". È quello che accade nel testo riportato, dove si incontra ad esempio (A') invece di A' .

Analogamente, non si dà importanza all'uso dei simboli, come strumento di comunicazione con altri che leggeranno quel testo in luoghi e tempi diversi, e che quindi non possono chiedere spiegazioni per capire. Probabilmente, a parte l'interpretazione del considerare le notazioni solo un "appesantimento" richiesto dal docente o dalla matematica, dove entrano in gioco tutti gli studi sulle convinzioni (Zan, 1998, Furinghetti, 2002), si può anche interpretare in un quadro di "docente collaborativo" (Ferrari, 2004b).

Dato un sistema lineare $Ax=b$ dove A è una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e b è la colonna dei termini noti esso è compatibile se e soltanto se $rk(A)=rk(A')$ dove A' è la matrice ottenuta dalla matrice di partenza a cui viene affiancata la colonna b dei termini noti.

Nel testo sopra vediamo che lo studente scrive che la matrice A è a coefficienti reale. Un matematico leggerebbe quindi che il teorema enunciato vale solo sul campo reale. Se così fosse, allora si dovrebbe registrare una carenza cognitiva dello studente. Di fatto, non è detto che questo sia quello che intende lo studente. Potrebbe probabilmente essere che lo studente è abituato a una certa notazione e in particolare è abituato a vedere matrici sul campo reale, quindi ha usato quella scrittura senza la consapevolezza che ciò che andava scrivendo era un "vincolo" alla validità del teorema enunciato.

Il Teorema di Rouché-Capelli serve a calcolare il numero di soluzioni di un sistema di equazioni in funzione del rango.

Nel testo sopra è evidente che lo studente ha la carenza cognitiva: lo studente non ha capito il senso dell'enunciato del teorema di Rouché-Capelli. Si può ipotizzare che questo tipo di trasposizione del teorema derivi allo studente dalla pratica che egli fa nella risoluzione di sistemi lineari, dove il numero delle soluzioni del sistema viene calcolato in funzione del rango.

Abbiamo un sistema lineare scritto in forma matriciale così fatto: $Ax = b$. Il teorema afferma che se il rango della matrice incompleta è lo stesso o meglio è uguale a quello della matrice completa, allora il sistema è compatibile.

Nel testo sopra possiamo notare che l'enunciato manca di una implicazione. Questo ricade nella difficoltà che gli studenti hanno nella comprensione delle implicazioni ed equivalenze logiche. Non è da sottovalutare anche il fatto che nel linguaggio quotidiano spesso usiamo il "se" includendovi la forza del "solo se".

Dal punto di vista semantico, notiamo che sembrerebbe che lo studente consideri con valore semantico diverso le scritture "è lo stesso" ed "è uguale". A volte in casi simili l'equivalenza che gli studenti vogliono sottolineare è proprio tra il linguaggio quotidiano (primo caso) e il linguaggio matematico (secondo caso), come a dire "è lo stesso o meglio *dal punto di vista matematico* è uguale".

Un sistema è compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

Per dimostrare tale teorema bisogna ricordare che dato un sistema, esso è riducibile in forma a scalino, ottenendo un sistema ad esso equivalente. Siccome il rango si conserva attraverso operazioni elementari si ottiene una matrice completa a scalino con lo stesso rango di quella di partenza. Se la matrice completa ha rango maggiore della matrice incompleta significa che il sistema è incompatibile. Quindi se invece i due ranghi coincidono il sistema è compatibile.

Nella parte finale del testo si può vedere che lo studente non spiega perché la uguaglianza o disuguaglianza dei ranghi delle matrici coinvolte portino alla compatibilità o incompatibilità del sistema lineare. In realtà il testo precedente alle ultime due frasi riporta correttamente parte della dimostrazione, che è premessa o meglio riformulazione del problema in termini di sistemi equivalenti e più semplici. La "vera" dimostrazione del risultato di Rouché-Capelli manca, ed è interessante notare che viene sottintesa e racchiusa nella parola "significa".

Vettori proporzionali appartenenti al campo V sono linearmente dipendenti.

Considero gli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e i vettori v_1, v_2, \dots, v_n

Scrivo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

se $\lambda_1 \dots \lambda_n = 0$ i vettori sono linearmente indipendenti.

Nel testo sopra possiamo individuare vari errori di concetto. Infatti sin da subito si può osservare che lo studente parla di vettori appartenenti ad un campo. C'è evidentemente una carenza nella definizione di spazio vettoriale. Allo stesso modo alla fine si può notare che quanto scritto non corrisponde alla definizione di vettori linearmente indipendenti. Ancora una volta qui si usa il “se” al posto del “solo se”.

L'enunciato non è vero in quanto ogni vettore è linearmente dipendente se solo se ognuno è combinazione lineare degli altri. Ma tale relazione è verificabile solo per due vettori e non per n vettori. Inoltre il passo 2 è errato poiché per essere vettori linearmente dipendenti quella relazione deve ammettere necessariamente soluzioni nulle.

Nel testo sopra si possono ancora notare errori di concetto. Nella prima frase lo studente enuncia una caratterizzazione di un singolo vettore linearmente indipendente, che è chiaramente falsa. Da un lato si evince che lo studente non sa che un singolo vettore, che non sia nullo, è sempre linearmente indipendente. Dall'altro lato si nota che nella caratterizzazione data, da una parte di parla di “un” vettore e dall'altra si parla di “più” vettori. Ancora, ricordando che il passo 2 affermava che *La combinazione $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ ha soluzioni non nulle*, l'ultima frase evidenzia che lo studente non conosce la definizione di vettori linearmente dipendenti. Dal punto di vista linguistico/semantico l'errore può ascriversi al fatto che lo studente interpreta l'affermazione che quell'equazione ha soluzioni non nulle come l'esclusione del fatto che possa avere “anche” la soluzione nulla.

V un K-spazio vettoriale e siano v_1, \dots, v_t vettori di V

$a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0$ ha soluzioni non nulle $\Leftrightarrow v_i = -a_i^{-1}a_1v_1 - \dots - a_i^{-1}a_tv_t$

allora considerando che a_1, \dots, a_t appartengono a K e sono diversi da zero

perché abbiamo supposto per ipotesi che si tratta di vettori linearmente dipendenti perciò per ogni $j=1, \dots, t$ esiste a_j^{-1} possiamo quindi moltiplicare ogni membro per il reciproco dello scalare (che ripetiamo sono numeri reali diversi da zero)

Nella parte iniziale del testo viene enunciata una caratterizzazione il cui secondo membro è semanticamente indefinito, dal momento che non vi è la presenza di alcun quantificatore, per cui non si capisce se quella scrittura vale “per ogni i” o “esiste un i tale che”. Successivamente lo studente nel considerare che tutti gli scalari coinvolti sono non nulli, evidenzia la sua mancanza di comprensione della definizione di lineare dipendenza.

Considerando V un K-spazio vettoriale, i vettori di V v_1, \dots, v_t sono combinazione lineare gli uni degli altri secondo gli scalari a^1, \dots, a^t appartenenti a K se e solo se li posso scrivere come:

$$V = a_1v_1, \dots, a_tv_t$$

Considerando ora l'equazione vettoriale $a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0$, i vettori v_1, \dots, v_t sono linearmente dipendenti quando $(a_1, \dots, a_t, 0) = (0, \dots, 0)$

Nel testo sopra si possono individuare vari errori semantici. Osserviamo che all'inizio vengono usati gli scalari a^1, \dots, a^t successivamente mai più usati, ma evidentemente sostituiti con a_1, \dots, a_t . Notiamo la conversione in formula di combinazione lineare, lo studente non è consapevole della semantica dei simboli che va usando: ad esempio, a primo membro utilizza il simbolo V che indica lo spazio vettoriale ma probabilmente intendeva indicare un vettore (quale?), poi il simbolo dell'uguale (volendo ammettere che gli oggetti a primo e secondo membro siano confrontabili) ha validità solo per la scrittura prima della virgola, mentre è lecito supporre che lo studente intendesse uguagliare il primo membro con tutta la scrittura a secondo membro, non tenendo conto che l'uso della virgola così com'è stato fatto avrebbe alterato il significato della relazione di uguaglianza. E' evidente infine che non c'è conoscenza della relazione di combinazione lineare.

Un sistema lineare $Ax = B$ è comparabile $\Leftrightarrow rK(A) = rK(A^I)$

Quando $rK(A) = rK(A^I) = m = n$ il sistema ammette un'unica soluzione, in caso contrario il numero di soluzioni è dato da $\infty^{n-rK(A)}$

Un sistema a scalini $Sx=B^I$ (equivalente ad $Ax = B$) è comparabile $\Leftrightarrow rKS = rKS^I$

Un sistema a scalini $Sx=B^I$ (equivalente ad $Ax = B$) è incomparabile $\Leftrightarrow rKS \neq rKS^I$

Nel testo sopra si individuano diversi errori. Innanzitutto si nota l'introduzione di un termine nuovo, "comparabile", che lo studente evidentemente confonde con "compatibile". Vogliamo ricordare che questi testi sono stati scritti dagli studenti in tempi e luoghi fuori dal controllo del docente, quindi gli studenti avevano accesso a qualsivoglia fonte di informazione. Per questo motivo, un tal errore ci lascia piuttosto perplessi, dal momento che significa che lo studente non ha fatto riferimento ad alcun testo "ufficiale" per potersi aiutare nel compito datogli da svolgere.

Dal punto di vista semantico, ci sono varie omissioni: i simboli m ed n non sono mai stati introdotti, così come S^I . Qui ancora una volta può venire incontro l'interpretazione del "docente collaborativo".

Più interessante però è l'osservazione della catena di uguaglianze $rK(A) = rK(A^I) = m = n$, che nasconde in realtà tre significati di uguaglianza, ovvero che i ranghi delle matrici sono uguali, che le dimensioni della matrice incompleta siano uguali (cioè che il sistema sia quadrato) e che i ranghi vadano a coincidere con l'ordine della matrice incompleta. Quando subito dopo lo studente scrive "in caso contrario", quale di queste uguaglianze voleva negare? Evidentemente allo studente sfugge la complessità semantica di questa scrittura che egli stesso ha prodotto.

Dire che il sistema è compatibile se e solo se i ranghi sono uguali vuol dire anche che il sistema è incompatibile se e solo se i ranghi delle matrici sono diversi.

$Ax=b \Leftrightarrow rK A \text{ diverso } rK A^I$

Quindi dobbiamo dimostrare con la compatibilità o l'incompatibilità dei due ranghi.

Nel testo sopra possiamo innanzitutto notare vari sottintesi, come ad esempio si parla di ranghi, ma non si specifica di quali matrici. Dal punto di vista semantico, osserviamo che lo studente sembrerebbe includere nella scrittura simbolica $Ax=b$ la proprietà di incompatibilità del sistema, e nella frase successiva invece parla di "compatibilità" e "incompatibilità" di ranghi, intendendo evidentemente "uguaglianza" e "disuguaglianza".

DIM. (Siamo nel Teorema di Rouchè)

$$A' = (A / b) \text{ -----} > S' (S / b')$$

Nel testo lo studente riassume un procedimento in una riga in scrittura simbolica. Un lettore, che fosse all'oscuro del contesto e non fosse solito usare la stessa simbologia, non sarebbe in grado di capire alcun ché.

Un vettore di $n = 3$ per essere linearmente dipendente deve essere proporzionale.

Nel testo sopra si possono notare tanto errori puramente semantici quanto errori di concetto. A questi ultimi appartiene la definizione di lineare dipendenza che viene identificata con la proporzionalità. Ai primi invece appartiene la scrittura “un vettore di $n=3$ ” che male interpreta e traduce la consegna che parlava di n vettori con n maggiore o uguale a 3.

Dimostrare che se v_1, v_2, v_n sono vettori proporzionali, sono linearmente dipendenti

Se v_1, v_2, v_n sono linearmente dipendenti, allora esistono μ, λ in K , entrambi diversi da 0, tali che:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$$

con λ diverso da 0, si ha :

$$v_1 = (-\mu\lambda^{-1})v_2$$

quindi: $v_1\lambda v_2 = 0$

E' impossibile dare un controesempio che verifichi la situazione richiesta perchè affinché 3 o più vettori siano linearmente dipendenti devono essere necessariamente proporzionali.

Nel testo sopra si individuano diversi errori semantici. Dapprima vengono utilizzate le notazioni v_1, v_2, v_n , mai più usate in seguito ed evidentemente sostituite da v_1, v_2, v_n . Questi a loro volta vengono considerati linearmente dipendenti se esistono “due” scalari μ, λ . Il fatto che gli scalari siano solo due fa successivamente ridurre l'insieme v_1, v_2, v_n ai soli v_1, v_2 . Non si capisce poi come da $v_1 = (-\mu\lambda^{-1})v_2$ lo studente giunga a $v_1\lambda v_2 = 0$. Entrambe le ultime due scritture sono semanticamente scorrette ma, mentre la prima può essere interpretata con un po' di “collaborazione” da parte del docente e quindi essere letta come $v_1 = (-\mu\lambda^{-1})v_2$, la seconda sfugge a una qualsiasi nostra capacità di interpretazione.

v_1, v_2, \dots, v_t Linearmente dipendenti $\implies \exists$ scalari a_1, \dots, a_t non tutti nulli t.c. $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_t v_t = 0$

Scegliamo, per esempio, $a_i \neq 0$ si ha allora che $i = 1, \dots, t$

$$a_i v_i = - (a_1 v_1 + \dots + a_t v_t)$$
$$v_i = - (a_i^{-1} a_1 v_1 + \dots + a_i^{-1} a_t v_t)$$

quindi v_i è combinazione lineare degli altri

Nella prima riga del testo osserviamo l'uso di \exists al posto dell'operatore esistenziale, ma questo lo ascriviamo alla difficoltà della scrittura matematica. A seguire vediamo che la combinazione lineare è composta di tre addendi, mentre può verosimilmente assumersi che lo studente intendesse indicare t addendi. La posizione del testo " $i = 1, \dots, t$ " nella frase successiva rende dubbio il significato che lo studente voleva dargli: intendeva riferirlo alla scelta del coefficiente non nullo (e allora è posizionato male)? O alla formula successiva (e allora è in contraddizione con la definizione di lineare dipendenza)?

Per eseguire un prodotto tra matrici si utilizza il metodo del prodotto "righe per colonne". Ovviamente tale operazione è molto semplice tra matrici quadrate dello stesso ordine, mentre per essere effettuato tra matrici rettangolari la condizione necessaria è che il numero di righe della I matrice sia uguale al numero di colonne della II e che il numero di colonne della I matrice sia uguale al numero di righe della II. Dunque l'operazione tra le matrici A e B forniteci in questo caso è possibile.

Nel testo si evidenzia che il prodotto tra matrici è distinto a seconda che le matrici siano quadrate dello stesso ordine o siano invece rettangolari. Si dice che nel primo caso "è molto semplice". In realtà non si capisce se lo studente si renda conto che la regola che applica per effettuare l'operazione è la stessa in ambo i casi. Da com'è scritto, sembrerebbe che lo studente intenda dire che nel primo caso non ci sia nessun vincolo e non che il vincolo sia semplicemente soddisfatto sempre.

7.3 Un feedback qualitativo

Dopo le sessioni di esami, è stato presentato agli studenti un questionario, al fine di indagare i loro feedback sul corso misto frequentato. Abbiamo raccolto 75 questionari, corrispondenti a quasi tutti gli studenti che hanno frequentato il corso misto di geometria. Esaminiamo più in dettaglio le questioni poste e le relative risposte.

Prima di tutto, eravamo interessati a indagare quali possibilità offerte dalla piattaforma gli studenti hanno ritenuto più utile per la loro formazione. Gli studenti sono tenuti a dare un voto tra 0 e 5, secondo la seguente legenda: 0 significa che il LO o l'attività non è stata di alcun aiuto e di piacere, 3 significa che è stata utile, 5 significa che è stata utile e molto interessante. Il grafico in figura 1 indica la media aritmetica delle risposte raccolte:

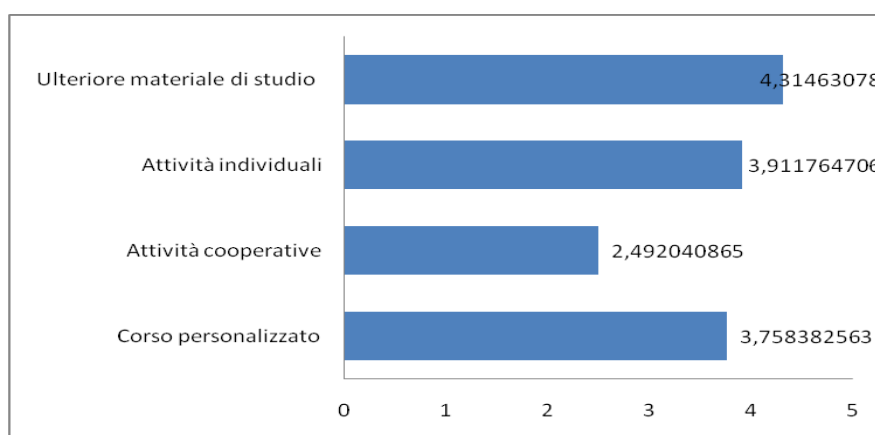


Figura 1. Media aritmetica dei punteggi dati dagli studenti

Come si può vedere, le attività di cooperazione sembrano essere le meno utili. In realtà, da altre questioni aperte, si può supporre che tali dati sono dovuti alla concreta difficoltà di usare gli strumenti di cooperazione .

Abbiamo poi indagato sull'impatto delle classi a distanza, sui risultati di apprendimento degli studenti e sul loro atteggiamento nell'affrontare l'esame.

Così, abbiamo posto le seguenti due questioni:

- 1) Pensi che le attività svolte hanno influito sui tuoi risultati nell'apprendimento? In che modo?
- 2) Pensi che l'uso di una piattaforma abbia influenzato il vostro atteggiamento nell'affrontare l'esame? (Cioè, ti fa più sicuro o più insicuro, perché? Ti ha dato più conoscenza? Ti ha dato un metodo di studio?)

La figura 2 mostra il grafico della distribuzione delle risposte:

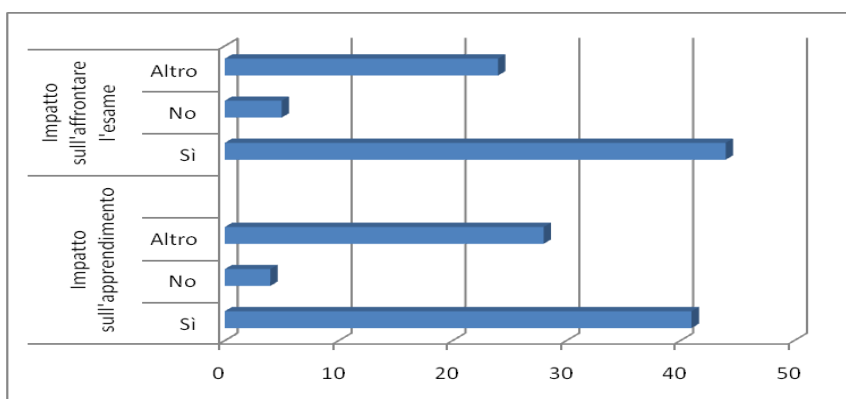


Figura 2. Distribuzione delle risposte

Le tabelle 3 e 4 mostrano le risposte più comuni, rispettivamente, alle domande aperte 1 e 2:

Table 3. Impatto sui risultati dell'apprendimento: in che modo?

| Risposte | Frequenza | % |
|-------------------------|-----------|------|
| Coinvolgimento continuo | 3 | 4.0 |
| Essere stimolati | 3 | 4.0 |
| Studio assistito | 17 | 22.7 |
| Studio approfondito | 7 | 9.3 |
| Nessuna domanda | 42 | 56.0 |

Tabella 4. Impatto sull'affrontare l'esame: quali punti di vista?

| Risposte | Frequenza | % |
|-------------------------------------|-----------|------|
| Formazione continua | 3 | 4.0 |
| Aumento del senso di auto-efficacia | 24 | 32.0 |
| Più materiale didattico | 9 | 12.0 |
| Maggiore conoscenza | 22 | 29.3 |
| Valido punto di riferimento | 8 | 10.7 |
| Acquistare un metodo espositivo | 3 | 4.0 |
| Nessuna risposta | 39 | 52.0 |

Vale la pena notare che le percentuali ai punti 2 e 4 della tabella 3 sono molto vicine. Questo conferma che l'acquisizione di maggiori conoscenze porta ad un aumento del senso di auto-efficacia.

Un'ulteriore questione è stata posta al fine di indagare quale tipo di impatto le attività svolte nella piattaforma hanno avuto sulla preparazione all'esame. Il grafico in figura 5 mostra la distribuzione delle risposte relative:

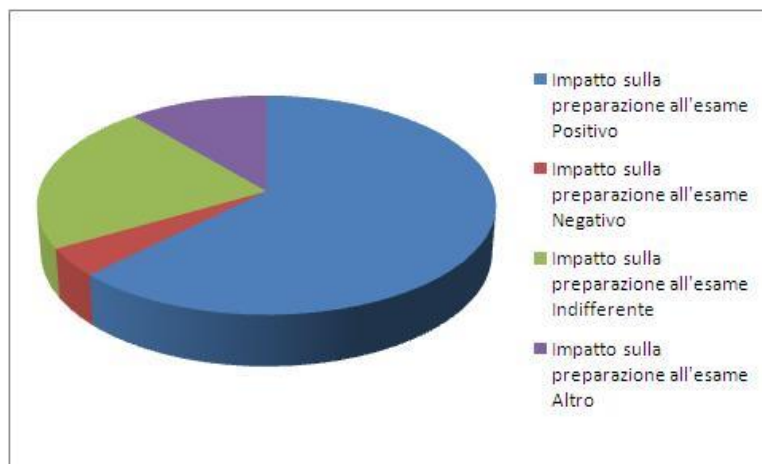


Figura 5. Distribuzione del tipo di impatto sull'esame

7.4 Risvolti affettivi: il rapporto con la matematica e il rapporto col docente

E' noto a tutti che l'apprendimento non è un processo puramente cognitivo, ma è influenzato da fattori affettivi. In (Albano, 2005) è presentata un'indagine a monte di corsi e-learning di tipo blended per indagare quali fossero le convinzioni e le aspettative rispetto a un corso non tradizionale per l'apprendimento della matematica. Da tale indagine è emerso che attraverso la presenza della piattaforma informatica il docente viene percepito più vicino, disponibile, etc. e questo ha influenza, a detta degli studenti, positiva sia sulla motivazione a studiare sia sulla partecipazione al corso.

In effetti strumenti come quelli offerti dalle piattaforme di e-learning non solo avvicinano il docente, ma lo fanno in un modo meno formale, meno rigido, più "caldo" nel senso che il rapporto docente-studente diventa meno asimmetrico. L'aspettativa di maggior contatto col docente ha ripercussioni anche sul rapporto con la matematica, perché gli studenti vedono un'ulteriore opportunità di avere chiarimenti, quindi comprendere meglio la matematica.

Osserviamo che dal punto di vista motivazionale per lo studente è importante percepire che il docente abbia interesse a che lui impari, e che quindi senta in qualche modo che il docente mette in

atto strategie che portino lo studente ad essere in grado di apprendere. Tra queste strategie viene ritenuta fondamentale la volontà del docente di comunicare con lo studente, volontà che non è affatto garantita dal semplice fatto che il docente va in aula e fa la sua lezione. Al contrario, proprio la modalità tradizionale di lezione universitaria, distante, poco interattiva, anonima, mista all'assenza di contatto (ovvero di comunicazione) col docente è da annoverarsi tra le cause di insuccesso e di abbandono degli studi.

Quindi una piattaforma può costituire un canale aperto di comunicazione tra docente e studente. Il solo fatto che un docente affianchi al corso tradizionale uno su piattaforma di e-learning fa percepire quel docente come uno che ha a cuore l'apprendimento dei suoi studenti, che desidera comunicare con loro e a loro, e questo ha ovviamente un impatto positivo sulla motivazione dello studente ad apprendere.

La maggiore simmetria del rapporto col docente-on-line col tempo modifica atteggiamenti e convinzioni iniziali: accade che lo studente che interagisce molto on-line arrivi a *non avere più paura* di andare a chiedere spiegazioni durante l'orario di ricevimento e l'ansia stessa dell'esame (che non viene placata dalla sola padronanza della materia) si ridimensiona.

Si crea così una sorta di piccola *comunità scientifica* costituita dagli studenti coinvolti attivamente nell'uso della piattaforma e dal docente, in cui sono cadute le barriere non-cognitive a favore di atteggiamenti positivi che promuovono il raggiungimento di obiettivi cognitivi

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Albano, G. (2010). Mathematics education: teaching and learning opportunities in blended learning. In Juan et al. (eds.): *Teaching Mathematics Online: Emergent Technologies and Methodologies*.
- Albano, G., Ferrari, P.L. (2008). Integrating technology and research in mathematics education: the case of e-learning. In Garcia Peñalvo (ed.): *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies* (132-148).
- Albano, G., Gaeta, M., Ritrovato, P. (2007). IWT: an innovative solution for AGS e-Learning model. *International Journal of Knowledge and Learning*, 3(2/3), 209-224.
- Albano, G., Maresca, G. (2010). Personalised e-learning process: the case of Geometry in IWT. *Proc. of CSEDU 2010* (2nd International Conference on Computer Supported Education). Valencia, Spain, April 7-10, 2010.
- Albano, G., Maresca, G. (2010). A blended learning course in mathematics education. In A. Jimoyiannis (ed.), *Proc. of HCICTE 2010* (7th Pan-Hellenic Conference with International Participation «ICT in Education»), vol.I, pp. 245-252, University of Peloponnese, Korinthos, Greece, 23-26 September 2010.
- Angeli, F. (2001). *La personalizzazione dei percorsi di apprendimento e di insegnamento*. Isfol
- Artigue M. (1992). Didactic engineering. In: Douady R. e Mercier A. (eds.). *Research in didactique of mathematics: Selected papers* (Special issue). *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 41-65.
- Balacheff N. (2000). Teaching, an emergent property of eLearning environments. In: *The information society for all*. (IST 2000), <http://www.didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/IST2000.html>
- Baldacci M. (1999). *L'individualizzazione. Basi psicopedagogiche e didattiche*. Bologna: Pitagora.
- Bass, H. (2006). The instructional potential of digital technologies. In *Proc. of International Conference of Mathematicians*, Madrid, 3, 1747-1752.
- Calvani, A. (2002). *Manuale di tecnologie dell'educazione*. Edizione ETS.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cronbach, L., Snow, R. (1977). *Aptitudes and Instructional Methods: A Handbook for Research on Interactions*. New York: Irvington.

- Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- Ferrari, P.L. (2004a). Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning. In Johnsen Høines, M. & Berit F., A. (Eds.), *Proc. of the 28th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen (N), (2, 383-390).
- Ferrari, P.L. (2004b). *Matematica e linguaggio*. Ed. Pitagora.
- Furinghetti, F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. Studi e Ricerche 8. IPRASE. Trentino.
- Gaeta, M., Orciuoli, F., Ritrovato, P. (2009). Advanced Ontology Management System for Personalised e-Learning. Knowledge-Based Systems. *Special Issue on AI and Blended Learning*, 22, 292–301.
- Maragliano R. (2000). *Nuovo manuale di didattica multimediale*. Editori Laterza
- Maragliano, R. (2004). *Pedagogie dell'e-learning*. Ed. Laterza.
- Nichols, M. (2003). A theory for eLearning. *Educational Technology & Society*, 6(2), 1-10.
- Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems?. *Philosophia Mathematica*, 7(3), 5-41.
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Ed. Erickson.
- Zan R., (2000). A metacognitive intervention in mathematics at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1), 143-150.
- Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Pitagora ed (collana Complementi di matematica per indirizzo didattico).
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Ed. Springer.