Università degli Studi di Salerno

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica e Informatica

Dottorato di Ricerca in Matematica
XIII Ciclo – Nuova Serie

TESI DI DOTTORATO

Difficoltà in matematica: percorsi di autoformazione in e-learning

CANDIDATO: **LEKE PEPKOLAJ**

COORDINATORE: **PROF. PATRIZIA LONGOBARDI**

TUTOR: **PROF. GIOVANNINA ALBANO**

A.A. 2014 - 2015

Sommario

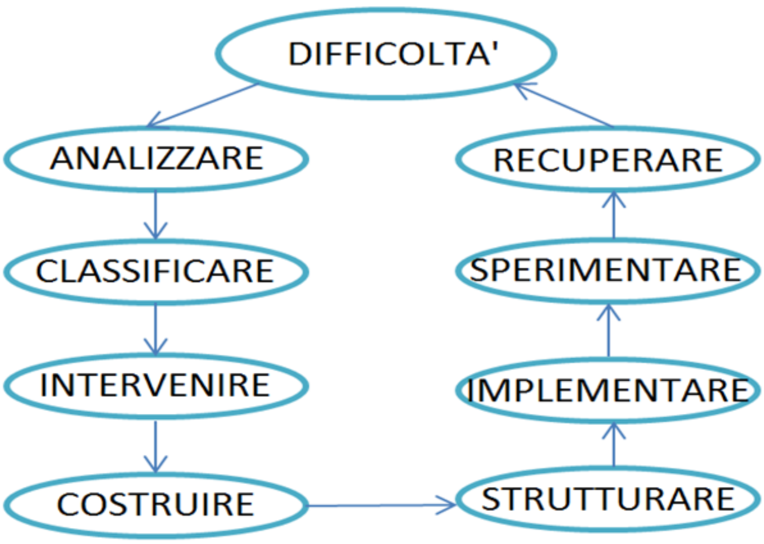
INTRODUZIONE

La mia tesi di dottorato s'inserisce nell'ambito degli studi che mirano all'integrazione tra i risultati della ricerca in educazione matematica e quelli della ricerca riguardante l'e-learning. In particolare la tesi indaga e discute le potenzialità dell'autovalutazione in modalità e-learning con percorsi costruiti a partire dall'analisi degli errori commessi.

In questo contesto, la mia domanda di ricerca è stata: «individuare una metodologia per la costruzione di percorsi di apprendimento, in autoformazione su piattaforme di e-learning, per il superamento di difficoltà in matematica».

A tale scopo, ho innanzitutto individuato un ambito d'intervento e vari parametri connessi. Ho scelto di considerare l'apprendimento dell'algebra lineare al primo anno di facoltà scientifiche dove la matematica è materia di servizio, quale ingegneria. Questa scelta è stata dettata anche dalla possibilità concreta di avere dati a disposizione sia in fase di analisi in partenza sia in fase di verifica/validazione. Tra le potenzialità dell'e-learning, ho scelto di dare priorità alla personalizzazione dell'apprendimento, quindi i percorsi da costruire si differenziano in base alle difficoltà dello specifico studente. Allo stesso tempo, volendo proporre questi percorsi su larga scala - dato il numero alto di studenti, ho scelto di basare tali percorsi su strumenti «automatici» presenti nelle piattaforme di e-learning, quali i quiz.

Il lavoro di ricerca che ho svolto può essere riassunto dal seguente diagramma:



Partendo dalle difficoltà degli studenti, analizzo da dove nascono queste difficoltà (errori). Sulla base dell'analisi fatta, vado a effettuare una classificazione degli errori; successivamente progetto un intervento di recupero, sfruttando le potenzialità del e-learning in particolare quiz a risposta chiusa. Le domande che vanno a comporre i quiz vengono costruire a partire dalle difficoltà, e i quiz stessi vengono strutturati in modo da definire la costruzione di percorsi di recupero, in base alla classificazione delle difficoltà. La metodologia descritta è stata implementata e validata su una piattaforma di e-learning.

Nel seguito vado a dare una panoramica di quello che presento nella tesi.

Nei primi capitoli presento i principali risultati del quadro teorico di riferimento. Per la particolarità dell'oggetto della tesi, tale quadro si riferisce alla ricerca tanto nel campo dell'e-learning (dal punto di vista sia tecnico sia teoretico) quanto in quello dell'insegnamento/apprendimento della matematica.

Nel *capitolo I* esamino i diversi tipi di valutazione assistita dal computer, sia per lo studente e sia docente: valutazione complessiva, valutazione formativa, valutazione diagnostica. Esamino i benefici dell'uso dei quiz in modo che sia una risorsa utile per l'apprendimento dello studente. Il perno centrale dei quiz è l'autovalutazione formativa che offrono. L'autovalutazione fa parte del percorso stesso e serve a guidarlo, svilupparlo e correggerlo. Per alleggerire i limiti dei quiz ho individuato qualche possibile soluzione che i mezzi tecnologici ci permettono.

Nel *capito II* esamino la costruzione di un percorso di recupero e autoformazione a partire dagli errori. Il punto di partenza è l'errore nel senso di Borasi: "trampolino di lancio per la ricerca" (Borasi, 1996). Esamino in maniera ampia il ruolo dell'errore dal punto di vista epistemologico, pedagogico e didattico, facendo riferimento a importanti esponenti di questi campi. Tutti questi esponenti rilevano che quanto l'errore sia importante nella costruzione della conoscenza.

Analizzare gli errori serve a fare una classificazione dettagliata delle difficoltà, che è un parametro importante nella strutturazione delle attività nell'intervento di supporto/recupero.

Nel *capitolo III* esamino le classificazioni delle difficoltà presenti in letteratura: dicotomia errore/sbaglio; tassonomia Math; competenze di Niss.

Nel *capitolo IV* presento l'analisi dei protocolli di algebra lineare, degli studenti del primo anno di Ingegneria, cercando di capire da dove nascono queste difficoltà: abilità cognitive, atteggiamenti meta-cognitivi e non cognitivi etc. Tutto questo lavoro è servito per definire una mia classificazione delle difficoltà, legata alle cause che hanno generato tali difficoltà.

Nel *capito V* vado a definire una metodologia per la costruzione di un percorso di recupero-autoformazione in algebra lineare. La metodologia usata si basa sul costruttivismo che dipende non solo dalle singole attività, ma soprattutto dal fatto che esse siano simultaneamente presenti e dalle scelte possibili e dalle loro mutue relazioni. Le attività didattiche sono state implementate in modalità e-learning nella piattaforma IWT.

Per chiudere, vorrei ringraziare infine alcune persone.
Questo lavoro lo dedico a mio padre Zef: da lui ho appreso la grande pazienza di lavorare.

Ringrazio il mio professore Fatmir Hoxha di Università di Tirana per l’idea data per le mie ricerche in educazione matematica. Ringrazio il coordinatore del dottorato professoressa Patrizia Longobardi per la sua costante disponibilità a chiarirmi tutte le procedure connesse alla scuola di dottorato, la ringrazio anche per avermi messo a disposizione la residenza universitaria in occasione di ogni mio soggiorno a Fisciano. Ringrazio i professori Pier Luigi Ferrari e Maria Polo per le loro idee date per la mia tesi durante i soggiorni all’Università di Salerno. Grazie infinite vanno al mio tutor Giovannina Albano, per l’idea della tesi, per il supporto nel livello di ricerca ma soppratutto la sua esperienza come docente e per la sua umanità che ha avuto con me.

Ringrazio la mia moglie Mira per avermi dato la possibiltà di studiare, per la pazienza che ha avuto con me durante questi tre anni di studi.

1 Valutazione assistita dal computer

1.1 Tipologie di valutazione

La *valutazione complessiva* è di solito effettuata alla fine di un corso e si usa per raccogliere prove dagli studenti intorno al livello attuale, le qualità di conoscenze e le competenze conquistate. Le valutazioni complessive sono spesso usate per determinare se gli studenti hanno appresso quello che dovevano apprendere dopo aver frequentato il corso e se possono essere ammessi al successivo livello di formazione. Le valutazioni complessive sono spesso anche un contributo formale per il voto finale dello studente.

La *valutazione formativa* è una valutazione in itinere e ha lo scopo di fornire un feedback sul livello reale di conoscenze e competenze acquisite. È spesso fatta sotto forma di autovalutazione per aiutare gli studenti a valutare il proprio lavoro e di riconoscere i punti di forza e di debolezza. Ci sono diversi scopi per i quali una valutazione formativa può essere utilizzato, può aiutare gli studenti a rinforzare l'apprendimento su una parte del materiale del corso, ad esempio, esercitazioni dopo le lezioni o per verificare la loro preparazione in vista dell'esame cioè una prova di una valutazione formale. La valutazione formativa può essere anche un mezzo per esercitarsi in modo da stimolare il pensiero e il ragionamento dello studente o per analizzare in profondità alcuni concetti, così come un mezzo per fornire un feedback sui progressi degli studenti, che può essere utilizzato anche dal docente per fare modifiche al programma del corso e all'organizzazione.

La *valutazione diagnostica* è in genere una valutazione che si fa all'inizio di un corso per accertare quali sono le conoscenze pregresse dello studente e la competenza e identificare i punti di forza e di debolezza dello studente. Questo tipo di valutazione aiuta il docente a indirizzare i propri corsi secondo lo stato cognitivo degli studenti e in funzione degli obiettivi didattici del corso. Sebbene i suoi scopi siano diversi da quelli degli altri due tipi di valutazione, possono essere eseguiti sia come un esame o un test di formazione (Bartalini, 2008, p.45)

1.2 Quiz e l'autovalutazione formativa

La diffusione dell'e-learning ha portato di moda l'uso della valutazione on-line, che consistono in valutazione assistita dal computer (CAA) consegnato su un server locale o remoto e fornisce potenti strumenti per automatizzare una parte importante del processo di apprendimento. Si discute l'uso del modulo Quiz, disponibile in piattaforme di e-learning. Loro permettono di impostare le varie domande con risposte chiuse (scelta multipla, vero / falso, domanda di completamento, domanda a corrispondenza) e di avere una valutazione automatica. È indubbio che abbiano alcuni grossi svantaggi: per esempio, nel caso di apprendimento matematico, essi non mettono in gioco tutte le competenze, come per costruire una strategia o un testo, permettono l'uso di strategie improprie, quali tentano di indovinare la risposta giusta o di indovinare le posizioni dei distratori dati. Comunque, riteniamo che il lavoro possa essere fatto al fine di limitare tali inconvenienti e rendere l'uso di quiz per diventare risorse utili per l'apprendimento dello studente.

L'uso che vogliamo fare dell'autovalutazione è del tipo 'formativo', o in altre parole vogliamo usare la valutazione non per misurare i risultati dell'apprendimento (valutazione complessiva) ma per migliorare il processo di apprendimento mentre questo avviene. L'autovalutazione non è quindi alla fine di un percorso, ma fa parte del percorso stesso e serve a dirigerlo, svilupparlo, correggerlo, migliorarlo. Per questi motivi, il ruolo del feedback dato allo studente assume un'importanza centrale, poiché diventa mezzo principe in cui si attuerà un'opportunità di guida da parte del docente per migliorare il processo di apprendimento dello studente. In questo senso si parla quindi di 'feedback formativo' (Schulze & O'Keefe, 2002, In Ibabe, I. & Jauregizar, J. 2008), cioè di quelle informazioni, che possono essere usate dallo studente per migliorare l'apprendimento, quindi suggerimenti, rimandi a ulteriore materiale di approfondimento, istituzionalizzazione di apprendimenti avvenuti, indicazioni per ulteriori passi da fare. Pertanto, nel caso dei quiz, per rendere efficace il feedback, non basta impostare le domande in modo tale che il computer dica semplicemente se la risposta e corretta o errata, ma c'è bisogno di dare opportune indicazioni in caso di risposta errata, che ed es. spieghi o provochi una riflessione sul perché la risposta scelta è sbagliata e/o dia qualche suggerimento che possa portare lo studente ad approfondimenti che possano permettergli di raggiungere la conoscenza richiesta. Il disegno di un quiz richiede quindi anche un'approfondita analisi degli opportuni feedback da dare in caso di risposte errate. Infine notiamo che per i nostri obiettivi non ci interessa tanto il voto che il quiz restituisce quanto piuttosto ci interessa di focalizzare l'attenzione dello studente sui suoi punti di forza e di debolezza.

1.3 Una panoramica sui quiz

1.3.1 Le caratteristiche

Nel nostro caso, l'uso dei quiz è indirizzato all'autoformazione e all'autovalutazione. I classici parametri in cui si valuta un quiz sono:

Validità: è la proprietà per cui un quiz (o anche un singolo item) mette realmente (o intende di mettere) in gioco le competenze.

Affidabilità: è la proprietà per cui l'esito del quiz non è influenzato da fattori esterni o occasionali.

Praticità: è la possibita di costruire, usare e valutare un quiz senza un enorme spreco di risorse da parte di chi lo deve preparare e gestire, sia di chi lo devo affrontare.

Effetti collaterali: sono quelli che nascono dal fatto che una qualsiasi forma di valutazione senza dubbio influisce e orienta l'insegnamento/apprendimento. Per questo anche i quiz devono evitare di orientare (anche indirettamente o involotariamente) verso le forme insegnamento/apprendimento discutibili, come ad esempio l'appiatamento sui contenuti o il disinteresse per rappresentazione e linguaggio.

Nel caso in cui ci interessa, e cioè dell'uso autovalutativo e autoformativo dei quiz, i quattro parametri appena illustrati sono importanti, poiché è neccesario evitare di indirizzare gli sforzi degli utenti nelle direzioni sbagliate, di fornire informazioni distorte sulla loro preparazione e di orientare il loro studio successivo in maniera adeguata.

1.3.2 Potenzialità delle domande a risposta chiusa

Gli effetti dei quiz a rispota chiusa sono *diretti e indiretti.*

Gli effetti *diretti* derivano dal quiz stesso, del test (o item) stesso, quindi c'e' soltanto uno studio delle risposte dei item.

I quiz hanno anche effetti *indiretti*, nel senso che fruendo quiz più e più volte, ogni giorno, settimana, semestre, in tempo di esame, gli studenti sono spronati a studiare di più e a distribuire e prolungare nel tempo lo studio.

Di seguito focalizziamo l'attenzione sui benefici dei quiz.

Autosufficienza: una delle caratteristiche dei quiz a risposta chiusa, implementati in una piattaforma di e-learning, è la possibilità di valutazione e feedback automatici che loro offrono. Infatti, questi quiz non richiedono tutori per la correzione. Questa particolarità è utile quando la valutazione si orienta verso gruppi numerosi di studenti, perché permette di offrire loro esperienze che con i metodi tradizionali sarebbero proibitive. Il ruolo del tutor resta ancora fondamentale, semplicemente cambia il luogo e il tempo del suo intervento. Non interviene più nel momento in cui il singolo studente interagisce con l'attività, ma si preoccupa di progettare gli item dei quiz e la sua attività tutoria si rende concreta nella predisposizione di adeguati feedback per ciascuna possibilità di risposta giusta o sbagliata. L'importanza del feedback formativo per migliorare l'apprendimento rende il ruolo di tutor online cruciale anche quando si usano quiz a risposta chiusa.

Spazio-tempo: superamento dei limiti spazio-tempo per la valutazione, lo studente può accedere a un quiz fuori dai tempi "istituzionali" ma decide autonomamente dove e quando farlo.

Flessibilità d'uso: gli studenti possono ritagliarsi attività formative delle dimensioni e delle difficoltà adeguate. È possibile costruire una sequenza dei quiz di difficoltà crescente in modo da consentire agli studenti di affrontare le difficoltà gradualmente. Questo influenza anche i fattori affettivi, poiché lo studente ha la possibilità di svolgere attività alla sua portata evitando la frustrazione che potrebbe derivare da tanti insuccessi.

Sfida: avendo la possibilità di un feedback immediato, gli studenti possono essere motivati a proseguire e migliorare i propri punteggi, ripetendo più e più volte, è uno stimolo in più anche nel caso di risultati resi pubblici in tempo reale. Allo stesso tempo, i feedback dati ai quiz possono essere utili a migliorare le conoscenze dello studente e nello stesso tempo ridurre la necessità del tutor. Le piattaforme di e-learning offrono mezzi di reportistica che possono essere usati e utili allo studente per monitorare i propri progressi. In questo modo ogni studente ha la possibilità di avere una visione chiara del proprio stato di conoscenze e può pure confrontarsi con i compagni di studio/classe (pur nel rispetto delle norme di privacy).

Auto-efficacia: la possibilità di provare, fare e sbagliare senza il giudizio di un altro essere umano può aiutare alcuni studenti a crescere più sicuri e di sviluppare un atteggiamento più positivo verso il loro prodotto.

Apprendimento: l'interazione con le risorse potrebbe essere utilizzati per aggiungere qualche pezzo di conoscenza. Va sottolineato comunque che l'utilizzo di risorse di questo tipo potrebbe rivelarsi un po' rischioso, tale da indurre qualche studente a trascurare le competenze che si riferiscono ad es. all'argomentazione.

Monitoraggio metacognitivo: i quiz permettono agli studenti di riflettere sui contenuti appresi. Inoltre, familiarizzano col significato dei contenuti e possono recuperare conoscenze mancanti.

1.3.3 Limiti delle domande a risposta chiusa

È chiaro che i quiz a risposta chiusa hanno anche diversi limiti, a fronte dei vantaggi prima elencati. Andiamo ad analizzarli.

Mancanza di alcuni tipi di abilità di farlo: ad es. agli studenti non è chiesto di creare un testo o una rappresentazione per illustrare o stimolare la strategia creata, invece l'abilità di farlo è un traguardo essenziale in educazione matematica. I quiz sono lontani dalle attività di classe quali discussione e dimostrazione. Una proposta per superare questo limite è di affiancare ai quiz una sessione di discussione online, in forum o chat.

Mancanza d'impostazione del procedimento risolutivo: è comunque fuori di dubbio che gli item (stimolo, domanda, problema, …) a risposta chiusa non mettono in gioco l'abilità di impostare una strategia risolutiva di un problema basandosi soltanto nella lettura del testo, ma soltanto di scegliere fra alcune scelte. I quiz rischiano di produrre quindi apprendimento meccanico e superficiale.

Consentono strategie inadeguate: altro rischio delle risposte chiuse è che gli studenti tirino a indovinare o cerchino di trarre informazione dai distrattori e soprattutto della forma dei quiz vero/falso. Per questo è importante che tra le scelte ci sia "Altro" o "Nessuna delle precedenti" e che quest'opzione sia quella corretta in un numero significativo di casi.

Di seguito mostriamo un esempio per capire la differenza che può esserci tra una domanda a risposta chiusa e una a risposta aperta.

Consideriamo il quesito della Figura 1.3-1

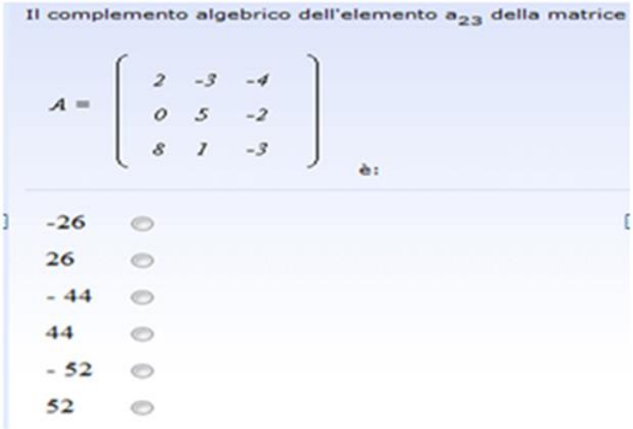


Figura 1.3-1

che, in versione a risposta aperta, corrisponde alla domanda: *Quanto vale il complemento algebrico dell'elemento* a_{23} *della seguente matrice A?*

È chiaro che i due item, anche se hanno lo stesso contenuto, mettono in gioco competenze totalmente diverse. La versione a scelta multipla dà implicitamente varie informazioni, ad esempio dice che la risposta è un numero tra -26 e 52 e richiede al più qualche prova. Invece la versione a risposta aperta richiede comunque una schematizzazione del problema. È un dato di fatto che gli item a risposta chiusa lasciano più possibilità alle risposte a caso o a strategie di risposte che ragionano sulla spartizione dei distrattori o su eliminazione dei casi più inaccettabili.

1.3.4 Struttura degli item

Nella costruzione dei quiz risulta la necessità di un'analisi attenta di che cosa ogni item mette veramente in gioco senza limitarsi a classificarne il contenuto. È evidente che gli item che richiedono la sola applicazione di un algoritmo, di scelta fra le possibilità proposte, forse iniziando non dalla lettura del testo ma dalla sola individualizzazione di parole-chiave, non mettono realmente in gioco le competenze richieste. Si tratta quindi di progettare item che richiedano la lettura accurata del testo così come la schematizzazione della situazione problematica, e che scoraggino l'uso di strategie improprie.

Tutto questo si può realizzare con variazioni continue della struttura dei test e delle richieste, con la scelta accurata dei distrattori, con l'inserimento sistematico tra le scelte le voci del tipo 'altro', 'nessuna delle risposte è adeguata' e devono essere quelle risposte da scegliere in un numero dei casi sufficiente. Questa non proibisce la valutazione automatica dei risultati, dunque la risposta appropriata non è chiesta, ma comunica informazioni sulle abilità critiche degli utenti e scoraggia le strategie inadeguate che Vinner chiama ‘pseudoanalitiche’ (Ferrari 2013).

I quiz consentono attività multisemiotiche. (O’Halloran 2005 & P. L. Ferrari 2013), considerano tre gruppi di sistemi semiotici: il linguaggio verbale, le notazioni simboliche, le rappresentazioni figurali. Il ruolo del linguaggio verbale è centrale per vari fattori: è riflessivo (cioè è capace di parlare di sé), è capace di classificare, il mondo reale anche in maniera poca esatta, articola diverse voci di una cultura, consente la disponibilità di una vasta gamma di varietà linguistiche da quelle pure quotidiane a quelle più avanzate. Il ruolo delle notazioni simboliche è discutibile ma è essenziale nella gestione delle conoscenze matematiche. In accordo con P. L. Ferrari le notazioni simboliche supportano la decidibilità dei concetti e la calcolabilità dei procedimenti, piuttosto che negli esseri sicuri di un improbabile rigore. Molto controverso è anche il ruolo delle rappresentazioni figurali, che mettono in gioco procedure cognitive, che è complessa la loro schematizzazione, ma è fuori del dubbio che nel bagaglio delle competenze degli studenti ci deve essere l’abilità di interpretare una rappresentazione figurale.

Gli item di un quiz può contenere testi verbali, simboli, icone. È possibile costruire item adeguati per verificare l’abilità di usare la varietà di sistemi semiotici, dal punto di vista di Duval che chiama il coordinamento di sistemi semiotici.

2 La costruzione di un percorso di recupero e autoformazione a partire dagli errori

2.1 Definizione di errore

Lo studio degli errori è sempre un 'tema caldo' sia perché affonda le sue radici nell'umanità sia perché è all'origine dell'apprendimento. L'errore fa parte naturale dell'essere umano, e non è una caratteristica necessariamente negativa, come sottolineato sia da Tagore che ci ricorda che, se si chiude la porta all'errore, anche la verità resta fuori, sia da Metastasio che sostiene come "sbagliando s'impara" (Baldini, 2001).

Già nel XVII secolo si parlava di errore in matematica in senso positivo. Bacone (1620) infatti, dice: "l'uomo che comincia con certezza finisce nel dubbio, ma colui che comincia nel dubbio finisce con certezza".

La stessa Maria Montessori ne parla come "Signor Errore", e rileva la necessità per le scienze esatte di richiamare l'attenzione sull'errore, proprio perché sono scienze che hanno il compito di evidenziarli (Montessori, 2001). Questo "Signor Errore" è protagonista indiscusso della mia tesi, che mira al recupero delle difficoltà, di cui l'errore è indicatore privilegiato.

Per prima cosa, quindi, nel seguito andiamo a dare la definizione di errore. Tra le varie che si possono trovare in letteratura, abbiamo scelto quella di Radatz:

- gli errori nell'apprendimento della matematica non sono semplicemente l'assenza di risposte corrette o il risultato di irregolarità sfortunate, ma sono conseguenze di processi definiti in cui la natura deve essere scoperta;
- sembra essere possibile analizzare la natura e le cause basilari degli errori, dal punto di vista dei meccanismi informazione – elaborazione del singolo;
- l'analisi degli errori offre diversi punti di partenza per la ricerca sui processi con i quali gli studenti apprendono la matematica. (Wiens, 2007, p.5)

Iniziamo col fare alcune riflessioni sul ruolo dell'errore nella scienza fatte da vari esperti, quali filosofi, epistemologici, matematici, fisici e psicologici. A tal fine, di seguito facciamo una carrellata di citazioni sull'errore date da alcuni esponenti principali della ricerca, quali: Karl Popper (1902-1994) filosofo ed epistemologo austriaco; Gaston Bachelard (1884-1962) importante filosofo della scienza del '900, epistemologo francese; Federico Enriques (1871-1946) grande matematico e filosofo della scienza italiana; Dario Antiseri (1940-) filosofo italiano; Giovanni Vailati (1863-1909) filosofo, matematico e storico italiano; Ernst Mach (1838-1916) fisico, filosofo e neuroscienziato austriaco. Ogni citazione mette in evidenza sfaccettature diverse dell'errore ed è stata per noi fonte di ispirazione e di motivazione per il lavoro fatto.

Karl Popper:

«È impossibile evitare ogni errore o anche soltanto quelli in sé evitabili. Errori vengono fatti incessantemente da tutti gli scienziati. Naturalmente rimane nostro compito evitare quanto sia possibile gli errori, ma proprio per evitarli dobbiamo prima di tutto aver chiaro quanto sia difficile evitarli, e che questo non riesce completamente a nessuno. L'accertamento della difettosità di una teoria di successo o di un procedimento pratico molto impegnato può costituire un'importante scoperta. Dobbiamo perciò mutare la nostra posizione nei confronti degli errori. Da qui deve iniziare la nostra riforma pratica ed etica. Perché la vecchia posizione dell'etica professionale conduce a passare sotto silenzio i nostri errori, a nasconderli e a dimenticarli il più velocemente possibile. Poiché dobbiamo imparare proprio dai nostri errori, dobbiamo anche imparare ed accettare, addirittura ed accettare con gratitudine, quando altri richiamano su di essi la nostra attenzione. Dissimulare gli sbagli è perciò il più grave peccato intellettuale. Dobbiamo perciò cercare costantemente con gli occhi i nostri errori. Quando li troviamo, dobbiamo imprimerceli bene nella memoria per andare fino in fondo ad essi» (Popper, 2001, pp. 70-71).

Gaston Bachelard:

«Quando si ricercano le condizioni psicologiche dei progressi della scienza, ci si convince ben presto che è in termini di ostacoli che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, oppure d'incolpare la debolezza dei sensi e dello spirito umano, perché è all'interno dell'atto stesso del conoscere che, per una specie di necessità funzionale, appaiono lentezze e confusioni. È qui che mostreremo alcune cause di stagnazione e persino di regresso della scienza; qui ne rileveremo le cause d'inerzia; e tutte queste cause le chiameremo ostacoli epistemologici […]. Il pensiero empirico è chiaro a posteriori, quando il meccanismo delle ragioni è già stato messo a punto. Tornando su un passato di errori, la verità si trova in un vero e proprio pentimento intellettuale. Si conosce, infatti, contro una conoscenza anteriore, distruggendo conoscenze mal fatte, superando quello che nello spirito stesso fa da ostacolo alla spiritualizzazione» (Zan, 2012, p.22).

«L'errore non è un ostacolo alla conoscenza, anzi questa si caratterizza come una prospettiva di errori rettificati. Chi ama la routine, chi cerca solo successi, chi non ha un rapporto positivo con l'errore non può partecipare fruttuosamente al gioco della scienza. L'errore, è un fatto positivo, normale e utile» (Baldini, 2001, p. 9).

Federico Enriques:

«Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica. Egli impara presto a distinguere gli errori significativi da quelli, che non sono propriamente errori – affermazioni gratuite di sfacciati che cercano di indovinare – dove manca lo sforzo del pensiero, della cui adeguatezza si vorrebbe giudicare. E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe naturali del pensiero nella ricerca delle verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere. […] In breve chi cammina impara che ogni camminare ci espone a cadere, ma perfino la caduta val meglio della sicurezza dello star fermi» (Enriques, 2001, p. 56).

Dario Antiseri:

«Quando in una scolaresca si scopre un errore, questo deve essere un momento di gioia. Ed è da apprezzare sia chi ha osato sbagliare, sia chi ha scoperto l'errore, sia chi propone una soluzione migliore. Abbiamo scoperto un errore, cerchiamo quindi di eliminarlo, cerchiamo di migliorarci. In questo modo nessuno si vergognerà di tentare soluzioni, nessuno sarà costretto a bloccare la sua creatività. E nessuna s'insuperbirà per aver trovato nell'altro un errore» (Baldini, 2001, p. 10). […] L'errore è una felix culpa, ma non è un peccato. L'unica cosa di cui dobbiamo vergognarci non sono i nostri errori, ma il fatto che spesso per un motivo o l'altro, li copriamo o li proteggiamo: è questa la nostra tentazione oscurantista. […] L'errore è il motore della ricerca, perché ogni scoperta di un errore è la scoperta di un nuovo problema e un nuovo problema è la richiesta di una nuova teoria, di una teoria più potente» (Mollo, 2001, pp.160 e 178).

Giovanni Vailati:

«Le opinioni, siano esse vere o false, sono pure sempre dei fatti, e come tali meritano ed esigono di essere prese a oggetto d'indagine, di accertamento, di confronto, d'interpretazione, di spiegazione precisamente come qualunque ordine dei fatti, e allo stesso scopo; allo scopo cioè di determinare, per quanto ci è possibile, in mezzo alle loro varietà, alla loro complicazione, alle loro trasformazioni, gli elementi costanti, le uniformità, le leggi insomma da cui il loro succedersi è regolato. Un'asserzione erronea, un ragionamento inconcludente d'uno scienziato dei tempi trascorsi possono essere tanti degni di considerare quanto una scoperta o un'intuizione geniale, se essi servano ugualmente a gettar luce, sulle cause che hanno accelerato o ritardato il progresso delle conoscenze umane o a mettere a nudo il modo d’agire delle nostre facoltà intellettuali. Ogni errore ci indica uno scoglio da evitare mentre non ogni scoperta ci indica una via da seguire» (Binanti, 2001, pp. 14-15).

Ernst Mach:

«Conoscenza ed errore discendono dalle stesse fonti psichiche; solo il risultato permette di distinguerli. L’errore riconosciuto con chiarezza è, come correttivo, altrettanto utile e cognitivamente positivo. Il modo migliore perché un allievo ci impadronisca di una conoscenza è di fargli percorrere la via su cui è stata ottenuta» (Binanti, 2001, p. 16 e p. 28).

2.2 Epistemologia, pedagogica e didattica dell’errore

Epistemologia, la storia della scienza, pedagogia e didattica, sono legate dal sottile ‘lama’ rappresentata dall’errore, dalla ricerca dell’errore e dal suo superamento. Tutti i protagonisti di cui sopra hanno riportato le voci, rilevano che quanto l’errore sia importante nella costruzione della conoscenza, poiché esso è ritenuto.

- naturale, perché fa parte della corrente attività umana;
- positivo, perché la sua correzione aumenta le conoscenze del discente;
- vantaggioso, perché mette lo studente in condizione di apprendere dall’errore.

Secondo Cartesio, il corretto uso del cervello non potrebbe dar luogo a errori, che quindi nascono dal seguire percorsi non razionali. C’è da dire che purtroppo la ‘veste positiva’ dell’errore non viene mai messa in evidenza, anzi nella nostra società si vogliono sempre portare come esempio persone che non sbagliano mai. Agli stessi insegnanti piace far vedere davanti agli alunni che essi non sbagliano mai. In tempi antichi gli insegnanti mettevano le orecchie d’asino ai bimbi quando sbagliavano e picchiavano loro le dita quando scrivevano male. Di conseguenza, l'errore era percepito come qualcosa di assolutamente negativo, da evidenziare con segni in blu o in rosso, secondo la gravità, cercando di eliminare al più presto possibile. Questi atteggiamenti sono nati in accordo a un modello trasmissivo della conoscenza, nell’ambito della concezione behaviorista dell’apprendimento.

Altro atteggiamento ampiamente diffuso è quello di considerare l’errore solo a livello cognitivo, in altre parole semplicemente come mancanza di conoscenza o abilità. Questa interpretazione è molto riduttiva perché limita la possibilità di connettersi al problema che ha prodotto l’errore e di conseguenza può danneggiare anche le possibilità di un intervento efficace di supporto/recupero. Un insegnante che addossi all’ignoranza la responsabilità e importanza dell’errore, attua, infatti, solo interventi di tipo cognitivo che potrebbero essere inefficaci qualora l’origine dell’errore fosse da ricercare in altro luogo, in aspetti metacognitivi e non cognitivi inadeguati, in errori fatti in precedenza o in visioni distorte della disciplina. L'interpretazione dell'errore in ambito epistemologico, mira a unire il carattere problematico dell'errore con i meccanismi di generazione dei saperi validi, tanto in campo scientifico quanto in campo didattico. Questo suggerisce un'efficace interpretazione dell'errore come contrasto cognitivo, il cui superamento porta a nuova conoscenza, che è proprio la tesi di Popper: "la nostra conoscenza si accresce nella misura in cui apprendiamo dagli errori".

In ambito epistemologico, Enriques definisce gli errori come "tappe naturali del pensiero nella ricerca della verità".

Secondo Popper, nella scienza come nella vita, si apprende per prove ed errori: quanto più si tenta tanto più s'impara, anche se si fallisce ogni volta. Non esiste una metodologia per evitare l'errore, che Popper vede anche come conseguenza dell'aver accettato una sfida significativa. Nel procedere per tentativi, lo studente va man mano eliminando gli errori e confermando le intuizioni giuste. Popper nella sostanza critica gli insegnanti che cercano di eliminare gli errori, perché in tal modo essi abbassano le richieste e quindi il livello di apprendimento. Questo comportamento dell'insegnante che identifica il successo con il fatto che lo studente dà la risposta giusta porta lo studente a dare attenzione principalmente ai prodotti e non ai processi, ed è ben noto che un prodotto giusto non è indice di comprensione profonda di un sapere.

La voce di Bachelard enfatizza la dimensione temporale dell'errore, un aspetto cruciale anche in ambito didattico. Anche Zan rileva che "l'errore di ieri o di oggi rimandano semplicemente, ad un confronto fra un prima e un dopo" e il miglioramento di oggi viene attraverso la consapevolezza dell'errore di ieri ed il suo superamento (Zan, 2012, p.25). È per questo motivo che Zan evidenzia l'importanza didattica di lasciare tracce dell'errore come in un diario che accompagna la storia di crescita individuale.

D'altra parte Bachelard ci ricorda che la storia della matematica comprende anche errori, sebbene questa disciplina sia sempre vista come immutabile ed esatta. Essere consapevole di questo permette all'allievo di vedere la matematica come più viva e umana e al docente di essere più tollerante sia per gli errori dell'allievo che per i propri, quindi è anche vero che gli errori commessi nella disciplina vanno contestualizzati storicamente, quindi valutato in quel momento storico.

Bachelard afferma che: "come l'uomo consacrato alla cultura scientifica è un eterno scolaro, così il desiderio segreto di ogni maestro deve essere quello di restare uno scolaro" (Baldini, p. 9-10). Egli sostiene che gli errori non siano dolorosi, ma piuttosto educativi, e che debbano essere circondati da un'atmosfera serena.

La testimonianza forse più autorevole delle profonde implicazioni didattiche che hanno aspetti epistemologici e storici è quella di Enriques e di Mach, che mostrano quanto sia facile per l'uomo ‘cadere in errore’, per cui occorre, essere umili di fronte alla scienza e al comune operare quotidiano. Al tempo stesso, l’individuazione e il superamento dei propri errori possono produrre nuova conoscenza, nella misura in cui questi non si ripetano, poiché ‘errare humanum est, perseverare autem diabolicum’.

Allo stesso modo Antiseri sostiene che ogni insegnante deve riuscire a far comprendere ai propri allievi che l’errore non è qualcosa di scandaloso, ma il motore tanto del sapere scientifico quanto del percorso educativo nel quale sono coinvolti. Pertanto i docenti devono creare nelle loro classi un'atmosfera in cui sia permesso sperimentare senza alcun timore.

Dal punto di vista pedagogico Vailati ritiene pedagogicamente importante lo studio della storia della scienza, per permettere allo studente di ‘sperimentare’ il vero modo di procedere della scienza, che diventa ‘esatta’ a posteriori, mentre la sua costruzione procede lungo una strada lastricata di difficoltà e di errori che hanno poi portato alle grandi conquiste della conoscenza.

In sintonia con tale pensiero Antiseri afferma che “la storia della scienza è un cimitero di errori, di teorie cadute nella lotta per risolvere problemi. E quindi è un cimitero di eroi. La storia della scienza è la splendida e tortuosa storia di una disputa ininterrotta: di una disputta messa in atto per trovare errori al più presto possibile, al fine di eliminarli al più presto possibili” (Antiseri, 2001, p. 102).

Il valore formativo dell’educazione sta proprio nell’acquisizione di una mentalità critica, nel senso positivo del termine, ed è questo lo scopo dell’insegnante. Questo è anche il pensiero di J. Astolfi, il quale afferma che “la competenza nel gestire gli errori degli studenti è una delle caratterizzazioni più peculiari della professionalità docente” (Pellerey, 2012, p. 38).

Infatti, una gestione ‘positiva’ dell’errore da parte del docente è fondamentale per permettere all’allievo di sviluppare un atteggiamento positivo nei confronti della matematica e di migliorare il senso di autoefficacia.

Questi sentimenti negativi fanno riferimento a come l’allievo interpreta l’esperienza per cui affermiamo, come già detto, la necessità di un ambiente sereno dove sia ‘permesso’ sbagliare.

2.3 Errore come risorsa didattica

Il Costruttivismo radicale, indicazioni per la didattica matematica

Secondo il costruttivismo la conoscenza non esiste separatamente dal soggetto che conosce, che la riceve in un gioco dinamico tra un individuo vivace e la realtà. L’individuo guida vivacemente azioni, progetta e riprogetta la realtà e i concetti, dunque questa teoria mette al centro del processo formativo l’individuo. Di conseguenza la conoscenza non è la scoperta di una fotografia oggettiva della realtà al di fuori del soggetto, ma è una costruzione individuale di significato. Il percorso di apprendimento è individuale e non progettato ma è il frutto di un complesso di fattori, creazione interiore del sapere, impressioni, atteggiamenti e convinzioni.

Il costruttivismo non concorda con la teoria del razionalismo secondo cui la conoscenza esiste in maniera assoluta, non risente dell'osservatore, e chiunque può appropriarsene.

Non esistono vie che ti portano ad apprendimenti ottimali. Nell'ottica del costruttivismo l'apprendimento è il risultato dell'interpretazione della realtà da parte del soggetto che apprende. In moltissimi casi quello che trasmette l'insegnante non coincide con le interpretazioni dei soggetti, perché il significato della conoscenza viene ricostruito dalle competenze e dalle intenzioni personali di chi apprende.

L'apprendimento diventa significativo quando la conoscenza è circoscritta all'esperienza e i modi di apprendere sono fortemente collegati alle situazioni in cui avvengono.

Il costruttvismo vede la conoscenza come processo metacognitivo, la sua costruzione è aumentata dall'abilità di attivare i processi di controllo, scegliere e comporre gli oggetti in scena, valutare le difficoltà dal punto di vista personale e impersonale, creando attenzione sul prodotto generato, analizzando pure lo stile cognitivo.

Tra le diverse vie del costruttivismo, quella del costruttivismo radicale di Ernst Von Glasersfeld è la più 'trasparente'. Egli, infatti, è un esponente importante di questa teoria che ha applicato al caso della didattica della matematica.

La sua teoria punta molto sulla distinzione tra il sapere scientifico e il sapere che viene dalla sperimentazione. Il suo interesse è principalmente su quest'ultimo, dal punto di vista di un continuo miglioramento del rapporto studente-docente e studente-studente.

Il costruttivismo radicale si fonda sui due seguenti fondamentali principi, enucleati da Von Glasersfeld:

- la conoscenza nasce da una costruzione attiva da parte del soggetto;
- la funzione della conoscenza è di progettare l'esperienza, e non di manifestare conoscenza metafisica.

Per questa teoria costruttivista l'essere umano è un organismo che si perfeziona, prende e agisce sulla realtà fuori del dominio, crea mappe cognitive per percorrere le sue attività e rappresentare le sue esperienze.

Anche le mappe stesse si perfezionano e si adeguano alla realtà pratica dell'individuo, e sono le sue mappe stesse che lo guidano nella sperimentazione della realtà. Allo stesso modo, il mondo nel quale l'uomo è immerso diventa reale per il soggetto nel momento in cui egli ne sperimenta il contrasto quando vuole adattarlo ai propri schemi.

In altre parole, il costruttivismo radicale non accetta l'esistenza della realtà al di fuori della percezione soggettiva della sperimentazione. Questo modello concorda con il pensiero di Popper e dunque si appoggia sul pensiero critico e creativo, che rende la conoscenza un campo sempre da ampliare in base alla realtà con cui si viene in contatto.

Questa teoria offre spunti positivi sia per l'insegnante sia per l'allievo.

L'insegnante deve mettere in primo piano l'alunno e stare molto attento a cosa quest'ultimo pensa e fa, senza forzare l'alunno verso la risposta giusta. Un 'processo' giusto è molto più importante di un 'prodotto' giusto.

L'insegnante si deve svestire del modello trasmissivo del sapere, e capire che la conoscenza è costruita personalmente dal soggetto. Qua entrano in gioco un fattore molto importante come il linguaggio e le sue diverse rappresentazioni semiotiche.

Il compito dell'insegnante è di correggere i concetti e le procedure errate, e per far questo deve usare molta pazienza ed essere sufficientemente elastico mentalmente per indagare su come lo studente sia riuscito a creare quella risoluzione. Il processo che porta alla risoluzione assume un ruolo decisivo e pertanto è necessario lasciare lo studente da solo di fronte al problema, aiutare soltanto se è chiesto e limitarsi a dare dei suggerimenti senza obbligo.

Ogni studente tenta di costruire il proprio sapere sulla base della sua conoscenza precedente che può contenere concetti giusti o errati, e quindi qualsiasi risoluzione di un problema che lo studente dà nasce da una propria percezione del problema e delle risorse che ha per risolverlo.

Condividivo lo stesso parere di Von Glasersfeld che dice: "il costruttivismo radicale non è un dogma: ognuno deve scoprire se può essere utile nel suo campo di esperienza" (Cardellini, 2004, p. 8).

2.4 Il valore dell'errore nell'ambito del processo di apprendimento

2.4.1 L'errore come fonte antropologica dell'apprendimento

L'essere umano nella vita si pone obiettivi da raggiungere, e l'apprendimento è l'obiettivo della didattica per l'insegnante e l'allievo.

Nell'educazione l'apprendimento è un complesso processo che porta l'uomo a conquistare e comprendere, attraverso esperienze da cui nascono nuove conoscenze in grado di trasformare in modo definitivo il suo comportamento.

Invece in matematica l'apprendimento è frutto di un processo personale, che dipende da tanti fattori messi in scena, quali conoscenze, atteggiamenti, attività metacognitive e non cognitive (pensiero, memoria, attenzione, etc.), e che costituiscono una storia personale fatta di scoperte.

Ragionare sull'andamento dell'apprendimento vuol dire ragionare in profondità su tutto quello che porta allo sviluppo psichico, alla razionalità e ai modi d'interiorizzazione.

L'essere umano, a differenza delle altre specie, apprende fin da piccolo, quasi in maniera istintiva, perché ha necessità di autodeterminarsi per affermarsi nel mondo. Questo gli permette di arrivare a degli obiettivi prefissati, da solo oppure in gruppo. Osserviamo che l'essere umano ha un privilegio: egli non sa solo apprendere ma è in grado di porsi in un ambiente, dove capisce come si apprende, avendo la possibilità di riflettere e confrontare i percorsi che la vita gli presenta.

Nelle ricerche delle fonti antropologiche dell'apprendimento, l'essere umano non è abbinato solo a conoscenze ordinate, accumulate, ma soprattutto a conoscenze complesse proprie della vita umana stessa.

Condividiamo il parere di Rombach che rileva che: "l'apprendimento è un elemente esistenziale, vale a dire una di quelle costituenti fondamentali per la comprensione di sé nell'esistenza umana". (Zollo, 2012, p. 37).

Reboul sottolinea: "in primo luogo, l'apprendimento mette l'uomo in condizione di appropriarsi di tutte quelle condotte che gli consentono di soddisfare i bisogni; di utilizzare il saper fare appreso, in situazioni diverse; di tentare, sulla base degli apprendimenti precedenti, di dare soluzione a problemi diversi; di esercitare tutti i suoi poteri creatori e ricreatori che lo mettono in condizione di saper fare e di saper essere; di impegnare, infine, in ogni saper fare e in ogni saper essere tutta intera la sua persona. Il saper fare in tal modo, da padronanza di una tecnica, si traduce in padronanza di se stesso". (Zollo, 2012, p. 38).

Correttamente Clausse enfatizza che: "l'attività mentale non comincia mai dall'ordine e dalla chiarezza: comincia dalla confusione, approssimazione, superficialità". (Mollo, 2001, p.157).

Infatti, l'approssimazione deve essere vista dagli alunni come un'occasione positiva.

Nell'esistenza umana non siamo accompagnati solo da percorsi lineari, sistemati, ma anche da diverse vie che naturalmente possono contenere errori. Il processo di apprendimento non è solo abbinato ad atteggiamenti metacognitivi (processi di controllo) ma anche da prove ed errori, incertezze e certezze, ostacoli e passaggi.

Condividiamo il parere degli psicologi che dicono che l'errore e la verità sono generati dalla stessa fonte, saldate alle radici antropologiche dell'apprendimento, e l'errore durante il complesso processo di apprendimento rappresenta un istante molto utile, che dà stimolo ad andare oltre, sempre più vicino alla verità.

Se oggi la scuola pone obiettivi verso l'apprendimento personalizzato, bisogna tenere conto molto dell'apprendimento individualizzato nel senso di dare agli alunni quello che serve loro, anche attraverso l'analisi degli errori che hanno commesso.

Se, infatti, confutiamo il pregio dell'analisi dell'incerto, dunque eliminando gli errori, andiamo a diminuire la crescita della personalità umana che cammina per intuizione, critica, successi-insuccessi, cadute-alzate. Il pregio dell'errore evidenzia il diritto di ciascuno ad autoprogrammarsi e a sviluppare la propria personalità non già cristallizzata.

Il miglioramento dell'essere umano dipende molto dal sapere sfruttare e usare l'errore che porta a indagare e trovare un buon percorso alternativo.

Un soggetto è in crescita quando, partendo da quello che sa, va avanti concentrandosi sui processi e non sui prodotti. È certo che un apprendimento individualizzato migliora la personalità nella misura in cui il soggetto accetta prima di tutto le proprie mancanze e il proprio limite.

2.4.2 Il pregio dell'errore nella costruzione dell'apprendimento

L'apprendimento ha luogo in ogni momento, a scuola e fuori di essa, e avviene anche senza che noi lo strutturiamo perché accade in diversi modi. In questo processo di apprendimento 'informale', ha molto importanza migliorare e usare bene quello che è stato già appreso.

Da quanto abbiamo visto al paragrafo precedente, l'errore è presente in ogni momento dell'attività umana e quindi va accolto vantaggiosamente. Infatti, in precedenza molti pedagogisti (Montessori, Bruner, Postman) hanno rilevato nelle loro ricerche il fatto che l'errore individua un aspetto importante della dinamica dell'apprendimento. Postman afferma che: "il principale degli errori metodologici commessi da buona parte degli insegnanti sta nell'insistere troppo nel dare ragione agli studenti, senza valutare a sufficienza il ruolo dell'errore nell'apprendimento, di conseguenza, gli studenti sono portati ad aver paura quando sbagliano". (Postman, 2001, p. 135).

L'insegnante che usa in maniera critica e costruttiva gli errori fa abbassare la paura di sbagliare e passa il messaggio che l'apprendimento nasce proprio dalla comprensione degli errori. Un'attività collaborativa, tra docente e studenti e tra studenti alla pari, in cui sono esaminati gli errori di tutti, porta al contempo meno ansia e aiuto al recupero dei propri errori.

L'arte pedagogica dell'insegnante è legata anche a stimolare negli studenti un comprensibile grado d'insicurezza, facendoli addestrare alla ricerca dell'errore. Condividiamo il parere di Mollo che rileva che: "l'incertezza è viatico di un sano apprendimento" (Mollo, 2001, p.156). Infatti, bisogna tracciare un nuovo approccio dove l'errore non è visto più come qualcosa di cui aver paura o evitare ma sia valutato e autogestito in modo positivo e normale, iniziando dall'idea che l'errore è parte costitutiva della dinamica d'apprendimento e che un buon insegnante nel suo obiettivo principale ha di creare un terreno fertile per stimolare questi processi dinamici.

Lo studente centrato nel suo cammino d'apprendimento dovrà essere messo in grado di *autogestire* gli errori, non solo a livello cognitivo, causato da mancanze di conoscenze, ma soprattutto a livello metacognitivo applicando correttamente quello che sa e nello stesso tempo sanare le proprie lacune. Da questo punto di vista in ambito didattico è fondamentale avere il controllo dell'errore e non eliminare/memorizzare subito, che incide negativamente nel processo di apprendimento. Infatti, l'uso corretto degli errori deve diventare parte di un programma educativo dove è la molla del progresso. Ronald M. Swartz sottolinea che: "studenti e insegnanti devono sempre aver ben presente il fatto che il processo che porta alla soluzione dei problemi è un processo dinamico, in cui l'errore non è un ospite indesiderato, bensì costituisce una forza indubbiamente positiva" (Baldini, 2001, p.117). Gli errori devono essere visti non solo come ostacoli alla risoluzione di problemi, ma come inviti a collaborare e condividere con gli altri le difficoltà. Infatti, capita spesso che in un problema complesso trovare gli errori da solo è difficile, si sente la necessità di chi ci sta accanto, che aiuta molto anche dal punto di vista affettivo in questa situazione non semplice.

Gli errori devono essere analizzati sia in maniera cognitiva e soprattutto a livello metacognitivo, andando a scoprire le radici di tali errori. Bisogna staccare l'errore da chi lo commette, liberando dalla sofferenza del singolo. Analizzando gli errori capiamo che dobbiamo allontanare l'idea che i problemi ha solo una soluzione o meglio un unico percorso da seguire. In quest'ottica gli studenti comprendono che i problemi sono situazioni dinamiche e non statiche. I soggetti sono fallibili e anche da questa fallibilità nascono i propri prodotti, le loro attività, le loro rappresentazioni in ambito d'interpretazioni, osservazioni, e sperimentazioni, il progetto del futuro e una comprensione del passato. Postman sottolinea ciò che è particolarmente significativo in un procedimento fallibilista è che esso è qualcosa di più che un metodo di apprendimento (Postman, 2001, p.136).

Nelle pratiche educative/didattiche incontriamo molti errori, un miglioramento viene con un approccio critico. Un buon insegnante capisce che non deve essere un giustificazionista, bensì che cogliere tutte le idee che nascono dalle analisi degli errori ed eleminare qualcuno nel tempo giusto prima di memorizzare. Allora cerchiamo di esorcizzare gli errori e ridurli. Non andiamo verso un apprendimento significativo senza scoprire e ammettere il valore dell'errore che è un generatore di una verità in arrivo. L'errore veste la funzione di 'generatore' dell'apprendimento che si costruisce mattone per mattone. Senza la scoperta degli errori non scopriamo la verità o meglio non andiamo vicino alla verità. È come togliere l'acqua alle piante. Togliere questa possibilità agli studenti significa frenare l'osservazione che ha molta importanza in un apprendimento efficace. L'errore crea un buon ambiente nell'apprendimento che permette di sperimentare e di riflettere su quello che sta facendo e sui risultati che si ottengono.

Esiste apprendimento quando si prosegue in maniera: prove-riprove; sperimentare-risperimentare; verifiche-riverifiche, in un'ottica di pensiero induttivo. Si crea apprendimento quando dedichiamo attenzione verso l'oggetto in scena, verso qualcosa che indica difficoltà. È la situazione di ‘attenzione concentrata’ – come definisce Maslow – a favorire esperienze d’interessamento gratificante, sulla base del fatto di percepire e trattare un’esperienza come qualcosa d’individuale (Mollo, 2001, p.173). Andiamo verso un apprendimento individualizzato che si crea quando il soggetto è liberato dall’ansia di sbagliare e usa un approccio critico del binomio prove-errori. Qua entrano in gioco altri atteggiamenti affettivi che hanno un ruolo cruciale. In questo caso non bisogna stimolare un apprendimento guidato ma dare esperienze di vari percorsi nel senso che la crescita è scelta da loro soggetti motivati, che spendono tempo ed energie per adattarsi a nuove situazioni che in qualche modo sono collegate a quelle precedenti. Infatti, in un apprendimento significativo i due requisiti, *sperimentazione* e *riflessione*, sono cruciali, e l’apprendimento che si costruisce nella dinamicità delle situazioni in cui il soggetto si trova. Permettere allo studente di arrivare a una corretta risoluzione pur attraverso un percorso che al suo interno abbia avuto degli errori, vuol dire che andiamo a valutare, e quindi a dare importanza, a tutto il processo e non semplicemente al prodotto finale. Questo tipo di valutazione infonde fiducia nell’allievo che si sente libero di ‘provare’ e ‘riprovare’, mentre una valutazione secca del prodotto finale gli darebbe insicurezza e sfiducia perché non si valorizza l’impegno che lo studente mette nello svolgimento del compito. Alla fine si corre il rischio che il soggetto perda anche la competenza posseduta usata correttamente nei procedimenti precedenti nelle soluzioni dei problemi. Adottare un approccio critico, sperimentare in un ambiente aperto con libertà, con interesse, sentire e controllare la competenza in arrivo, confrontare con la competenza effettiva posseduta porta a motivare un apprendimento significativo.

In questo processo adattivo, per i soggetti diventa cruciale *l’autoaccettazion*e dell’errore come motivo per proseguire e confrontare nuove situazioni che sicuramente porta crescita personale. Gaetano Mollo afferma che: “in quest’ottica ampia l’apprendimento non è solo ogni cambiamento acquisito dal modo di comportamento dell’organismo, ma soprattutto una tendenza che una parte o fase di esperienza vissuta può rimanere nella persona, e insieme a ritornare in maniera appropriata in un’esperienza ulteriore, tale che noi impariamo ciò che viviamo, impariamo ogni argomento che viviamo in quanto lo accettiamo, e lo impariamo nel grado in cui lo accettiamo” (Mollo, 2001, p.175).

Qua siamo in una fase molto delicata in cui entrano in gioco i fattori metacognitivi. I processi di controllo sono attivi nei soggetti quando sono ben adeguati, senza paura e sono motivati a scoprire sfruttando la competenza effettiva. Lo studente deve avere tutta la libertà di esprimere perché non apprende dall’obbligo esterno, ma apprende quando è in grado di adeguare quello che sa alle nuove situazioni con le quali vengono a confrontarsi. Il soggetto conoscendo la situazione dentro di sé sente la necessità della *correzione* dell'errore accettato, portando su una via del miglioramento di quello che ha appreso.

Da questo punto di vista l'errore ha un ruolo cruciale nella costruzione dell'apprendimento nel senso di:

- una molla che spinge al più in là;
- liberazione della perfezione assoluta;
- protegge da atteggiamenti autoritari.

Infatti, la presenza dell'errore è una forza in più a sospingere in avanti per colmare una mancanza che l'errore evidenzia, in altre parole come lo chiama Mollo 'una fonte del divenire' (Mollo, 2001, p.167). L'errore difende dalle immutabilità perché disputa partite con la mentalità 'relativa' della conoscenza. Protegge dal sistema autoritario perché addotta un approccio non giustificazionista.

In quest'ottica, l'errore diventa sorgente d'indagini e applicazioni sperimentali. Il processo educativo è visto come azione individuale e non adatto a modelli costanti, fissati. Finora abbiamo associato il pensiero del progresso con il pensiero della fallibilità e ne abbiamo mostrati i valori. Per completare il cerchio, nell'equilibrio dinamico dell'apprendimento nasce la necessità di un pensiero del riferimento/confronto a un modello che è un motivo in più a riuscirci.

In quest'analisi non si può non tener conto dell'importanza del pensiero intuitivo e creativo. Il pensiero intuitivo fa nascere consapevolmente gli errori, psicologicamente aiuta molto nell'attenzione e nell'analisi a posteriori, dunque il pensiero intuitivo costruisce informazione da provare e sperimentare nell'analisi successiva. Si nota bene il legame stretto tra il pensiero intuitivo e quello analitico. Allora nasce la necessità di andare fino in fondo all'errore perché è generatore della ricerca che vogliamo. L'errore essendo un individuatore di difficoltà, sia per lo studente sia per l'insegnante, dà uno stimolo a superare, dà una guida di partenza a osservazioni, valutazioni e procedimenti diversi. Nasce la necessità di ogni studente di autogestire e indagare nuova elaborazione intorno ai modi di risolvere dei problemi. Durante le soluzioni dei problemi, se sono gestite bene le informazioni date, le strategie operate, la finalizzazione, allora l'errore può diventare fonte di autocontrollo e autocorrezione.

Alla fine diciamo che, l'errore dà energia: l'ansia di cadere in errore frena nell'agire e nella logica creando un blocco nello stimolo nella costruzione dell'apprendimento. L'ansia di fallire diminuisce quando è accettato l'errore come una fonte che dà luce. La conoscenza è relativa, e quindi dobbiamo avere un approccio critico verso essa, e attraverso prove-riprove può essere migliorata. L'errore accetta l'idea di verità come ricerca e quindi ne va sfruttata la forza.

2.4.3 Le potenzialità educative degli errori.

Come visto nei paragrafi precedenti, la teoria del costruttivismo radicale ha scoperto le potenzialità educative che offrono gli errori fatti dagli studenti di matematica.

Nel pensiero di vari filosofi, gli errori non sono da scansare il più possibile ma piuttosto sono da vedere come un vincolo utile e costruttivo nel generare il sapere matematico. Essi affermano che gli errori hanno forza di far nascere incertezze e autocontrollare la propria competenza, fino a raggiungere un apprendimento efficace.

Una riflessione sugli errori può portare ai soggetti un progresso anche nei loro atteggiamenti metacognitivi e nelle strategie del problem solving. Tale riflessione sviluppa un pensiero critico e creativo, un ripensamento dei concetti usati, un abituarsi all'idea che tocca a loro scoprire e rimediare l'errore. In più, gli errori, presentando un prodotto non atteso, generano uno scontro, che può spingere e 'obbligare' ad analizzare in maniera approfondita i propri elaborati. L'errore è una 'reale' molla per iniziare il proprio lavoro.

Negli ultimi venti anni nella ricerca in educazione matematica, lo studio degli errori in matematica è stato abbinato con la visione costruttivista dell'apprendimento. L'errore è sempre accostato all'essere umano, non esiste una via per non sbagliare. Allora l'errore è una fonte utile per monitorare i processi di apprendimento, un 'vincolo' che ricercatori e educatori possono sfruttare a loro vantaggio per indagare la competenza effettiva del soggetto e il modo in cui l'ha costruito.

Condividiamo il parere di Von Glasersfeld che sottolinea: "è attraverso la discrepanza, la perturbazione, o gli incontri con l'inaspettato che possiamo individuare le qualità delle nostre costruzioni; questi momenti chiave della nostra attività di riflessione sono opportunità per valutare i nostri costrutti". Comunque, egli ci avverte anche che i nostri problemi, cioè la nostra percezione della devianza, possono non coincidere (e probabilmente non coincidono) con quelli degli allievi. Così, se volessimo investigare, questi concetti, avremmo bisogno di scovare i loro problemi, non di imporgli i nostri (Pesci, 2012, p.55).

Angela Pesci afferma che: "un errore stimola all'azione, poiché significa che non si è riusciti ad ottenere il risultato atteso ed occorre dunque procedere ulteriormente. Inoltre l'errore procura un concreto punto di partenza, perché contiene nuove informazioni utili (anche se per lo più di carattere negativo) non solo relative al risultato che si voleva raggiungere, ma anche nei riguardi sia del contesto in cui si stava operando sia della metodologia impiegata" (Pesci, 2012, p.59). Gli studenti, indagando così in diverse vie e in profondità, possono arrivare fino alla riformulazione del problema stesso, e alla risoluzione dei nuovi problemi, andando verso un apprendimento davvero significativo.

L’errore mostra un conflitto con il risultato ottenuto, di conseguenza ti porta a scoprire anche casualmente vie alternative che prima erano trascurate. Agli studenti con mancanze a livello cognitivo, trovandosi in contrasto con l’errore, gli dà stimolo per recuperare certi concetti in cui da solo forse non potevano arrivare.

L’errore indubbiamente pone vantaggi nell’apprendimento ma ha anche un valore educativo, lo studente si deve sentire stimolato a ‘rischiare’ e a cogliere il pregio delle informazioni educative che vengono dagli errori. In classe studiare tutti gli errori richiede molto impegno e tempo ma bisogna scegliere quegli errori che l’insegnante ritiene importanti per raggiungere le finalità educative/formative. Alla fine bisogna andare verso una pianificazione concreta educativa sfruttando gli errori.

2.5 L’analisi degli errori

Lo stesso errore in diversi soggetti nasce da oggetti diversi, quindi è molto importante individuare la radice dell’errore.

Per analizzare gli errori, facciamo riferimento a tre livelli di risorse e di processi della mente:

- *Cognitivo*: In cui il soggetto, memorizza, ipotizza, ricava, … conoscenze;
- *Metacognitivo*: In cui il soggetto è legato al processo di controllo e consapevolezza del livello cognitivo;
- *Non cognitivo*: In cui dipende dalla responsabilizzazione del soggetto nella costruzione del proprio sapere che è legato ai fattori affettivi e motivazionali.

L’analisi degli errori e delle loro ragioni permette di capire in profondità le competenze di uno studente, sia quelle stabilmente possedute sia quelle in arrivo (Figura 2.5-1). Questo comporta vantaggi per lo studente, quali:

- una migliore comprensione delle caratteristiche della competenza aggiunta;
- un miglior confronto (analogie e differenze) tra competenze in arrivo, nel senso non possedute, con quelle possedute ed è proprio questa concatenazione di queste competenze che porta all’aumento di quella effettiva posseduta;
- una revisione e un assestamento della competenza effettiva posseduta.

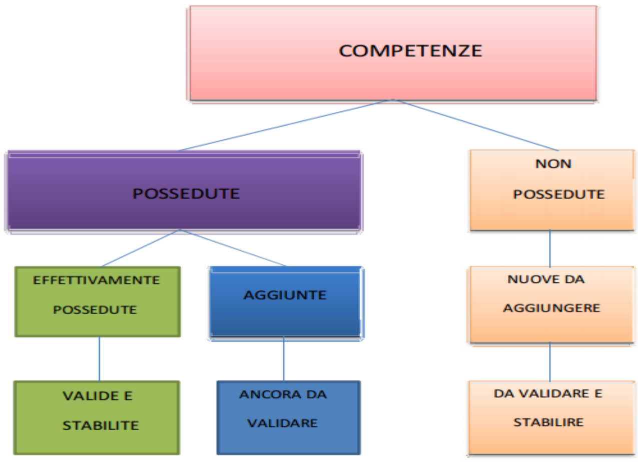


Figura 2.5-1

A livello cognitivo, la presenza di errori può indicare la necessità di riprendere e approfondire spiegazioni e procedure. L'individuazione di contraddizioni nelle affermazioni e in controesempi forniti può indicare mancanze nei concetti in gioco, fino a creare una mappa concreta per andare dal prodotto al processo. In alcuni casi, gli errori possono aprire nuovi settori d'indagine e indicare possibilità mai considerate in precedenza, facendo così in modo che lo studente possa prendere il ruolo del ricercatore.

Analizzare il malfunzionamento cognitivo dei soggetti, le loro reazioni irregolari periodiche, ci permette di perfezionare le procedure di funzionamento del sistema didattico (o del suo malfunzionamento), permettendoci di intuire, nello stesso tempo, qualche direzione possibile d'intervento e soprattutto di rimedio. Analizzando gli errori riusciamo a classificare le difficoltà, che è un parametro principale nella strutturazzione delle attività nell'intervento di recupero. Gli studenti fanno errori senza accorgersene e se non sono riconosciuti ('guardati alla luce del sole', per dirlo alla Montessori) o non analizzati opportunamente, contribuiscono a far nascere altri errori, peggiorando la conoscenza.

L'interpretazione dell'errore è molto delicata e complessa. Non si può liquidare con una diagnosi semplicistica quanto improduttiva quale della mancanza di conoscenze. A livello metacognitivo, gli errori possono diventare fonte di autocorrezione e autoapprendimento. C'è necessità dunque di:

- stimolo a capire le radici degli errori, e non solo a eliminarli subito;
- sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto;
- controllo individuale o collettivo degli errori (studente-docente, studente-studente) e quindi la necessità che lo studente ne percepisca i limiti come pre-requisito per correggerli.

L’errore visto soltanto a livello cognitivo limita la possibilità di entrare al problema che ha prodotto l’errore, ma soprattutto può danneggiare un possibile intervento di recupero. Interventi cognitivi tipo: ripetendo la lezione, dare materiali di esercitazione, risolvendo il problema in un altro modo sono insufficienti in ambiti metacognitivi e non cognitivi.

L’importanza della consapevolezza e autocontrollo dell’errore

Una sfera della vita quotidiana in cui esercitiamo continuamente processi di controllo è quello che ha a che fare con la memoria, data la necessità di ricordarci percorsi e scadenze. Anche nell'ambito dell'attività in matematica, l'aspetto della consapevolezza assume un ruolo cruciale nell'attivazione dei processi di controllo. La consapevolezza delle proprie competenze è essenziale per valutare la difficoltà di un elaborato, in particolare per riconoscere la situazione problematica.

Se lo studente non è in grado di controllare i propri prodotti, non è neanche in grado di identificare le difficoltà ed elabora una propria forma d’incapacità e scoraggiamento fino al disprezzo della materia, com’è il caso spesso del rapporto con la matematica. Gli studenti manifestano mancanze nel gestire situazioni problematiche che richiedono il controllo delle competenze personali. La consapevolezza dell’errore porta a controllare o correggere.

Maria Montessori afferma che: “una delle più grandi conquiste della libertà psichica è il rendersi conto che noi possiamo fare un errore e possiamo riconoscere e controllare l’errore senza aiuto” (Montessori, 2001, p.130). Il controllo dell’errore diventa un navigatore che ti avvisa che stiamo sulla strada giusta. La possibilità di proseguire consiste maggiormente nell’avere libertà, sviluppando un pensiero critico verso un percorso certo. Le pratiche scolastiche devono dare la possibilità agli alunni di autocontrollare gli errori. L’insegnante deve sfruttare il feedback continuo che ha con gli allievi per fornire loro dei forti mezzi di controllo.

È anche necessario per il soggetto che apprende, di saper accettare la familiarità del proprio errore. Condividiamo il parere di Montessori che dice: “la fratellanza nasce meglio sul sentiero degli errori che su quello della perfezione” (Montessori, 2001, p.131). Alla fine diciamo che la idea principale di Montessori è che bisogna andare verso un’educazione dove gli alunni si devono mettere in ambienti pratici e nelle condizioni di controllare da se stessi l’errore. Il controllo dell’errore permette all’allievo di aumentare la fiducia nel proprio pensiero, di valorizzare la propria competenza e il proprio autocontrollo e infine di migliorare il proprio apprendimento. La possibilità di miglioramento dipende prima di tutto della consapevolezza della propria competenza. Sfruttando i vantaggi degli errori si deve andare verso un’educazione che porti da un lato l’allievo alla riflessione/osservazione sul suo apprendimento e dall’altro il docente ad avere pazienza e sostenere i tentativi, le fatiche, le incertezze e i fallimenti dell’allievo.

Le motivazioni dell’uso corretto degli errori

Un approccio migliore all’errore nelle pratiche scolastiche, il loro utilizzo corretto, migliora parecchio le condizioni nell’apprendimento e nella prestazione degli studenti. Infatti, ridurrà le preoccupazioni, migliorerà le motivazioni intrinseche, migliorerà il senso di auto-efficacia dell’allievo e l’attribuzione interiore di successo e di fallimento.

L’uso corretto degli errori permette di spostare l’attenzione dal prodotto al processo, quindi di superare la pratica comunemente diffusa tra gli studenti di ‘memorizzare meccanicamente’ regole e avviando invece la pratica del ‘domandarsi perché’. Permette quindi di avviare lo studente a ragionare sulle scelte fatte, sulla pianificazione di una strategia di risoluzione, sulla previsione di risultati derivanti dalle scelte fatte, sul nesso causale tra le scelte e gli errori fatti.

L’uso corretto degli errori è una parte cruciale anche della metacognizione. L’individuazione dell’errore può aiutare a sviluppare l’auto-osservazione di situazioni problematiche diverse in cui lo studente fa ad es. gli stessi errori.

Da ultimo, osserviamo che, anche se potrebbe sembrare eguamente utile analizzare anche errori e risoluzioni diverse fatte da altri, da un punto di vista non cognitivo, in particolare per quel che riguarda l’ansia nell’apprendimento, sembra che per lo studente sia più efficace analizzare i propri errori che non quelli commessi da altri.

3 Classificazione delle difficoltà

Un’analisi della classificazione degli errori comunica informazioni sullo stato della rappresentazione della conoscenza dello studente e delle strategie che ha utilizzato per svolgere un dato problema. Una classificazione degli errori, fa scoprire gli errori più gravi aiutando gli insegnanti a impostare le domande in modo tale che lo studente accetta il rischio dell’errore.

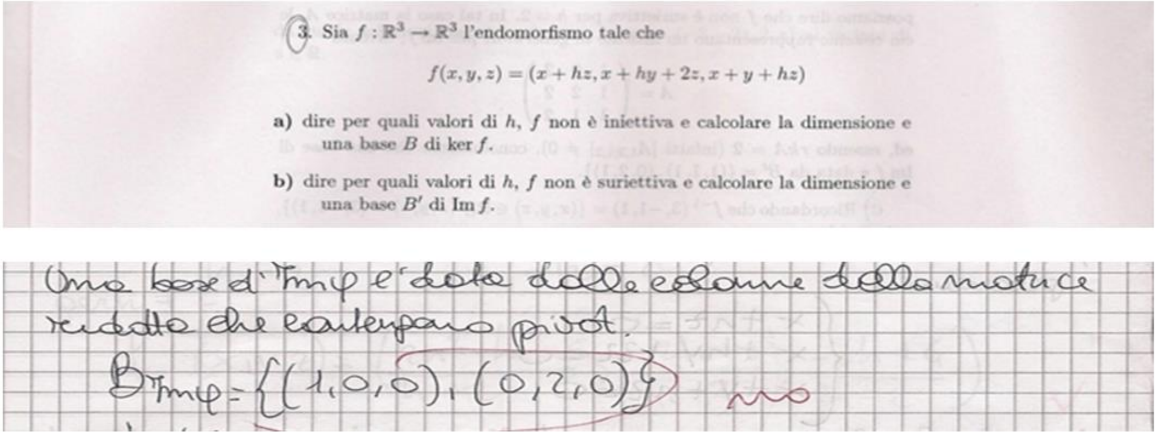
Nella classificazione degli errori ci basiamo nella ‘paternità’ degli errori, in altre parole su ciò che ha dato origine all’errore. Non si deve confondere la fonte dell’errore con l’errore stesso. La classificazione degli errori permette di trovare le cause delle difficoltà che hanno portato all’errore, che possono essere di vari motivi (teorici, pratici …). L’analisi del comportamento cognitivo degli studenti offre, infatti, interessanti direzioni d’indagine, soprattutto se esso rende evidente delle ‘difficoltà’ periodiche e diffuse, cioè in soggetti diversi e in situazioni diverse.

La classificazione degli errori permette di identificare buone strategie di recupero soppratutto nella pianificazione di tale attività, come vedremo più in dettaglio nel capitolo V. Se tuttavia, come si evince dalla sua interpretazione in senso epistemologico, l’errore è radicato con l’attività di risoluzione dei problemi e specificamente con il processo di costruzione di varie conoscenze, il carattere osservativo di un simile tentativo di classificazione non consiste nel cercare di evitare ogni possibile opportunità di errore, ma piuttosto nel prenderne consapevolezza.

3.1 Dicotomia errore/sbaglio

Finora ci siamo dedicati all’errore nell’ambito pedagogico-didattico, ma ci sembra importante anche tener conto della differenza che esiste tra errore e sbaglio, che troviamo in ambito psicologico. Una distinzione del genere fu portata avanti già da H. Wiemer negli anni venti. A suo dire, errore e sbaglio differiscono nel senso che l’errore si basa sull’ignoranza di certi fatti essenziali per l’esatto riconoscimento, mentre lo sbaglio è generato dalla difettosa attività delle tre funzioni (attenzione, memoria e pensiero) che presiedono al compimento di ogni lavoro. Mentre dunque l’errore ha una base oggettiva, lo sbaglio è essenzialmente un fattore soggettivo (Baldini, 2001, p.10).

La Figura 3.1-1 mostra un esempio di errore:



3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x,y,z) = (x + hz, x + hy + 2z, x + y + hz)$$

a) dire per quali valori di h, f non è iniettiva e calcolare la dimensione e una base B di $\ker f$.

b) dire per quali valori di h, f non è suriettiva e calcolare la dimensione e una base B' di $\operatorname{Im} f$.

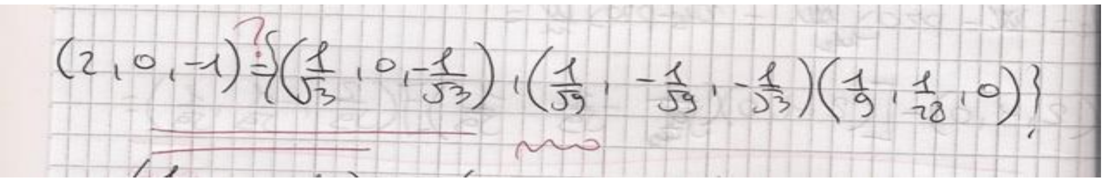
Una base d'Imφ è data dalle colonne della matrice ridotta che contengono pivot.

$B_{Im\varphi} = \{(1,0,0),(0,2,0)\}$ no

Figura 3.1-1

Per base di Im f prende le due colonne della matrice A trasformata a scalini. Le operazioni di riduzione della matrice A a scalini sono combinazioni lineari sui vettori riga della matrice A quindi i vettori riga ottenuti, sono ancora appartenenti allo spazio di partenza. Non è così per i vettori colonna: se è vero che le colonne di A generano Imf e che quei contenenti pivot sono linearmente indipendenti, non è vero che dopo le operazioni elementari per riga i vettori colonna appartengono ancora a Imf, dal momento che le operazioni fatte non sono vettoriali sulle colonne.

La Figura 3.1-2 mostra un esempio di sbaglio:



$(2,0,-1) \overset{?}{=} \{(\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{9}},-\frac{1}{\sqrt{9}},-\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{9},\frac{1}{18},0)\}$ no

Figura 3.1-2

Scrive un 'vettore' = 'tre vettori': è presumibile che non riflette su cosa sta scrivendo.

In accordo a Pellerey, consideriamo come sbagli "maniere errate che derivano da mancanza di attenzione o di adeguato controllo, sono abitudini sbagliate o automatismi sviluppati in maniera scorretta" (Pellerey, 2012, p. 30).

Per capire meglio la differenza tra errore e sbaglio, ci fermiamo un attimo a vedere le differenze tra problemi ed esercizi. Tutte e due riguardano una domanda la cui risposta esige abilità diverse. Secondo Antiseri, il problema esige una scoperta da farsi, l'esercizio si esegue perché una scoperta è già stata fatta. (Antiseri, 2001, p.10). Secondo D'Amore i problemi coinvolgono l'uso di più regole o nozioni (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione), o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso. Invece gli esercizi possono essere risolti utilizzando regole o nozioni già apprese e in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica (D'Amore, 2006, p. 647).

L’errore è compiuto quando s’indaga in una nuova conoscenza, mentre lo sbaglio nella maggior parte dei casi si attiva in una conoscenza che si dovrebbe già avere. L’errore è concatenato alle attese e all’invenzione, e quindi lo può avere nella risoluzione di problemi, mentre lo sbaglio è maggiormente stato di una scarsa attenzione e cattiva memoria, e quindi si commette nello svolgimento di esercizi. Sicuramente c’è più apprendimento quando si fanno più errori che sbagli. Un buon insegnante deve capire bene le differenze che intercorrono tra i due e sapere sfruttare bene l’occasione giusta per spiegare tale differenza agli alunni per dare loro gli ‘elementi’ perché imparino da se stessi a individuarli.

3.2 Possibili classificazioni di errori e sbagli

Molti ricercatori hanno analizzato l’errore in vari campi del sapere e della vita umana. Nell’ambito pedagogico e didattico, Jean-Pierre Astolfi offre una buona classificazione:

- Errori che derivano dalla comprensione non corretta della descrizione dei compiti da svolgere;
- Errori che derivano da abitudini scolastiche negative e dall’interpretazione non coerente delle attese dell’insegnante o della scuola;
- Errori che evidenziano concezioni diverse da parte degli studenti;
- Errori che dipendono dai processi cognitivi messi in azione;
- Errori che dipendono dal sovraccarico cognitivo dell’allievo;
- Errori che hanno origine da un’altra disciplina;
- Errori causati dalla complessità dell’argomento (Pellerey, 2012, p.34).

Come si vede, Astolfi ha fatto una classificazione degli errori che risente di tutti e tre i livelli dell’apprendimento: cognitivo, meta-cognitivo e non cognitivo.
Alla luce di criteri psicologici, H. Wiemer ha catalogato gli sbagli in cinque diversi tipi:

- Sbagli abituali;
- Sbagli automatici;
- Sbagli per analogia;
- Sbagli da confusione;
- Sbagli di origine inconscio-affettiva. (Baldini, 1998, p. 67)

Gran parte dell’indagine fatta sulla tipologia di errori che accadono in matematica si colloca negli anni 80’, ma è ancora molto attuale. Di seguito andiamo a richiamare le tre classificazioni più pertinenti a nostro avviso e su cui ci siamo basati per la nostra classificazione.

Classificazione 1: Radatz

Hendrik Radatz classifica gli errori attraverso l'uso di un modello informazione-elaborazione e considerando le caratteristiche della matematica.

Le categorie sono:

1. Difficoltà nel linguaggio. La matematica è come una 'lingua straniera' per gli studenti che hanno necessità di conoscere e capire i concetti, i simboli e il vocabolario della matematica. Non comprendere la semantica nel linguaggio matematico che può causare gli errori degli studenti all'inizio del problem solving;
2. Difficoltà nell'elaborazione della rappresentazione iconica e visuale delle conoscenze matematiche;
3. Mancanze di capacità e conoscenze, concetti richiesti (inclusa mancanza degli algoritmi e nella padronanza delle conoscenze di base); per esempio gli studenti possono dimenticare o non essere capaci di ricordare le informazioni connesse al problem solving;
4. Associazioni scorrette o rigidità, cioè uno spostamento negativo causato da informazioni di decodifica e codifica;
5. Applicazione di regole o strategie non appropriate. (Radatz, 1979, pp.163-172).

La classificazione di Radatz coinvolge tutta la disciplina matematica, senza entrare nel dettaglio di aree specifiche.

Classificazione 2: Watson

Ivan Watson ha condotto una ricerca usando il modello Newman, basandosi sul problem solving e coinvolgendo anche il livello non cognitivo.

Le categorie che egli individua sono:

1. L'abilità nella lettura - riesce l'allievo a leggere le domande?
2. Comprensione - riesce l'allievo a capire le domande?
3. Trasformazione - è capace l'allievo di selezionare le operazioni matematiche necessarie che sono richieste per ottenere la soluzione?
4. Abilità nei processi - riesce l'allievo a svolgere le operazioni matematiche necessarie per il compito?
5. Codificazione - è capace l'allievo di scrivere le risposte in forma accettabile?
6. Motivazione - l'allievo avrebbe potuto risolvere correttamente il problema se lui o lei avesse tentato?
7. Disattenzione - l'allievo potrebbe eseguire tutti i passi ma fa un errore negligente, che sia impossibile da riprodurre;
8. Il modello delle domande - l'allievo fa un errore a causa del modo in cui il problema è stato presentato. (Wiens, 2007, p.5)

Classificazione 3: Movshovitz-Hadar, Zaslavsky ed Inbar

Un'altra ampia classificazione degli errori è stata fatta da Nitsa Movshovitz-Hadar, Orit Zaslavsky e Shlomo Inbar (1987). L'approccio usato è simile a quello di Radatz per categorizzare gli errori matematici degli studenti. Essi includono le seguenti sei categorie:

1. Uso inappropriato dei dati - lo studente non ha usato correttamente le informazioni delle domande;
2. Malinterpretazione del linguaggio - lo studente trasforma scorrettamente le risorse matematiche dal problema scritto ai simboli;
3. Deduzione logicamente scorretta - lo studente estrae senza validità nuove informazioni da informazioni date;
4. La deformazione delle definizioni o teoremi - lo studente ha avuto un'intuizione scorretta sulla definizione di una teoria, regola, teorema o definizione;
5. Soluzione non verificata - ogni iniziativa presa dallo studente è stata corretta in se stessa, ma il risultato prodotto non è la soluzione del problema affrontato o non verifica alcuni dei vincoli richiesti;
6. Errori tecnici - lo studente fa un errore di disattenzione, in cui sbaglia il calcolo o estrae dati errati. (pp. 3-14)

Il modello proposto, prevedendo difficoltà e ostacoli, può aiutare gli insegnanti a sfruttare questa possibilità nella pianificazione dell'insegnamento.

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato degli errori in ambiti epistemologici e pedagogici, però vediamo la classificazione degli errori in relazione allievo/disciplina dunque nel campo didattico. L'argomento è molto ampio, però cercheremo di fare una classificazione generale degli errori in matematica, nel caso nostro dell'algebra lineare. La figura 3.2-1 fa vedere quali errori trattiamo.

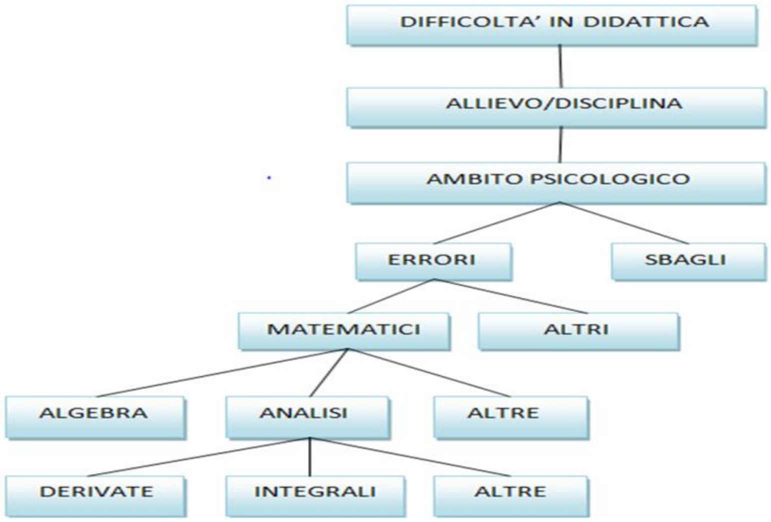


Figura 3.2-1

3.3 Tassonomia Math

In accordo con Smith, 1996 (in Blanco, 2009), nella tabella che segue, consideriamo una tassonomia per la matematica. Per ogni item, mettiamo accanto ad un esempio relativo all'area di conoscenza presa in considerazione in questa tesi.

Conoscenza oggettiva	Siano dati le applicazioni $f_i : R \rightarrow R$ dove $f_1 : x \rightarrow 2x + 1$ $f_2 : x \rightarrow e^x$ $f_3 : x \rightarrow x^2$ Individuare le risposte giuste. f_1 non è iniettiva ☐ f_1 è iniettiva e suriettiva ☐ f_2 suriettiva ma non iniettiva ☐ f_2 è iniettiva ma non suriettiva ☐ f_3 è una funzione semplice ☐ f_3 è suriettiva ma non iniettiva ☐ f_3 è biunivoca ☐
Comprensione (riconoscimento della formula e situazione)	Cosa rappresenta la sequente conica Þ : $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$? un ellisse ☐ una parabola ☐ un iperbolo ☐ rette parallele ☐ una circonferenza ☐ un ellisse immaginario ☐ una circonferenza immaginaria ☐

Applicazioni di procedure e algoritmi	Applicando l'operazione elementare $r_3 \to r_3 - 2r_2$ alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ Quale delle seguenti matrice si ottiene? $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ ○ Altro ○
Trasferimento dell'informazione e (classificazione degli oggetti matematici)	Dire quali delle seguenti espressioni sono equivalenti a $-2x - y + 2 = 0$? La retta passante per il punto (1, 0) ☐ $\begin{cases} x = -t/2 + 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in R$ ☐ La retta passante per l'origine paralella al vettore (-1, 3) ☐  ☐ Nessuna delle altre risposte è adeguata ☐
Applicazione in nuova situazione (pianificare la soluzione scegliere il metodo)	In uno spazio Euclideo di dimensione 3 rispetto ad un riferimento cartesiano. Sia r la retta di equazioni $r: \begin{cases} x = 11 \\ y = -13 \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in R$ che è: parallela al piano xy ☐ ortogonale al piano xy ☐ ortogonale al piano yz ☐ parallela all'asse z ☐ parallela all'asse x ☐ ortogonale all'asse z ☐

Giustificazione, dimostrazione, ragionamento e interpretazione	$\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ 3x - 4y - 3z - t = 1 \end{cases}$ Dire se il sistema è equivalente a? $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ -2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x - 4y - 3z - t = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + t = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y - 3z - t = 0 \end{cases}$ Altro
Implicazione, fare ipotizzi, confrontazione, trovare lo schema della soluzione.	Siano dati il punto P(1, 4, 1) e la retta e il piano seguente $r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\Pi : x - 4y + z = 0$ L'equazioni parametriche della retta s passante per il punto P incidente a r e parallela al piano sono: $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + z + 14 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in R$ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 + s \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t, s \in R$ non esiste nessuna delle altre risposte è vera
Valutazione	Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ allora det ($A \bullet A^T$) è uguale a: 0 1 2 3 -4 nessuna delle altre risposte è corretta

3.4 Competenze Niss

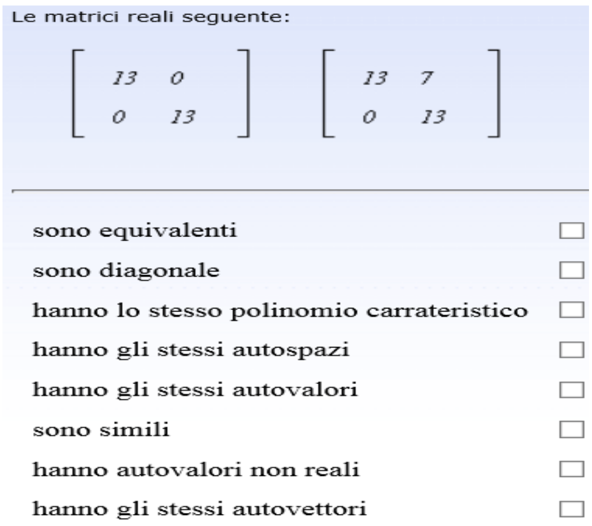
Le competenze matematiche costituiscono il perno centrale del processo d'insegnamento/apprendimento. Gli studenti per svolgere tale attività, richiedono che abbiano buone competenze possedute presso durante questo processo. Lo studente che si deve affrontare tali procedure (attività), deve avere un certo numero di competenze matematiche. Ogni una di queste competenze diverse è appartenente in vari domini. Le competenze matematiche utilizzate si fondano sul lavoro di diversi ricercatori. Noi abbiamo scelto come punto di riferimento quelle di Niss (2003).

Le competenze richiamano la riflessione degli studenti sulle procedure chieste o usate per trovare le soluzioni delle situazioni problematiche. Queste riflessioni sono collegate alle capacità dello studente di modellare le diverse strategie durante il problem solving. Alla fine affermiamo che le competenze sono determinate da questi parametri: ragionamento avanzato, argomentazione, astrazione, generalizzazione e schematizzazione applicativa a nuovi contesti.

Le competenze individuate da Niss sono:

Pensiero e ragionamento: Constare nelle differenze tra definizioni, teoremi, supposizioni e vari enunciati che riguardono casi particolari e nell'osservazione di tali differenze; nel comprendere i concetti matematici in constesti nuovi e complessi; nel comprendere e trattare la portata e i limiti dei concetti definiti e nel generalizzare gli obbietivi; nel comprendere risposte a corrispondenza fornite tramite: tabele, figure, grafici, etc. Nel creare domande: 'Come calcolare … ?'; 'A quale settore della disciplina matematica devo richiamare per …?'; 'Quali sono gli aspetti chiavi in questa situazione problematica … ?; e nel comprendere le relative risposte procurate tramite: grafici, tabelle, icone, oggetti algebrici etc.

Argomentazioni: Constare nel far sperimentare: 'Che cosa può o non può succedere? 'Quali possono essere le occasioni? E come mai?' 'Che competenze conosciamo e che obiettivo vogliamo aggiungere?'; 'Quali fra le proprietà sono più importanti?'; 'In che relazione sono gli oggetti?'; nel creare un semplice ragionamento di natura matematica diverse dalle dimostrazioni e forme più complesse di argomentazione; nel creare il legame di diversi ragionamenti matematici e valutare la efficacia. La domanda della figura 3.4-1 tratta: comprendere i concetti in contesti nuovi e complessi (pensiero e ragionamento); invece la domanda della figura 3.4-2 tratta: in che relazione sono gli oggetti (argomentazione).



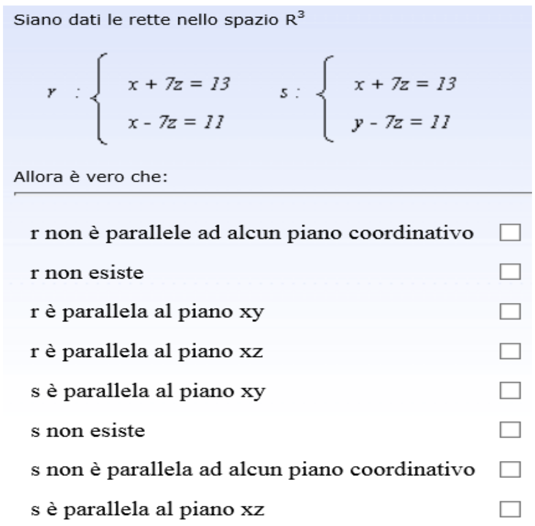


Figura 3.4-1

Figura 3.4-2

Comunicazione: Constare nel comprendere enunciati e sapere esprimere in forma scritta e orale su situazioni di natura matematica che vanno dal semplice assegnare una lettera o nome e riconoscere le caratteristiche di oggetti noti, al analizzare i risultati, fino all'illustrare problemi complessi. Questa competenza consiste anche nella comprensione di enunciati scritti o orali delle altre persone riguardando tali problemi.

Formulazione e risoluzione di problemi: Constare nel porre e creare problemi matematici diversi che vanno ben oltre alla fotocopiatura in forma chiusa dei problemi ('puri' e 'applicativi') standard noti; nel risolvere questi problemi utilizzando solide procedure note e usufruire anche le strategie originali del problem solving che collegano diversi settori della disciplina matematica e diverse forme di rappresentazione e comunicazione: mappe, grafici, tabelle, icone, vocaboli, figure. In più coinvolge una riflessione sulle strategie di problem solving e sui risultati. La domanda della figura 3.4-3 tratta: comprendere i simboli degli enunciati (comunicazione); invece la domanda della figura 3.4-4 tratta: usare nel problem solving altre aree della matematica (formulazione e risoluzione dei problemi).

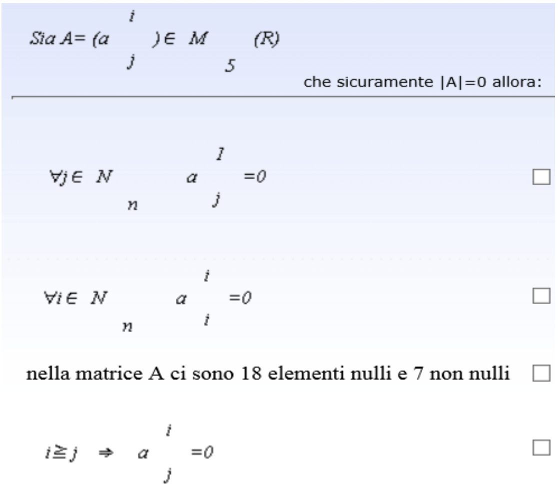


Figura 3.4-3

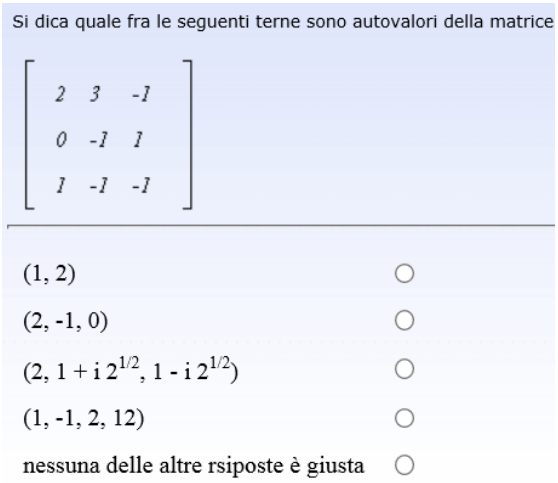
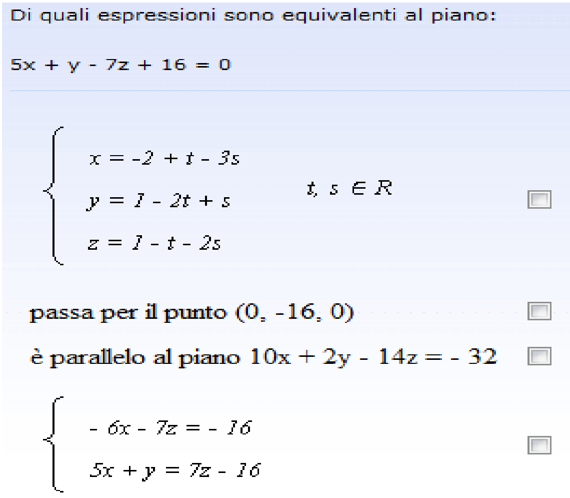


Figura 3.4-4

Rappresentazione: Constare nel codificare, decodificare e osservare rappresentazioni note o meno note di vari oggetti matematici; nel scegliere e passare da una forma di rappresentazione semiotica a un'altra; nell'interpretare e differenziare le varie forme di rappresentazione semiotiche. In più coinvolge una combinazione creativa di diverse forme di rappresentazioni semiotiche e creare delle forme di rappresentazione originali.

Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni: Constare nel comprendere e tradurre un linguaggio simbolico/formale dentro i contesti matematici sconosciuti; nel elaborare con affermazioni ed espressioni matematici che possiedono formule e simboli e nell'usare variabli;

risolvere equazioni, fare calcoli. In più richiama abilità per fronteggiare enunciati e termini complessi e un linguaggio simbolico o formale che non erano abituati; e nell'interpretare in linguaggio naturale il linguaggio simbolico o formale. La domanda della figura 3.4-5 tratta: varie forme di rappresentazione (rappresentazione); invece la domanda della figura 3.4-6 tratta: comprendere un linguaggio simbolico e formale (uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni).



Di quali espressioni sono equivalenti al piano:

$5x + y - 7z + 16 = 0$

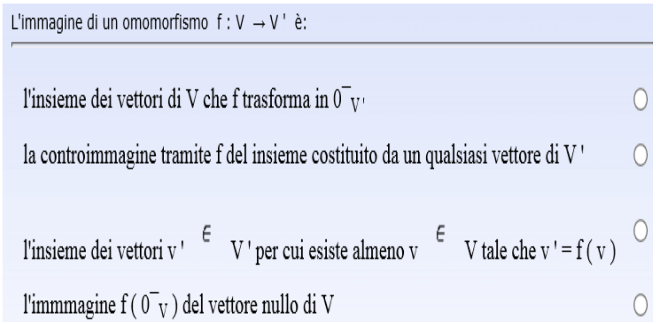
$$\begin{cases} x = -2 + t - 3s \\ y = 1 - 2t + s \\ z = 1 - t - 2s \end{cases} \quad t, s \in R$$

passa per il punto (0, -16, 0)

è parallelo al piano $10x + 2y - 14z = -32$

$$\begin{cases} -6x - 7z = -16 \\ 5x + y = 7z - 16 \end{cases}$$

Figura 3.4-5



L'immagine di un omomorfismo $f : V \rightarrow V'$ è:

l'insieme dei vettori di V che f trasforma in $\bar{0}_{V'}$

la controimmagine tramite f del insieme costituito da un qualsiasi vettore di V'

l'insieme dei vettori $v' \in V'$ per cui esiste almeno $v \in V$ tale che $v' = f(v)$

l'immagine $f(\bar{0}_V)$ del vettore nullo di V

Figura 3.4-6

4 Analisi di protocolli di algebra lineare

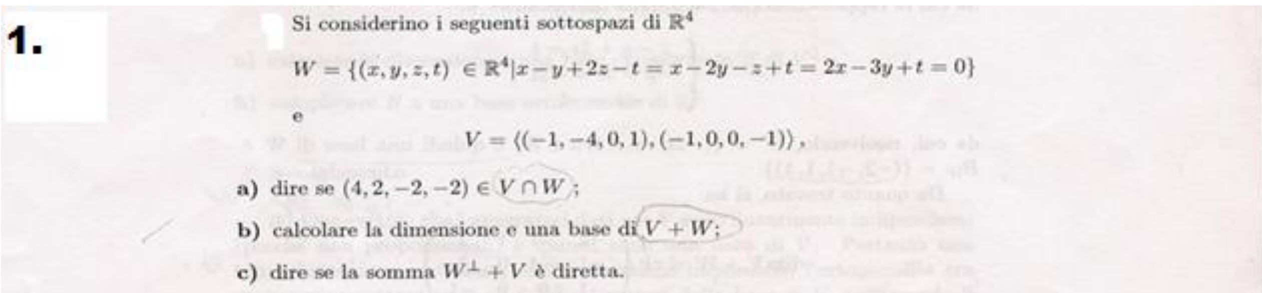
4.1 Contesto e base di dati

Sono stati analizzati circa 100 protocolli, relativi a due prove dell'esame di Geometria per il C.d.L.Ing. Edile Architettura. Ogni traccia contiene sei problemi ciascuno, ognuno del quale è suddiviso in due o tre quesiti. I problemi riguardano rispettivamente: gli spazi vettoriali, gli spazi euclidei, gli omomorfismi, la diagonalizzazione, le coniche, la geometria analitica nello spazio.

4.2 Catalogo delle difficoltà: alcuni esempi e loro discussione

In questo paragrafo andiamo a mostrare alcuni esempi degli errori più ricorrenti e andiamo a discuterli sulla base della classificazione fatta in precedenza.

Consideriamo il problema mostrato nella figura seguente:


1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y+2z-t = x-2y-z+t = 2x-3y+t = 0\}$$

e

$$V = \langle(-1,-4,0,1),(-1,0,0,-1)\rangle,$$

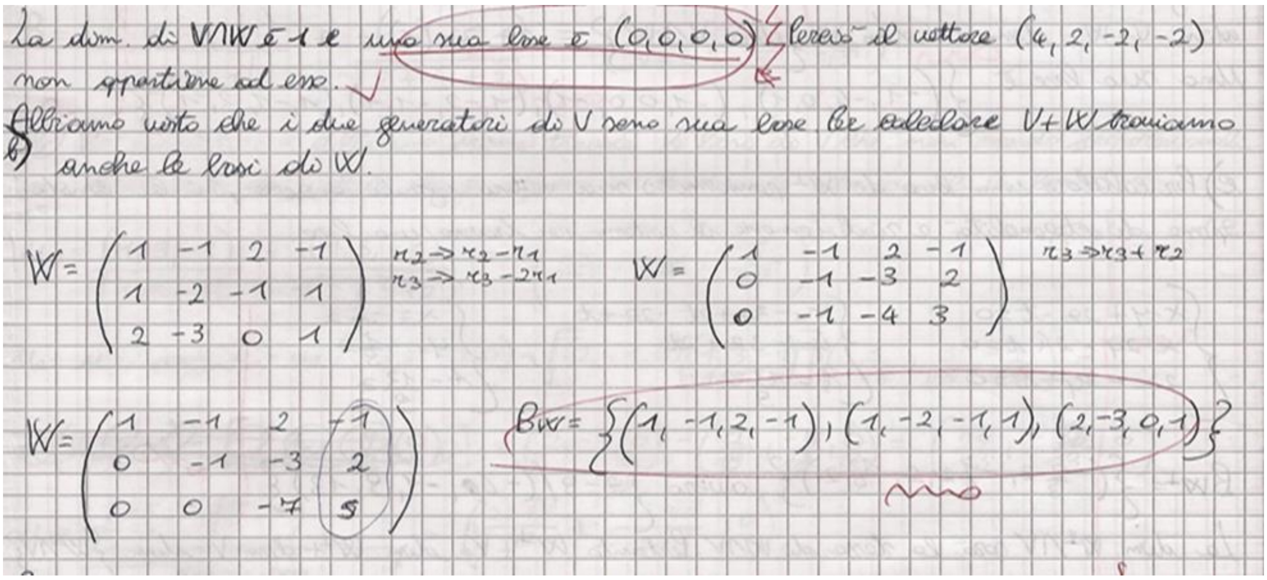
a) dire se $(4,2,-2,-2) \in V \cap W$;

b) calcolare la dimensione e una base di $V+W$;

c) dire se la somma $W^{\perp} + V$ è diretta.

Figura 4.2-1

La Figura 4.2-2 mostra un estratto della risoluzione al quesito a).


La dim. di $V \cap W$ è 1 e una sua base è $(0,0,0,0)$ Perciò il vettore $(4,2,-2,-2)$ non appartiene ad essa.

b) Abbiamo visto che i due generatori di V sono una base. Per calcolare V+W troviamo anche le basi di W.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 \Rightarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \Rightarrow r_3 - 2r_1 \end{matrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad r_3 \Rightarrow r_3 + r_2$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B_W = \{(1,-1,2,-1),(1,-2,-1,1),(2,-3,0,1)\} ?$$

no

Figura 4.2-2

Osserviamo che lo studente, assumendo che la dimensione dell'intersezione sia uno, considera come vettore di una sua base il vettore nullo, che chiaramente non può apparteneneervi essendo linearmente dipendente.

Successivamente, nel risolvere il quesito 1/b), lo studente assume come base di W i vettori coefficienti del sistema nella rappresentazione cartesiana linearmente indipendenti, che invece appartengono a $W^{\perp}$. Questo è un errore ricorrente che deriva dalla mancanza di controllo sui diversi tipi di rappresentazione di uno spazio vettoriale: lo studente impara un modo di procedere senza metterlo in relazione con eventuali vincoli di uso. In questo caso, il metodo usato dallo studente andrebbe bene se lo spazio fosse stato dato attraverso un suo insieme di generatori. Andando più in profondità, la mancanza di controllo deriva dal fatto che la rappresentazione data è in realtà priva di significato per lo studente: cosa significa che W è rappresentato da quel sistema lineare? Per arrivare poi a dire che i vettori coefficienti di ciascun'equazione appartengono a $W^{\perp}$, c'è bisogno di abilità di trattamento, ovvero di riuscire a vedere l'equivalenza tra *x-y+2z-t=0* e *(1,-1,2,-1)(x,y,z,t)=0*.

Continuando, nella Figura 4.2-3, vediamo nel riquadro rosso che lo studente scrive una prima uguaglianza che in qualche modo è possibile interpretare come l'intenzione di calcolare la dimensione dello spazio W. In realtà, usando un principio di cooperazione da parte di chi legge, l'espressione a destra dell'uguale potrebbe essere interpretata come il calcolo della differenza tra la dimensione di R^4 e il rango della matrice dei coefficienti della rappresentazione cartesiana di W e il risultato viene interpretato come dimensione di W (a sinistra dell'uguale). Questo sarebbe anche corretto. L'errore sta poi dopo nel fatto che lo studente fin qui ha capito che una base di W è fatta da un vettore, e quindi ne prende sì uno ma che in realtà appartiene a $W^{\perp}$.

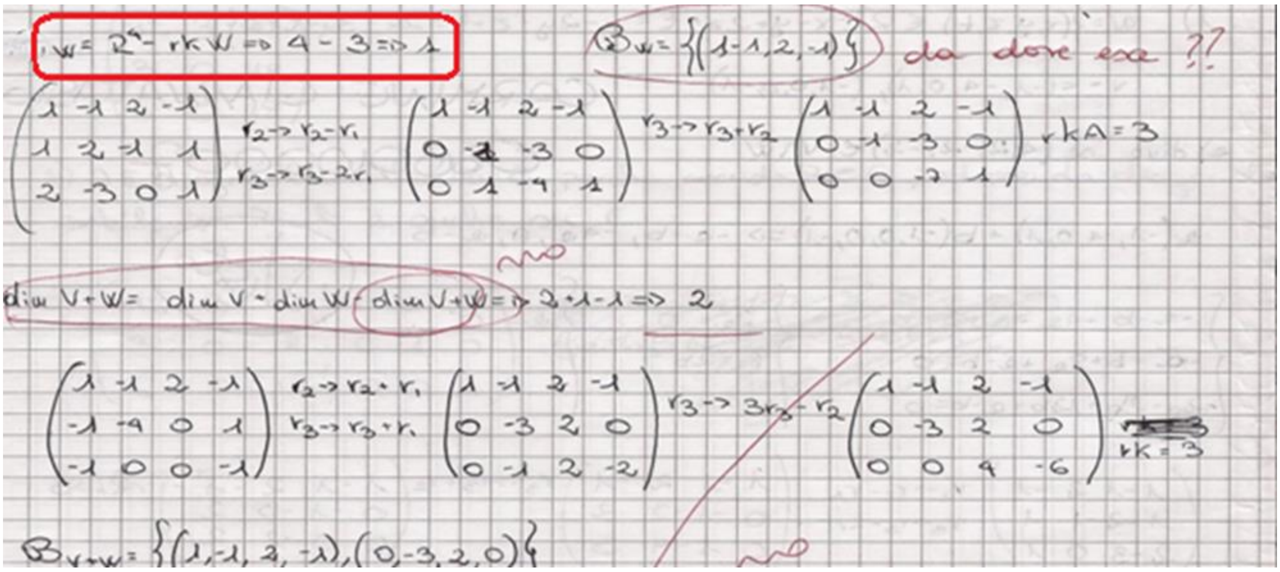
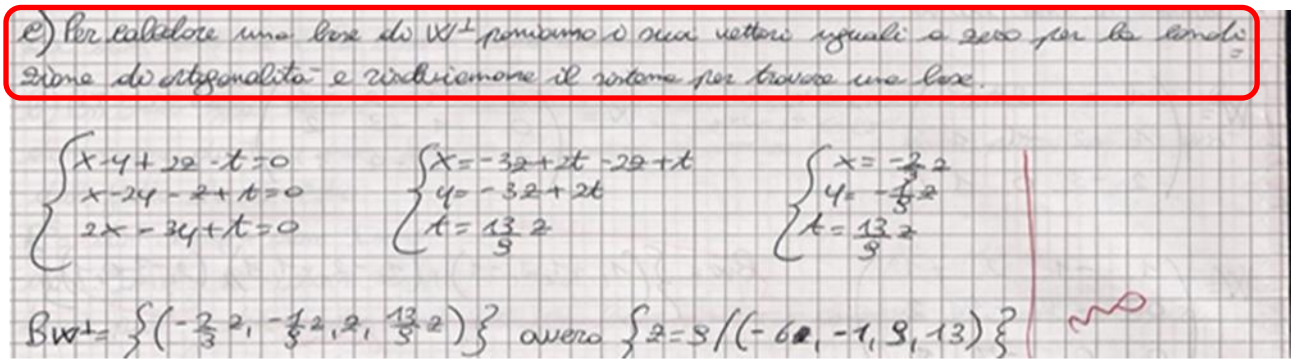


Figura 4.2-3

In seguito considera la matrice dei coefficienti della rappresentazione cartesiana di W. La riduce a scalini, e trova che il suo rango è 3 (nota, scrive rk A = 3, dove A non è identificata se non per "cooperazione" da parte di chi legge). Non si capisce però a cosa serva tale calcolo, al momento che non viene poi utilizzato per il seguito, dove appare la relazione di Grassmann. Qui vediamo che è sì vero che non è corretta, ma compare sia a destra che a sinistra dell'uguale il fattore dimV+W. È evidente che non c'è alcun controllo, anche se lo studente probabilmente intendeva scrivere '∩' al posto di '+'. Se anche così fosse, ovvero che intendesse dim V ∩ W = 1, questa assunzione non è stata dimostrata da nessuna parte! Dopo crea una matrice che ha per le righe quelle che a suo avviso sono le basi di W e V trovate (sebbene quella di W in realtà sia di $W^{\perp}$). La riduce a scalini, trovando che il rango è 3, ma poi prende solo i primi due vettori, perché aveva trovato dimV+W=2. Qui si vede il nesso tra dimensione e vettori di una base, ma manca completamente il nesso tra dimensione e rango della matrice considerata, per cui il calcolo di quel rango è solo un "ricordo" di pratiche viste, ma che per lo studente non hanno alcun significato.

Passando al quesito 1/c), nella Figura 4.2-4 possiamo vedere ancora una volta che non è chiaro allo studente cosa significa avere una rappresentazione cartesiana di un sottospazio vettoriale. Infatti, risolve il sistema lineare rappresentativo di W e dice di aver calcolato $W^{\perp}$.


c) Per calcolare una base di $W^{\perp}$ poniamo i suoi vettori uguali a zero per la condizione di ortogonalità e risolviamo il sistema per trovare una base.

$$\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ x-2y-z+t=0 \\ 2x-3y+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3z+2t-2z+t \\ y=-3z+2t \\ t=\frac{13}{9}z \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{2}{3}z \\ y=-\frac{1}{9}z \\ t=\frac{13}{9}z \end{cases}$$

$B_{W^{\perp}}=\{(-\frac{2}{3}z, -\frac{1}{9}z, z, \frac{13}{9}z)\}$ ovvero $\{z=9/(-6, -1, 9, 13)\}$

Figura 4.2-4

Inoltre osservando quanto scritto dallo studente nel riquadro rosso, si capisce che lo studente in qualche modo ricorda una procedura che ha a che fare col calcolo di $W^{\perp}$, ma non ricorda che quella procedura si applica quando si conosce una base di W. Questo però denota ancora una volta un non controllo sugli oggetti che lo studente manipola: i vettori che di volta in volta considera appartengono a W o al suo ortogonale? Che cosa pone a zero? Quali sono i vettori che intervengono nella condizione di ortogonalità che richiama?

Nella Figura 4.2-5 vediamo un pezzo di risoluzione fatta da un altro studente riferita ai quesiti 1/b) e 1/c). Come si può vedere, a questo studente manca la definizione di dimensione, pertanto possono coesistere le due scritte cerchiate che sono in contraddizione tra loro: una base formata da 4 vettori e la dimensione trovata attraverso la relazione di Grassman pari a 3!

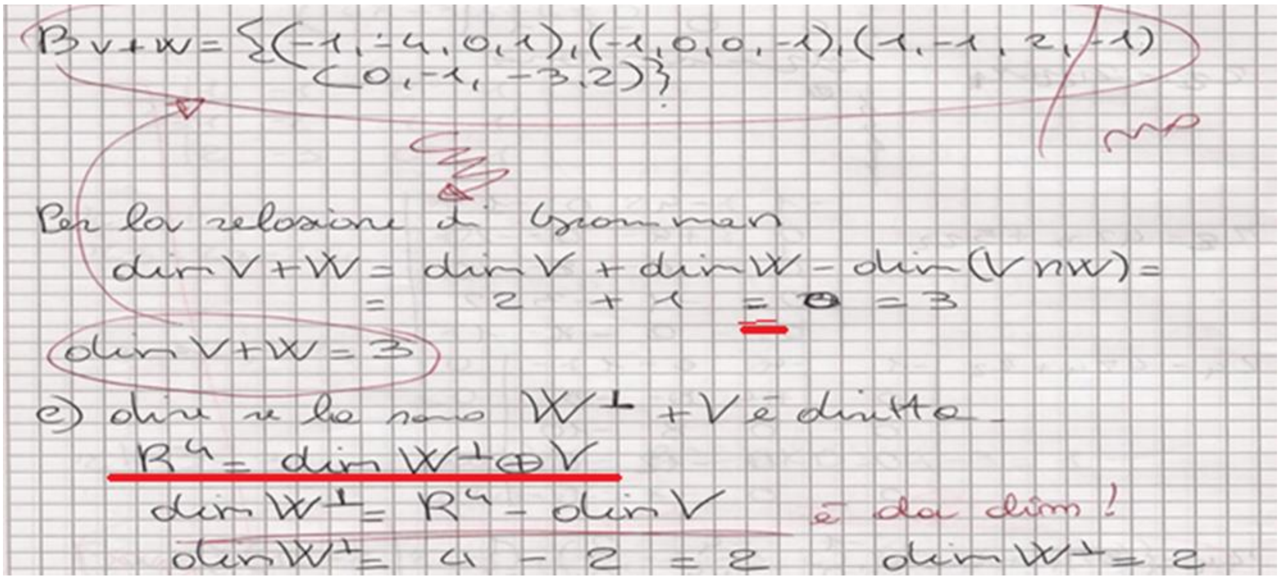


Figura 4.2-5

Successivamente, vediamo un errore ricorrente: usare il simbolo dello spazio vettoriale (specie quando si tratta dello spazio ambiente R^n) indifferentemente tanto per indicare lo spazio quanto per indicarne la sua dimensione (com'è in questo caso). Va notato che, sebbene talvolta gli studenti sottintendano "dim", in realtà, una sotterranea confusione tra gli "oggetti" (da un lato uno spazio vettoriale, dall'altro un numero) in gioco ci sia.

Nella Figura 4.2-6 possiamo osservare che lo studente sbaglia la risoluzione del sistema lineare: prende solo il valore $a=0$ dalla prima equazione ma non la conseguenza $b=0$ che viene dalla seconda equazione. Successivamente, vediamo un'altra "usanza" frequente degli studenti: l'uso "libero" delle parentesi, l'impressione che si ha è che siano solo un segno di "abbellimento", che non siano cioè dotati di semantica, per cui per lo studente non c'è differenza tra scrivere *{(-1,0,0,-1)}* o *{-1,0,0,-1}*. Supponendo pure che lo studente, nell'istante in cui scrive, ha bene in mente che la seconda scrittura in realtà sottintende la prima, ci si chiede per quanto tempo questa consapevolezza duri. Se dopo qualche tempo, lo studente viene posto davanti a questa scrittura, saprà riconoscere il "sottinteso"?

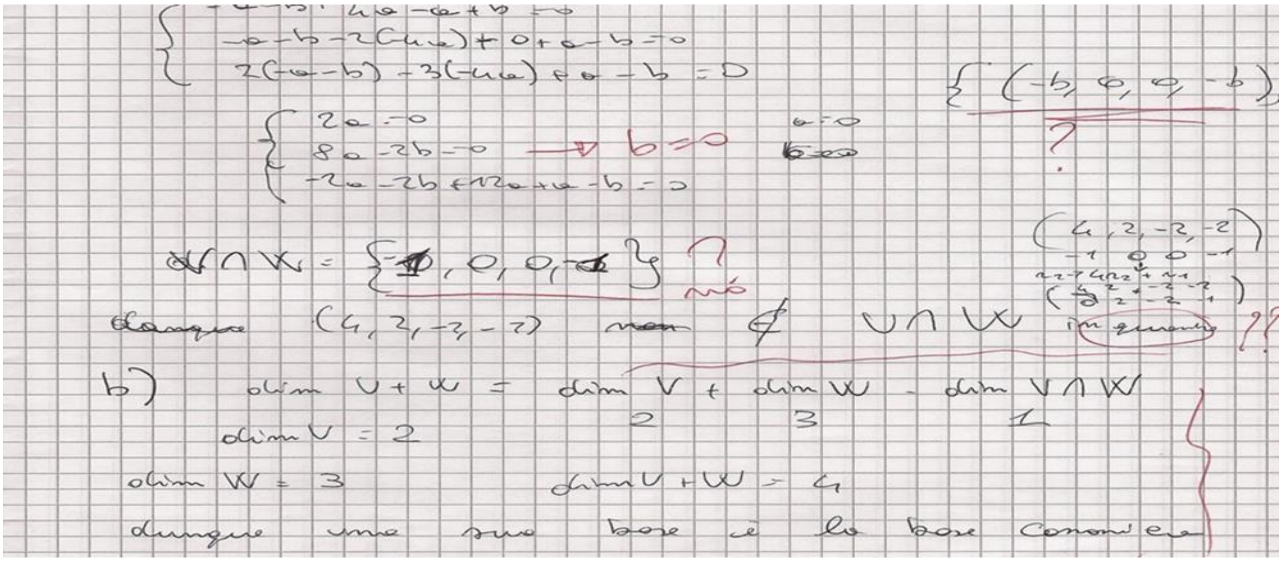


Figura 4.2-6

Successivamente, vediamo come lo studente giustifica che il vettore dato non appartiene all’intersezione di V e W. Intanto osserviamo che quello che dovrebbe seguire “in quanto” è in realtà scritto sopra, e non è subito evidente a chi legge. Sebbene quello che scrive sia giusto, non si evince qual è la ragione “concettuale” per cui la risposta è negativa, ma è solo una ragione “procedurale” che tuttavia non garantisce che lo studente abbia consapevolezza che quel conto corrisponda alla linearmente indipendenza dei due vettori e che quindi questo significa che la non appartenenza di (4, 2, -2, 2) all’intersezione.

Nel quesito 1/b) sono riportati una serie di numeri che non sono stati “calcolati” da nessuna parte.

Anche nella Figura 4.2-7 vediamo che viene usata la procedura vista sopra che riduce a scalini la matrice fatta dalla presunta base dell’intersezione e dal vettore di cui si vuole sapere l’appartenenza o meno all’intersezione. Come si vede, il calcolo del rango è ben fatto, ma la conclusione cui lo studente arriva non l’è. Probabilmente, ancora una volta lo studente riproduce una modalità operativa che ricorda applicarsi in casi simili, ma non avendo coscienza dei legami concettuali di tale procedura non è in grado di trarre le opportune conseguenze dai calcoli fatti.

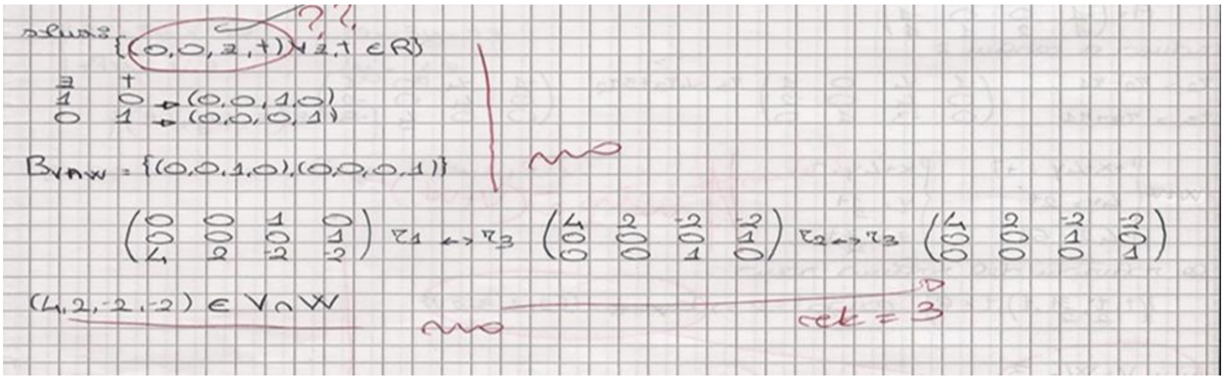


Figura 4.2-7

Nella seguente figura, vediamo riecheggiare l'errore già visto in Figura 4.2-4, nel confondere la rappresentazione cartesiana di V in cui i vettori dei coefficienti del sistema lineare appartengono a $V^{\perp}$ ma le cui soluzioni appartengono a V. L'errore ancora una volta proviene dall'eco nella memoria della riscrittura delle equazioni del sistema come prodotto scalare nullo tra due vettori. Il problema è che lo studente non si focalizza sul significato dei termini coinvolti nel prodotto, ma ha solo il "richiamo" nella memoria di "ortogonalità" con "prodotto scalare uguale a zero".

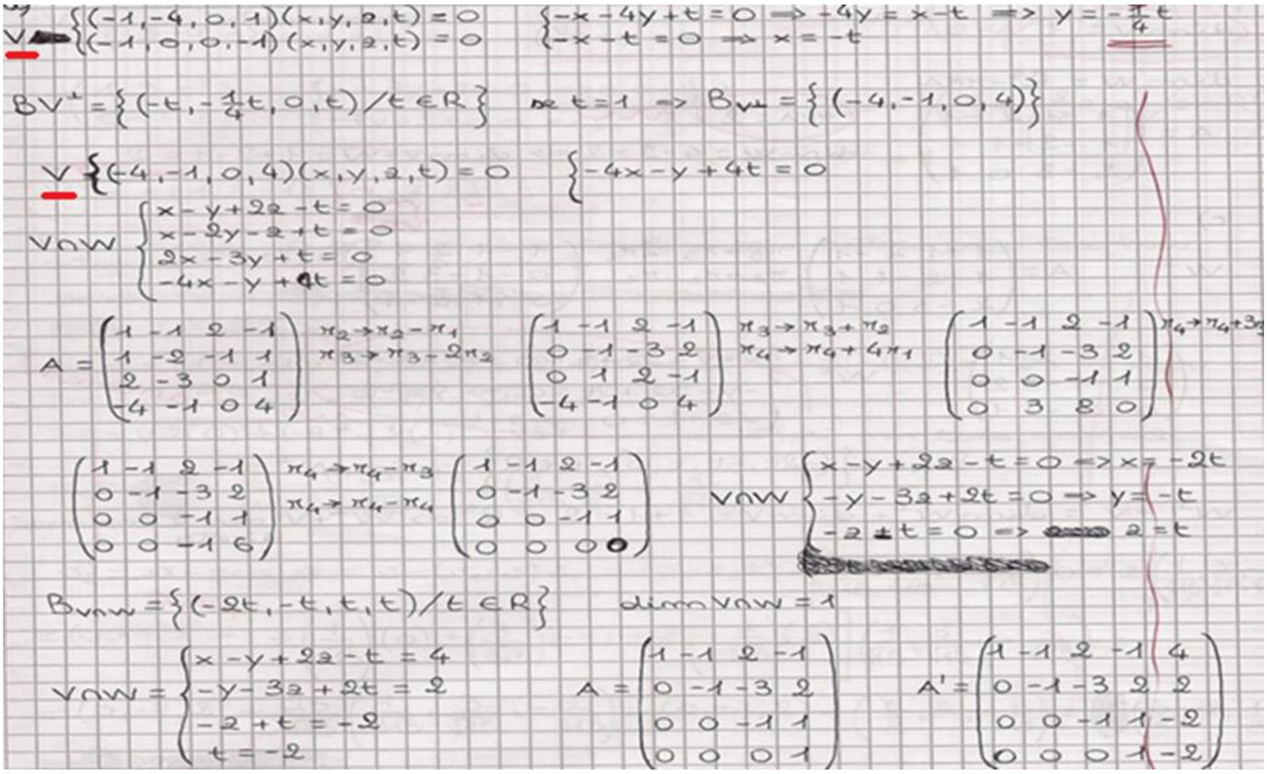


Figura 4.2-8

Nella risoluzione del sistema, lo studente commette un errore ricorrente: quando una variabile "non c'è" (in questo caso z), anziché assumerla come parametro, viene posta uguale a 0! Lo studente poi calcola una rappresentazione cartesiana di V col metodo $(V^{\perp})^{\perp}$ = V, che in linea teorica è corretto. Ma evidenzia ancora una volta che non ha il controllo di cosa sia una rappresentazione cartesiana, dal momento che già ce l'aveva e che quella trovata produce uno spazio di dimensione diversa da quello dato nel testo. L'intersezione è, in linea teorica, calcolato correttamente. Tuttavia, non si capisce il senso della matrice A', dove l'ultima colonna è il vettore di cui si è chiesto di verificare l'appartenenza all'intersezione. Ancora una volta, in linea teorica, questa matrice può avere senso se si procede a calcolare il rango di A' e quindi a concludere l'appartenenza o meno a seconda che il valore del rango sia uguale o meno a quello del rango di A, ma di tutto questo non c'è traccia.

Nella Figura 4.2-9 vediamo che lo studente pone dim V=1 che non sembra avere giustificazioni. Successivamente, nella formula che dà dim W troviamo ancora una volta l'uso improprio dello spazio al posto della sua dimensione. Nel calcolo del rango di A, scopriamo che lo studente si riferisce "all'ordine di un minore non nullo" piuttosto che "al massimo ordine di un minore non nullo", perciò si accontenta di averne trovato uno di ordine 2 (quello contrassegnato dal rettangolo).

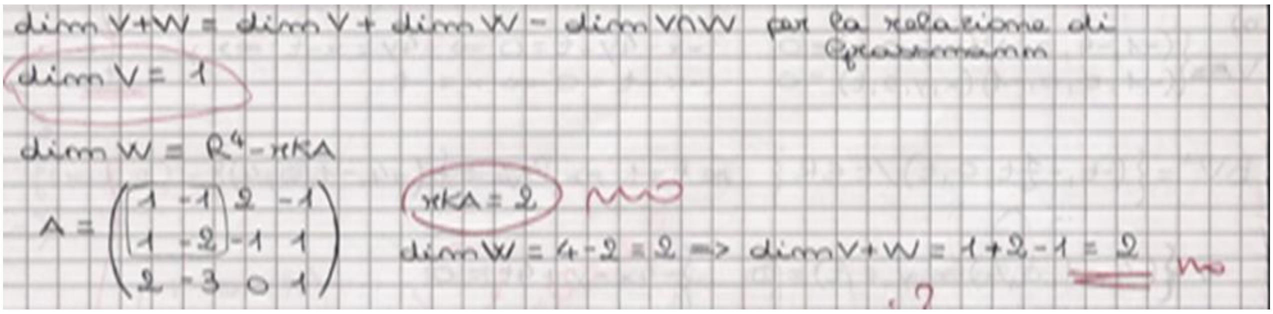


Figura 4.2-9

Nella Figura 4.2-10, siamo ancora di fronte a una confusione tra rappresentazione cartesiana e generatori, quindi lo studente considera i generatori dati come coefficienti di un sistema lineare che a suo avviso rappresenta V, mentre rappresenta $V^{\perp}$. In più, ancora una volta, la mancanza di una variabile porta in errore. In questo caso, poiché le variabili in gioco sono "consecutive" nella prassi scolastica, lo studente non pone a 0 la variabile mancante (come visto nel caso della Figura 4.2-8, ma la salta completamente! Ha così anche perso di vista l'ambiente di lavoro in cui vivono i suoi sottospazi, che è $\mathbb{R}^4$, mentre la base di V trovata è in $\mathbb{R}^3$!

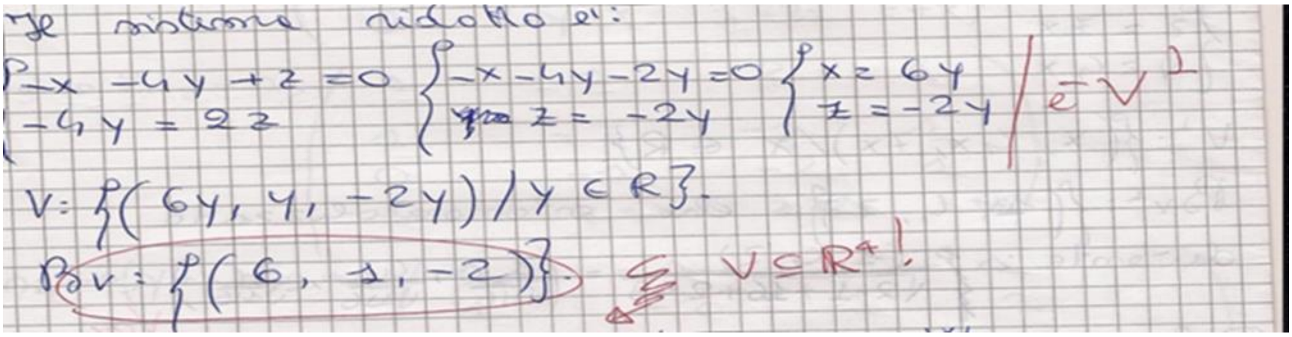


Figura 4.2-10

Nella Figura 4.2-11, lo studente costruisce una matrice che sembra essere legata a V ∩ W. In realtà, in questa matrice le prime tre righe sono i tre vettori della base di V+W e nella quarta riga aggiunge il vettore dato (4, 2, -2, -2) di cui si vuole sapere l'appartenenza o meno all'intersezione. Lo studente nota che l'ultima riga è proporzionale e quindi linearmente dipendente dalla terza. Questo però, invece di portarlo a concludere correttamente, gli fa concludere la non appartenenza.

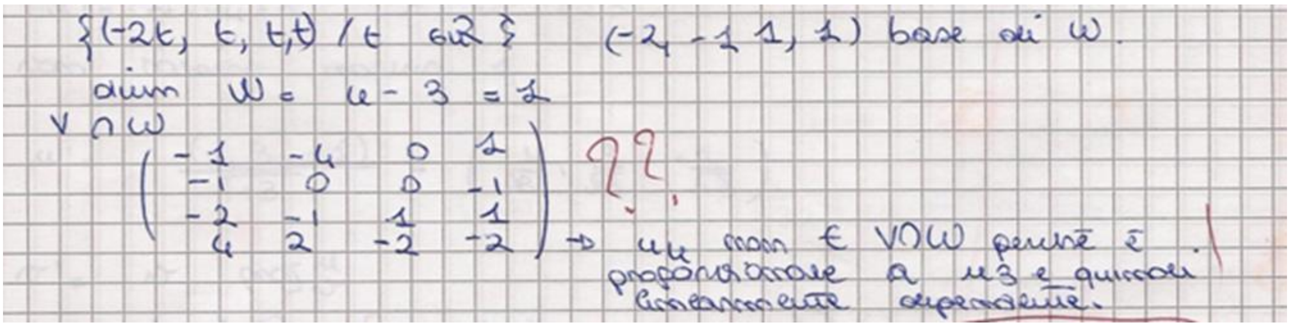


Figura 4.2-11

Nella Figura 4.2-12 vediamo un approccio corretto ma lungo che denota una mancanza di conoscenze e/o di collegamenti tra conoscenze possedute dallo studente. Infatti, per calcolare dim $W^{\perp}$, lo studente ne calcola una rappresentazione cartesiana, che poi risolve per arrivare a trovare una base e quindi la dimensione. La cosa interessante è che il punto di partenza di tutto il procedimento fatto è l'insieme dei generatori di $W^{\perp}$, da cui bastava calcolare il rango della matrice fatta da tali generatori. Questo probabilmente fa pensare che lo studente conosca solo un metodo di calcolo di una base, quello a partire da una rappresentazione cartesiana dello spazio, ma non conosca il nesso tra generatori e dimensione e tra lineare indipendenza e rango.

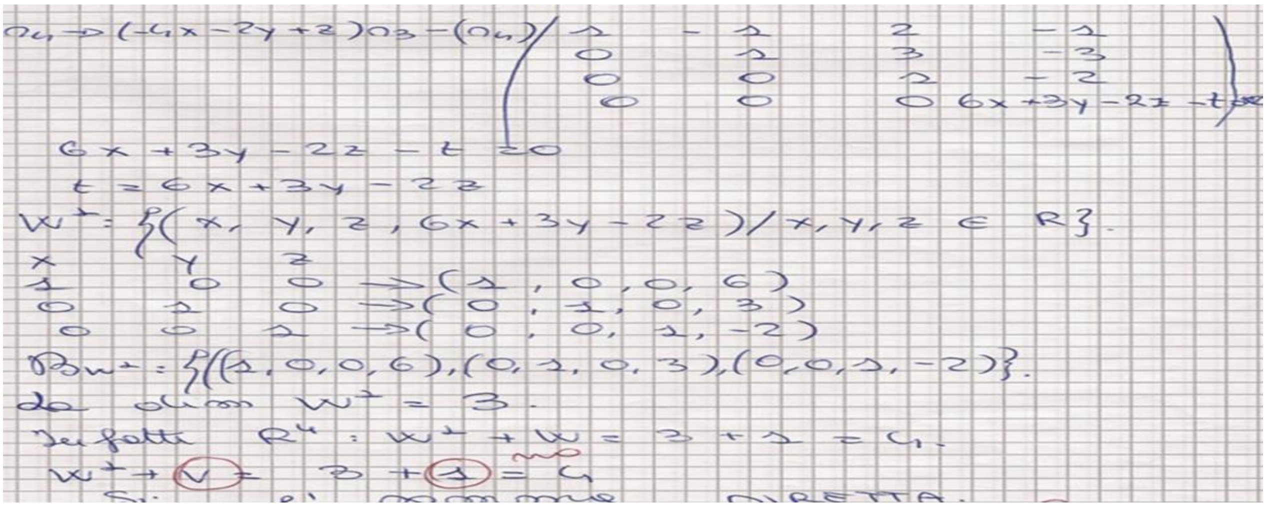


Figura 4.2-12

Nella Figura 4.2-13 abbiamo ancora un errore ricorrente: la confusione tra l'insieme vuoto e l'insieme costituito dal solo vettore nullo. Questo è un nodo concettuale particolarmente difficile.

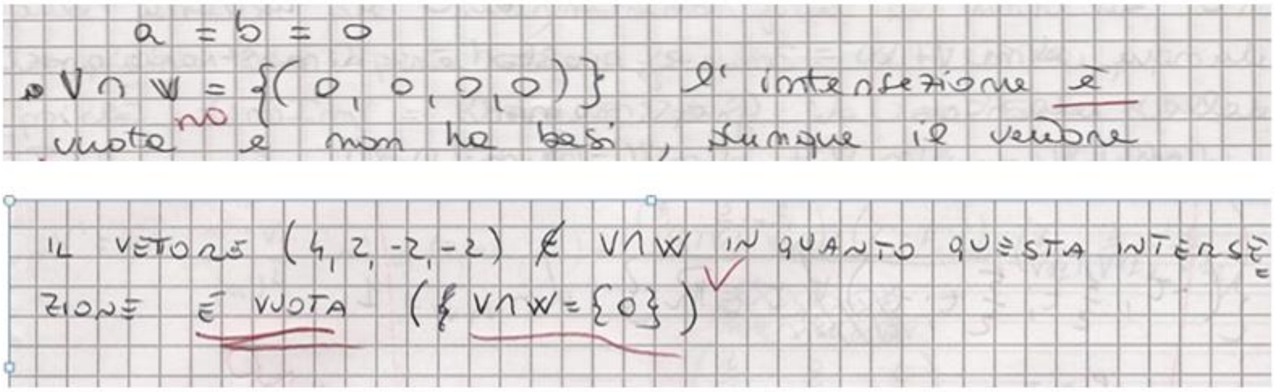


Figura 4.2-13

Nella Figura 4.2-14 abbiamo ancora un caso in cui lo studente perde di vista lo spazio ambiente in cui lavora. Stavolta però l'errore non è generato da una variabile con coefficiente nullo, ma da – sembrerebbe – una omissione della variabile *t* che funge da parametro. È tuttavia da rilevare sempre una mancanza di controllo di quello che si fa!

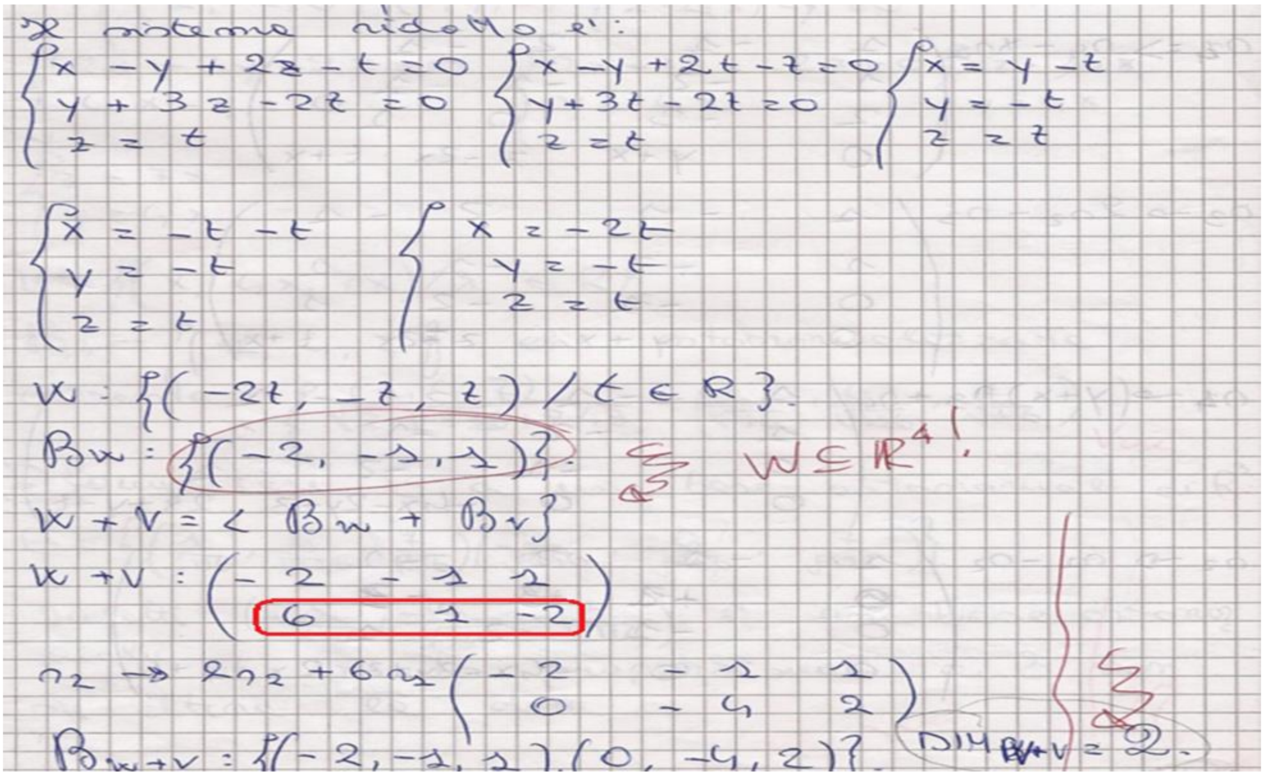


Figura 4.2-14

Da notare il vettore segnalato in rosso: non si sa da dove viene!

Nella Figura 4.2-15 possiamo osservare che, sia nel caso del quesito b) che c), si può dire che lo studente 'fa dei conti' ma non ne capisce il senso, i numeri sono solo numeri e non li interpreta per ciò che rappresentano. Infatti, nel quesito b) trova che lo spazio V+W ha dimensione 5 e non si rende conto che V+W non può superare la dimensione 4 essendo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e quindi il 'numero' 5 che viene dai suoi conti è assurdo. Analogamente nell'applicare la relazione di

Grassmann nel quesito c) si trova che l'intersezione di due spazi ha dimensione maggiore di ciascuno dei due stessi spazi, il che è assurdo! Altra osservazione: nello scrivere la relazione di Grassmann a primo membro scrive lo spazio somma e non la 'dimensione' dello spazio somma che sono due cose ovviamente legate ma chiaramente diverse, ma volendo essere collaborativi, possiamo supporre che lo studente pur avendo scritto lo spazio intendesse la sua dimensione.

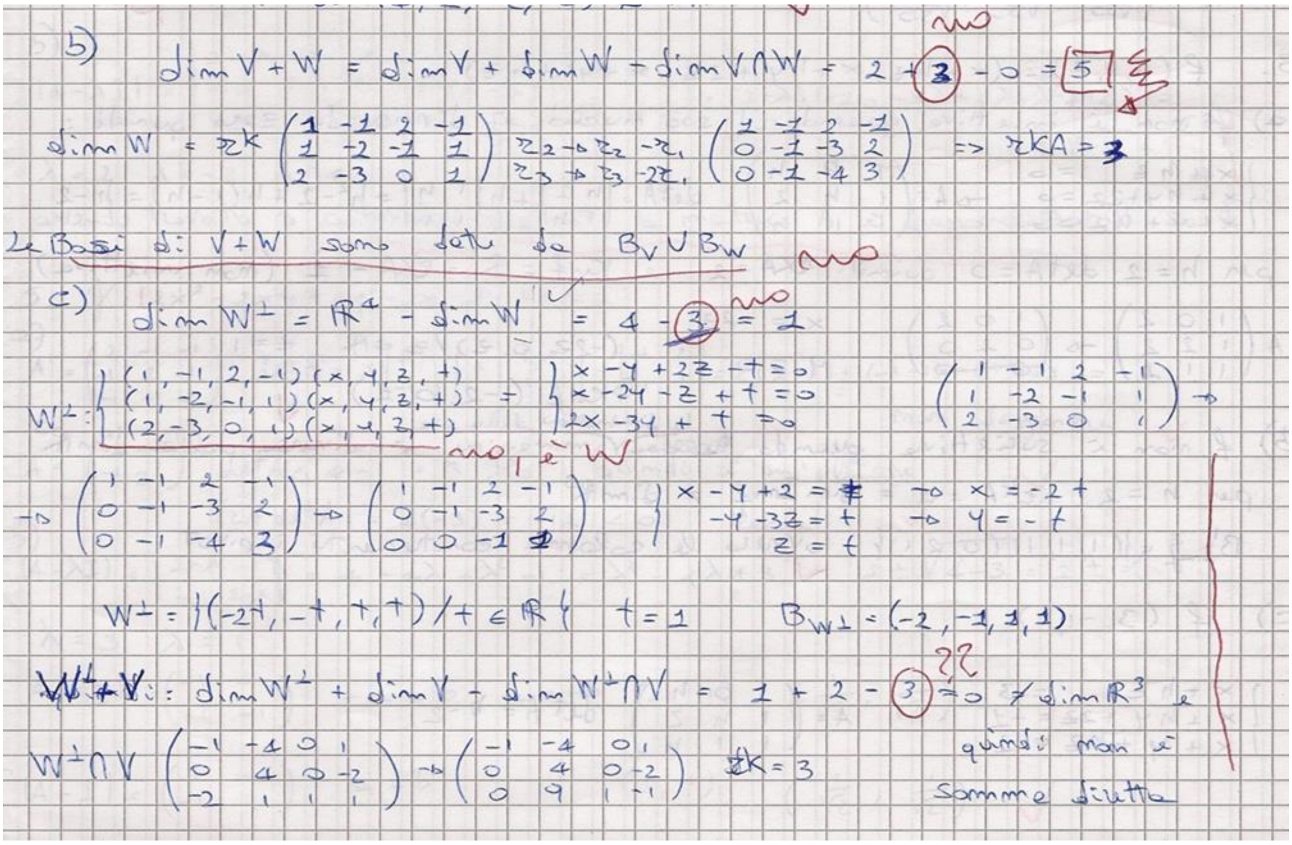
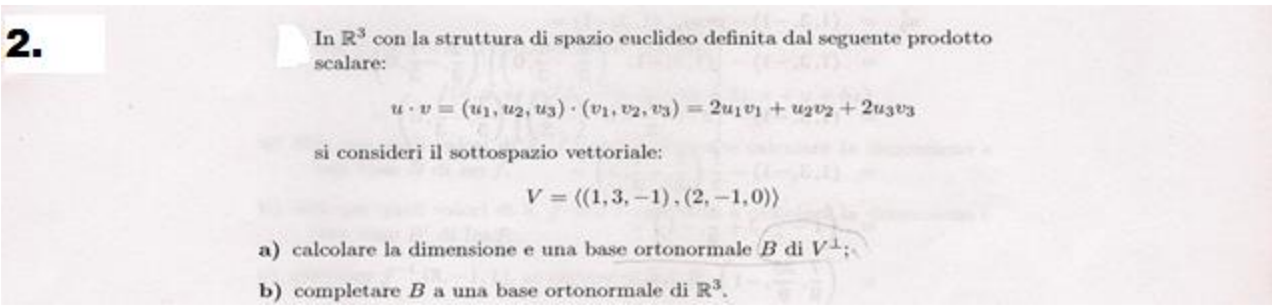


Figura 4.2-15

Passiamo ora a considerare un altro problema, riguardante più specificamente gli spazi euclidei, mostrato nella figura seguente.



2. In $\mathbb{R}^3$ con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$$

si consideri il sottospazio vettoriale:

$$V = \langle (1, 3, -1), (2, -1, 0) \rangle$$

a) calcolare la dimensione e una base ortonormale B di $V^\perp$;

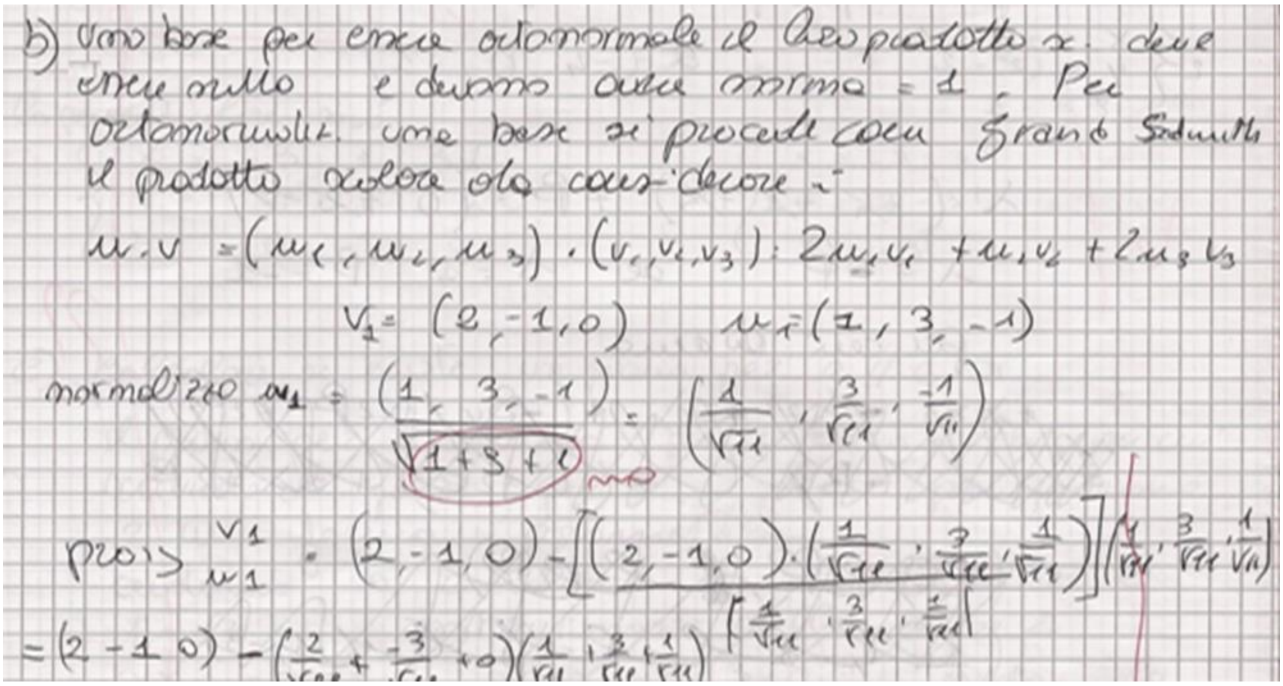
b) completare B a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Figura 4.2-16

Nella Figura 4.2-17, vediamo un errore ricorrente che esplicita come il legame stretto tra prodotto scalare e norma sia mancante. Infatti, sebbene lo studente dica qual è il prodotto scalare da usare, calcola poi la norma utilizzando il prodotto scalare standard. Questo deriva dal fatto che gli studenti 'imparano' in precedenza che la norma è 'la radice quadrata delle componenti del vettore al quadrato’, senza vedere questa “regola” come caso particolare della definizione di norma come radice del prodotto scalare di un vettore per se stesso.

Per il procedimento di Gram-Schmidt, possiamo osservare:

- da un lato, la mancanza di consapevolezza che il primo passo del procedimento serve a produrre un vettore normale, quindi al passo successivo il calcolo della norma a denominatore dovrebbe essere inutile e in ogni caso dare come risultato 1;
- dall’altro, confonde la proiezione con la componente ortogonale di un vettore su un altro, e la stessa formula non è corretta, scrivendo $[(v_1 \cdot u_1) \cdot u_1] / |u_1|$ invece di $[(v_1 \cdot u_1) \cdot u_1] / |u_1|^2$.



b) Una base per essere ortonormale il loro prodotto sc. deve essere nullo e devono avere norma = 1. Per ortonormalizzare una base si procede con Gram Schmidt il prodotto scalare da considerare:

$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_3v_3$

$V_1 = (2, -1, 0) \quad u_1 = (1, 3, -1)$

normalizzo $u_1 = \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{1+9+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$ no

$\text{proj}_{u_1}^{v_1} = (2, -1, 0) - \left[\frac{(2, -1, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)}{\left|\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right|}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

$= (2 -1 0) - \left(\frac{2}{\sqrt{11}} + \frac{-3}{\sqrt{11}} + 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

Figura 4.2-17

La Figura 4.2-18 si riferisce al quesito 2/b). Nel calcolo del completamento di B lo studente mette due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sembrerebbe che il controllo di ortonormalità effettuato riguardi solo i due vettori aggiunti, senza osservare che essi non ortogonali con il vettore della base B calcolato sopra. Lo studente sembra completamente ignorare che $\mathbb{R}^3$ = V $\oplus$ $V^{\perp}$ e che quindi serviva una base ortonormale di V per il completamento cercato.

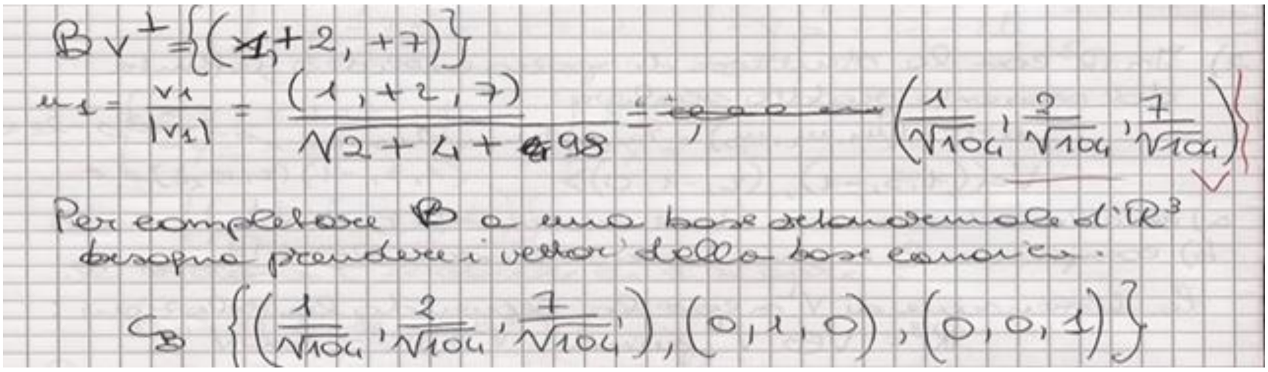


Figura 4.2-18

Nella Figura 4.2-19 lo studente considera la matrice avente per righe i vettori di V e poi scrive un sistema lineare che, a guardare la relativa risoluzione, dovrebbe rappresentare lo spazio $V^{\perp}$. In effetti, lo sarebbe se fossimo nel caso del prodotto scalare standard, caso non in esame. Dopo averne trovata correttamente la dimensione pari a 1, lo studente considera gli stessi vettori di V come generatori di $V^{\perp}$, in contraddizione sia con la dimensione trovata sia con l'appartenenza di questi a V.

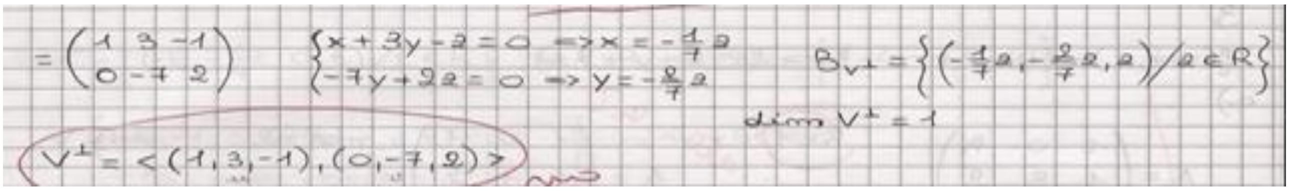


Figura 4.2-19

Nella Figura 4.2-20 vediamo che lo studente calcola la dimV come se avesse la rappresentazione cartesiana piuttosto che i generatori. Lo studente, quindi, applica una regola corretta in un contesto non adeguato. Avendo poi trovato la dimensione dello spazio ortogonale a V pari a 2, sembra effettuare il procedimento successivo al fine di trovare "2" equazioni che rappresentino tale spazio.

Si evince una totale confusione sulla relazione che lega la dimensione di uno spazio vettoriale, il numero minimale di equazioni di una sua rappresentazione cartesiana, i vettori dei suoi coefficienti e i vettori dello spazio rappresentato.

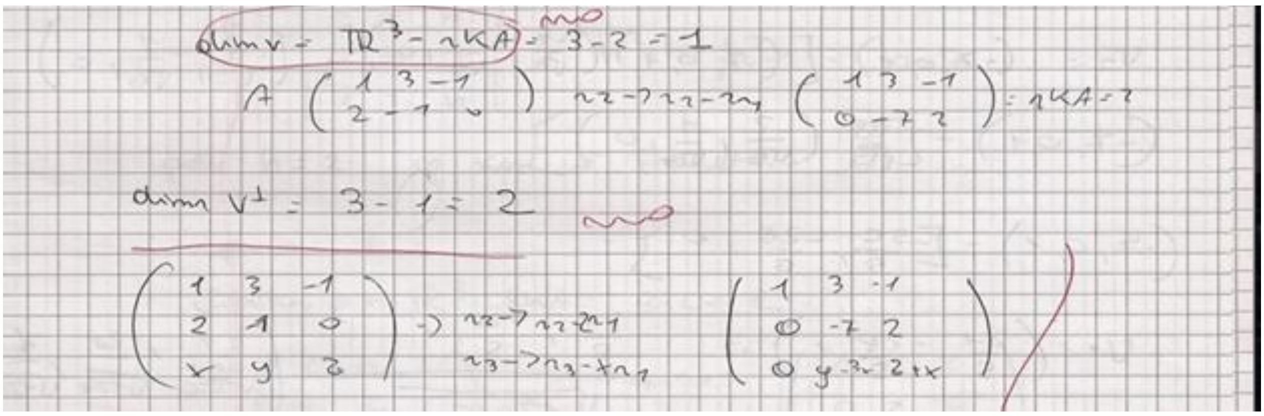


Figura 4.2-20

Nella Figura 4.2-21 vediamo ancora una volta come lo studente non abbia controllo sui vettori che manipola, al punto da non accorgersi che gli stessi che dà come base di V al primo rigo vengono poi ripetuti alla fine come base di $V^{\perp}$. Quello che è cambiato in mezzo alle due scritture è l'aver imposto la condizione di ortogonalità col generico vettore (*x*,*y*,*z*). Si può ipotizzare che il prodotto scalare nullo richiama l'ortogonalità tra vettori e il fatto di ricercare una base, ovvero dei vettori numerici, fa ritenere sufficiente prendere gli unici vettori numerici che compaiono: certamente la base cercata non potrà essere data dal generico vettore (*x*,*y*,*z*)!

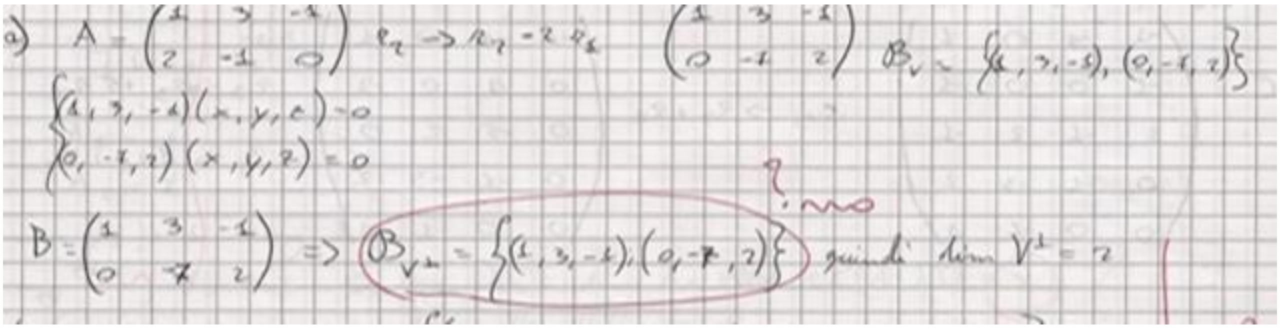


Figura 4.2-21

Nella Figura 4.2-22, osserviamo che lo studente omette completamente il requisito di lineare indipendenza di una base. La lineare dipendenza dei vettori di B che dà viene anzi richiamata come necessaria perché la dimensione rimanga inalterata! L'ortonormalità, poi, sembra una condizione che riguarda un vettore alla volta.

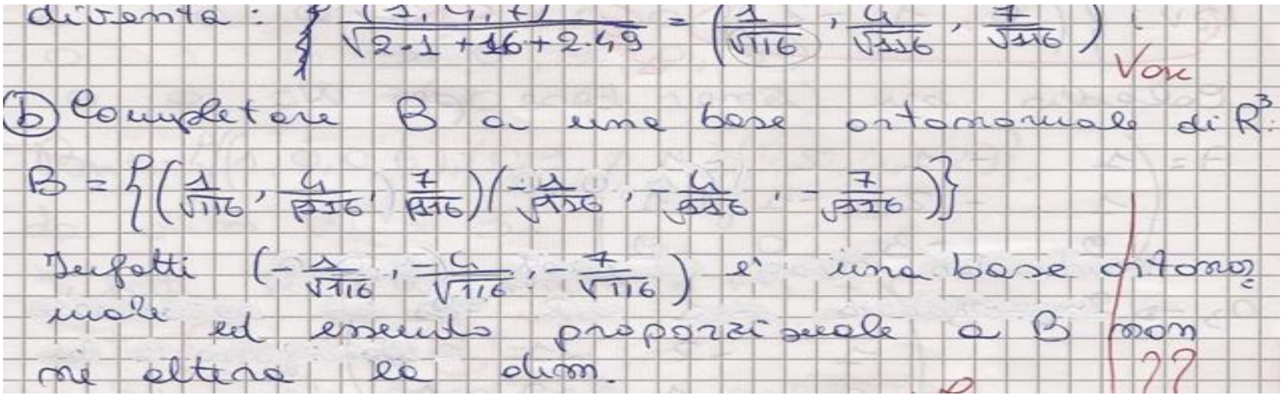


Figura 4.2-22

Nella Figura 4.2-23 abbiamo un errore di notazione che può avere un qualche risvolto concettuale. Infatti, notiamo che nelle parentesi quadre dov'è evidenziato in rosso, lo studente scrive un vettore! Come se non sapesse che il risultato di un prodotto scalare è uno scalare e non un vettore. Tuttavia al rigo successivo scrive lo scalare che è in realtà il risultato corretto del prodotto scalare sopra e che è la somma delle componenti del 'vettore' scritto quindi è come se lo studente avesse usato quella notazione vettoriale usata per 'annotare' dapprima i prodotti delle componenti di ugual posto dei vettori di cui sta facendo il prodotto scalare, e successivamente li avesse sommati, anche se che ci sia una 'somma' da fare non si evince da nessuna parte.

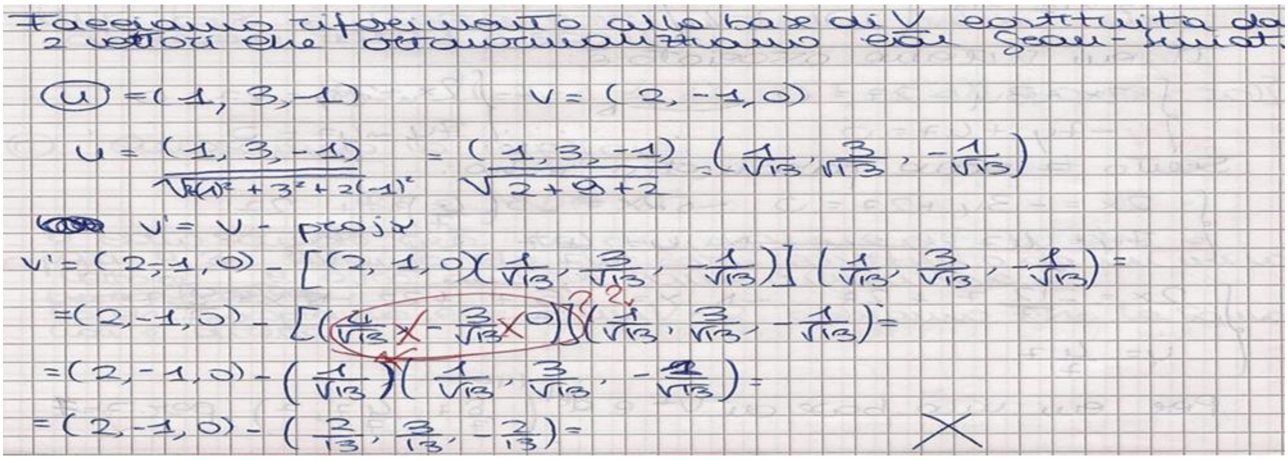
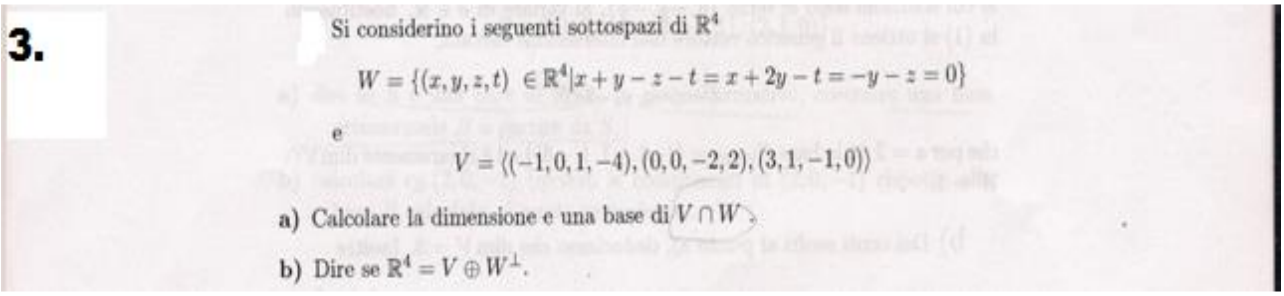


Figura 4.2-23

Passiamo ora a considerare un altro problema.



3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = x + 2y - t = -y - z = 0\}$$

e

$$V = \langle(-1, 0, 1, -4), (0, 0, -2, 2), (3, 1, -1, 0)\rangle$$

a) Calcolare la dimensione e una base di $V \cap W$.

b) Dire se $\mathbb{R}^4 = V \oplus W^\perp$.

Figura 4.2-24

Nella Figura 4.2-25, vediamo che lo studente scrive relazioni tra spazi vettoriali, intendendo invece una relazione tra le dimensioni degli stessi. Per quanto riguarda invece la somma, lo studente non va a fare alcuna considerazione sull'intersezione degli spazi, applicando la relazione di Grassman come se già sapesse che la somma fosse tutto lo spazio ambiente (cosa da verificare) e che tale somma fosse diretta.

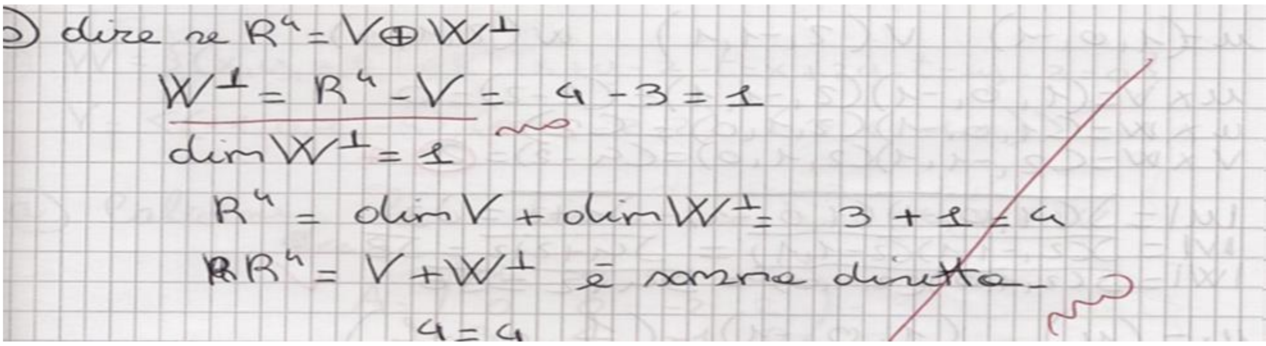


Figura 4.2-25

Nella Figura 4.2-26 troviamo ancora una volta l'applicazione della regola del calcolo della dimensione di V come se avessimo una sua rappresentazione cartesiana. Ancora una volta notiamo una mancanza di collegamento significativo tra la definizione di base e di dimensione. Il richiamo al rango collegato alla lineare indipendenza dei vettori è dettato esclusivamente dalla regola che si vuole applicare, senza alcun controllo semantico di ciò che viene precedentemente scritto.

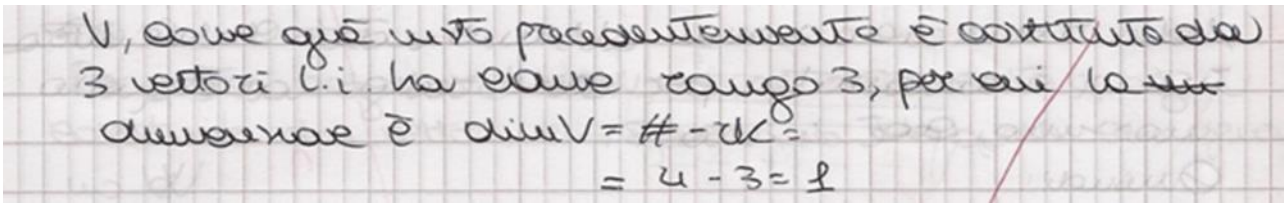


Figura 4.2-26

Nella Figura 4.2-27 osserviamo che lo studente a parole dice di voler fare una cosa, nei fatti però ne fa un'altra: costruisce un sistema che in realtà rappresenta l'intersezione di W con $V^{\perp}$. Interessante la conclusione: "trovare la matrice"… quale? A quale scopo? Il fine sembra essere "operativo", cioè pare che l'essenza di questi problemi sia alla fin fine trovare una matrice, molto probabilmente da ridurre a scalini (e di fatti, scrive un'operazione elementare sulle righe).

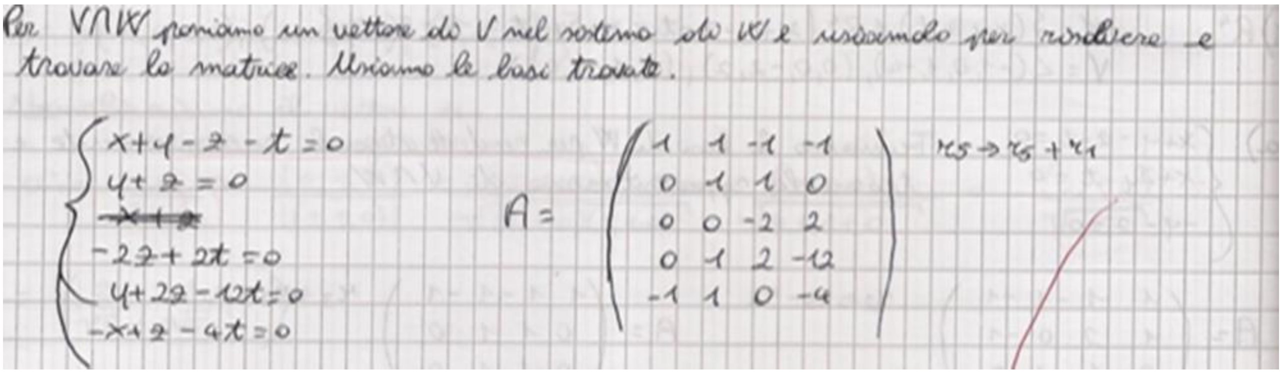


Figura 4.2-27

Nella Figura 4.2-28 ancora una volta troviamo che il calcolo dello spazio ortogonale a uno dato si riconduce alla riscrittura della rappresentazione dello spazio che evidenzia il prodotto scalare. Manca sempre la lettura significativa dei vettori in gioco come elementi di un dato spazio così come manca la comprensione di cosa significhi "rappresentazione cartesiana". Non si capisce perché in questo caso, lo studente elimina una delle equazioni di partenza.

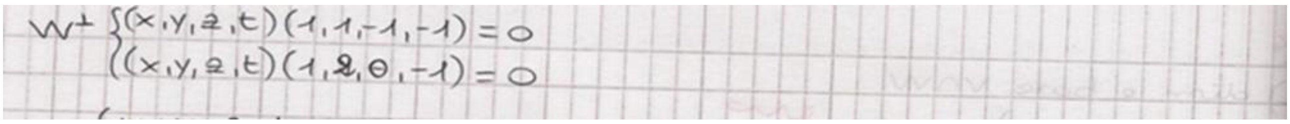


Figura 4.2-28

Nella Figura 4.2-29 vediamo che lo studente costruisce la matrice A, le cui righe sono i generatori di V e scrive rkA = 1. Questo risultato errato può derivare dal fatto che lo studente avrà osservato che il minore individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è nullo. È presumibile che lo studente applichi male il teorema degli orlati andando a considerare un solo orlato di ordine 2 dell'elemento di posto (1,1) – quello più vicino – e trovandolo nullo ne deduce che il rango è dato dall'ordine del precedente minore non nullo.

Successivamente, sembra interpretare il valore del rango tanto come dimensione dello spazio (corretto), quanto come numero minimo di equazioni di una sua rappresentazione cartesiana (errato). Sceglie quindi come rappresentazione quella corrispondente all'unica equazione che ha per coefficienti gli elementi della riga del minore non nullo di riferimento per il rango. Sembra assolutamente inconsapevole del significato delle variabili *x*,*y*,*z*,*t* introdotte.

Andando a guardare il calcolo della dim W come rk A, vediamo che la conclusione rkA=2 trova giustificazione nell'assunzione sopra fatta sul modo in cui questo studente calcola il rango. Infatti, ha preso un minore di ordine 2 non nullo di riferimento (quello segnato), e andando a calcolare il suo orlato più prossimo (con terza riga e terza colonna) si può vedere che è nullo, quindi la sua conclusione è coerente con l'assunto! Abbiamo quindi in questo caso compreso la radice dell'errore.

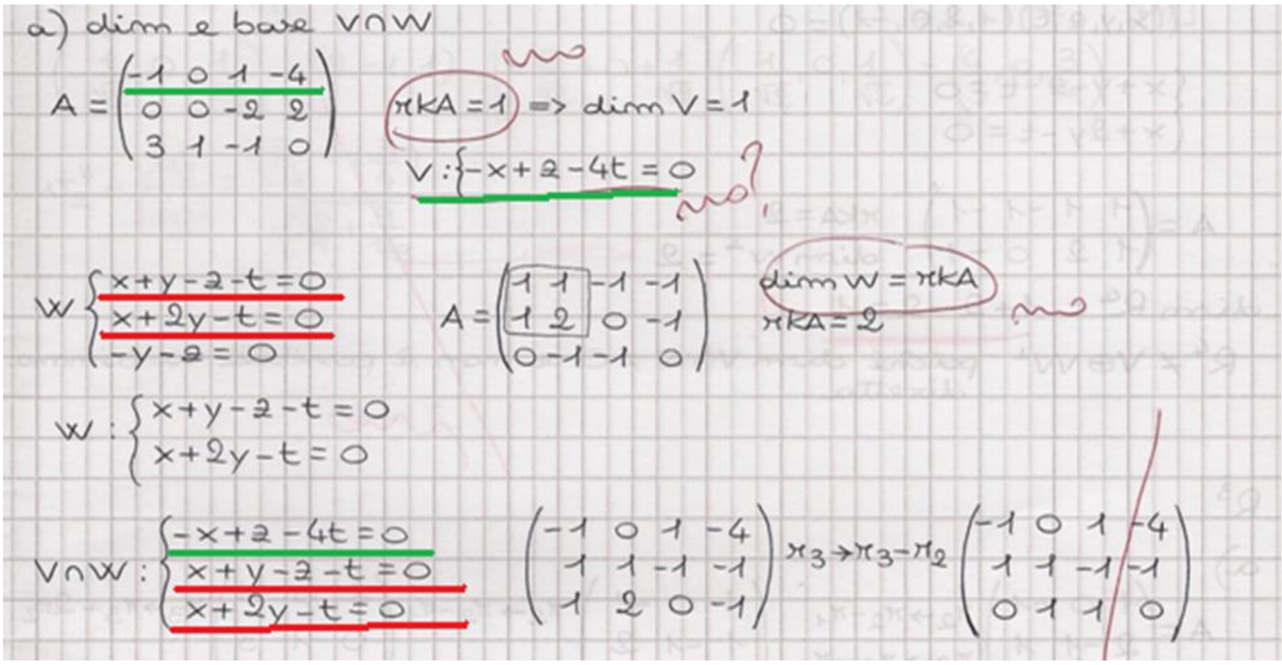
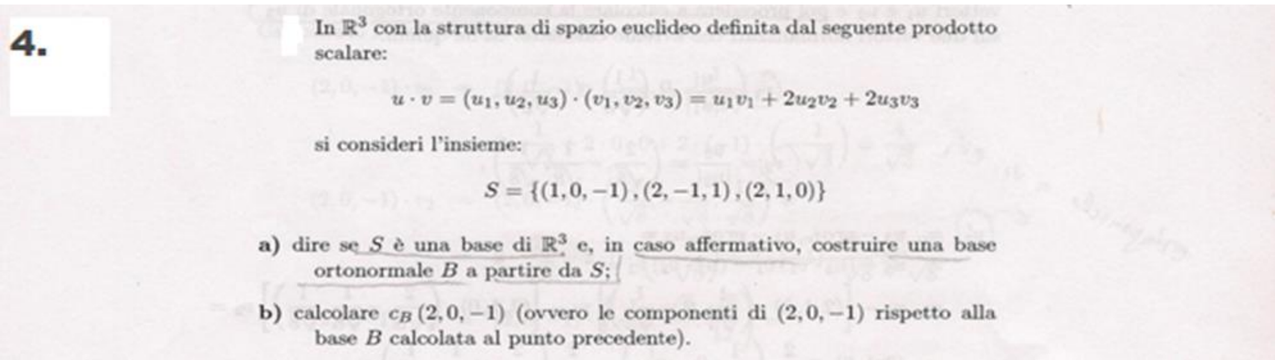


Figura 4.2-29

Passiamo a un altro problema, ancora relativo agli spazi euclidei.



4. In $\mathbb{R}^3$ con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 2u_3 v_3$$

si consideri l'insieme:

$$S = \{(1, 0, -1), (2, -1, 1), (2, 1, 0)\}$$

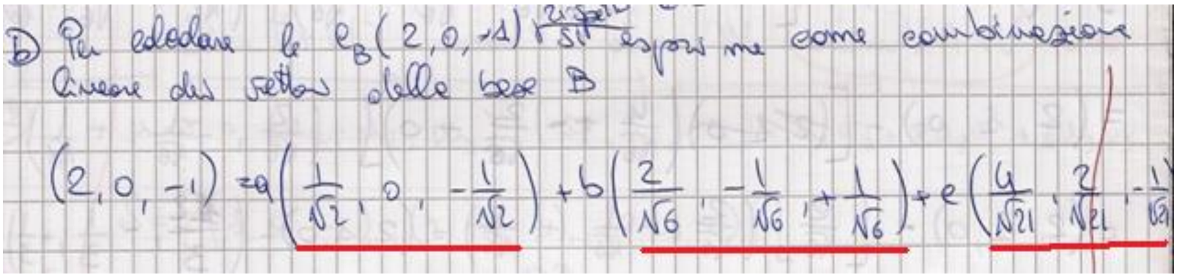
a) dire se S è una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, costruire una base ortonormale B a partire da S;

b) calcolare $c_B(2, 0, -1)$ (ovvero le componenti di $(2, 0, -1)$ rispetto alla base B calcolata al punto precedente).

Figura 4.2-30

Lo scopo del quesito 4/b) è quello di verificare che lo studente conosca la caratterizzazione delle componenti di un vettore rispetto a una base ortonormale.

Nella Figura 4.2-31 vediamo che la procedura messa in atto dallo studente, pur essendo corretta, è generale, ovvero vale per una qualsiasi base. Manca quindi la conoscenza della caratterizzazione voluta.



b) Per calcolare le $c_B(2,0,-1)$ rispetto a S esprimo come combinazione lineare dei vettori della base B

$$(2,0,-1) = a\left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, -\frac{1}{\sqrt2}\right) + b\left(\frac{2}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, +\frac{1}{\sqrt6}\right) + c\left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$$

Figura 4.2-31

Nella Figura 4.2-32 calcola male il modulo del vettore v_1 , dal momento che il modulo è ancora una volta calcolato in maniera standard e non rispetto al prodotto scalare dato. Nel seguito vediamo invece che lo studente ha difficoltà nella gestione simbolica dei vettori: c'è una confusione nell'uso delle letter *u* e *v*, non si sa quali siano i vettori della base di partenza e quali quelli della base ortonormale che si sta calcolando. Guardando il primo riquadro rosso piccolo, sembra che lo studente scriva il passaggio simbolico "a memoria", ovvero secondo una consuetudine di uso delle lettere – ma che in realtà non ha alcun significato geometrico (cfr. riquadro rosso piccolo). Lo studente si fa poi guidare da quella scrittura per la sostituzione dei simboli con i vettori numerici. Questo modo di fare si ripete al passo successivo (cfr. riquadro rosso grande).

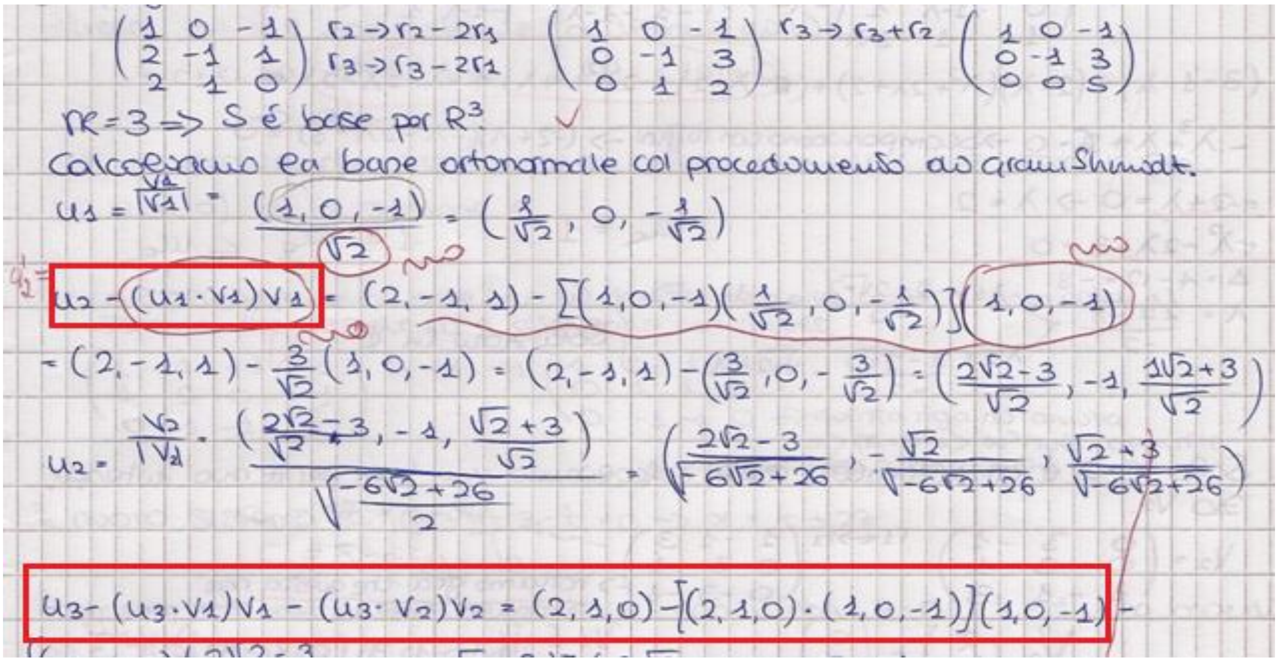


Figura 4.2-32

Nella Figura 4.2-33, vediamo che lo studente pone le componenti richieste uguali alla base B, nella prima riga simbolica. Poi, nel sostituire “i vettori numerici” ai simboli, vediamo che “c_B” scompare! Per rispondere alla richiesta, scrive di voler moltiplicare le componenti del vettore stesso con ciascuno dei vettori della base ortonormale. Invece di tre prodotti di uno scalare per un vettore – come sembrerebbe voler fare – si comporta come se stesse facendo una combinazione lineare! È evidente che manchino vari significati dei segni scritti: virgole, vettori, operazioni etc.

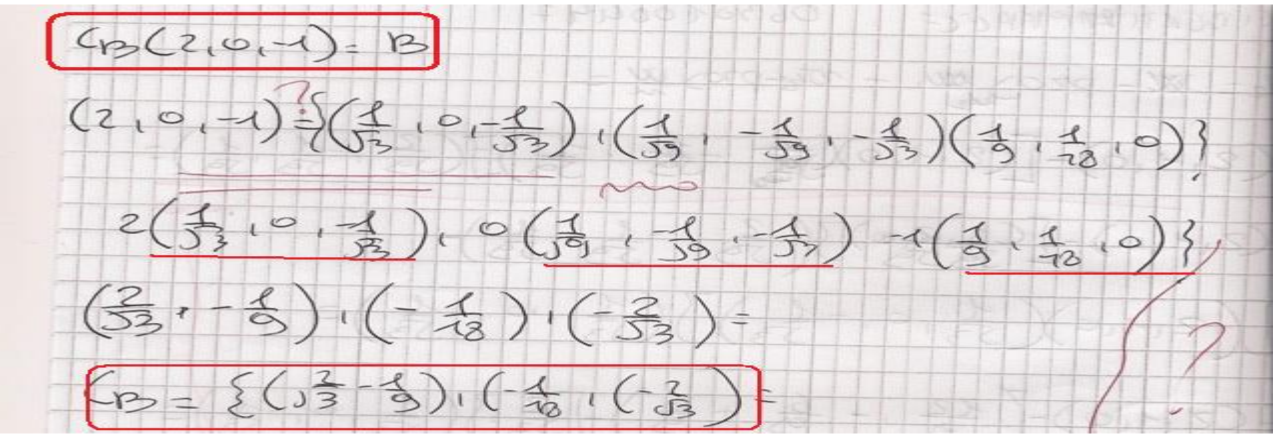


Figura 4.2-33

Nella Figura 4.2-34 lo studente sottintende la notazione ‘·’. Il prodotto scalare di due vettori produce un vettore! Inoltre usa pure il prodotto scalare canonico, e non quello dato.

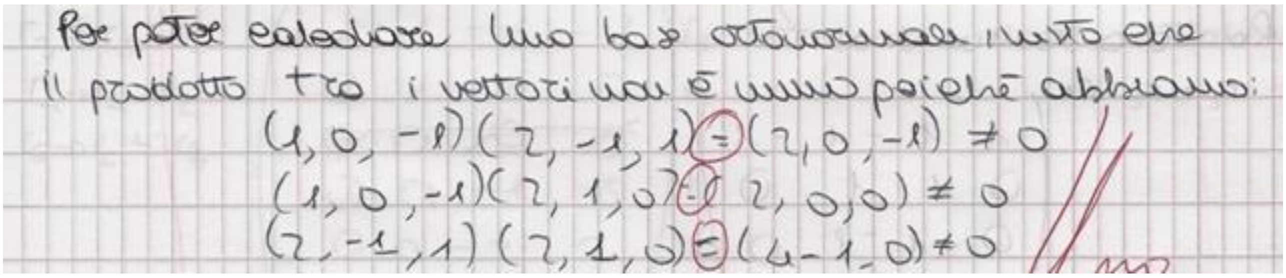


Figura 4.2-34

Nella Figura 4.2-35, vediamo ancora un errore ricorrente: la lettera B che compare nel quesito 4/b) viene interpretata in senso “colloquiale” come abbreviazione di “base”, dove base si intende “qualsiasi base”. Il fatto che l’errore compaia anche in questo caso dove nella parentesi è esplicitamente detto cosa rappresenta B fa pensare che gli studenti leggano selettivamente il testo del problema andando alla ricerca delle parole chiave o delle notazioni note. L’informazione in parentesi viene esclusa dalla lettura, e la notazione usata viene interpretata genericamente.

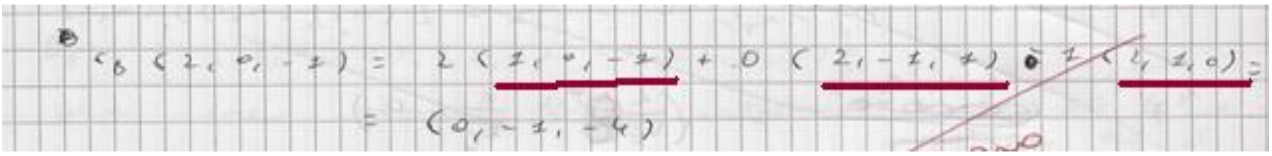


Figura 4.2-35

Nella figura seguente Figura 4.2-36, vediamo invece che lo studente usa la norma come norma euclidea e si limita a normalizzare i vettori dati, senza preoccuparsi dell’ortogonalità.

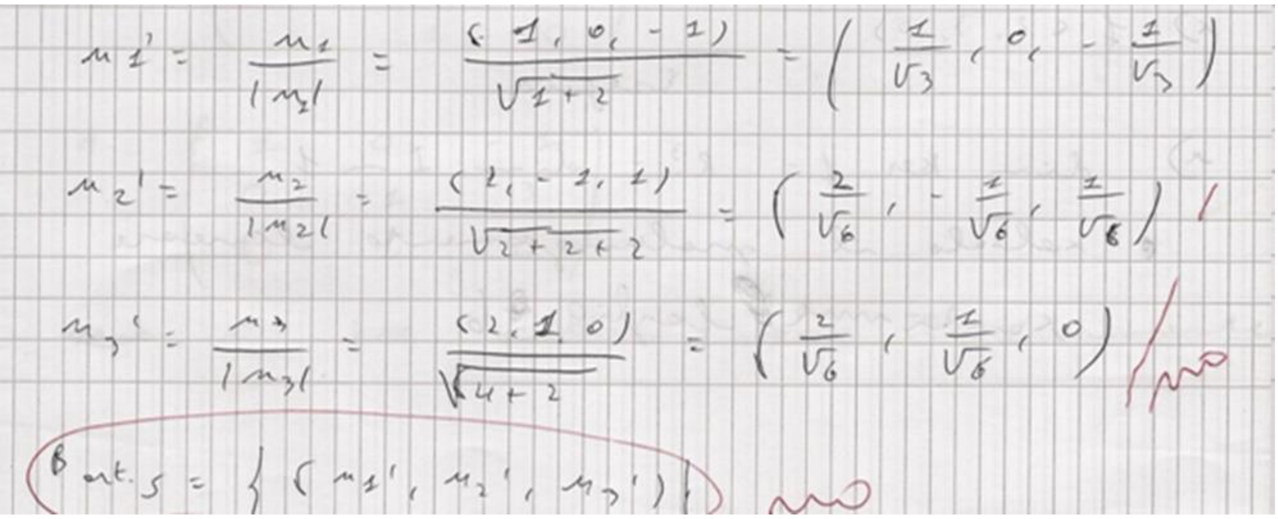


Figura 4.2-36

Passiamo ora a esaminare un problema sugli omomorfismi.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x + hz, x + hy + 2z, x + y + hz)$$

a) dire per quali valori di h, f non è iniettiva e calcolare la dimensione e una base B di $\ker f$.

b) dire per quali valori di h, f non è suriettiva e calcolare la dimensione e una base B' di $\operatorname{Im} f$.

c) calcolare $f^{-1}(3, -1, 1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Figura 4.2-37

Nella Figura 4.2-38 lo studente prende in esame un valore di *h* per cui ha precedentemente trovato nullo il determinante della matrice dei coefficienti del sistema rappresentativo di ker *f*. Prima di tutto, osserviamo che lo studente vuole utilizzare il metodo di Cramer, che denota da un lato la mancanza di conoscenza delle condizioni di applicabilità di tale metodo (determinante non nullo) e dall'altro il non riconoscere quante soluzioni ha un sistema di Cramer e quante ne deve avere il sistema in esame. Vediamo poi un fatto particolarmente interessante: nel calcolo di *x* lo studente trova a denominatore 0 (corretto) e lo cerchia, quasi a testimonianza di un "disorientamento" davanti a questo risultato… e dopo non appare più! Qui la questione sembra essere molto grave: perché quello 0 scompare? Per togliersi da una situazione "imbarazzante"? Perché lo zero "non conta"?

CASO II) $h = 2$, dove vedremo che ci otteremo

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2-2} = \left|\begin{matrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right| = 12 + 0 - 2 - (4 + 6 + 0) = 0$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right| = -2 + 6 + 2 - (-2 + 2 + 6) = 0$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right| = 4 + 2 - (4 + 2) = 0$$

$(0, 0, 0)$

no

Figura 4.2-38

Nella Figura 4.2-39 lo studente confonde ker *f* con una base di ker *f*, identifica uno spazio vettoriale con una sua base.

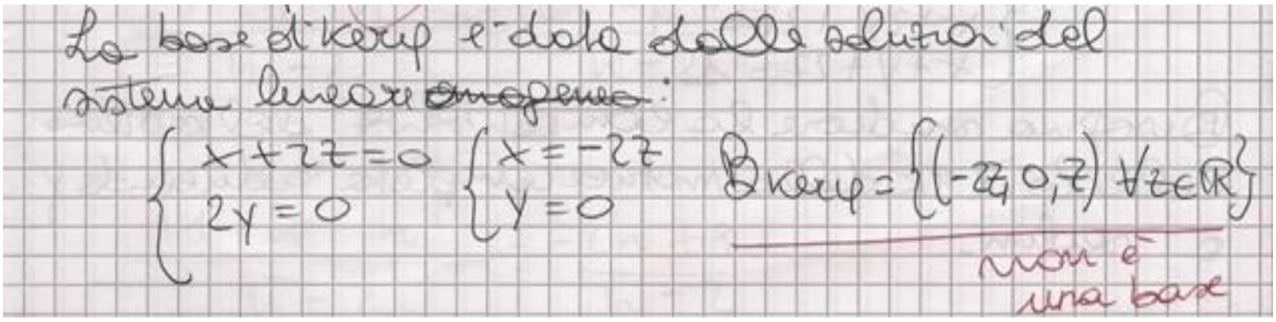


Figura 4.2-39

Nella Figura 4.2-40, vediamo due studenti che hanno difficoltà nella gestione del parametro *h*. Nel primo caso, lo studente presenta un risultato che è corretto per alcuni valori di *h*, ma non dice quali. Nel secondo caso, lo studente sembra non rendersi conto che, includere $h \in \mathbb{R}$ nella descrizione dell'insieme, lo rende costituito da infiniti vettori, mentre in precedenza aveva parlato di "una unica soluzione". D'altra parte, così scrivendo, ha perso anche l'informazione $h \neq 2$ che pure aveva in precedenza trovato, e manca il caso $h = 2$. Abbiamo quindi anche una mancanza di controllo a ritroso con quanto fatto.

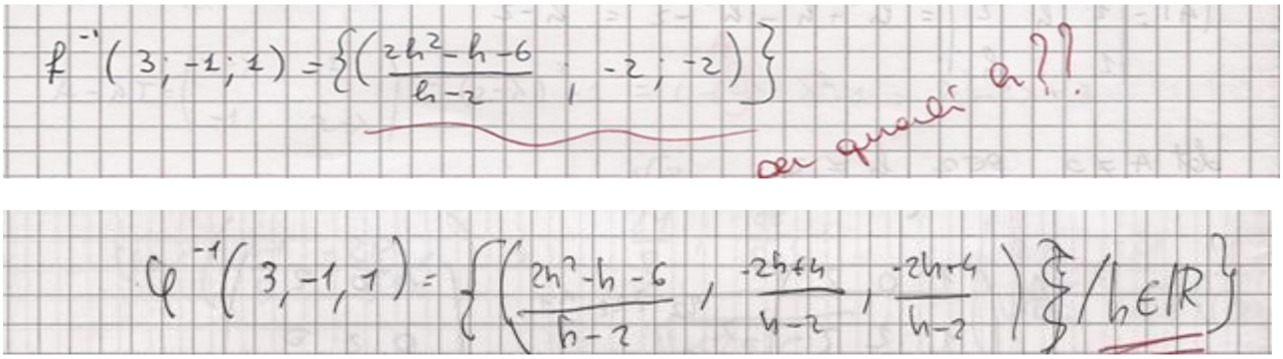


Figura 4.2-40

Nella Figura 4.2-41 vediamo la risoluzione del quesito 5/c) relativa al caso $h = 2$. Lo svolgimento sembrerebbe corretto, fino a quando non deve mettere in relazione le soluzioni del sistema lineare con la controimmagine richiesta. Lo studente non capisce che la controimmagine chiesta è l'insieme delle soluzioni del sistema – che sono infinite e dipendono da un parametro. A questo punto, è come se scattasse una prassi: poiché spesso un sistema lineare è legato a uno spazio vettoriale, lo studente si comporta come se le soluzioni trovate fossero uno spazio vettoriale e ne prende una base (per $z=1$)! Qui, da un lato manca l'osservazione che il sistema lineare non è omogeneo (e quindi non può essere uno spazio vettoriale), dall'altro – se anche lo fosse – la richiesta è di tutto lo spazio, non di una sua base. È come se ci trovassimo di fronte a una situazione speculare rispetto a quella vista in Figura 4.2-39.

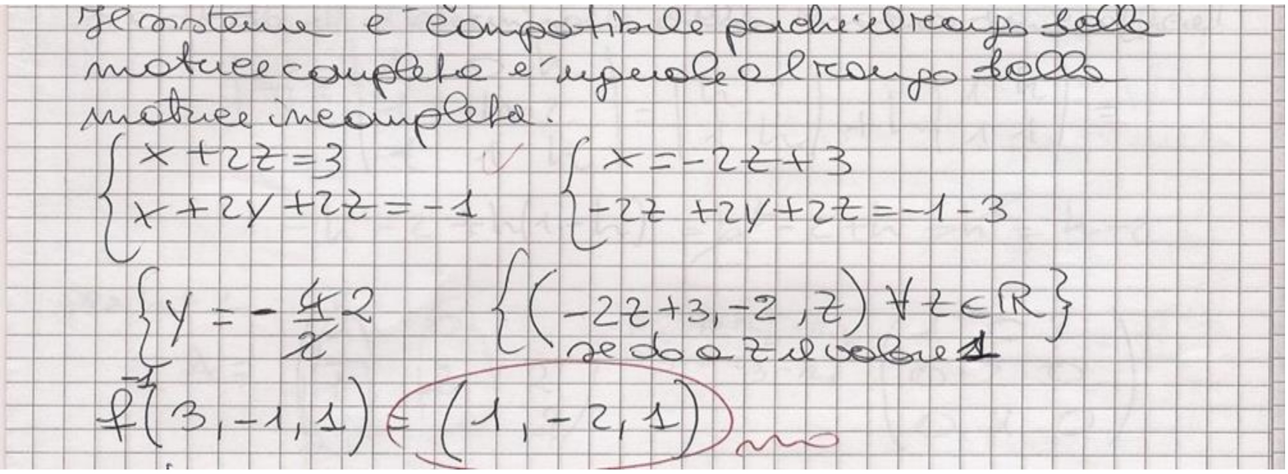


Figura 4.2-41

Nella Figura 4.2-42 vediamo invece un duplice errore. Da un lato lo studente considera come base di Im *f* i vettori colonna della matrice ridotta a scalini, che denota non aver compreso la struttura di spazio vettoriale, dal momento che le operazioni sulle righe della matrice non sono operazioni vettoriali sulle colonne. Dall'altro lato, la cosa singolare è che lo studente legge i vettori dal basso verso l'alto!

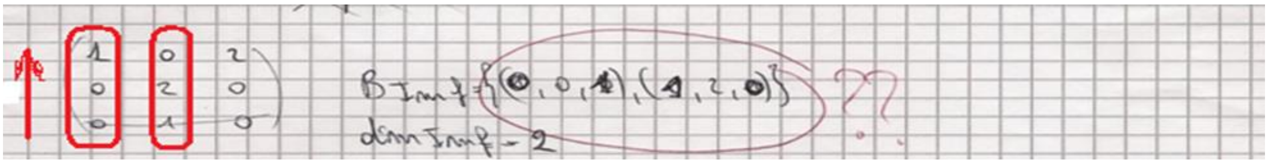


Figura 4.2-42

La Figura 4.2-43 si riferisce alla risoluzione del quesito 5/c). Nella prima frase si vede come lo studente confonda innanzitutto la funzione inversa con la controimmagine di un vettore. E confrontando l'espressione 'f^{-1} rappresenta la colonna dei termini noti' con quello che fa, possiamo vedere che dal punto di vista pratico lo studente sa dal punto di vista operazionale cosa l'esercizio richiede: il riferimento alla 'colonna dei termini noti' rimanda al sistema lineare che viene fuori dalla condizione di controimmagine. Tuttavia vediamo che usa il simbolo 'f^{-1}' come "sinonimo" del vettore!

Nel seguito si può notare una completa mancanza di conoscenza del teorema di Cramer: lo applica, infatti, con det A = 0.

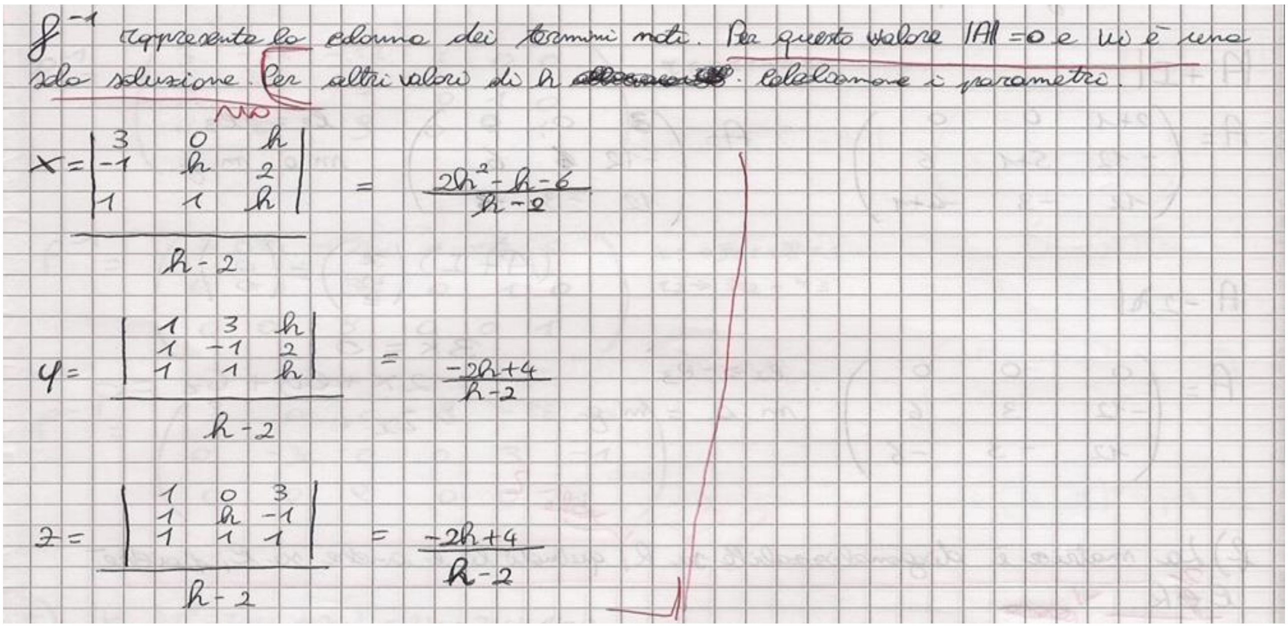


Figura 4.2-43

Nella Figura 4.2-44 lo studente per h = 2 non spiega perché il sistema è incompatibile. Si può supporre che la sua conclusione derivi solo dalla discussione del rango della matrice dei coefficienti che non è massimo, dimenticando la condizione del teorema di Rouché-Capelli.

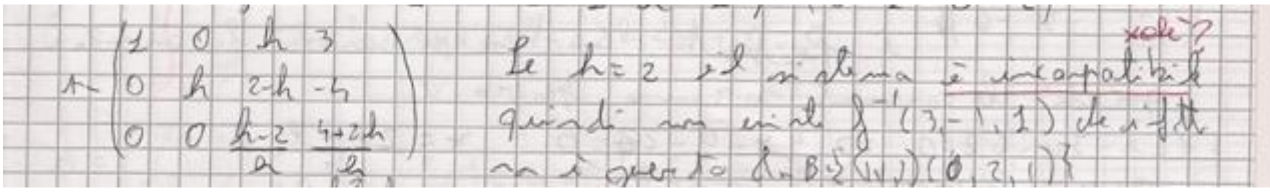


Figura 4.2-44

Nella Figura 4.2-45 notiamo dapprima che l'equazione detA=0 non è scritta esplicitamente. In questo caso abbiamo ancora un esempio di mancanza di controllo incrociato tra i vari conti fatti. Infatti, lo studente fa un errore di calcolo nel det A ma per il valore di h che annulla det A si trova rkA=3, che è in contraddizione. Questo potrebbe anche essere indice del fatto che lo studente non conosce il legame tra rango e det A. A seguire, vediamo ancora che per dim ker$f$ lo studente usa due notazioni diverse: prima, in fase procedurale, è un numero (viene da un conto!); poi, forse nel tentativo di 'elevarsi' a un livello più concettuale o più formale, è un insieme fatta da 0! Infine manca la condizione sull'iniettività (così come quella sulla suriettività): la sua risposta è esattamente complementare a quella esatta.

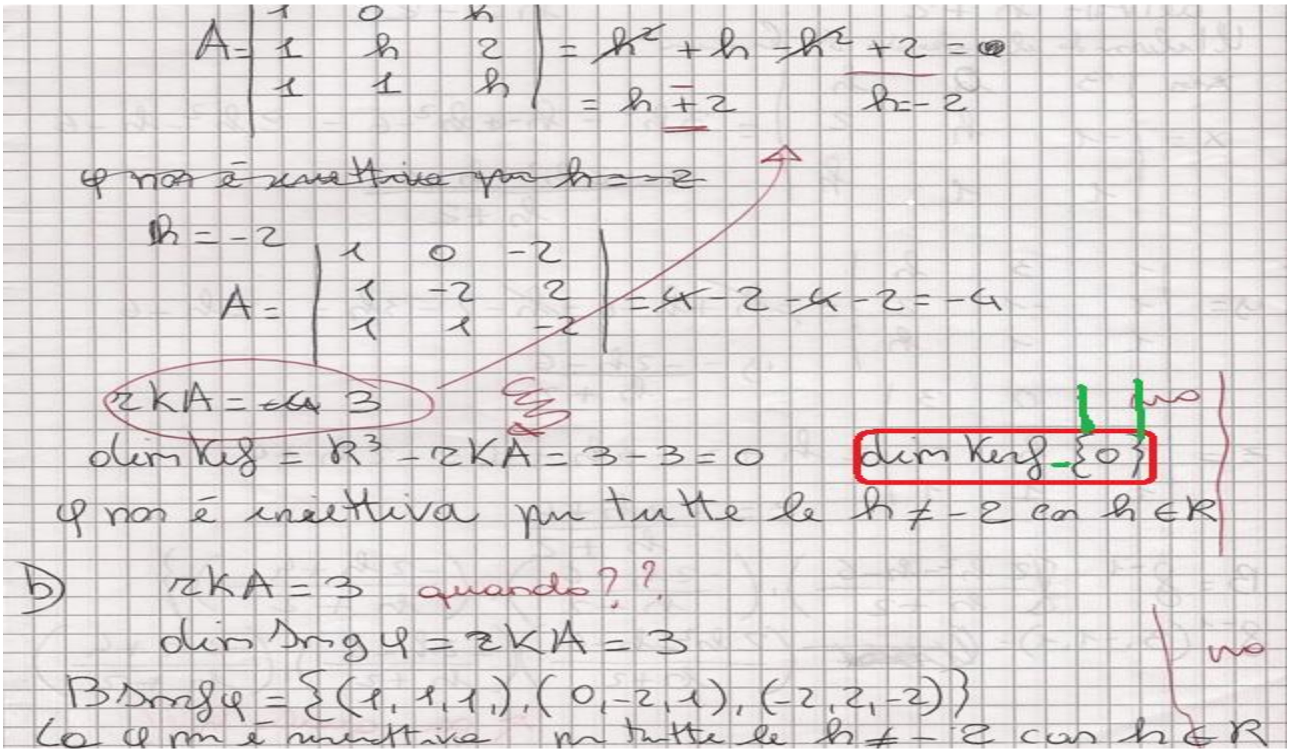


Figura 4.2-45

Nella Figura 4.2-46, vediamo vari esempi di sovrabbondanza di segni (come nel caso di ‘det|A|’ – o si scrive il det o il suo segno) o di segni dal significato sottinteso per principio di cooperazione (qual è la matrice?). Come nel caso precedente, abbiamo un errore di calcolo in det A, e di nuovo l’utilizzo di Cramer nel caso det A = *0*.

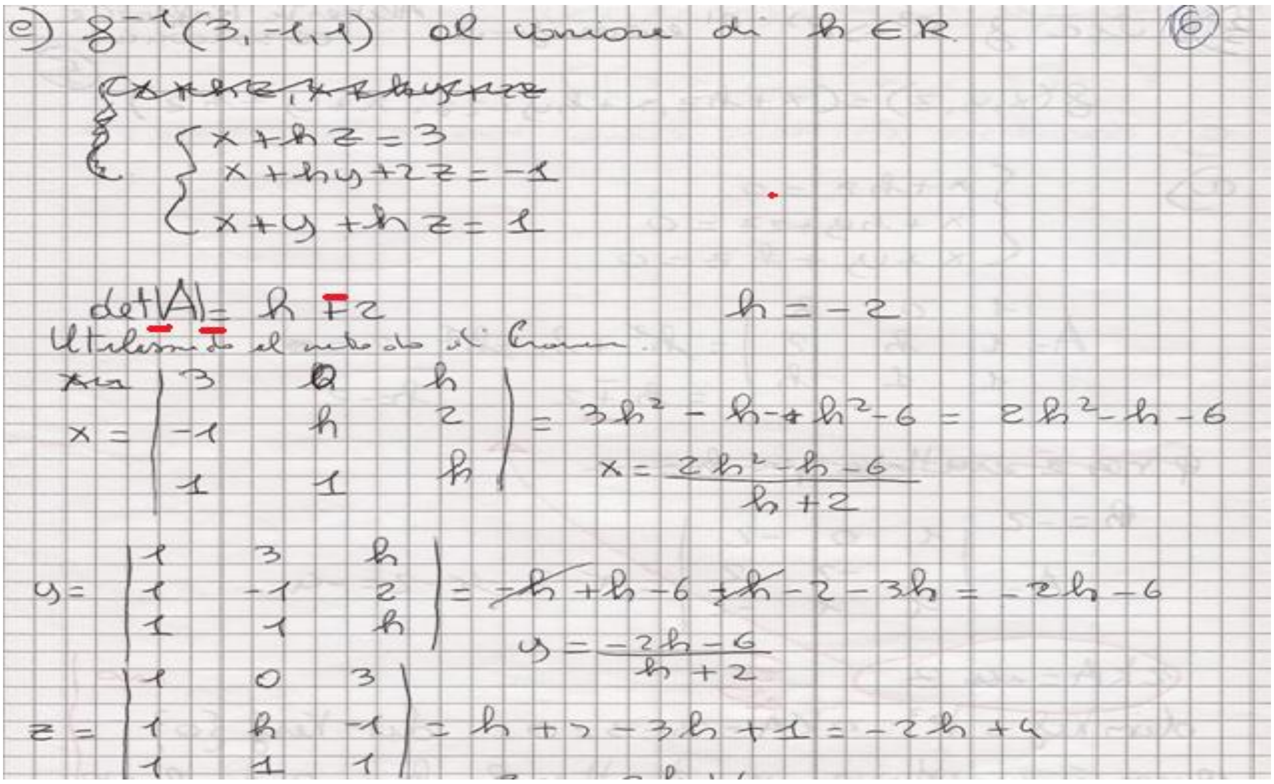


Figura 4.2-46

Il protocollo della Figura 4.2-47 mostra un esempio di svolgimento completamente mancante di spiegazioni verbali dei calcoli presenti, ma anche di qualche semplice ‘etichetta’ cosa è stato calcolato o quale, tra i tanti calcoli, è la risposta al quesito!

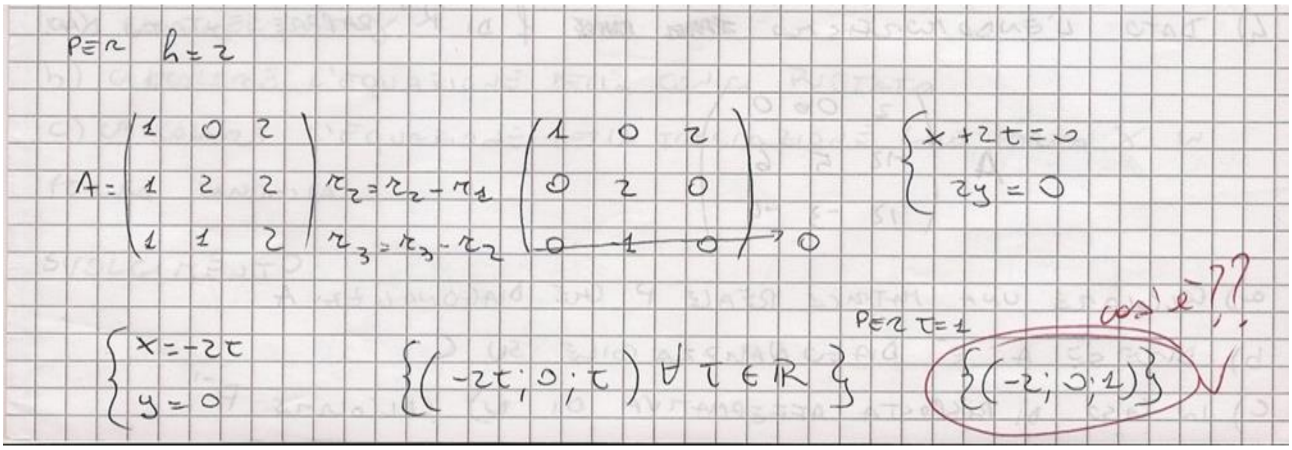


Figura 4.2-47

Nella Figura 4.2-48 vediamo che lo studente lavora assegnando ad *h* un valore numerico – scelto a suo piacere. Probabilmente lo studente non sa come procedere per ‘dire per quali *h*…’, così procede in un caso particolare, forse a voler mostrare che è capace di calcolare nucleo e immagine di *f*.

Vediamo che per $h = 1$ rk A = 3 e non 2. Se si guarda il rettangolo disegnato dallo studente per evidenziare la matrice individuata dalle prime due righe e due colonne, si può ipotizzare che, dal momento che detA=0, lo studente si sia limitato a trovare un minore – il primo possibile – non nullo.

In conseguenza del calcolo del rango, lo studente risolve il corrispondente sistema lineare del ker *f*, ma ancora una volta troviamo una confusione tra l’insieme delle soluzioni e una sua base. In questo s’inseriscono due altri errori: c’è anche un errore di calcolo nella risoluzione del sistema – è $y = - z$; trova le variabili *x* e *y* in funzione di *z* ma quando va a scrivere la terna al posto di *z* scrive 0.

Nel calcolo di Im*f*, viene ereditato l’errore di rkA. Ciò che è più complicato da spiegare è il nesso tra la frase in linguaggio verbale, il successivo sistema lineare e la base data per Im*f*… che evidenziano un’assoluta mancanza di controllo semantico!

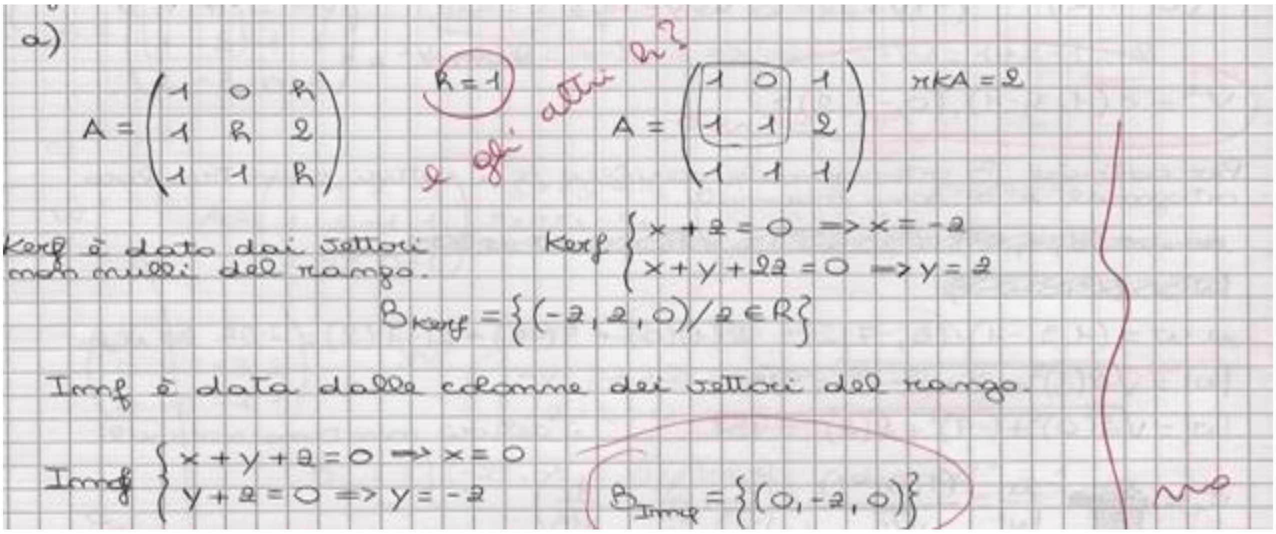
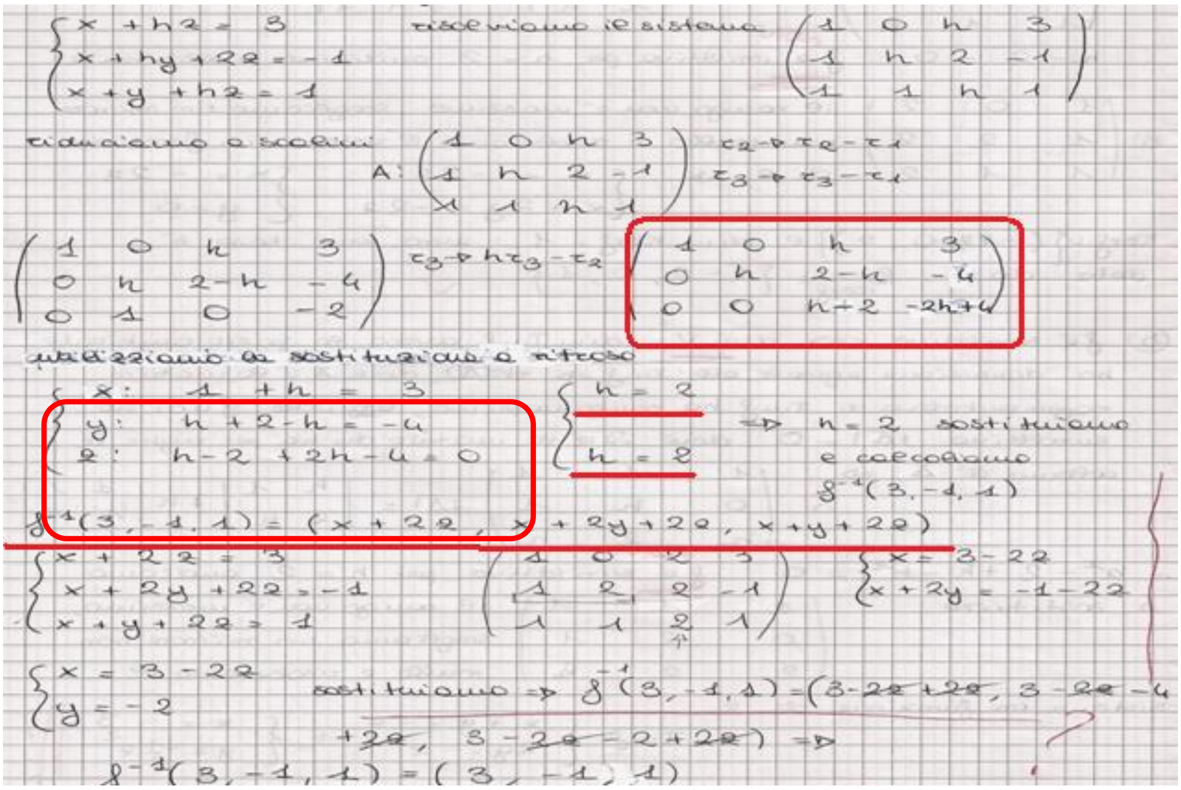


Figura 4.2-48

Nella Figura 4.2-49 lo studente lavora correttamente fino alla riduzione di A a scalini (prima rettangolo rosso). Da qui "sa" che deve usare la sostituzione a ritroso – come scrive – ma la scrittura algebrica di quanto detto verbalmente è qualcosa di completamente (secondo rettangolo rosso), che sembra 'senza senso', ma che lo porta a trovare un unico valore di *h*. Questo valore serve finalmente a far 'scomparire' il parametro dalla legge dell'omomorfismo per il calcolo della controimmagine richiesta. Ancora una volta vediamo che lo studente da un lato scrive $f^{-1}(3, -1, 1) = f(x, y, z)$, dall'altro questo si traduce in un sistema 'corretto' dove f^{-1} 'scompare'. Pur essendo tale sistema corretto, lo studente, però non riesce a concludere, ovvero a dare un senso al risultato che ottiene.



Nella Figura 4.2-50 lo studente usa “quando”: non si riesce a stabilire se intenda che usa la condizione sufficiente della caratterizzazione, o se – molto probabilmente – l’avverbio “quando” viene impropriamente usato come doppia implicazione. Successivamente, vediamo che associa la condizione sul ker$f$ a “rkA=0” – confermata dopo nella sua negazione. Si evince quindi una mancanza di cognizione della relazione tra ker$f$ e la matrice A.

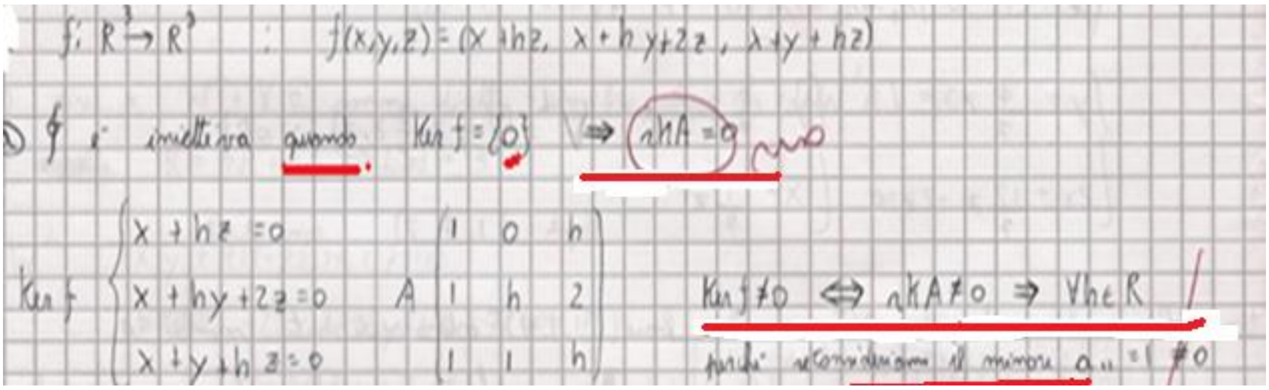
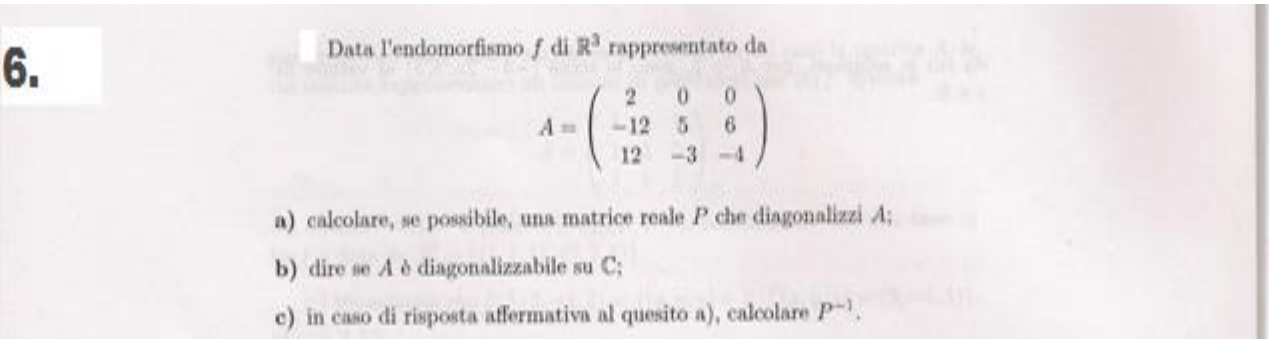


Figura 4.2-50

Passiamo ora a esaminare un altro problema, mostrato nella figura seguente.



6. Data l’endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ rappresentato da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -12 & 5 & 6 \\ 12 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

a) calcolare, se possibile, una matrice reale P che diagonalizzi A;

b) dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$;

c) in caso di risposta affermativa al quesito a), calcolare P^{-1}.

Figura 4.2-51

Nella Figura 4.2-52 lo studente non dà alcuna motivazione della diagonalizzabilità su ℝ, mentre la diagonalizzabilità su ℂ viene giustificata con qualcosa che, preso alla lettera, denota una confusione delle relazioni insiemistiche tra gli insiemi numerici, ma potrebbe essere anche essere che lo studente conosce la relazione corretta ma non è in grado di esprimerla formalmente in simboli.

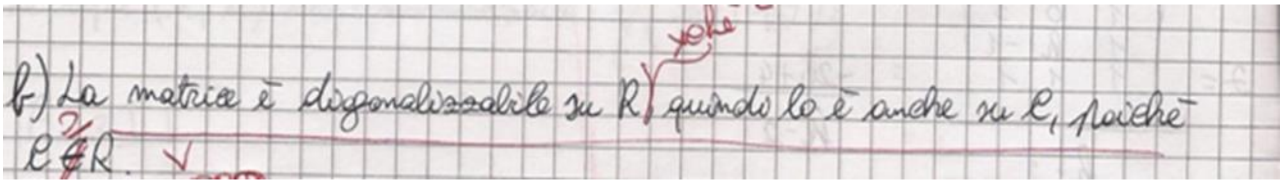


Figura 4.2-52

Nella Figura 4.2-53, invece, vediamo che lo studente deduce la non diagonalizzabilità su ℂ dalla non diagonalizzabilità su ℝ. Presumibilmente, lo studente ha un ricordo vago di una relazione tra la diagonalizzabilità sui due insiemi, ma non sufficientemente precisa, né si evidenza da quanto scritto che la sua deduzione possa essere legata a un legame insiemistico tra ℝ e ℂ.

Figura 4.2-53

La Figura 4.2-54 riguarda il calcolo delle basi degli autospazi. Come possiamo osservare dal rettangolo rosso, lo studente calcola bene la molteplicità geometrica ma sembra ignorarne il significato dal momento, che subito dopo considera una base con un diverso numero di vettori! Anche la definizione di autospazio sembra mancare, dal momento, che non appare che la matrice A+I – impropriamente indicata ancora con A – venga considerata legata a un sistema lineare omogeneo. Su questa matrice lo studente sembra lavorare come forse ricorda, si fa, cioè riducendo a scalini. Quello che manca è che nella pratica che forse ricorda, la riduzione a scalini serve per la risoluzione del sistema omogeneo di matrice A+I, mentre nella figura vediamo che lo studente si limita a considerarne le righe linearmente indipendenti, che prende erroneamente come elementi della base cercata.

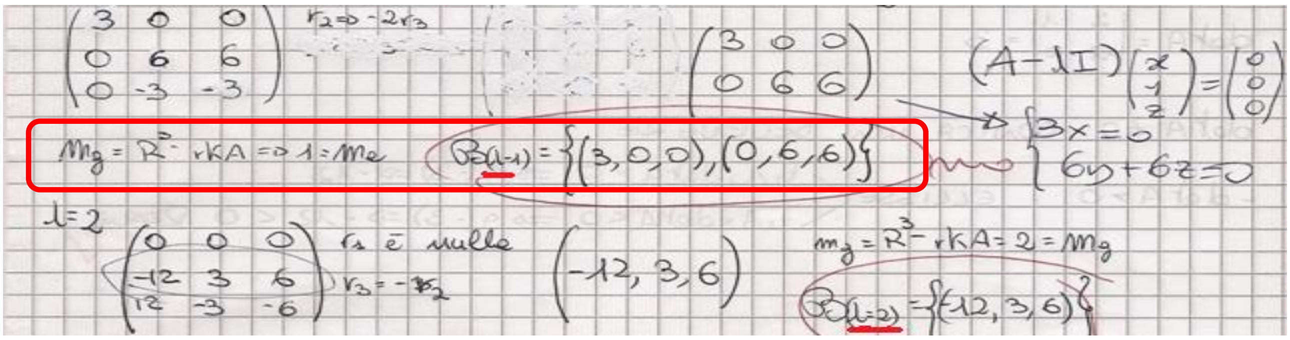


Figura 4.2-54

Nella Figura 4.2-55 vediamo ancora una volta una giustificazione errata della non diagonalizzabilità: dapprima sembra esserci una risposta casuale sulle molteplicità e d’altra parte la matrice può essere non diagonalizzabile su ℝ e diagonalizzabile in ℂ - ancora una volta sembra esserci un “ricordo vago” di una qualche relazione tra la diagonalizzabilità e la relazione insiemistica tra ℝ e ℂ. Osserviamo poi una netta contraddizione con quanto fa nella risoluzione del quesito c), dove va a calcolare l’inversa della matrice di diagonalizzazione pur avendo affermato la non diagonalizzabilità! Osservando la costruzione di P^{-1}, possiamo individuare vari altri errori, sia di tipo concettuale – condizione di invertibilità di una matrice (dal momento che detP=0), condizione di lineare indipendenza dei vettori costituenti P (compare il vettore nullo come prima colonna), sia di tipo procedurale – il calcolo dell'inversa attraverso la trasformazione in forma a scalini ridotta (si ferma alla riduzione a scalini).

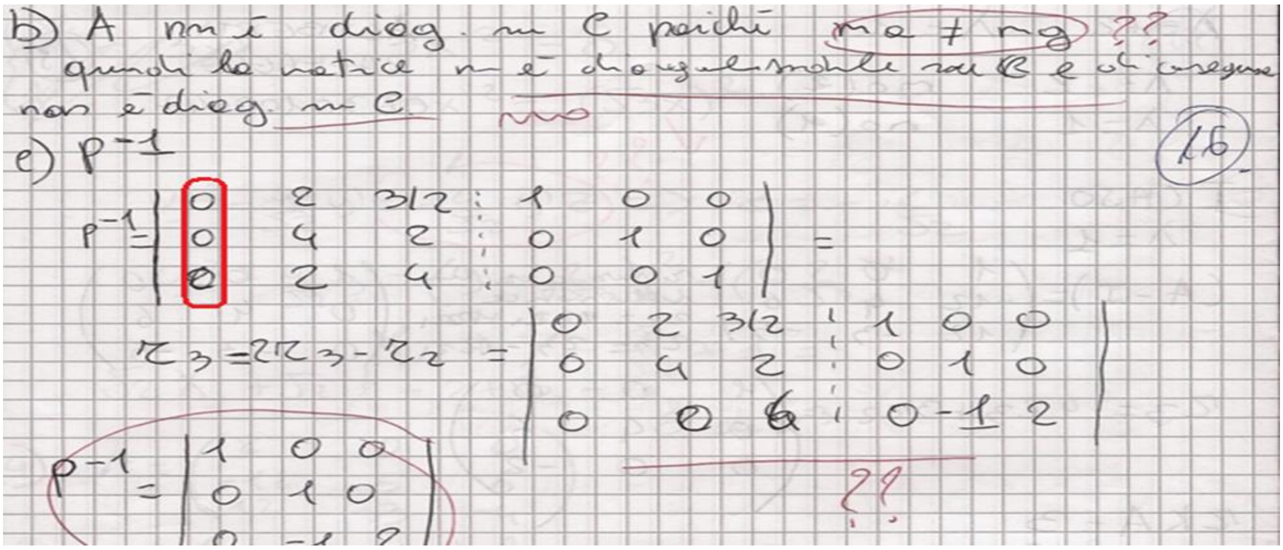


Figura 4.2-55

Ancora nella Figura 4.2-56 troviamo una relazione insiemistica errata, ma sembrerebbe in questo caso mancanza di padroneggiamento del solo simbolo d'inclusione.

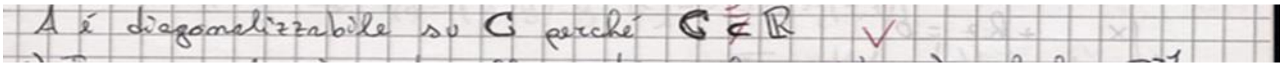


Figura 4.2-56

Nella Figura 4.2-57 vediamo che lo studente scrive $m_g(2)$ = 3- rk (A-2I) = 3-1 = 2 = $m_a(2)$. L'autovalore '2' viene 'sottinteso'. L'autospazio V_2 corrisponde alle soluzioni del sistema lineare ridotto 12x – 3y – 6z = 0. Non si accorge che i due vettori messi sono linearmente dipendenti.

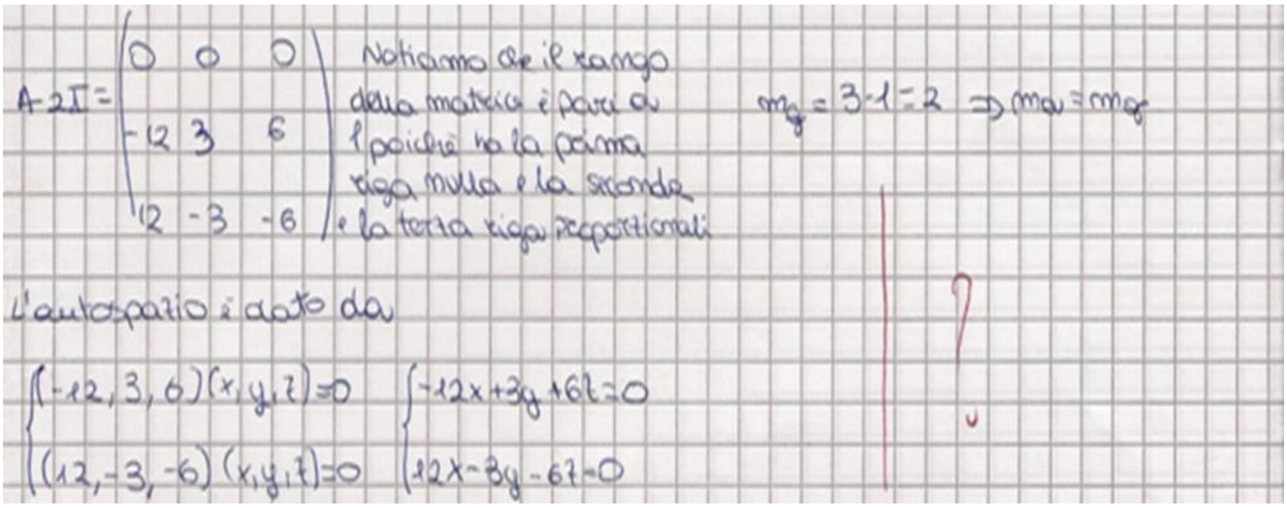


Figura 4.2-57

Nella Figura 4.2-58 vediamo che lo studente deduce la diagonalizzabilità da una considerazione sulla sola molteplicità algebrica di uno degli autovalori: non basta $m_a(2) = 2$ per essere A diagonalizzabile deve essere pure $m_g(2) = 2$!

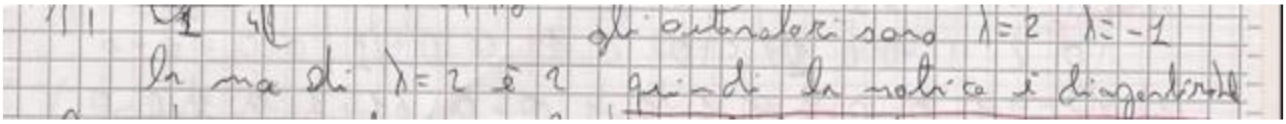


Figura 4.2-58

Nella Figura 4.2-59 notiamo ancora una volta un “ricordo vago”, per cui troviamo la relazione $PAP^{-1} = I$ al posto di $P^{-1}AP=D$. Osserviamo che, anche volendo assumere vera la relazione scritta, nel seguito non viene ricavata correttamente la matrice P^{-1}.

Figura 4.2-59

La Figura 4.2-60 mostra un procedimento e dei risultati corretti, se ben interpretati da un docente “collaborativo”, ma in pratica mancano di qualsiasi spiegazione e anche di conti!

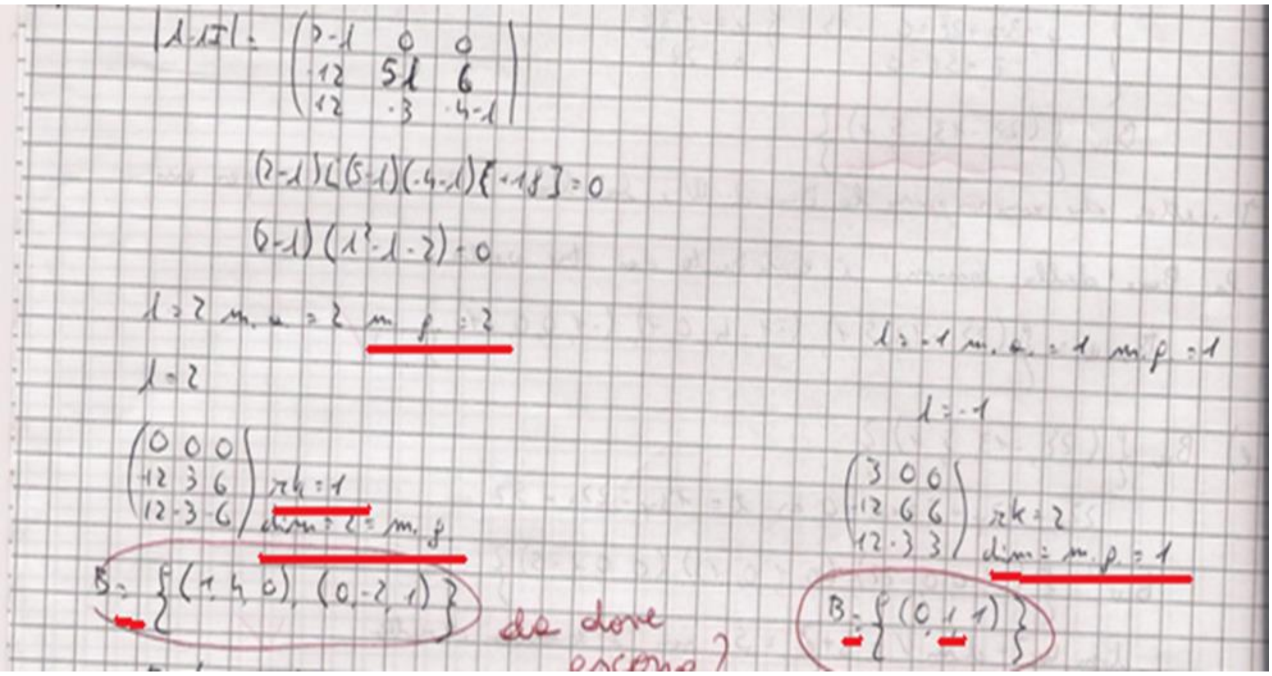


Figura 4.2-60

Nella Figura 4.2-61 vediamo ancora un esempio di mancanza di controllo semantico sui calcoli fatti, che deriva da mancanze cognitive sugli argomenti trattati. Infatti, nel caso dell’autovalore -1, lo studente trova la matrice A+I di rango pari a 3 che pone uguale alla molteplicità geometrica e coerentemente prende una base di tre vettori dati dalle righe della forma a scalini di A+I. Manca quindi la definizione operativa di molteplicità geometrica che, in questo caso, avrebbe portato all’assurdo dato da m_g(-1) = 3-3=0. Manca anche la corretta relazione tra la matrice A+I e l’autospazio V_{-1}: da come si comporta lo studente, sembrerebbe che la matrice A+I ha per righe generatori dell’autospazio.

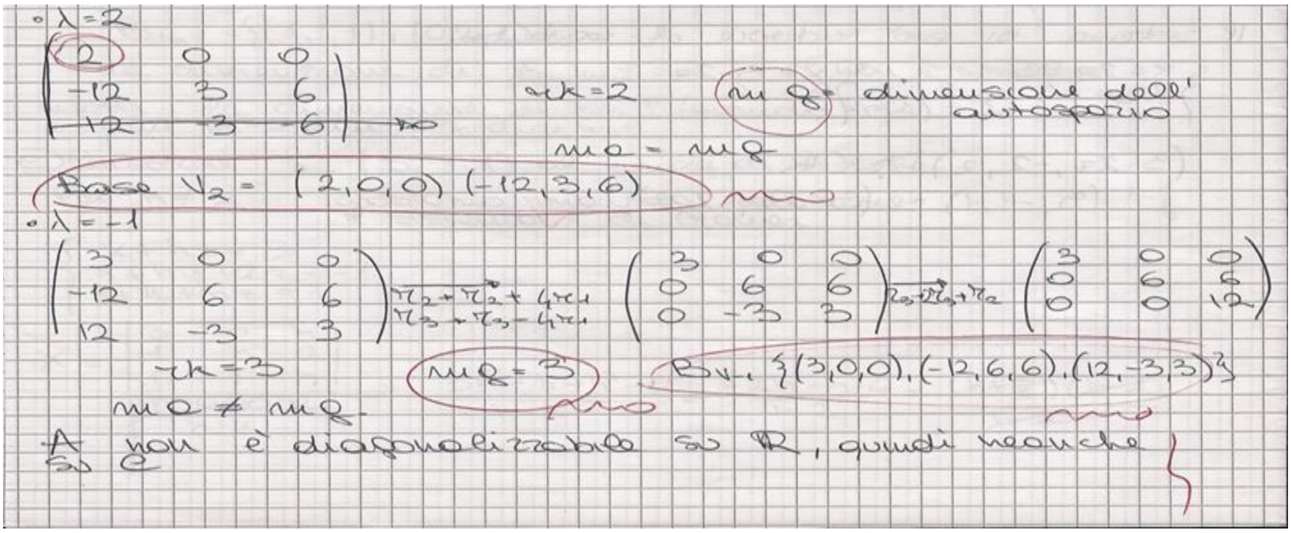


Figura 4.2-61

La Figura 4.2-62 mostra ancora un errore ricorrente che riguarda le relazioni tra gli insiemi numerici: molti studenti considerano numeri complessi solo quelli con parte immaginaria non nulla, pertanto i numeri reali non vengono considerati anche numeri complessi.

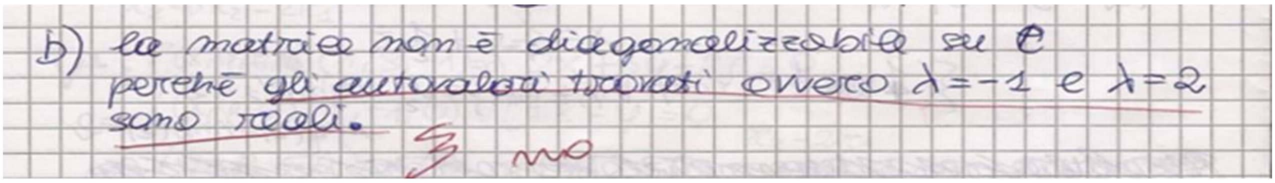


Figura 4.2-62

Lo stesso errore viene ripreso nella Figura 4.2-63, per cui viene dedotta la diagonalizzabilità sul campo reale e non su quello complesso. A questo si aggiunge che la deduzione è fatta sulla base della condizione sufficiente per la diagonalizzabilità, mal applicato. Qui l’errore però è ascrivibile a difficoltà linguistiche: infatti, si può suppore che l’aggettivo “distinti” sia attribuito dallo studente in base al fatto che vede due valori diversi che sono 2 e -1, senza tener conto della molteplicità algebrica. Questo fa pensare anche che non conosce il significato di tale molteplicità. Spesso gli studenti sanno che “è il numero di volte per cui quel valore compare come radice del polinomio caratteristico”, ma in realtà non riescono a fare l’equivalenza di ciò che dicono col fatto che quel valore va “elencato” più volte, in contraddizione con gli aggettivi ‘‘distinti”.

Continuando, vediamo che per λ = 2 lo studente si riferisce a un “sistema”, ma non si sa quale che dice di essere incompatibile. Da qui possiamo dedurre mancanze riguardanti i sistemi lineari (teorema di Rouché-Capelli), agli autospazi (che sono spazi vettoriali e non possono essere vuoti), alle basi di uno spazio vettoriale (non può esserci il vettore nullo). In quella frase nel rettangolo rosso c'è una quantità enorme d'incongruenze, assolutamente fuori dal controllo dello studente.

Non mancano errori procedurali, come ad esempio l'errata base di V_{-1}, che risulterebbe composta da infiniti vettori – al più quell'insieme V_{-1} se fosse stata riportata correttamente la generica soluzione del sistema sopra svolto.

Infine la matrice P di diagonalizzazione costruita ha due colonne nulle: ancora mancanza di controllo che deriva da mancanze sulle caratteristiche della matrice di diagonalizzazione e sulla condizione d'invertibilità di una matrice.

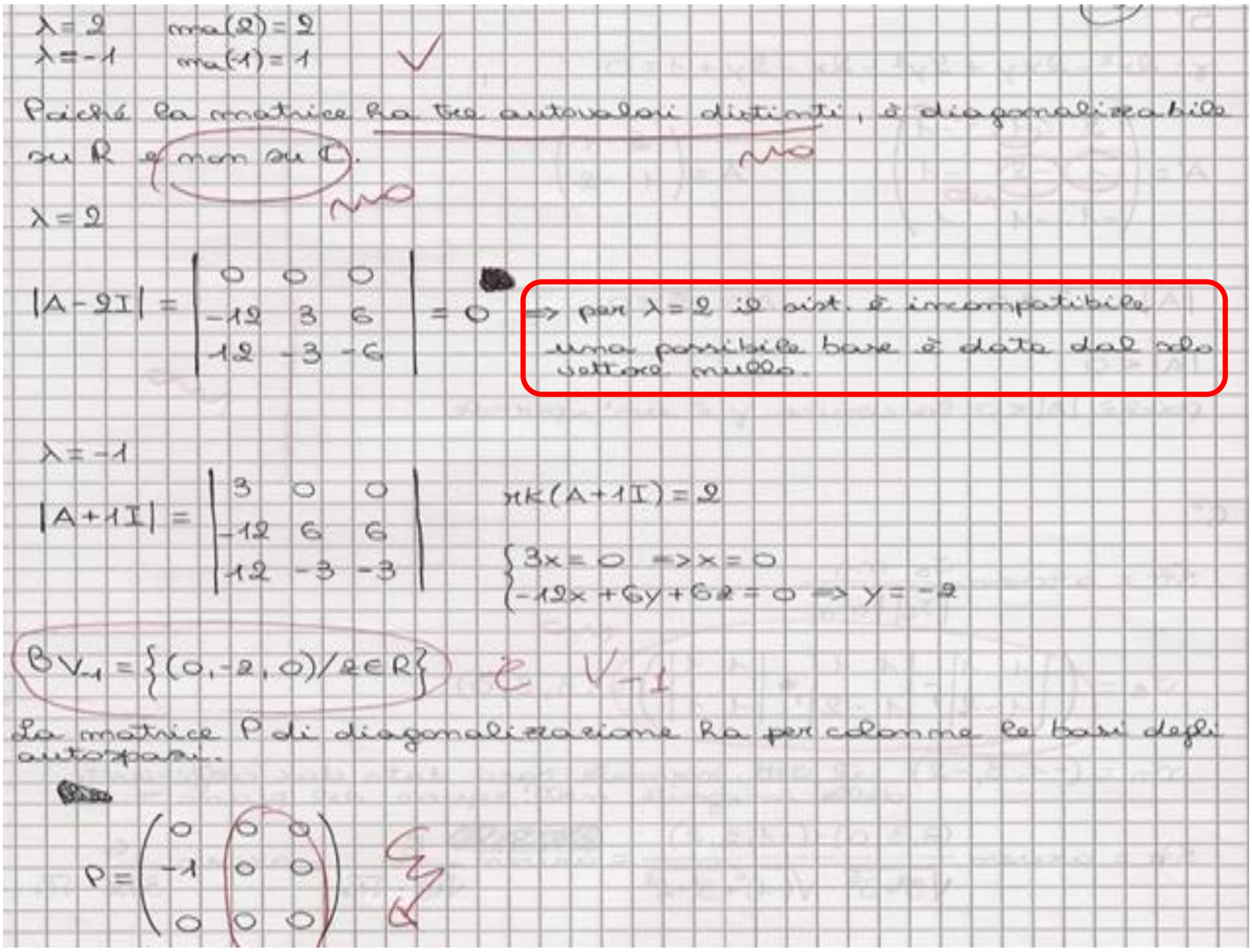


Figura 4.2-63

Nella Figura 4.2-64, osserviamo un errore procedurale nella risoluzione dell'equazione caratteristica: dalle radici che lo studente scrive, possiamo dedurre che abbia risolto con una regola "inventata" del tipo ab=c se e solo se a=c e b=c!

Nel calcolo degli autospazi, esplicita le matrici che corrispondono ad A + 4I e A – 4I (seppur senza nominarle) ma, a parte qualche errore nella riduzione a scalini (al posto di 'r_2' scrive 'r_1'), non scrive come passa dalle matrici alla descrizione dei vettori dell'autospazio. Si può ipotizzare che lo studente abbia risolto il sistema lineare di matrici A + 4I e A – 4I, ma in entrambi i casi abbia confuso *z=0* con *z* parametro. Non fa nulla invece riguardo all'autospazio riguardante lo autovalore 13.

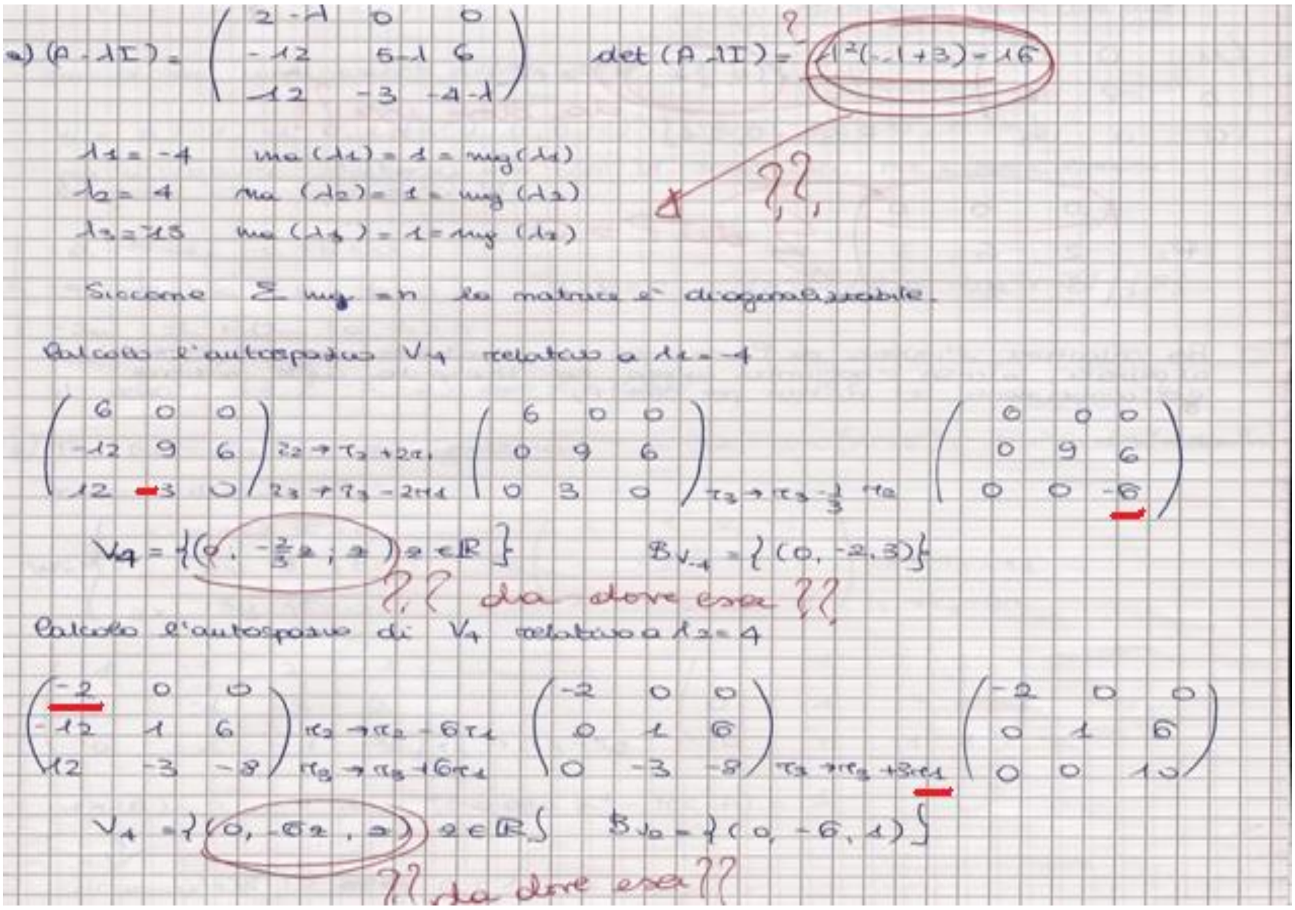
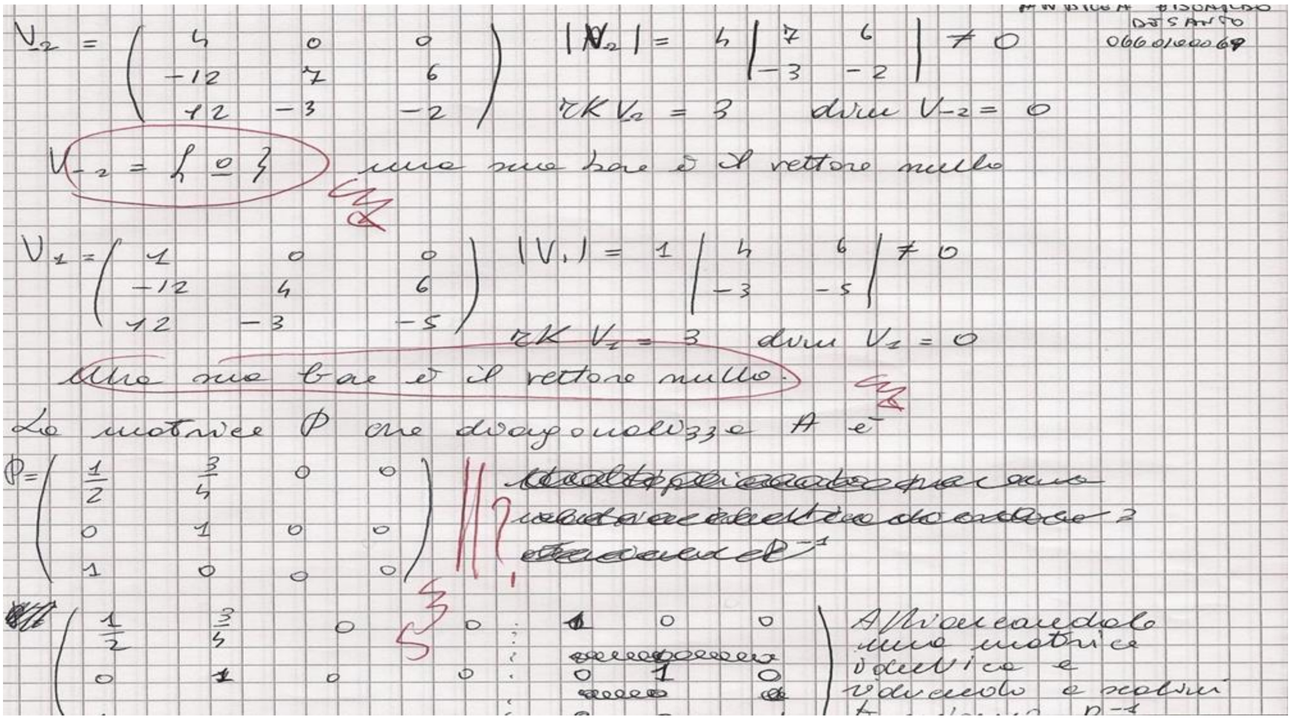


Figura 4.2-64

La Figura 4.2-65 mostra ancora uno studente che non è in grado di accorgersi di un precedente errore di calcolo per cui gli autovalori trovati non sono in realtà tali. Pertanto viene a trovarsi con la dimensione dell'autospazio pari a zero e quindi con l'autospazio pari al solo vettore nullo, ma non vede l'assurdità di questo. In più, va a dare come base di un simili spazio il vettore nullo, che denota mancanze su basi, dimensione, vettori linearmente indipendenti, etc.

Infine costruisce una matrice di diagonalizzazione che, oltre ad avere il vettore nullo tra le sue colonne, è addirittura una matrice non quadrata!



$$V_{-2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -12 & 7 & 6 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad |V_{-2}| = 4 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$rk\, V_{-2} = 3 \quad \dim V_{-2} = 0$

$V_{-2} = \{ \underline{0} \}$ una sua base è il vettore nullo

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 6 \\ 12 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad |V_1| = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$rk\, V_1 = 3 \quad \dim V_1 = 0$

Una sua base è il vettore nullo

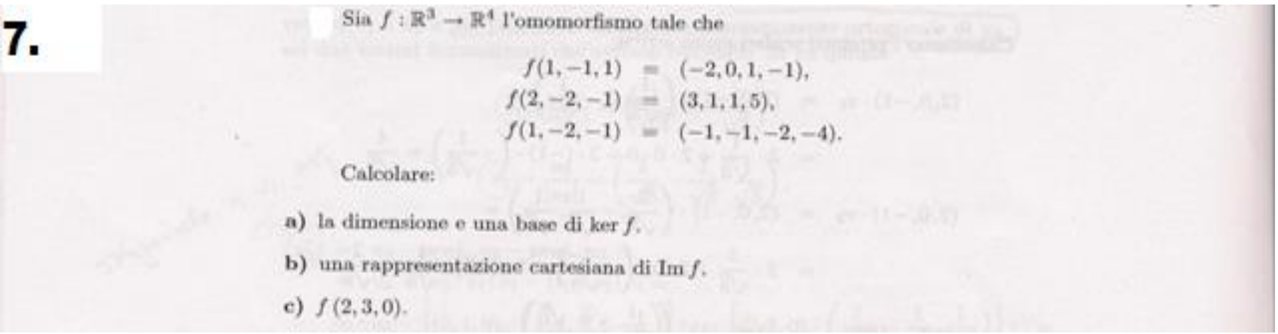
La matrice P che diagonalizza A è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Affiancandolo una matrice identica e riducendo e scalini

Figura 4.2-65

Passiamo ora a esaminare un altro problema sugli omomorfismi.



7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo tale che

$$f(1,-1,1) = (-2,0,1,-1),$$
$$f(2,-2,-1) = (3,1,1,5),$$
$$f(1,-2,-1) = (-1,-1,-2,-4).$$

Calcolare:

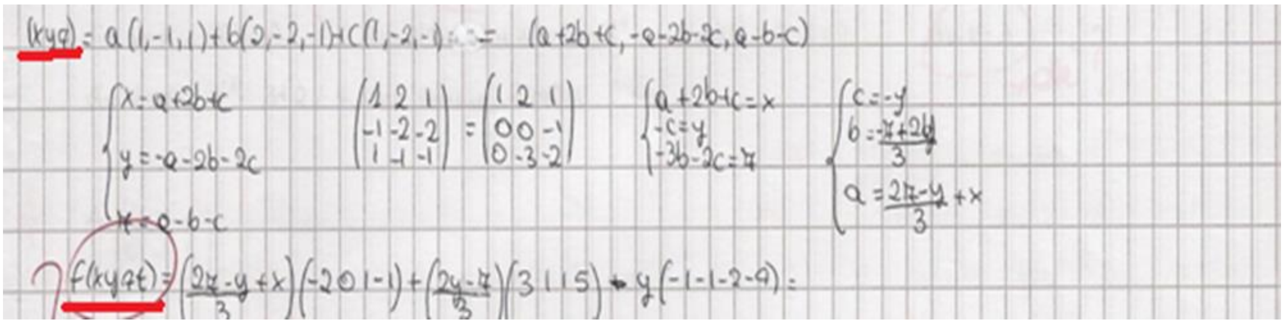
a) la dimensione e una base di ker f.

b) una rappresentazione cartesiana di Im f.

c) $f(2,3,0)$.

Figura 4.2-66

Nella Figura 4.2-67lo studente cerca di trovare un prolungamento lineare di *f*, impostando bene sul dominio. Quando poi passa alle immagini, si lascia "confondere" dal fatto che i vettori a secondo membro sono in $\mathbb{R}^4$ e "automaticamente" anche a primo membro il vettore (x,y,z) diventa (x,y,z,t).



$(x,y,z) = a(1,-1,1)+b(2,-2,-1)+c(1,-2,-1) = (a+2b+c, -a-2b-2c, a-b-c)$

$$\begin{cases} x = a+2b+c \\ y = -a-2b-2c \\ z = a-b-c \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+2b+c = x \\ -c = y \\ -3b-2c = z \end{cases} \quad \begin{cases} c = -y \\ b = \frac{-z+2y}{3} \\ a = \frac{2z-y}{3} + x \end{cases}$$

$f(x,y,z,t) = \left(\frac{2z-y}{3}+x\right)(-2\ 0\ 1\ -1) + \left(\frac{2y-z}{3}\right)(3\ 1\ 1\ 5) + y(-1\ -1\ -2\ -4) =$

Figura 4.2-67

Nella Figura 4.2-68 vediamo innanzitutto che lo studente sembra lavorare in accordo a delle prassi, per cui per calcolare ker$f$ ha bisogno di una matrice che costruisce in qualche modo (mette sulle righe le immagini date) e ignora completamente la rappresentazione matriciale di f rispetto a due basi date, ad es. nel caso in esame B composta dai vettori su cui è assegnato l'omomorfismo e B' base canonica di $\mathbb{R}^4$. Anche volendo assumere come corretta A, si evince che lo studente non sa alcun nesso tra la matrice rappresentativa e il nucleo di f – prende infatto come base di ker$f$ i vettori non nulli della ridotta a scalini di A. Ancora peggio, c'è il fatto che non ha alcun controllo sul fatto che i vettori che scrive nella base del nucleo sono in $\mathbb{R}^4$ mentre il nucleo è in $\mathbb{R}^3$. Analogamente, nella risoluzione del quesito b), scrive una matrice composta da vettori di $\mathbb{R}^3$, perdendo di vista ancora una volta qual è lo spazio ambiente in cui si trova Imf. Ci sono poi anche passaggi oscuri, come ad es. nel rettangolo evidenziato, dove non si capisce cosa abbia voluto dire, e in che modo la matrice A sia legata alla matrice usata per cercare la rappresentazione cartesiana di Imf.!

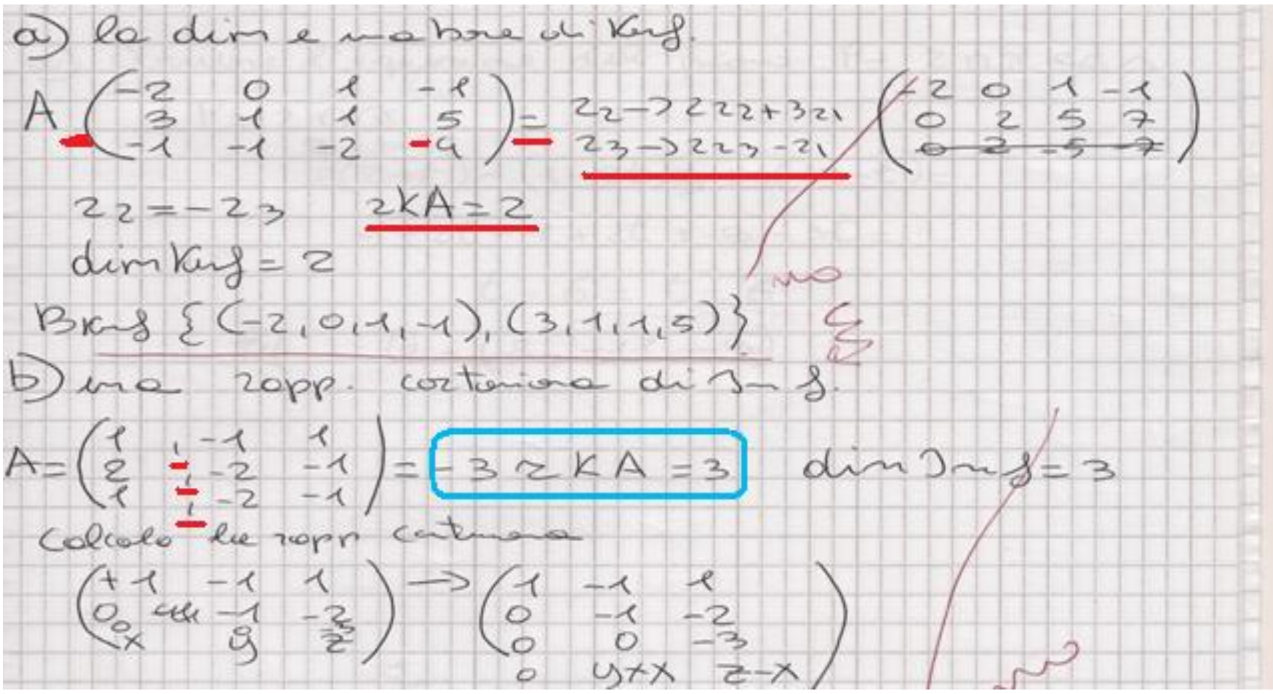
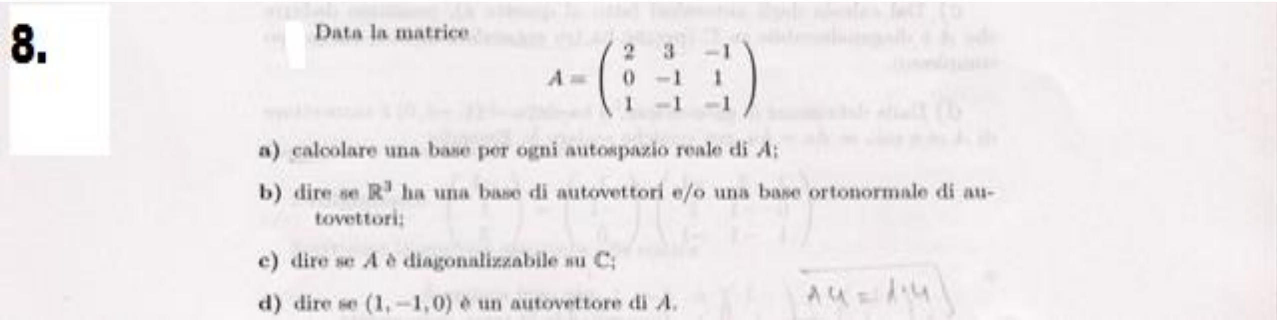


Figura 4.2-68

Andiamo ora a esaminare un altro problema riguardante gli autospazi e la diagonalizzazione.



8.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) calcolare una base per ogni autospazio reale di A;

b) dire se $\mathbb{R}^3$ ha una base di autovettori e/o una base ortonormale di autovettori;

c) dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$;

d) dire se $(1, -1, 0)$ è un autovettore di A.

Figura 4.2-69

Nella Figura 4.2-70 vediamo ancora uno studente che trova una base di V_2 fatta da due vettori e allo stesso tempo dice che la sua dimensione è 3! Da qui deduce che il quesito ha risposta affermativa relativamente all'esistenza di una base di autovettore di $\mathbb{R}^3$. Per verificare se la base trovata fosse ortonormale, fa il prodotto delle componenti dei vettori (cfr. rettangolo rosso) senza sommarli e nella concludere la non ortonormalità della base continua a considerare "i risultati" come se fossero separati.

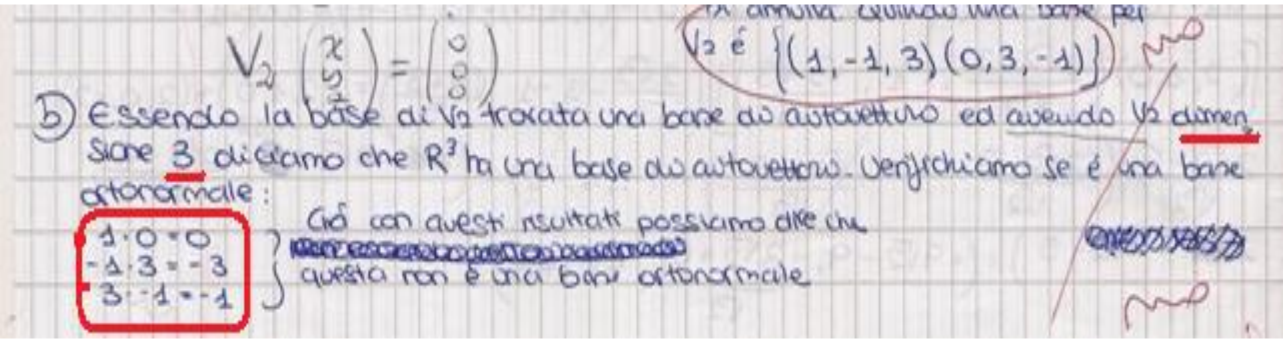


Figura 4.2-70

Nella Figura 4.2-71 vediamo che lo studente manca alcuni delimitatori, come '=', '(…), […]', da cui ricava conti errati per arrivare infine a un risultato come polinomio di quarto grado. Ancora una volta non c'è controllo da parte dello studente, sull'ordine del polinomio caratteristico che dev'essere pari all'ordine della matrice.

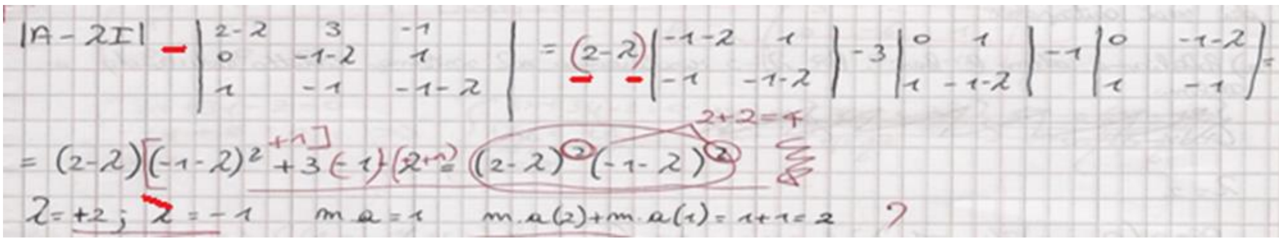


Figura 4.2-71

Nella Figura 4.2-72 vediamo che nella motivazione data alla risposta al quesito c) lo studente parla di "solo 2 autovalori in $\mathbb{C}$", perché 2 sono gli autovalori con parte immaginaria non nulla.

Nel rispondere al quesito d), lo studente per verificare che il vettore dato sia autovettore vuole verificare che esso sia linearmente indipendente rispetto agli ‘altri autovettori di A’. Questi ultimi vengono identificati con la terza e la seconda riga della matrice che corrisponde all’autospazio V_2 (rettangolo segnalato, vicino ‘3’perde un segno ‘-’) e crea la matrice A’ con questi vettori e il vettore da verificare. A parte il fatto di non aver considerato autovettore, è comunque da escludere che volesse intendere ‘dipendente’ poiché trova rkA’=3 e deduce correttamente la lineare indipendenza e di conseguenza, coerentemente con quanto (erroneamente) affermato, che il vettore dato sia un autovettore. Manca completamente la definizione di autovettore.

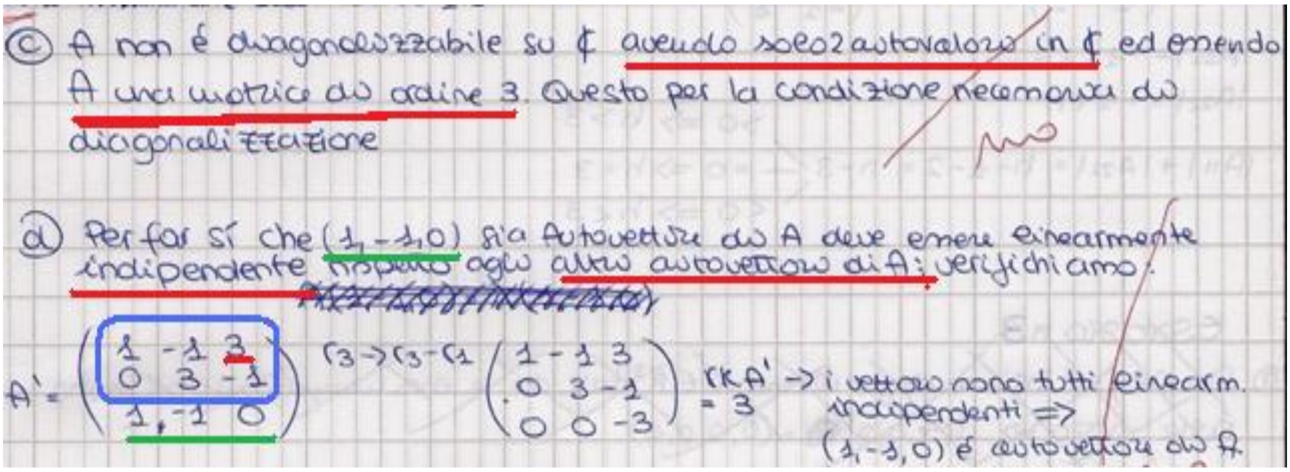


Figura 4.2-72

Nella Figura 4.2-73 vediamo che lo studente usa un metodo che si addice alla verifica di appartenenza di un vettore a uno spazio vettoriale quando siano dati i sui generatori. La procedura fatta è esatta ma in realtà serve a rispondere a un altro tipo di quesito.

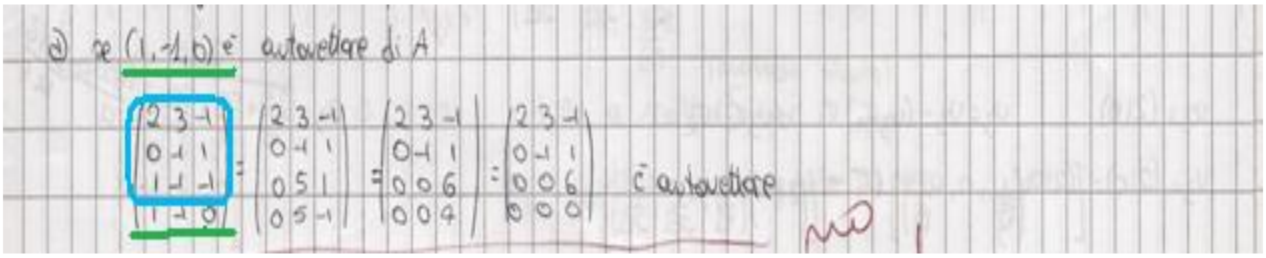


Figura 4.2-73

Analogamente, nella Figura 4.2-74 vediamo un comportamento simile: lo studente aggiunge alla matrice A il presunto autovettore in quarta colonna e l’essere autovettore corrisponde alla ‘compatibilità’ (anche se nessun sistema lineare viene citato), che si concretizza nel teor. di Rouché-Capelli.

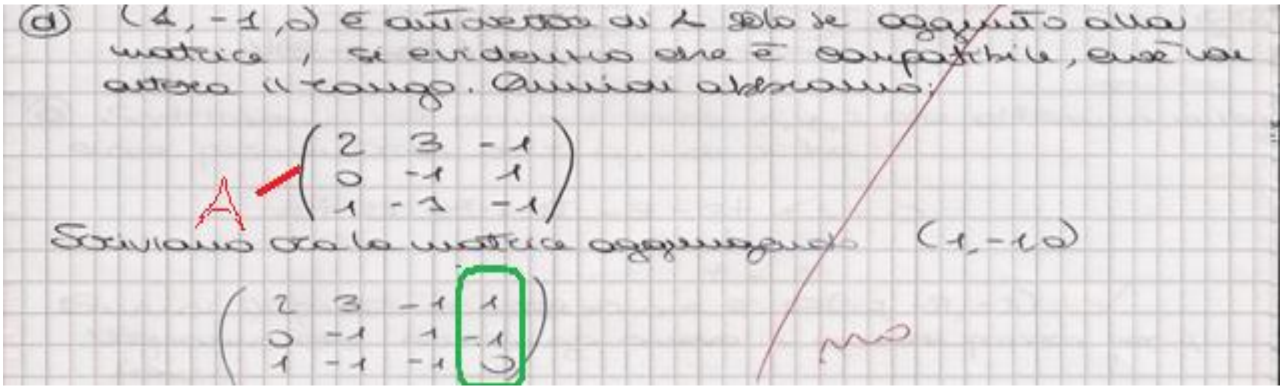


Figura 4.2-74

Nella Figura 4.2-75 vediamo che lo studente richiama un teorema non adeguato al quesito posto.

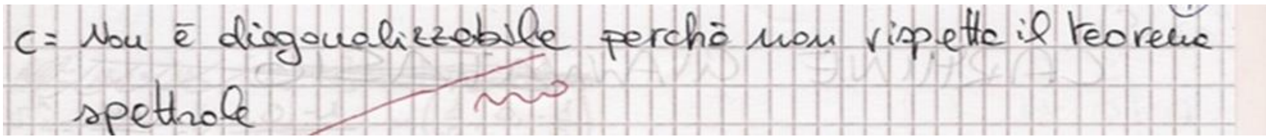
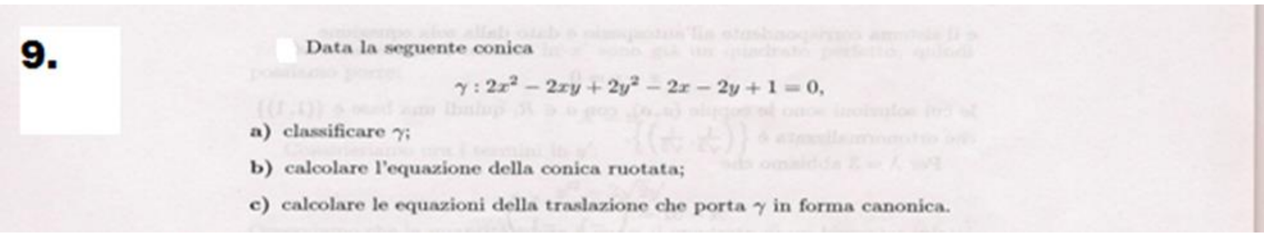


Figura 4.2-75

Esaminiamo un altro problema, riguardante le coniche e mostrato nella figura seguente.



9. Data la seguente conica

$$\gamma : 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

a) classificare γ;

b) calcolare l'equazione della conica ruotata;

c) calcolare le equazioni della traslazione che porta γ in forma canonica.

Figura 4.2-76

Nella Figura 4.2-77 vediamo che lo studente ricorda di dover calcolare degli autovalori, ma lo va a fare con riferimento alla matrice associata alla conica piuttosto che alla forma canonica della conica.

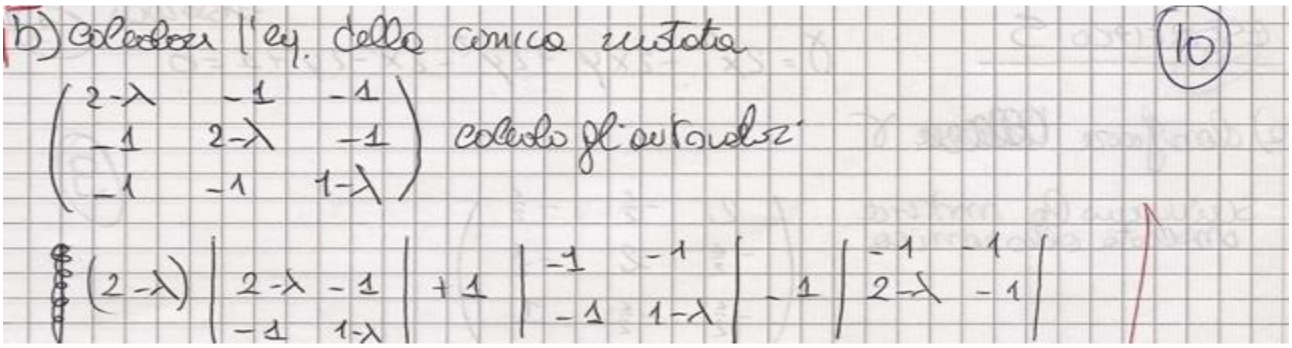


Figura 4.2-77

Nella Figura 4.2-78 vediamo che lo studente a parole dice di voler procedere “al completamento del quadrato”, ma in realtà non sa cosa sta dicendo, perché prende il termine lineare in *x’* e il termine noto, piutttosto che entrambi i termini in *x’*.

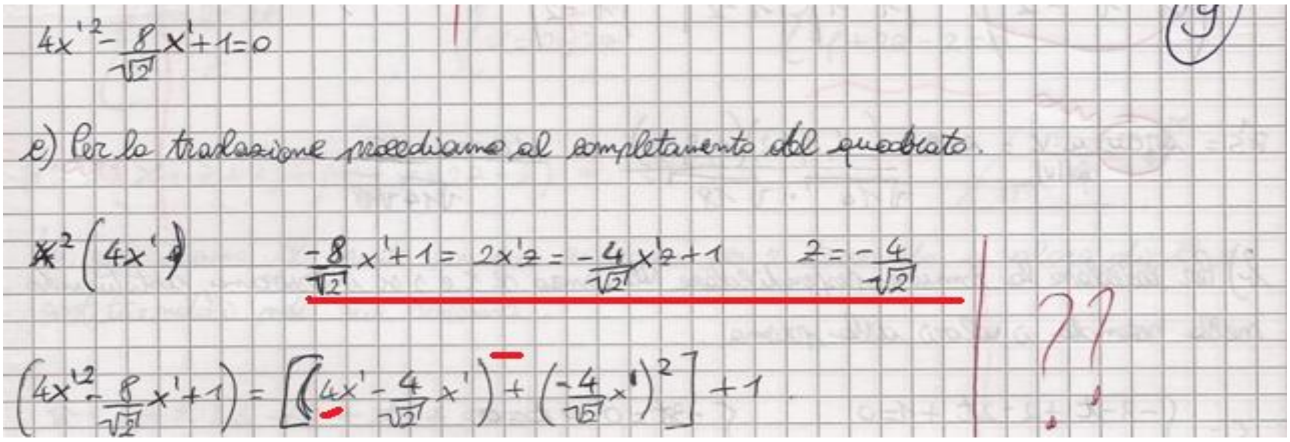


Figura 4.2-78

Nella Figura 4.2-79 vediamo che ancora un esempio di applicazione di una procedura senza tener conto dei vincoli che questa deve avere: in questo caso, non può essere det P = -1, deve scambiare le colonne.

Se andiamo poi a guardare meglio quanto scritto, vediamo che mette ‘=’dove dovrebbe esserci ‘·’. È un errore di notazione?

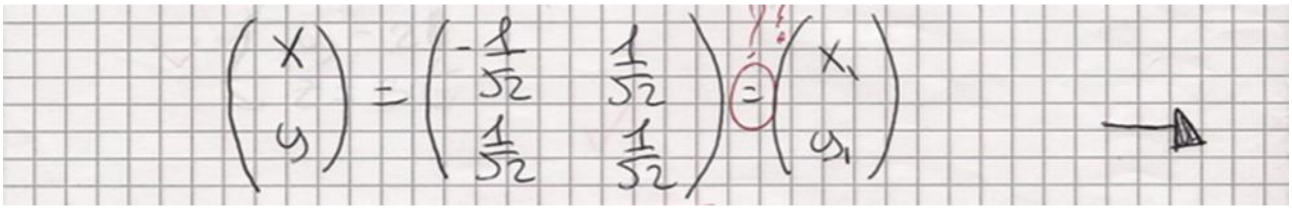


Figura 4.2-79

Nelle figure seguenti, vediamo due casi in cui il teorema di classificazione delle coniche è applicato in maniera parziale – Figura 4.2-80: lo studente dice che l’ellisse è reale senza alcuna motivazione – o in maniera errata – Figura 4.2-81: in questo caso l’ellisse è reale e non immaginaria come scritto dallo studente.

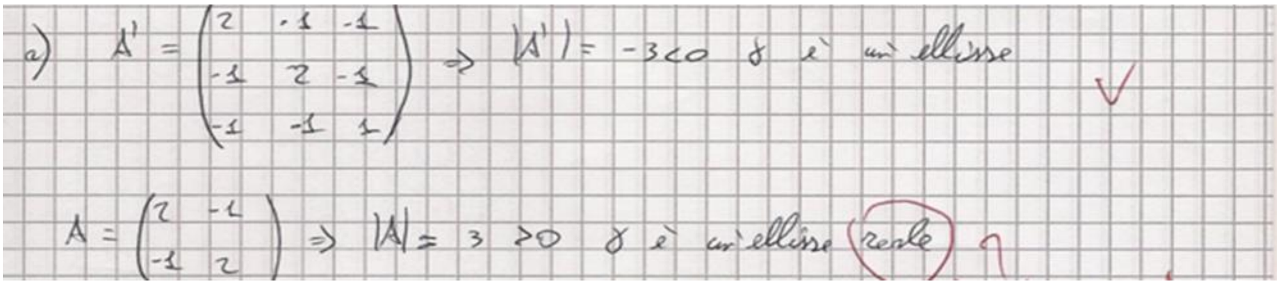


Figura 4.2-80

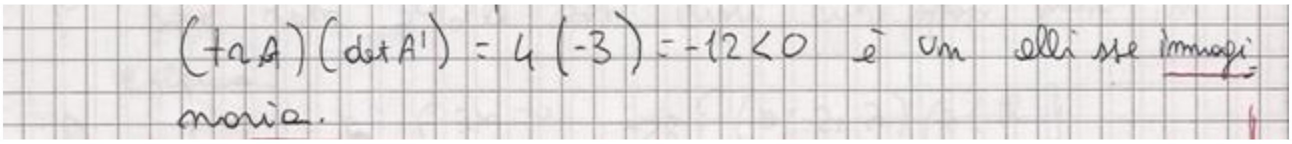


Figura 4.2-81

Nella Figura 4.2-82 vediamo invece che lo studente non conosce la definizione di matrice associata alla conica (i termini sottolineati vanno divisi per 2). Parla poi di "matrice traccia", che dice essere nulla: non si capisce a cosa possa riferirsi. Si sarebbe portati a pensare che volesse riferirsi a det B, ma così non sembra poiché dopo parla di "det =0" facendo presupporre che traccia e det siano due cose distinte. La conclusione è poi senza senso: "quindi è coincidente" e qui ci troviamo di fronte a difficoltà prima di tutto linguistiche.

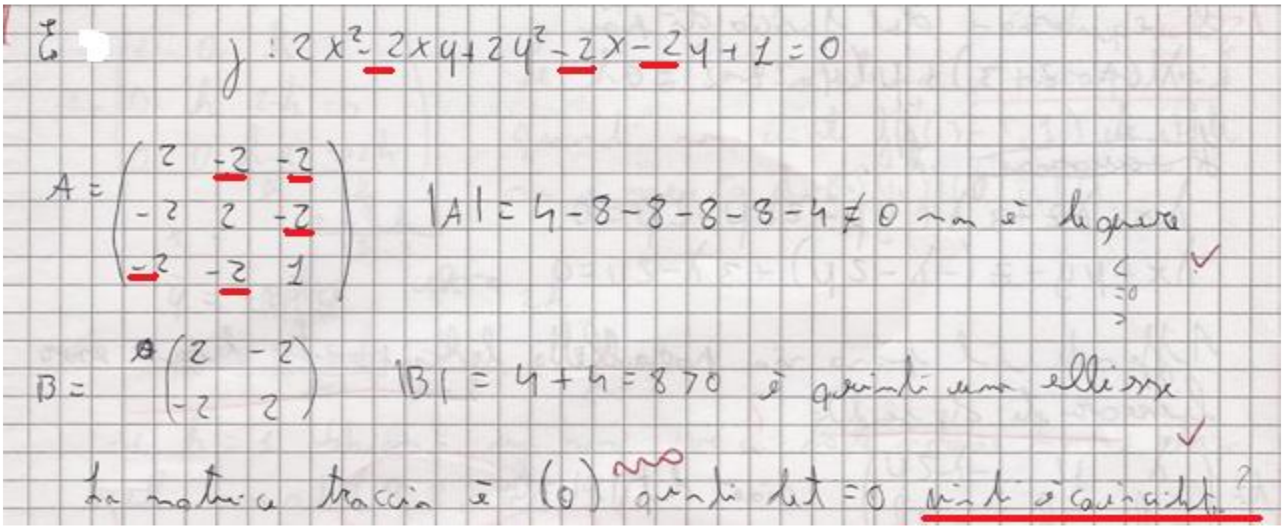


Figura 4.2-82

Anche nella Figura 4.2-83 vediamo che lo studente non sa quali sono le coniche degeneri e quelle non degeneri, per cui non si accorge della contraddizione che ha davanti.

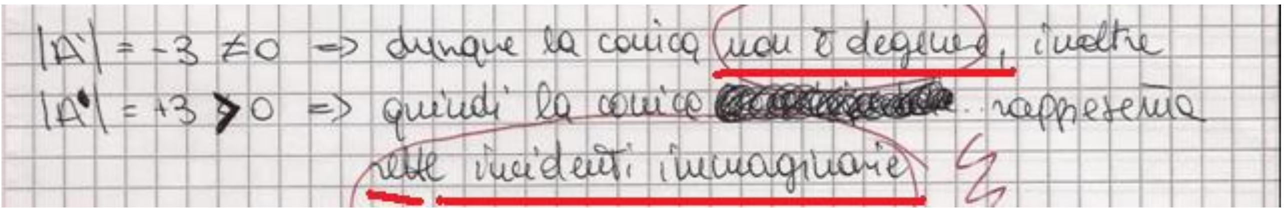


Figura 4.2-83

Nella Figura 4.2-84 vediamo ancora un "riecheggiare" di frasi note come 'equazione della conica ruotata', che affiancate alle equazioni della rotazione, mostrano la vacuità di significato.

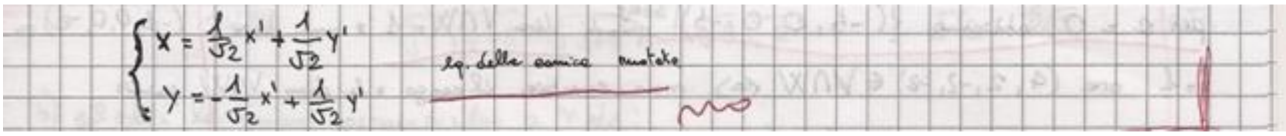


Figura 4.2-84

Nella Figura 4.2-85 abbiamo un esempio di errore di lettura della traccia: non era richiesto di trovare l'equazione della conica in forma canonica! In realtà è plausibile supporre che lo studente non legga la traccia, ma proceda in accordo a una prassi nota – molti esercizi sulle coniche si limitano a chiedere la trasformazione dell'equazione in forma canonica – e procede di conseguenza.

Figura 4.2-85

Anche nella Figura 4.2-86 vediamo che lo studente alla fine di una procedura trova l'equazione 3X +Y = 1 e non si accorge che è una retta, non un'ellisse! Si potrebbe dire che c'è mancanza di controllo, ma il controllo presuppone che lo studente sappia quanto meno che una conica corrisponde a un'equazione di secondo grado e non di primo.

Figura 4.2-86

Come nel caso della Figura 4.2-79, anche nella seguente vediamo l'applicazione di una procedura senza controllo sui vincoli posti alla matrice P: per es. deve essere una matrice ortogonale con detP=1. Né lo studente sembra sapere che P è una matrice di diagonalizzazione ortogonale, costruita quindi con le basi ortonormali degli autospazi, mentre nel caso in esame sono state basi degli autospazi non ortonormale.

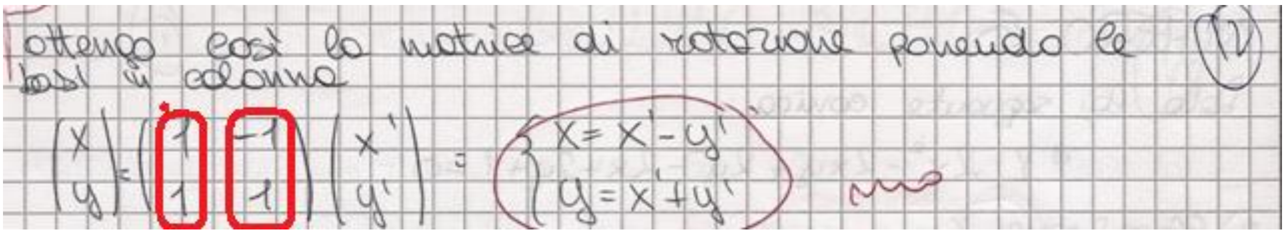
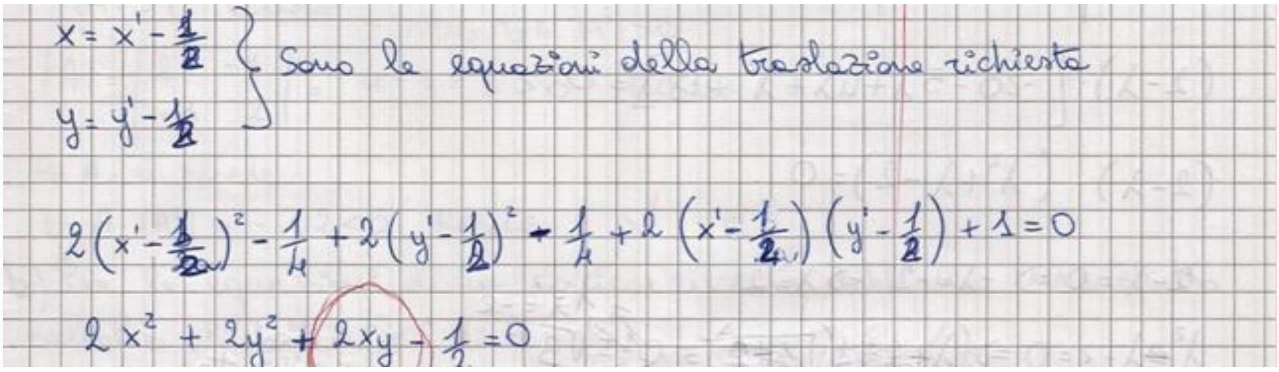


Figura 4.2-87

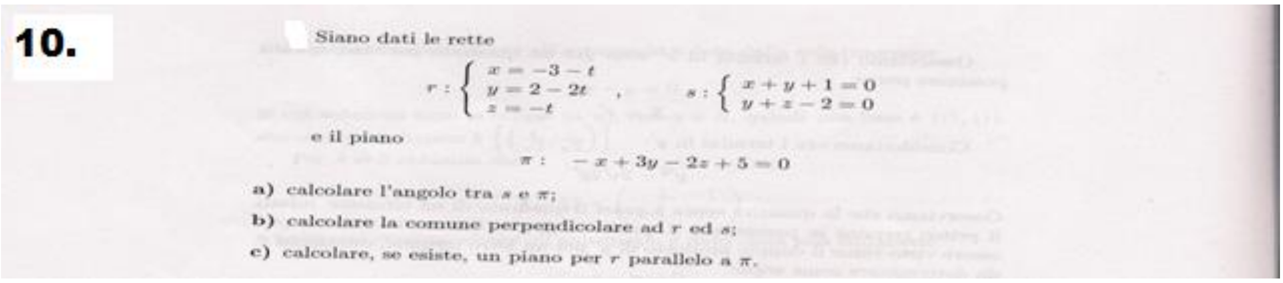
Nella Figura 4.2-88 c'è ancora un esempio di mancanza di controllo concettuale: l'equazione



canonica di un'ellisse non contiene il termine misto.

Figura 4.2-88

Passiamo adesso a esaminare un problema di geometria analitica nello spazio, mostrato nella figura seguente.



10. Siano dati le rette

$$r: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano

$$\pi: \quad -x + 3y - 2z + 5 = 0$$

a) calcolare l'angolo tra s e π;

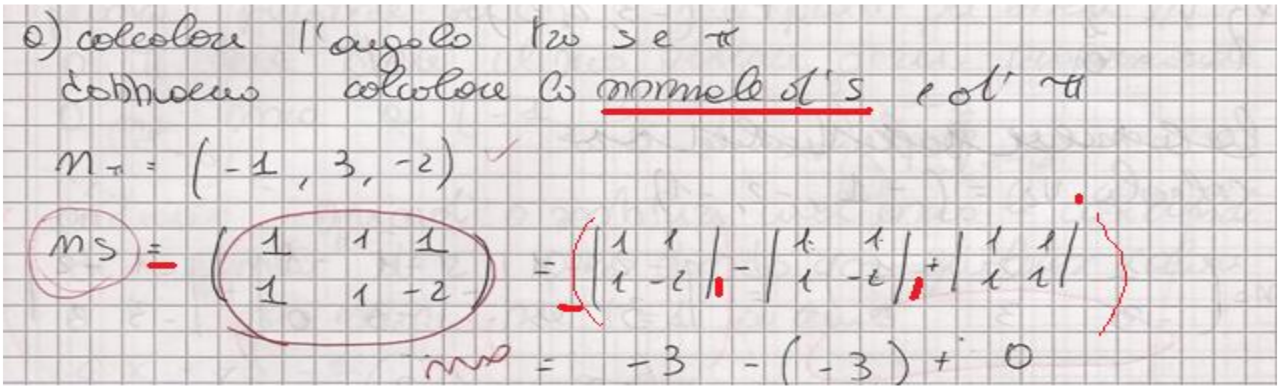
b) calcolare la comune perpendicolare ad r ed s;

c) calcolare, se esiste, un piano per r parallelo a π.

Figura 4.2-89

Nel caso della Figura 4.2-90 vediamo ancora una non corrispondenza tra la descrizione verbale/simbolica e la descrizione operativa di ciò che lo studente fa: parla di 'normale di s', indicandola anche con 'n_s', ma in realtà quello che fa è – o dovrebbe essere – il vettore direzionale di *s*'. Certamente c'è un uso senza cognizione di significato della parola 'normale', ma non si può dire se lo studente è cosciente che sta calcolando il vettore direzionale – cioè se siamo solo alla presenza di un errore di 'nomenclatura', o se invece procede ancora una volta, per 'riproduzione' di procedure richiamate alla mente in casi simili. Sembrerebbe più la seconda, poiché nel calcolo di n_s lo studente non presta attenzione alle equazioni della retta, ma lavora come se avesse $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ senza quindi aver consapevolezza di come si costruisce la matrice di riferimento (cerchio in rosso).

Infine abbiamo anche errori di uso dei segni: ad esempio, mancano le parentesi, le virgole, usa in modo improprio il segno di uguale.


c) calcolare l'angolo tra s e π
dobbiamo calcolare la normale di s e di π

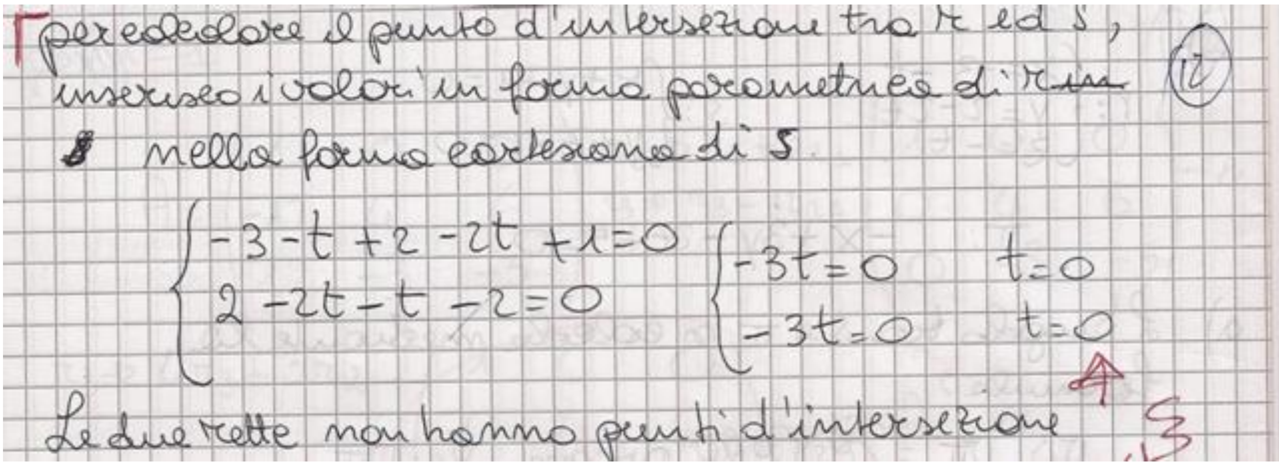
$n_\pi = (-1, 3, -2)$

$n_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$

no $= -3 - (-3) + 0$

Figura 4.2-90

Nella Figura 4.2-91 vediamo un caso di procedura corretta ma interpretazione errata dei risultati: trova bene t = 0, invece di sostituire nelle equazioni della retta *r* per trovare il punto P (-3, 2, 0) dell'intersezione, interpreta lo zero come 'vuoto' e termina che non ci sono punti d'intersezione.


per calcolare il punto d'intersezione tra r ed s, inserisco i valori in forma parametrica di r ~~in~~ nella forma cartesiana di s (12)

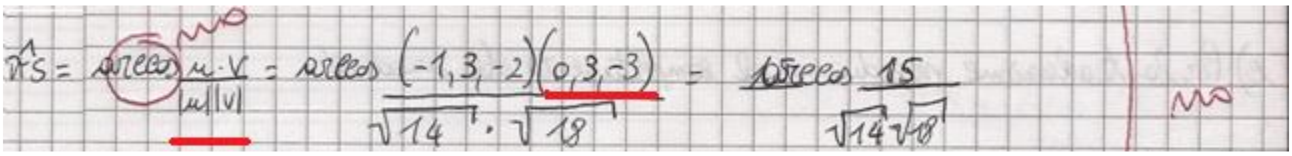
$\begin{cases} -3-t+2-2t+1=0 \\ 2-2t-t-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3t=0 \\ -3t=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} t=0 \\ t=0 \end{matrix}$

Le due rette non hanno punti d'intersezione

3

Figura 4.2-91

Nella Figura 4.2-92 vediamo ancora un errore ricorrente: l'angolo è introdotto teoricamente come arccos, e quasi sempre nelle applicazioni è usato in questo modo. Nel caso in esame, che riguarda l'angolo tra una retta e un piano, visti i dati a disposizione, considerazioni trigonometriche portano all'uso dell'arcsin: il processo che porta a una 'formula' diversa è di norma ignorato dagli studenti, insieme alla stessa formula. Sembra ancora esserci una mancanza di controllo dei vincoli che permettono l'uso di una data formula.

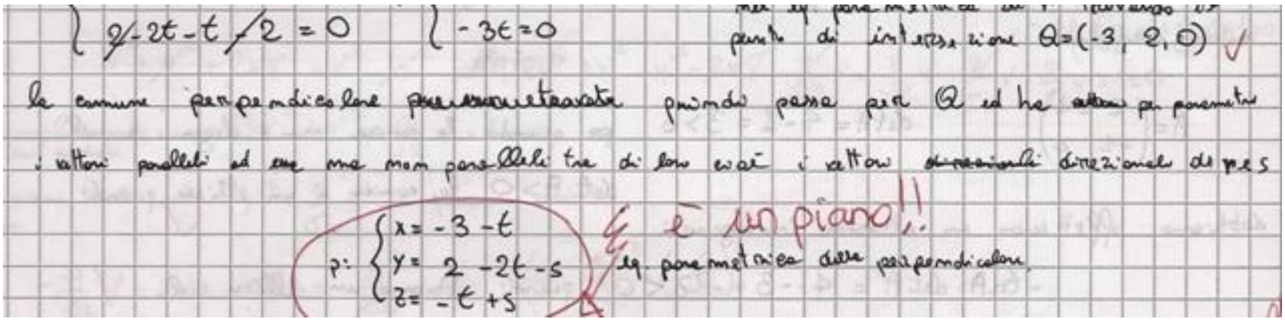

no

$\hat{rs} = \arccos \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \arccos \frac{(-1,3,-2)(0,3,-3)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} = \arccos \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{18}}$

no

Figura 4.2-92

Nella Figura 4.2-93 vediamo che lo studente dice di calcolare la comune perpendicolare a r e s che ha la caratteristica, a suo dire, di passare per il punto Q e di essere parallela ai vettori direzionali delle rette r e s: lo studente non sa che quello che ha detto non ha senso e che le equazioni che ha scritto sono le equazioni parametriche di un piano e non di una retta!



$\{ 2 - 2t - t/2 = 0 \quad \{ -3t = 0$ … punto di intersezione $Q=(-3, 2, 0)$ ✓

la comune perpendicolare parametrizzata quindi passa per Q ed ha come parametri i vettori paralleli ad essa ma non paralleli tra di loro cioè i vettori direzionali di r e s

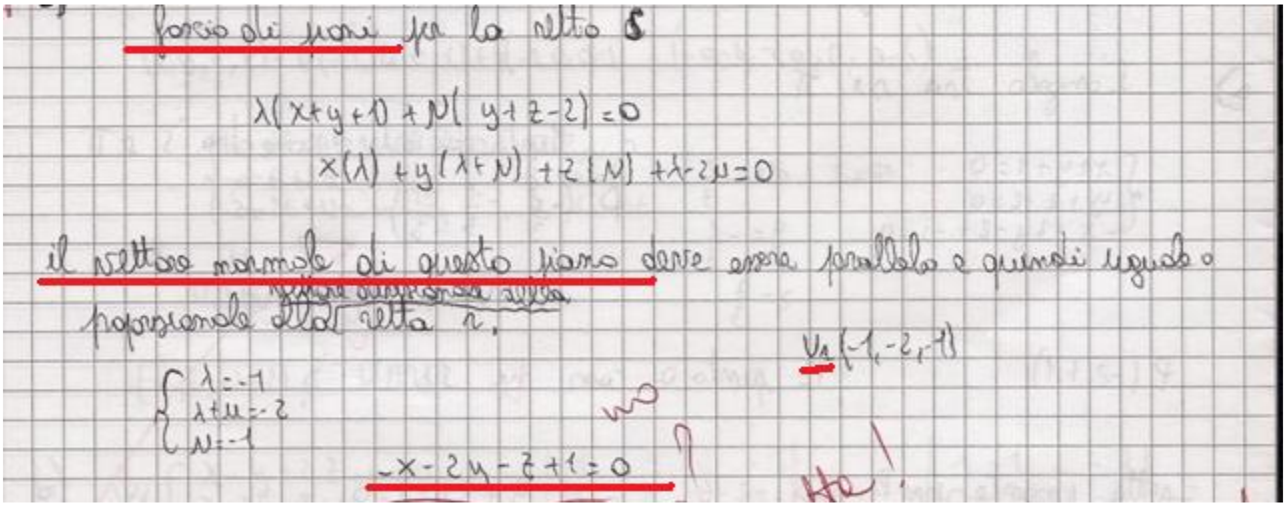
$$p: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 2 - 2t - s \\ z = -t + s \end{cases}$$

eq. parametrica della perpendicolare

È un piano!!

Figura 4.2-93

Analogamente, nel caso mostrato dallaFigura 4.2-94, al di là della correttezza o meno dei procedimenti usati, lo studente non si rende conto che quella che dà è l'equazione di un piano e non di una retta.



fascio di piani per la retta s

$$\lambda(x+y+1) + \mu(y+z-2) = 0$$

$$x(\lambda) + y(\lambda+\mu) + z(\mu) + \lambda - 2\mu = 0$$

il vettore normale di questo piano deve essere parallelo e quindi uguale o proporzionale alla retta r.

$v_r(-1,-2,-1)$

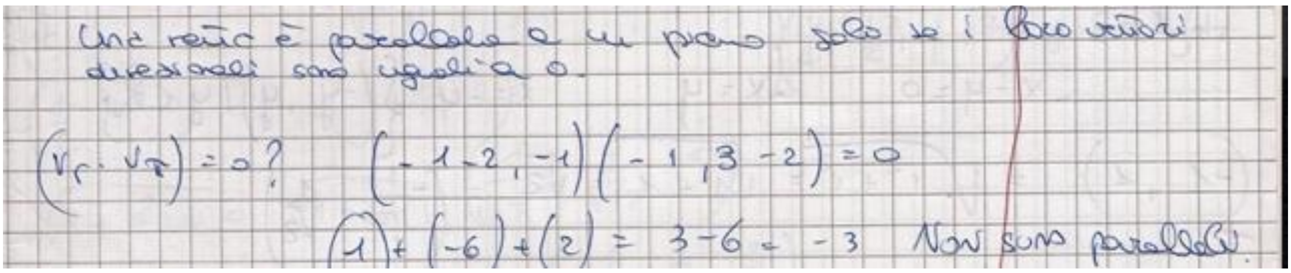
$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda + \mu = -2 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

$$-x - 2y - z + 1 = 0$$

no

Figura 4.2-94

Nella Figura 4.2-95, vediamo ancora un esempio di procedure corrette ma che non rispondono alla domanda: si chiede un piano per r parallelo a π e lo studente risponde sul parallelismo tra la retta r e il piano π!



Una retta è parallela a un piano solo se i loro vettori direzionali sono uguali a 0.

$(v_r \cdot v_\pi) = 0\,? \quad (-1, -2, -1)(-1, 3, -2) = 0$

$(1) + (-6) + (2) = 3 - 6 = -3$ Non sono paralleli.

Figura 4.2-95

Lo stesso accade nel caso della Figura 4.2-96: il problema non chiedeva com’è l’angolo tra la retta e il piano ma di calcolare l’angolo tra di loro – lo studente risponde ‘l’angolo non è retto ma esiste’.

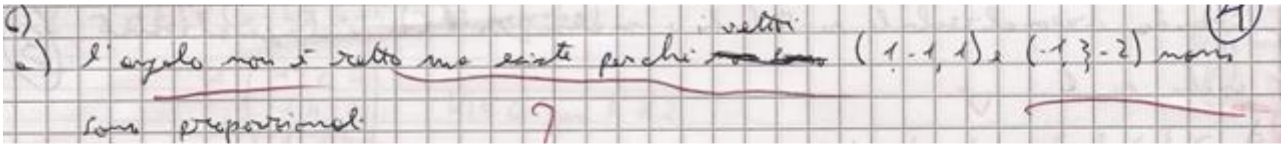


Figura 4.2-96

Errore simile nella Figura 4.2-97: era richiesto di calcolare l’angolo tra piano π e retta s, mentre lo studente calcola l’angolo tra retta r e s.

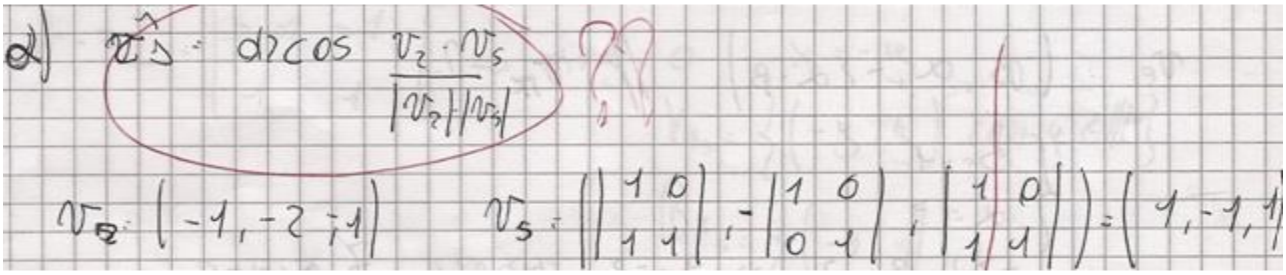
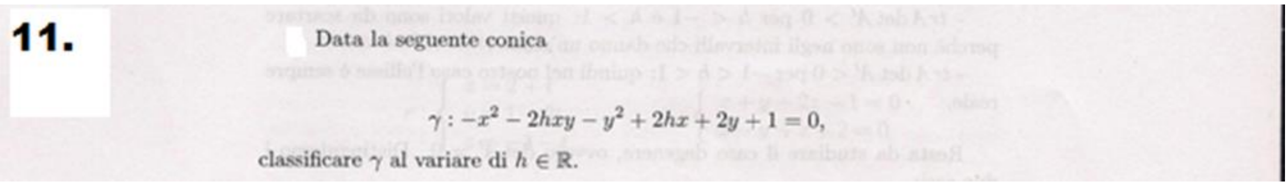


Figura 4.2-97

Passiamo a esaminare ancora un problema riguardante le coniche, nello specifico alla classificazione di una conica al variare di un parametro, mostrata nella figura seguente.



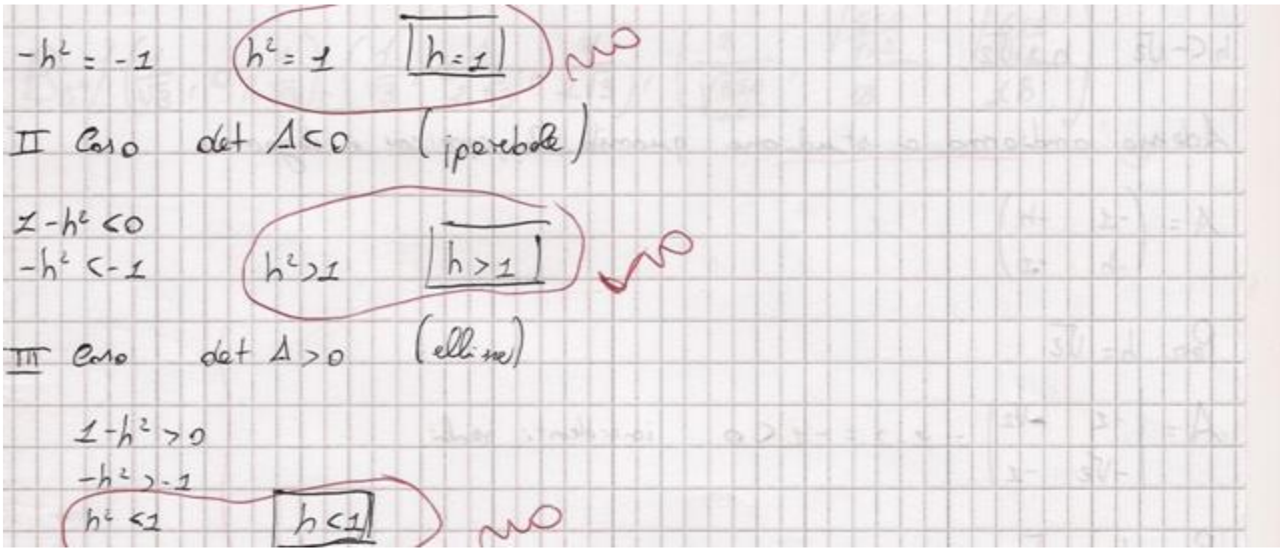
11. Data la seguente conica

$$\gamma : -x^2 - 2hxy - y^2 + 2hx + 2y + 1 = 0,$$

classificare γ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Figura 4.2-98

La Figura 4.2-99 mette a fuoco la tipologia di errore più comune in questo tipo di esercizi: la diffusa mancanza di competenza nella risoluzione di disequazioni, finanche le più semplici, com’è il caso di quelle mostrate in figura!



$-h^2 = -1$ $h^2 = 1$ $\boxed{h=1}$ no

II Caso $\det A < 0$ (iperbole)

$1-h^2<0$

$-h^2<-1$ $h^2>1$ $\boxed{h>1}$ no

III Caso $\det A>0$ (ellisse)

$1-h^2>0$

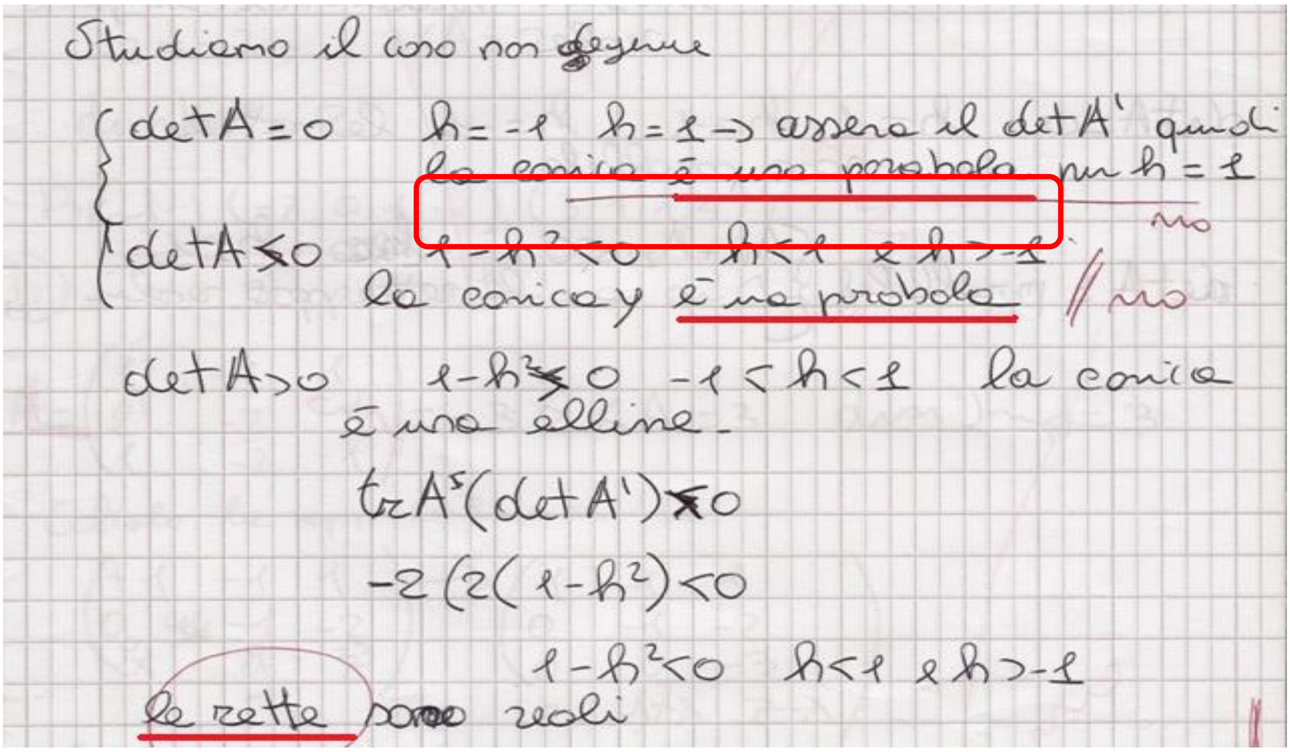
$-h^2>-1$

$h^2<1$ $\boxed{h<1}$ no

Figura 4.2-99

Nella Figura 4.2-100 vediamo che lo studente, pur sembrando inizialmente che – come da suoi conti precedenti – intendesse riferirsi a entrambi i valori di *h* quando scrive “-> azzera il det A’”, in realtà, si riferisce solo al valore di *h* più vicino al simbolo “->”. Successivamente, vediamo che non controlla di stare scrivendo ancora altri valori di *h* per la parabola, mentre manca il caso dell’iperbole. Inoltre, nella discussione della disequazione detA<0 viene ancora una volta a galla la difficoltà nella risoluzione delle disequazioni, e in questo caso della mancanza di consapevolezza del significato della scrittura ‘h<1 e h>-1’ rispetto a ‘h<-1 e h>1’.

Infine, nel discutere la realtà dell’ellisse, ancora una volta perde di vista su cosa sta ragionando e conclude parlando di “rette reali”!



Studiamo il caso non degenere

$\begin{cases} \det A = 0 & h = -1 \quad h = 1 \rightarrow \text{annulla il } \det A' \text{ quindi la conica è una parabola per } h = 1 \\ \det A < 0 & 1 - h^2 < 0 \quad h < 1 \text{ e } h > -1 \end{cases}$

la conica γ è una parabola // no

$\det A > 0 \quad 1 - h^2 > 0 \quad -1 < h < 1$ la conica è una ellisse.

$\operatorname{tr} A^s (\det A') < 0$

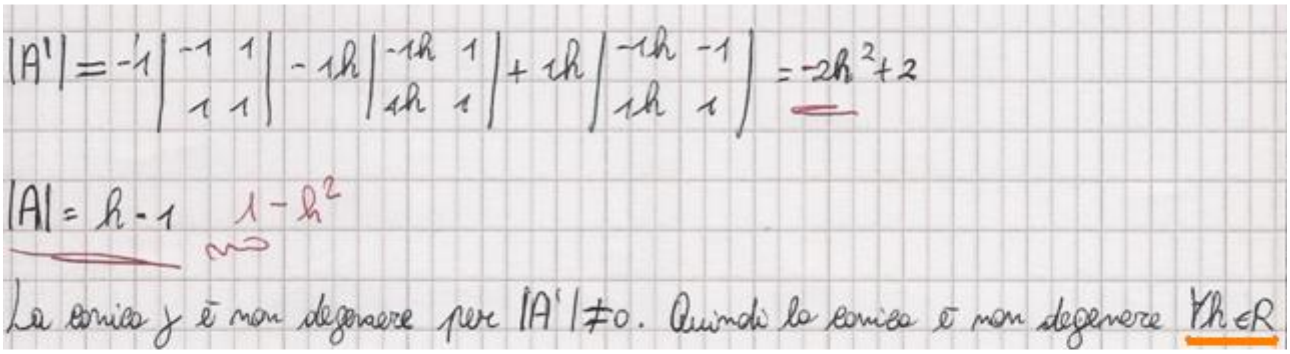
$-2(2(1 - h^2) < 0$

$1 - h^2 < 0 \quad h < 1 \text{ e } h > -1$

le rette sono reali

Figura 4.2-100

La Figura 4.2-101 mostra ancora una probabile difficoltà di risoluzione delle equazioni: per questo studente det A’ $\neq 0$ è $\forall\, h \in \mathbb{R}$.



$|A'| = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1h \begin{vmatrix} -1h & 1 \\ 1h & 1 \end{vmatrix} + 1h \begin{vmatrix} -1h & -1 \\ 1h & 1 \end{vmatrix} = -2h^2 + 2$

$|A| = h - 1 \quad 1 - h^2$ no

La conica γ è non degenere per $|A'| \neq 0$. Quindi la conica è non degenere $\forall h \in R$

Figura 4.2-101

4.3 Definizione di una classificazione delle difficoltà

Sulla base dell’analisi dei protocolli sopra vista, abbiamo dato una nostra classificazione delle difficoltà (Figura 4.3-1).

La classificazione fatta dipende da:

- Modello da scegliere: informazione/elaborazione, problem solving, etc;
- Natura della disciplina stessa e le caratteristiche dei vari settori della matematica (livello cognitivo e radici epistemologiche);

- Atteggiamenti e convinzioni degli studenti verso la matematica, chi lo fa l'errore (livelli metacognitivo e non cognitivo).

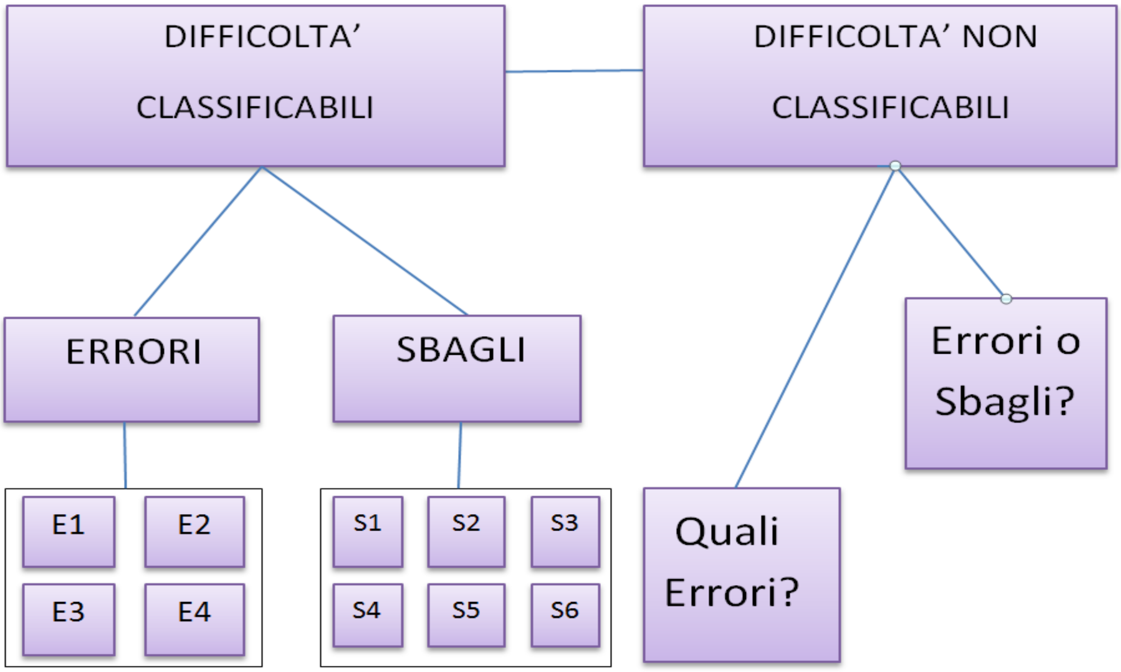


Figura 4.3-1

Per difficoltà classificabili intendiamo quegli errori di cui si conosce con certezza la loro paternità. Mentre nella difficoltà non classificabile, troviamo quegli errori della paternità incerta. Nella tipologia degli errori si riesce a vedere bene la natura degli argomenti matematici, soprattutto nel caso di E3. Mentre maggior parte degli sbagli ha a che fare con livello non cognitivo. Andiamo a vedere nei sottoparagrafi successivi il significato delle varie sigle che compaiono nella figura richiamata sopra.

4.3.1 Difficoltà classificabili

Abbiamo già detto che le difficoltà classificabili sono quelle di cui possiamo dire con certezza l'origine. Vediamo nel dettaglio.

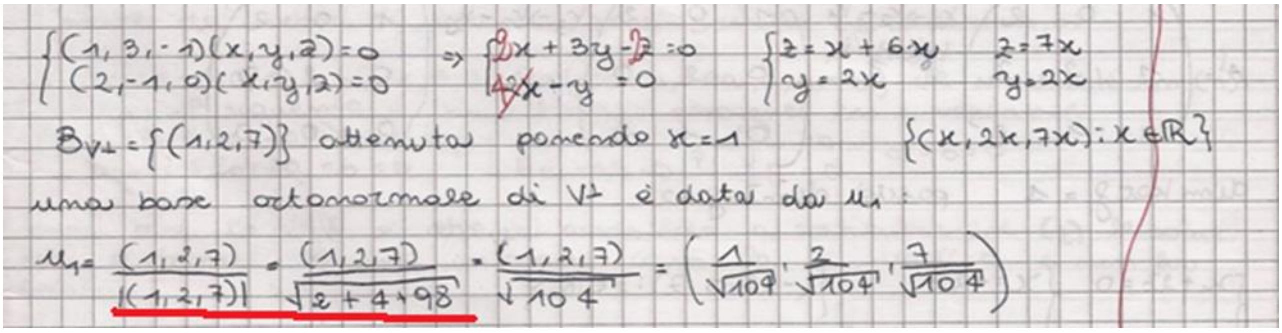
Classificazione degli errori

E1*)* L'uso inappropriato dei dati

Si tratta di associazione scorrete o rigidità nell'informazione/elaborazione dei requisiti/risposte causate dalla difficoltà nella:

Lettura: Lo studente non legge le parole chiave e i simboli nel testo delle domande.

Nella Figura 4.3-2 lo studente usa il prodotto scalare standard piuttosto che quello della struttura euclidea data (cfr. traccia Figura 4.2-16).


$\begin{cases}(1,3,-1)(x,y,z)=0\\(2,-1,0)(x,y,z)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+3y-z=0\\2x-y=0\end{cases}$ $\begin{cases}z=x+6x\\y=2x\end{cases}$ $z=7x$, $y=2x$

$B_{V^\perp}=\{(1,2,7)\}$ ottenuta ponendo $x=1$ $\{(x,2x,7x): x\in\mathbb{R}\}$

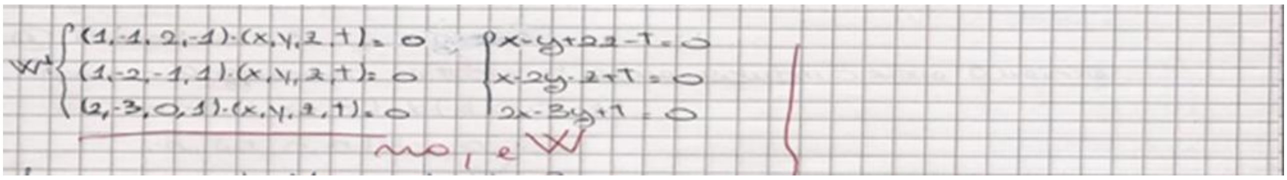
una base ortonormale di $V^\perp$ è data da u_1:

$u_1=\frac{(1,2,7)}{|(1,2,7)|}=\frac{(1,2,7)}{\sqrt{2+4+98}}=\frac{(1,2,7)}{\sqrt{104}}=\left(\frac{1}{\sqrt{104}},\frac{2}{\sqrt{104}},\frac{7}{\sqrt{104}}\right)$

Figura 4.3-2

Decodifica: Lo studente non capisce il significato delle parole, dei simboli e del testo delle domande.

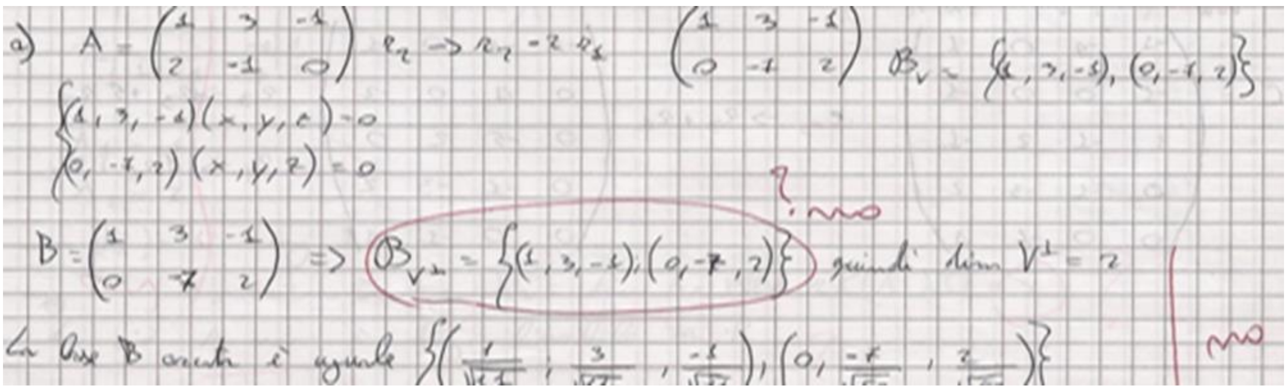
Nella Figura 4.3-3 lo studente non si rende conto che quello che ha scritto è esattamente la stessa cosa che è data nella traccia perché non ha chiaro né il significato del sottospazio W e $W^\perp$ né quello di rappresentazione cartesiana di un sottospazio (cfr. traccia Figura 4.2-1).


$W^\perp\begin{cases}(1,-1,2,-1)\cdot(x,y,z,t)=0\\(1,-2,-1,1)\cdot(x,y,z,t)=0\\(2,-3,0,1)\cdot(x,y,z,t)=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+2z-t=0\\x-2y-z+t=0\\2x-3y+t=0\end{cases}$

no, è W

Figura 4.3-3

Nella Figura 4.3-4 ha chiaro il significato del $V^\perp$ e lavora sui generatori di V come se fossero generatori di $V^\perp$ (cf. traccia Figura 4.2-16).


a) $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ $R_2\to R_2-2R_1$ $\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&2\end{pmatrix}$ $B_V=\{(1,3,-1),(0,-7,2)\}$

$\begin{cases}(1,3,-1)(x,y,z)=0\\(0,-7,2)(x,y,z)=0\end{cases}$

?, no

$B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&2\end{pmatrix}\Rightarrow B_{V^\perp}=\{(1,3,-1),(0,-7,2)\}$ quindi dim $V^\perp=2$

La base B [illegible] è uguale $\{(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}}),(0,\frac{-7}{[illegible]},\frac{2}{[illegible]})\}$

no

Figura 4.3-4

E2) Le carenze a livello linguistico

Lo studente non comprende, non trasforma le risorse matematiche dal testo verbale ai simboli e viceversa, ha cioè difficoltà nella gestione dei segni (*semiotica*).

Ad es. lo studente non comprende l'equivalenza tra varie rappresentazioni semiotiche (formule, grafici, tabelle, iconiche …) sia per difficoltà di tipo *sintattico* (rapporti e combinazioni dei simboli tra loro) che *semantico* (significato di parole, simboli, frasi e testo).

Nella Figura 4.3-5 lo studente parla di intersezione vuota come equivalente di intersezione formata da solo vettore nullo.

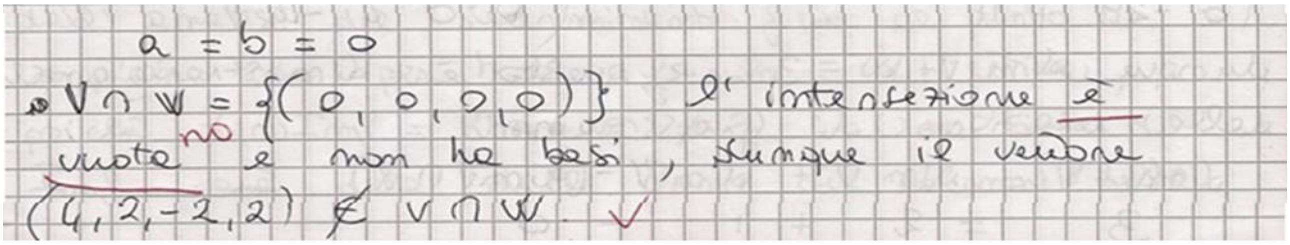


Figura 4.3-5

Nella Figura 4.3-6 lo studente si esprime male sia verbalmente (ℝ è un sottoinsieme di ℂ) sia simbolicamente (R ⊆ C).

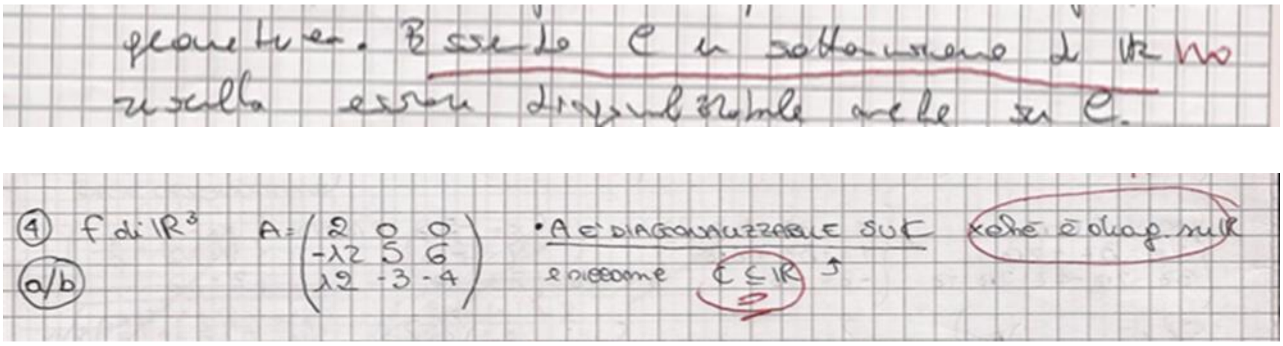


Figura 4.3-6

Nella Figura 4.3-7 lo studente parla di "basi" di V intendendo "vettori di una base".

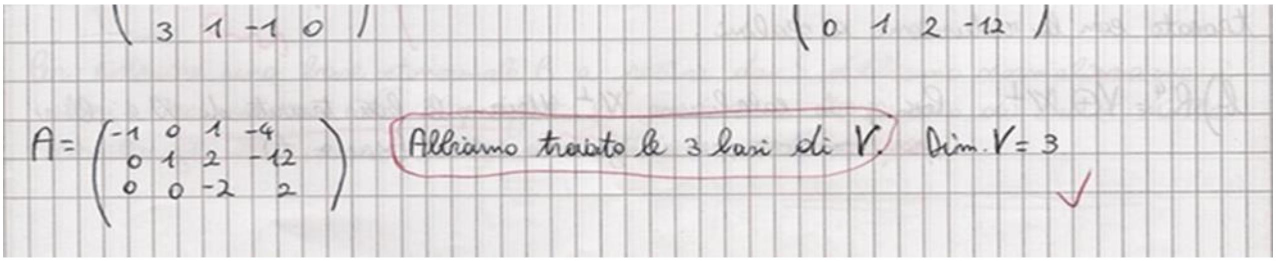


Figura 4.3-7

E3) Le carenze a livello di conoscenze e capacità.

Sono mancanze che possono essere causate da:

a) Lacune di base: ad es. la risoluzione di un'equazione di terzo grado (Figura 4.3-8, cfr. quanto discusso approfonditamente per la Figura 4.2-64).

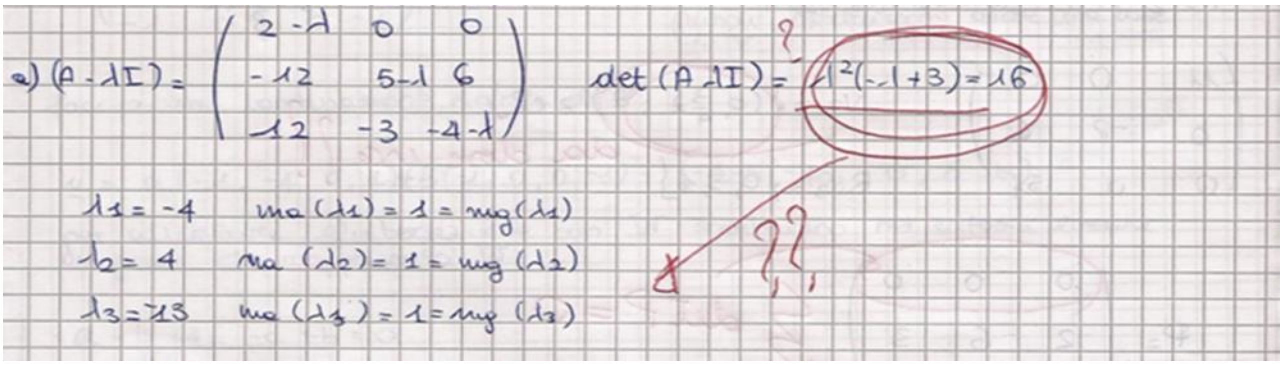


Figura 4.3-8

b) Mancanza di nodi concettuali richiesti, quali:

- *Definizioni*

  Nella Figura 4.3-9 vediamo due casi in cui uno studente fa il determinante di una matrice non quadrata!

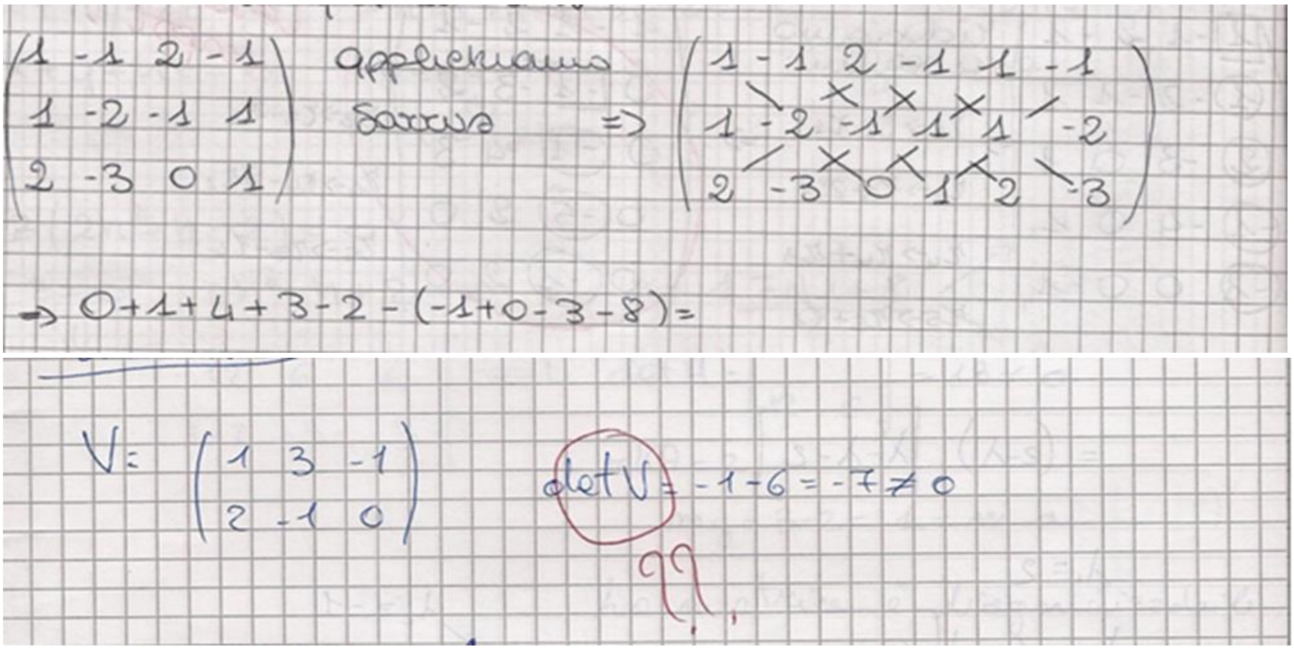


Figura 4.3-9

- *Proposizione e le loro proprietà*

  Nella Figura 4.3-10 lo studente parla di vettore normale a una retta mentre ne calcola (male!) quello direzionale (cfr. Figura 4.2-90 per discussione approfondita).

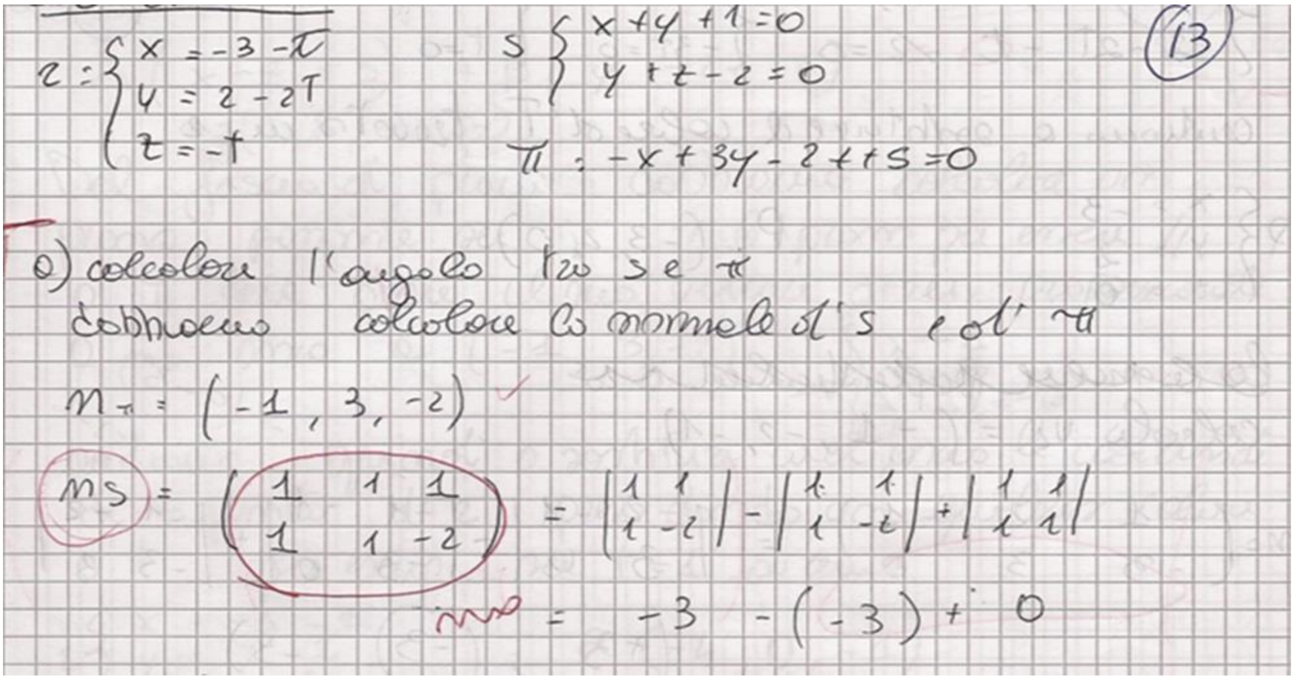


Figura 4.3-10

- *Osservazioni*

  Nella Figura 4.3-11 lo studente trova il rango di una matrice maggiore del minimo tra il numero delle righe e colonne della matrice.

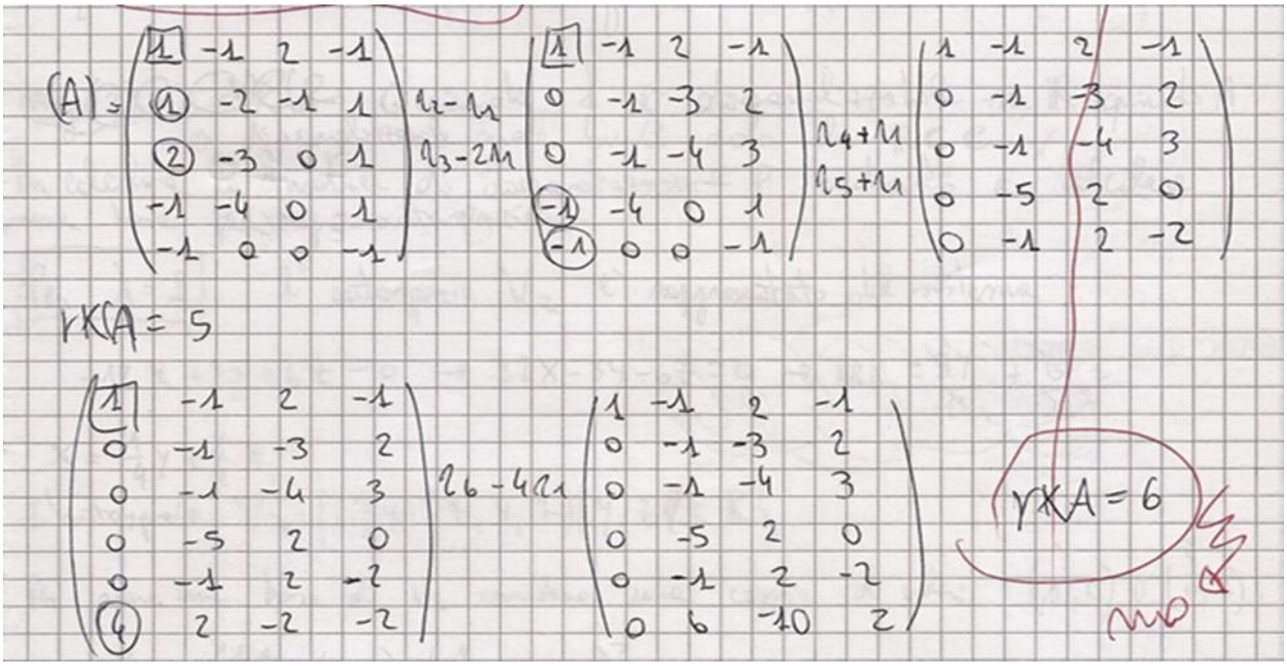


Figura 4.3-11

- *Teoremi*

Nella Figura 4.3-12 lo studente sembra lavorare come se non conoscesse i teoremi di Rouchè – Capelli e il secondo teorema di unicità, (cfr. traccia Figura 4.2-37) e le condizioni per la loro applicabilità.

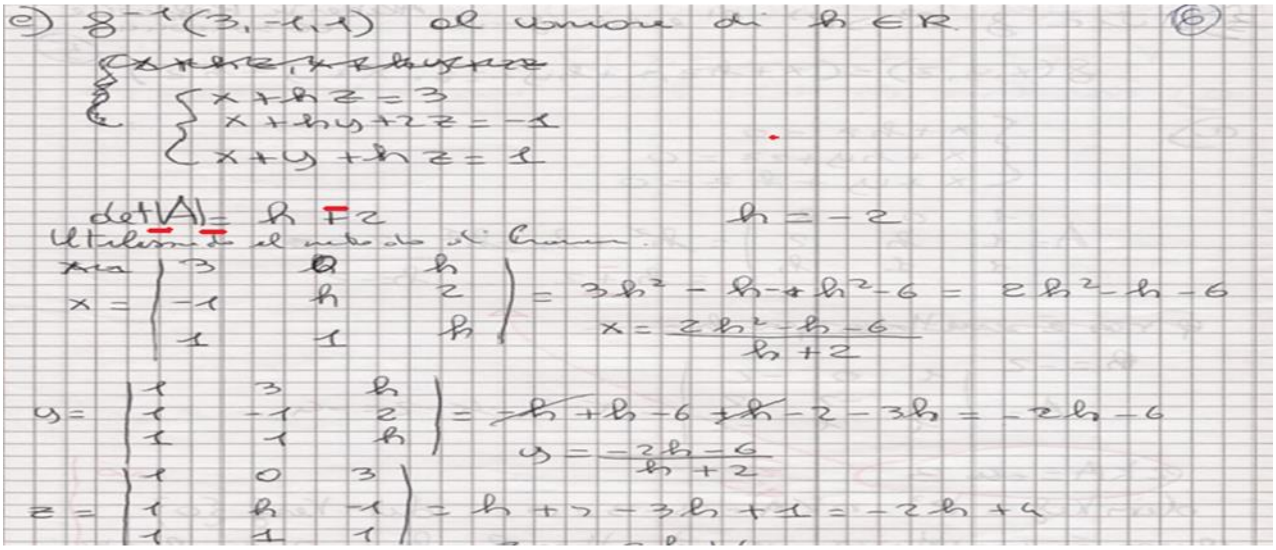


Figura 4.3-12

- *Algoritmi*

  Nella Figura 4.3-13 lo studente termina l'algoritmo quando arriva alla forma a scalini e non a quella a scalini ridotta.

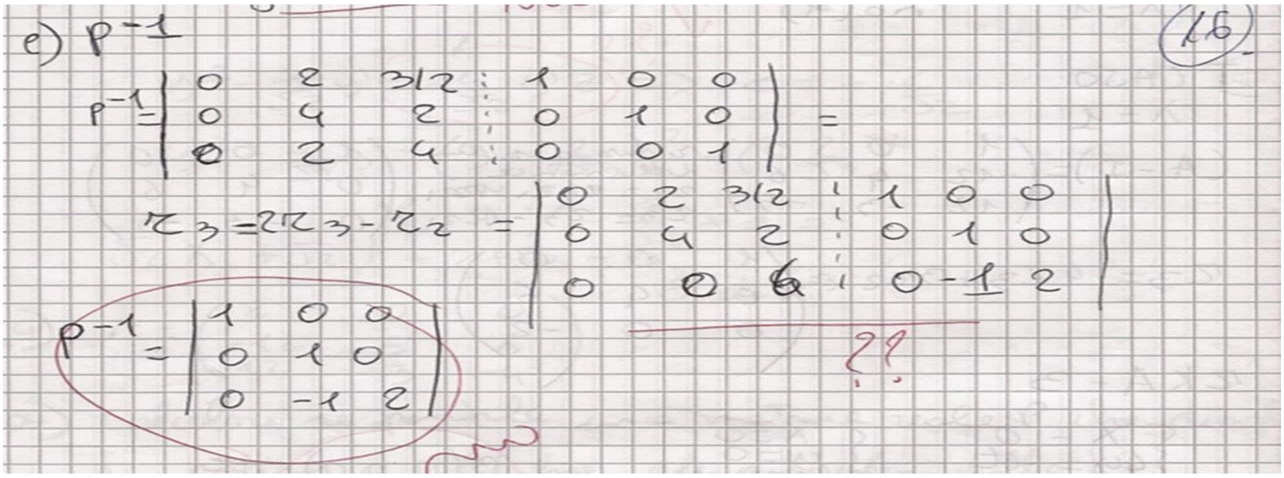


Figura 4.3-13

- *Procedure*

  Nella Figura 4.3-14 vediamo che lo studente fa un po' di calcoli per il segno del determinante della matrice A (forma quadratica) senza vedere prima il determinante della matrice associato alla conica (cfr. traccia Figura 4.2-98).

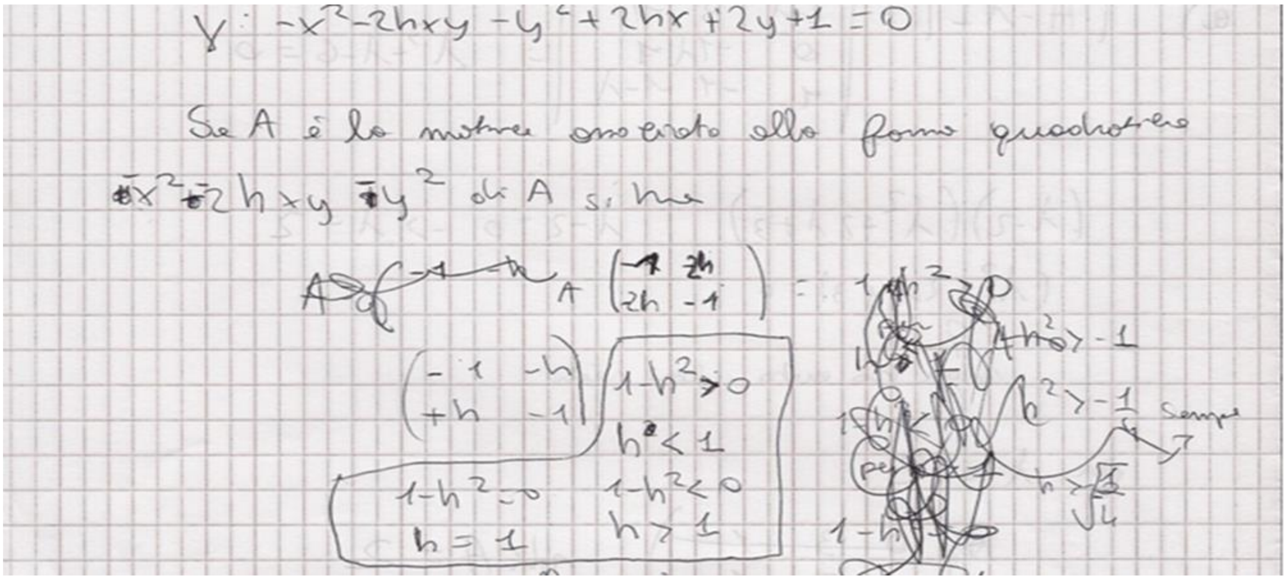


Figura 4.3-14

- *Altre, errori causati da più di un motivo*

  Nella Figura 4.3-15 vediamo un esempio, dove troviamo lacune di base (risolvere l’equazione di secondo o terzo grado), mancanza di conoscenza di proposizioni (caratterizzazione autovalori e autospazio), definizioni (matrice invertibile, determinante di una matrice, base di uno spazio vettoriale, matrice diagonalizzabile), teoremi (invertibilità di una matrice), etc. (cfr. traccia Figura 4.2-51).

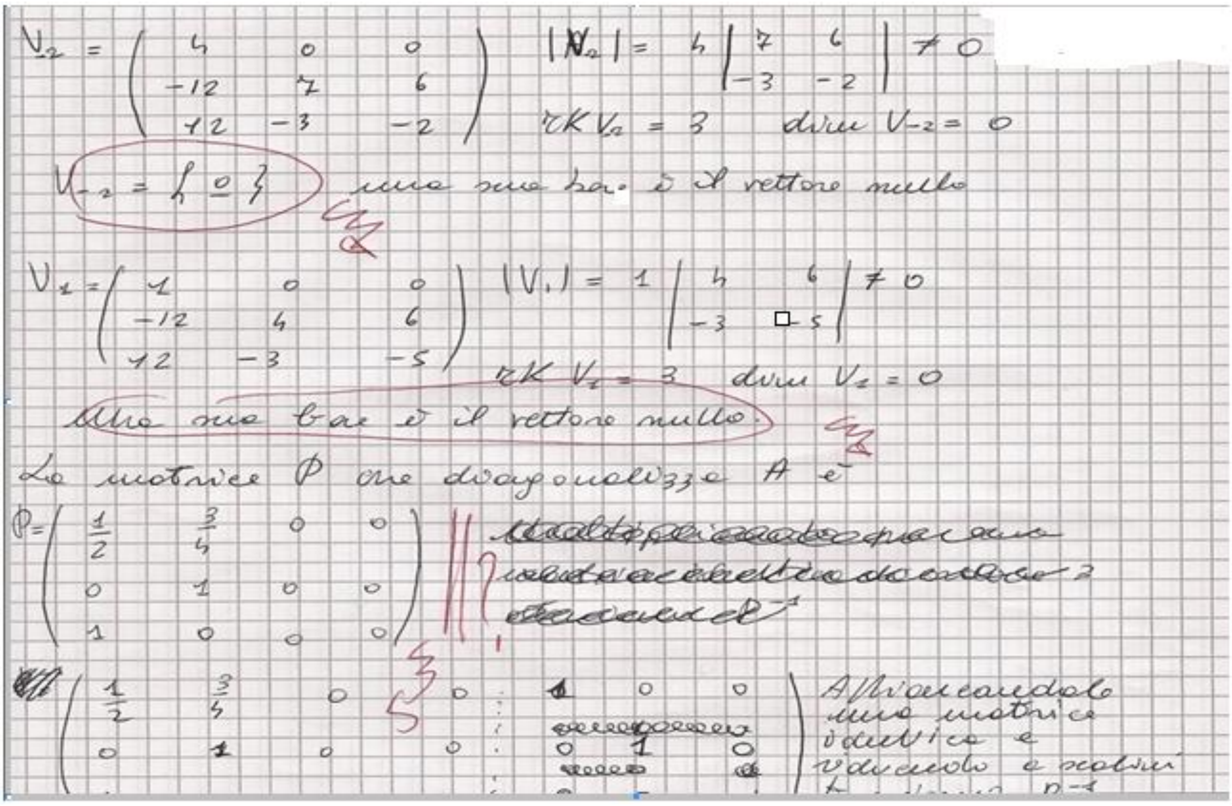


Figura 4.3-15

E4) Deduzione logicamente scorretta.

Si tratta di errori che sono causati dall'applicazione di regole o strategie inadeguate.

Ad es. nella Figura 4.3-16 utilizza il teorema spettrale al posto del teorema di caratterizzazione principale della diagonalizzazione (cfr. traccia Figura 4.2-69).

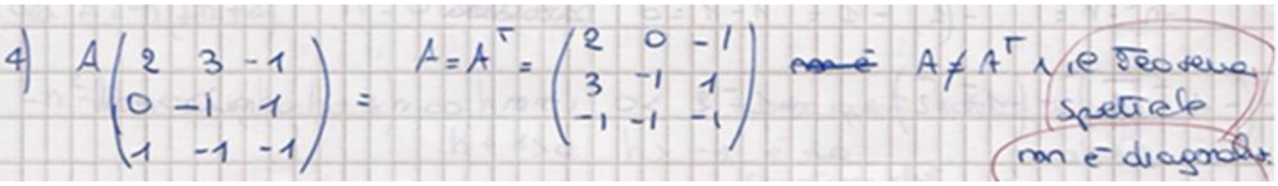


Figura 4.3-16

Classificazione degli sbagli.

S1. Mancanza di controllo e feedback

Si tratta di casi in cui lo studente ad es. non esplicita passo per passo cosa sta facendo per risolvere il problema (es. Figura 4.3-17 – lo studente non spiega cosa sta facendo e dunque perché S non ha vettori linearmente dipendenti) o non fa verifiche sui concetti e soluzioni. In altri casi, lo studente non riporta in bella i conti e i passi dimostrati, ma scrive solo il risultato finale (es. Figura 4.3-19, cfr. traccia Figura 4.2-51) o al contrario riporta conti evidenti che possono essere tralasciati (es. Figura 4.3-20 – lo studente va a fare il calcolo del determinante di una matrice relativa a un autovalore, che deve necessariamente essere nullo, cfr. Figura 4.2-51). In altri casi ancora, lo studente non dà alcuna spiegazione verbale (es. Figura 4.3-18 – lo studente non spiega cosa rappresenta quella matrice, cfr. traccia Figura 4.2-1).

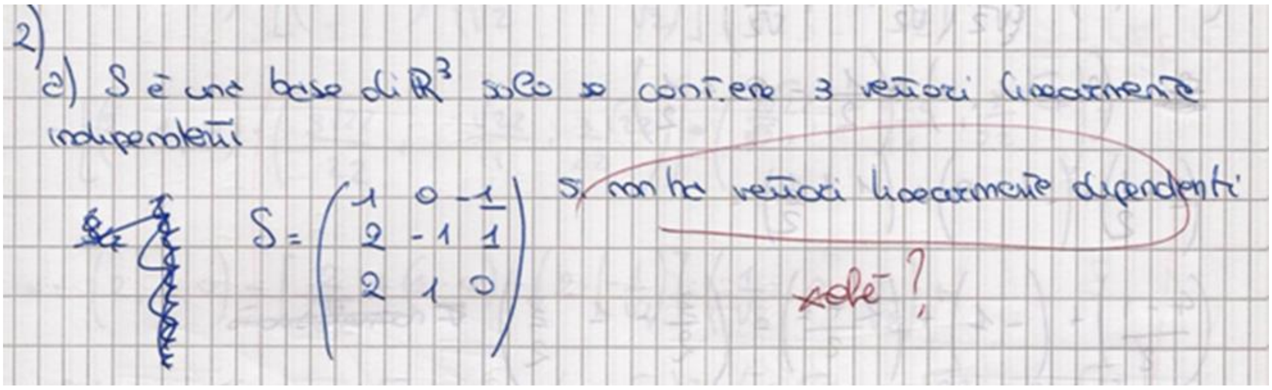


Figura 4.3-17

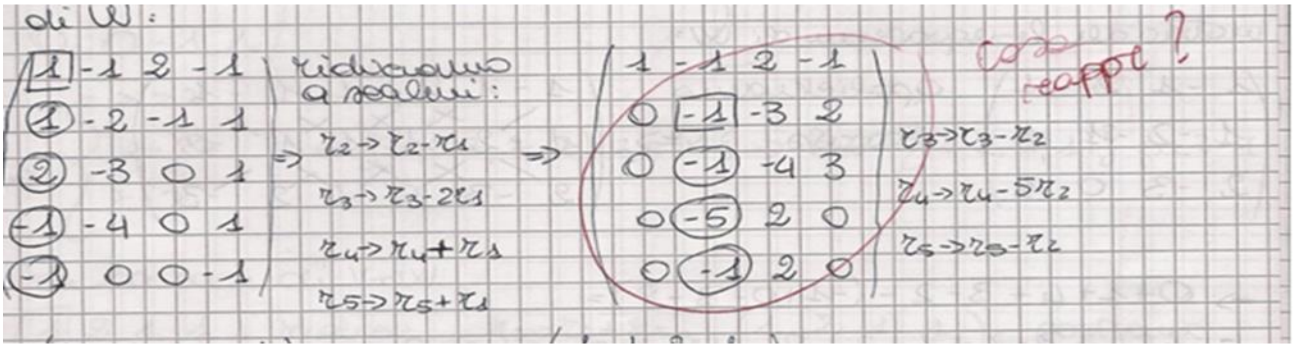


Figura 4.3-18

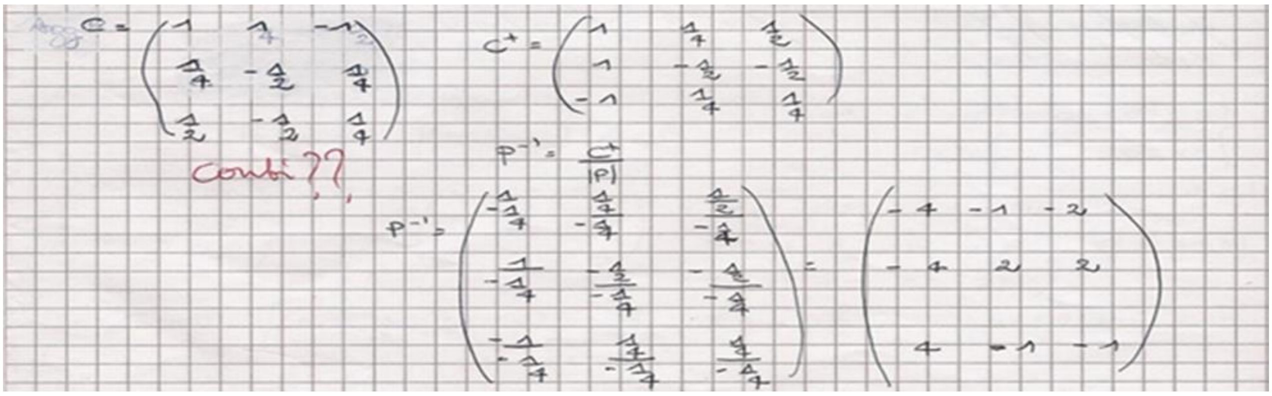


Figura 4.3-19

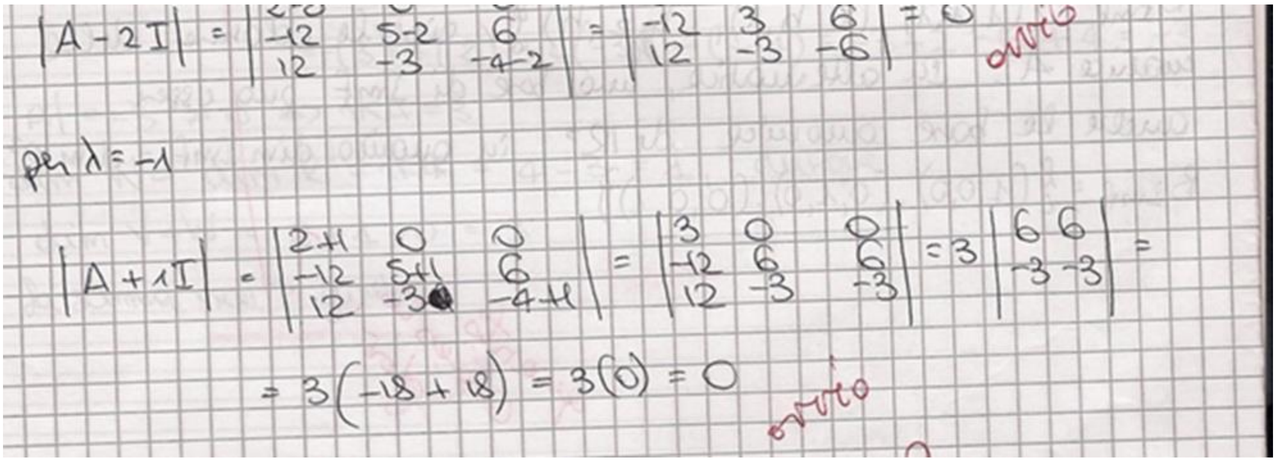


Figura 4.3-20

S2. Sbagli tecnici

Si tratta di calcolo scorretto (aggiunge, sottrae, moltiplica e divide) o di segni usati in maniera inadeguata (parentesi, simboli, lettere, segno al posto di un altro etc.).

Nella Figura 4.3-21 lo studente usa i puntini sospensivi perché non ricorda il nome di Grassmann.

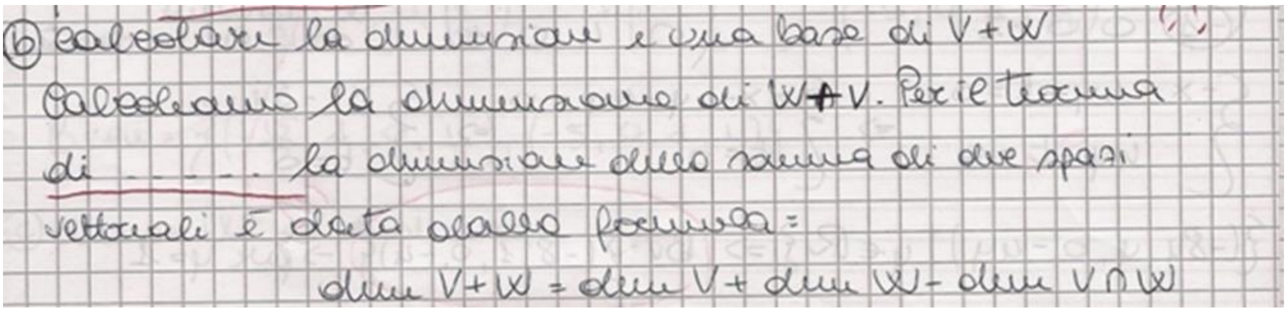


Figura 4.3-21

Nella Figura 4.3-22 lo studente scrive la lettera ‘B’ al posto della lettera ‘V’.

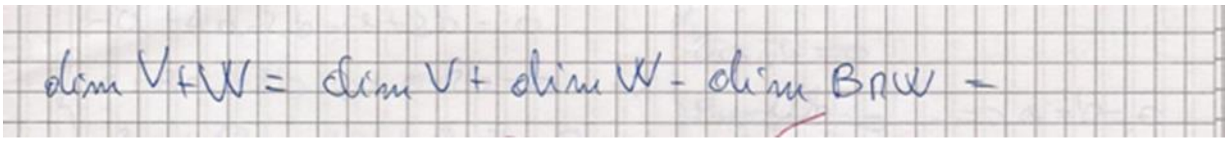


Figura 4.3-22

Nella Figura 4.3-23 lo studente scrive ‘,’ al posto di ‘+’ e usa doppia parentesi che non serve.

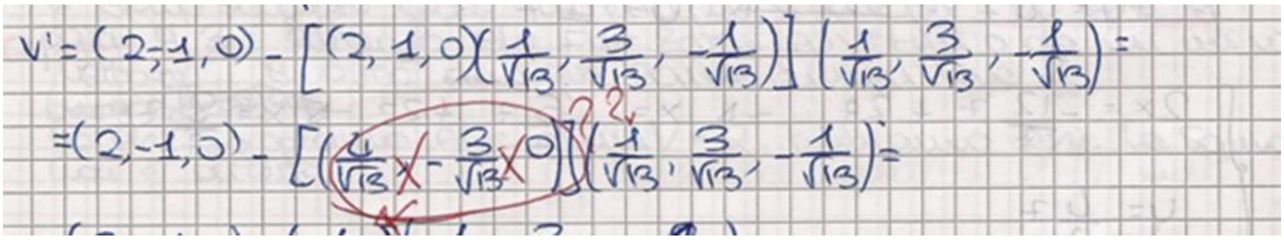


Figura 4.3-23

Nella Figura 4.3-24 lo studente confonde $\in$ con $\supseteq$.

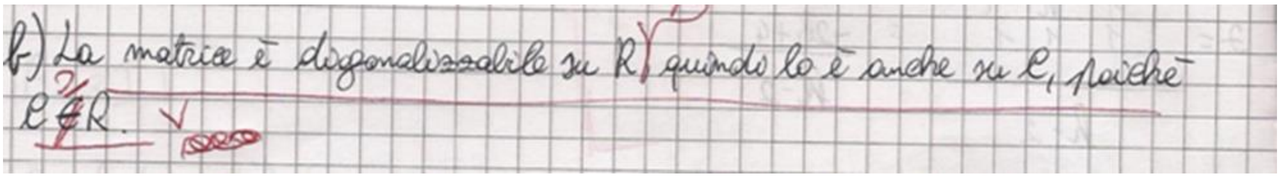


Figura 4.3-24

Nella Figura 4.3-25 lo studente usa il simbolo di prodotto vettoriale ‘x’ al posto di quello del prodotto scalare ‘·’.

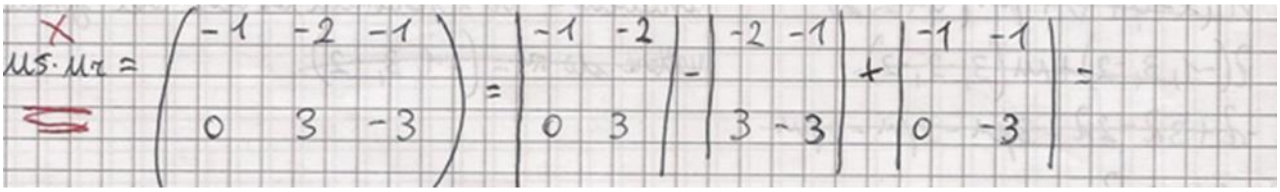


Figura 4.3-25

Nella Figura 4.3-26 lo studente usa ‘=’ al posto ‘≈’ (fa 2a - 2b = a – b).

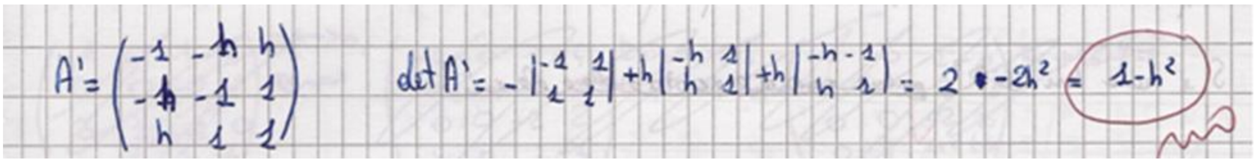
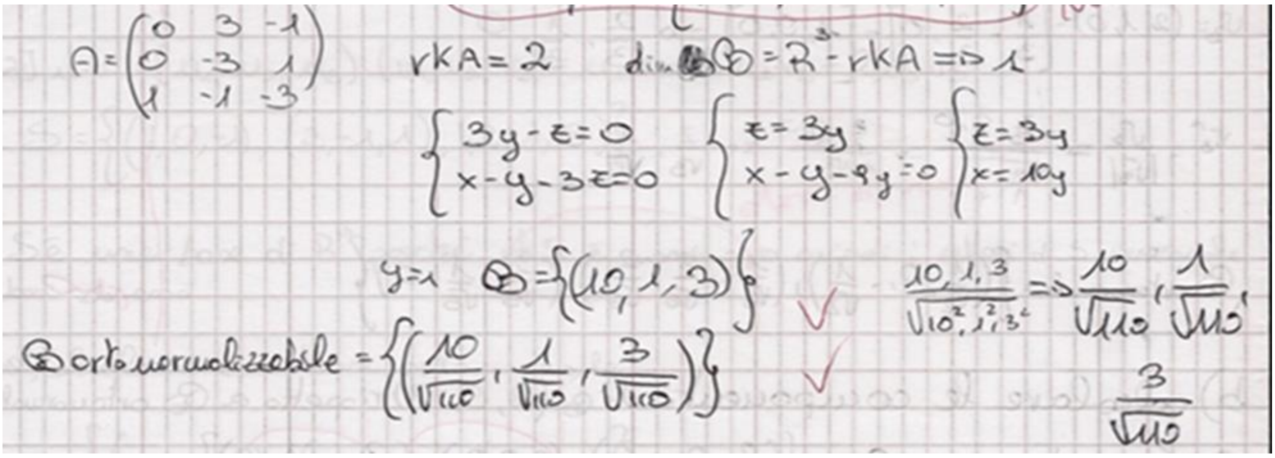


Figura 4.3-26

S3. “Error factors” di Harlow:

Si tratta di quei casi in cui lo studente sembra svolgere in modo completamente corretto un problema, sia nelle procedure sia nelle conclusioni, peccato che risolva un problema diverso da quello richiesto! Nella Figura 4.3-27 lo studente calcola una base ortonormale dell’autospazio V_2 mentre era richiesta semplicemente una base (cfr. traccia Figura 4.2-69).



$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix} \quad rkA = 2 \quad \dim B = 3 - rkA \Rightarrow 1$$

$$\begin{cases}3y - z = 0\\ x - y - 3z = 0\end{cases} \quad \begin{cases}z = 3y\\ x - y - 9y = 0\end{cases} \quad \begin{cases}z = 3y\\ x = 10y\end{cases}$$

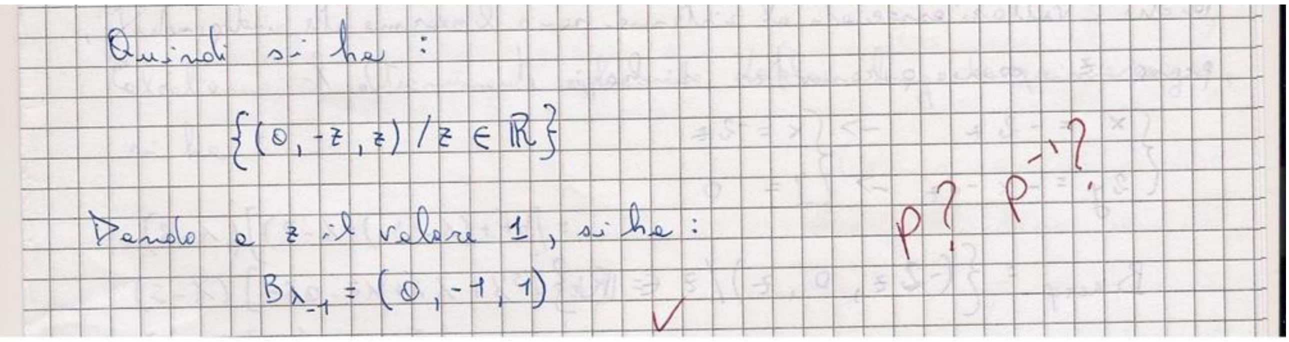
$$y = 1 \quad B = \{(10, 1, 3)\} \quad \frac{10, 1, 3}{\sqrt{10^2, 1^2, 3^2}} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{110}}, \frac{1}{\sqrt{110}}, \frac{3}{\sqrt{110}}$$

$$B \text{ orto normalizzabile} = \left\{\left(\frac{10}{\sqrt{110}}, \frac{1}{\sqrt{110}}, \frac{3}{\sqrt{110}}\right)\right\}$$

Figura 4.3-27

S4. Rinunciano a priori ad affrontare i problemi relativi ad alcune aree del programma

Sono quei casi in cui lo studente non svolge alcuni problemi i quesiti, o li lascia incompleti, com'è il caso della Figura 4.3-28 dove lo studente manca il calcolo della matrice di diagonalizzazione e della sua inversa (cfr. traccia Figura 4.2-51).



Quindi si ha:

$$\{(0, -z, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

Dando a z il valore 1, si ha:

$$B_{\lambda_{-1}} = (0, -1, 1)$$

P? P^{-1}?

Figura 4.3-28

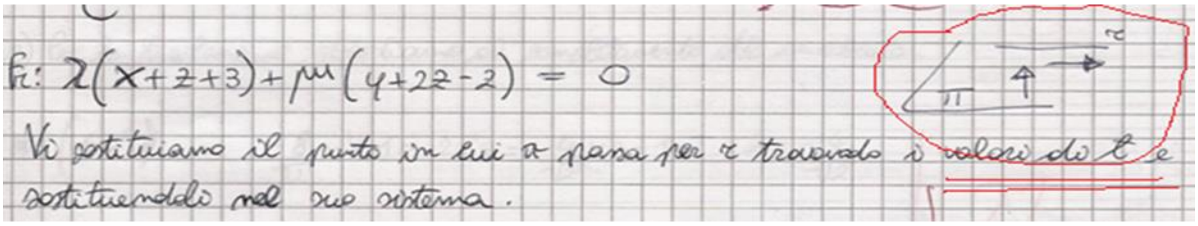
S5. Problematiche di codifica

Si tratta di omissioni come ad es. lo studente non numera le pagine, non scrive il nome nei loro protocolli, non ordinano le risposte alle domande (es. risposta del quesito b) al posto di a) oppure del problema 2) al posto del problema 1)), risolve il quesito b) prima di a) anche quando sono collegati e la risoluzione di a) facilita quella di b).

S6. Non saper valutare a priori la difficoltà di un problema

Si tratta di casi in cui lo studente ha difficoltà nella scelta dei metodi più facili per la risoluzione del problema, non riesce a valutare il tempo necessario per risolvere il problema, non sa fare una figura che possa essere di aiuto nella risoluzione dei problemi e nella scelta di strategie nel problem solving.

Nella Figura 4.3-29 vediamo che lo studente, per calcolare un piano parallelo ad *r*, va a scrivere il fascio per *r* (cfr. traccia Figura 4.2-89). Per la condizione di parallelismo avrebbe potuto essere di aiuto una figura come quella cerchiata in rosso.

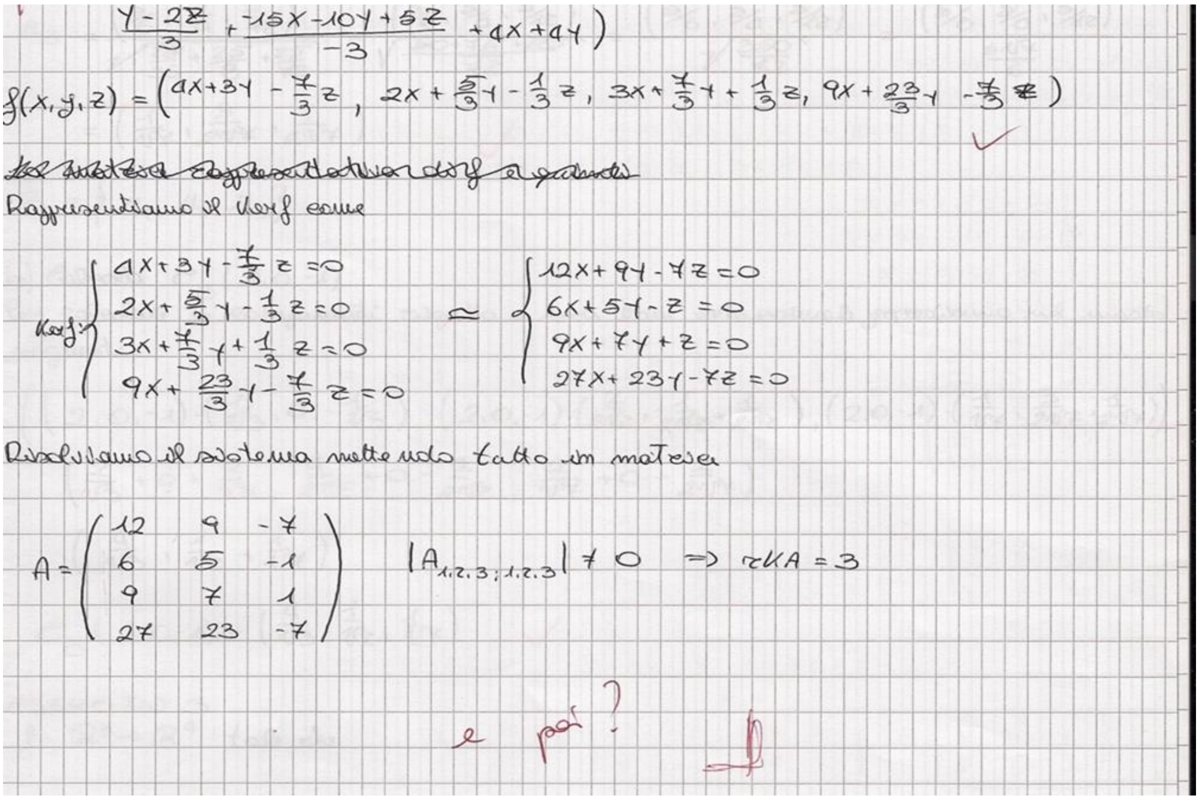


$F: \lambda(x+z+3)+\mu(y+2z-2) = 0$

Vi sostituiamo il punto in cui π passa per r trovando i valori di t e sostituendolo nel suo sistema.

Figura 4.3-29

Nella Figura 4.3-30 vediamo un esercizio incompleto: probabilmente lo studente non ha saputo valutare a priori la difficolta nella scelta dei modi nella risoluzione dei problemi e il tempo necessario per risolvere (cfr. traccia Figura 4.2-66). Per il calcolo del ker *f*, invece di usare una matrice di rappresentazione non canonica, lo studente calcola prima il prolungamento lineare di *f* da cui poi imposta il sistema lineare omogeneo di 4 equazioni e 3 incognite corrispondente a ker *f*, che lascia irrisolto.



$\frac{y-2z}{3} + \frac{-15x-10y+5z}{-3} + 4x + 4y)$

$f(x,y,z) = \left(4x+3y-\frac{7}{3}z,\ 2x+\frac{5}{3}y-\frac{1}{3}z,\ 3x+\frac{7}{3}y+\frac{1}{3}z,\ 9x+\frac{23}{3}y-\frac{7}{3}z\right)$

Rappresentiamo il ker f come

$$\ker f: \begin{cases} 4x+3y-\frac{7}{3}z=0 \\ 2x+\frac{5}{3}y-\frac{1}{3}z=0 \\ 3x+\frac{7}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \\ 9x+\frac{23}{3}y-\frac{7}{3}z=0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 12x+9y-7z=0 \\ 6x+5y-z=0 \\ 9x+7y+z=0 \\ 27x+23y-7z=0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema mettendo tutto in matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -7 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 7 & 1 \\ 27 & 23 & -7 \end{pmatrix} \quad |A_{1,2,3;1,2,3}| \neq 0 \Rightarrow rkA = 3$$

e poi?

Figura 4.3-30

4.3.2 Difficoltà non classificabili

Andiamo ora a vedere alcuni esempi di protocolli in cui non si riesce a stabilire con certezza se si tratti di errore o sbaglio o di che tipo di errore, si tratta.

Nel caso della Figura 4.3-31 siamo davanti a un errore tipo **E3**/*carenze di proposizioni* (ovvero non sa che la dimensione di un sottospazio vettoriale è un numero) o a uno sbaglio tipo **S2**/*sbaglio tecnico* (cioè, scrive le parentesi che non servono)?

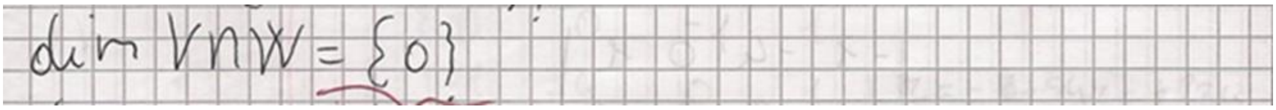

$\dim V \cap W = \{0\}$

Figura 4.3-31

Nel caso della Figura 4.3-32 si tratta di un errore tipo **E3**/*carenze di proposizioni* (ovvero non sa applicare correttamente la relazione di Grassmann) oppure di uno sbaglio tipo **S2**/*sbaglio tecnico* (cioè, dimentica di scrivere'⊥').

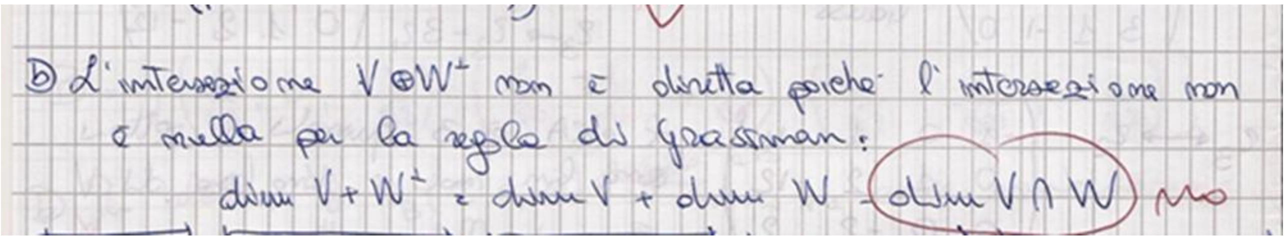

b) L'intersezione $V \oplus W^{\perp}$ non è diretta poiché l'intersezione non è nulla per la regola di Grassman:
$\dim V + W^{\perp} = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$ no

Figura 4.3-32

Nel caso della Figura 4.3-33 (cfr. traccia Figura 4.2-89), si tratta di un errore tipo **E3**/*carenze di definizione* (ovvero, angolo tra la retta e il piano) oppure di uno sbaglio tipo **S2**/*sbaglio tecnico* (cioè, scrive 'arccos' al posto di 'arcsin')?

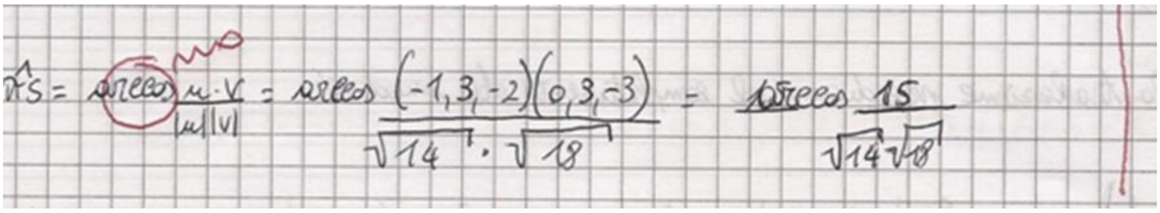

no
$\hat{rs} = \arccos \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \arccos \frac{(-1,3,-2)(0,3,-3)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} = \arccos \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{18}}$

Figura 4.3-33

Nella Figura 4.3-34 (cfr. traccia Figura 4.2-16), si tratta di errore tipo **E1**/*lettura* (non legge nella domanda $V^{\perp}$ ma legge V) oppure di errore tipo **E3**/*mancanze di algoritmi* (non sa calcolare una base ortonormale di $V^{\perp}$)?

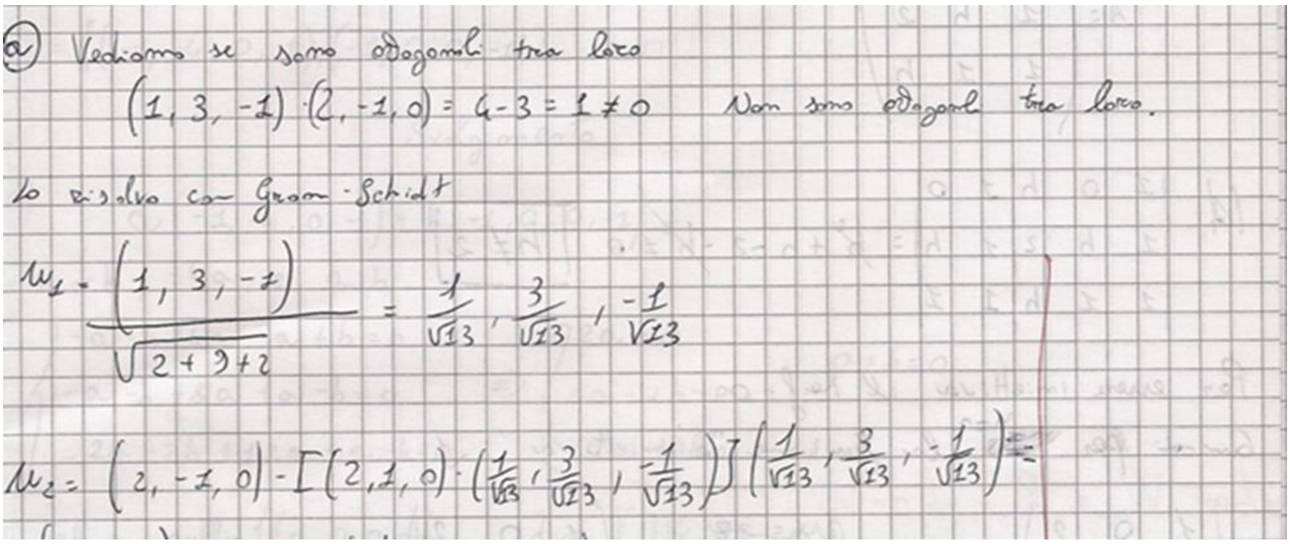

a) Vediamo se sono ortogonali tra loro
$(1,3,-1)\cdot(2,-1,0) = 6-3 = 1 \neq 0$ Non sono ortogonali tra loro.
lo risolvo con Gram-Schmidt
$w_1 = \frac{(1,3,-1)}{\sqrt{2+9+2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}}$
$w_2 = (2,-1,0) - [(2,1,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}})](\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}}) =$

Figura 4.3-34

4.4 Analisi quantitativa delle difficoltà

Abbiamo esaminato gli elaborati di circa 100 studenti alla luce della classificazione sopra fatta. Abbiamo individuato 787 difficoltà, di cui 738 (93,5%) classificabili e 49 (6,5%) non classificabili (Figura 4.4-1).

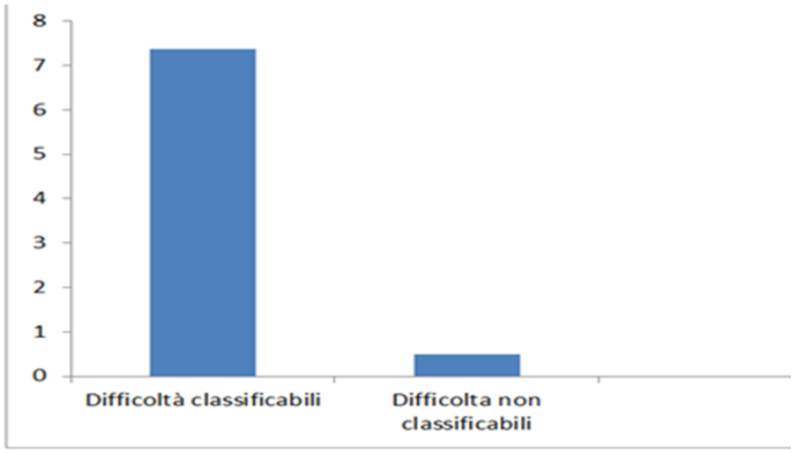


Figura 4.4-1

Delle difficoltà classificabili, 608 (82,3%) sono errori e 130 (17,7%) sbagli (Figura 4.4-2).

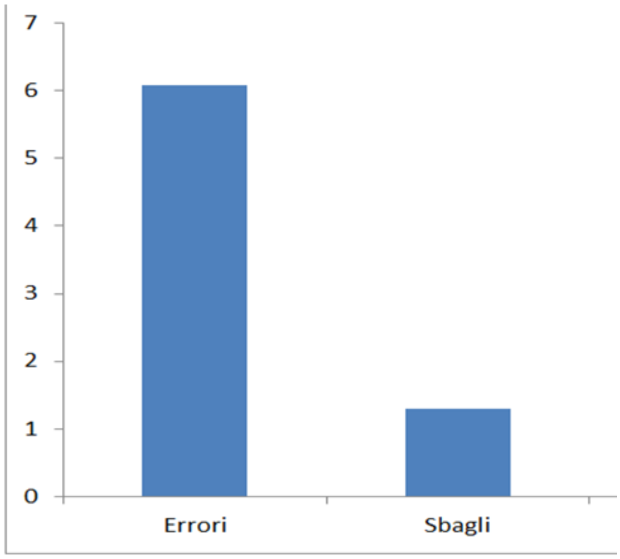


Figura 4.4-2

Gli errori sono distribuiti come in Figura 4.4-3: su 608 errori ci sono 70 (11,5%) di tipologia E1, 49 (8%) di tipologia E2, 372 (61%) di tipologia E3 e 117 (19,5%) di tipologia E4.

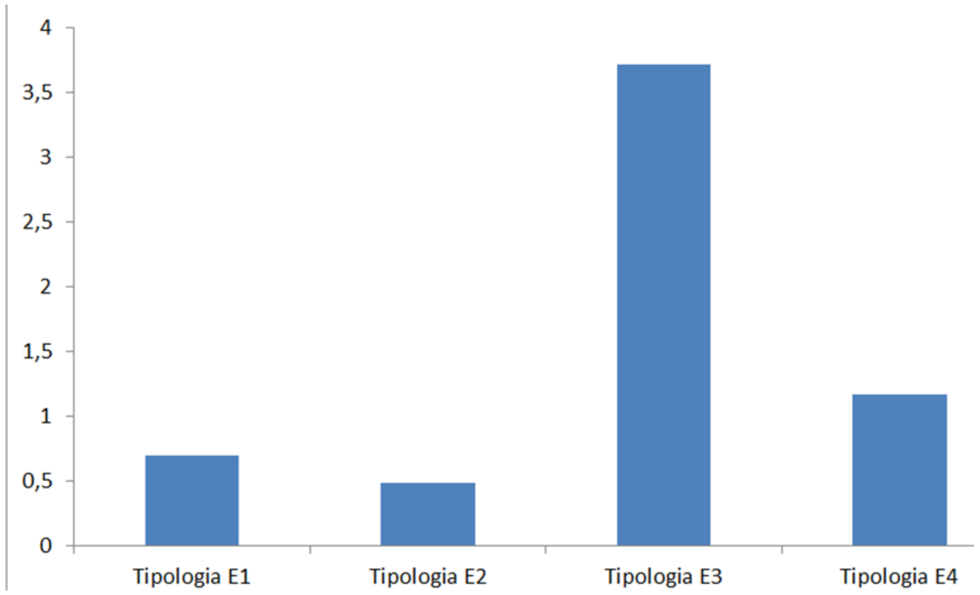


Figura 4.4-3

Andando nel dettaglio degli argomenti dove abbiamo individuato il maggior numero di difficoltà, sembrerebbe che gli studenti hanno più difficoltà su spazio vettoriale e spazio euclideo. Le difficoltà non classificabili sono più meno nello stesso numero su vari argomenti. Invece volendo distinguere tra gli errori, il numero più elevato è della tipologia E3, in particolare relativamente a omomorfismi e diagonalizzazione. Seguono quelli della tipologia E4 e poi E1, specie su spazi vettoriali e spazi euclidei. I meno frequenti sono gli errori di tipo E2 che sono più o meno equamente distribuiti su vari argomenti.

5 Un percorso di recupero-autoformazione in algebra lineare

5.1 Costruzione delle domande

In questo paragrafo, andiamo a descrivere come abbiamo progettato le domande. Possiamo distinguere due tipi di domande:

a) Sono quelle in numero maggiore e sono state costruite basandosi su:
   - Tipologie degli errori trovati nei protocolli degli studenti;
   - Tassonomia Math, che vuol dire, cosa vogliamo o intendiamo valutare con questi tipi di domande;
   - Competenze Niss, che vuol dire, che competenze servono agli studenti per affrontare queste tipologie di domande;
   - Linguaggio usato nelle domande e risposte, semplice nel senso più vicino al linguaggio quotidiano o un linguaggio matematico più sofisticato che sarà verbale, simbolico e misto;
   - Varie particolarità degli argomenti trattati, etc.

b) Sono domande che vertono su competenze trasversali, come ad esempio confronti, ragionamenti, fare congetture, etc. La difficoltà quindi è maggiore rispetto a domande che vertono sul livello puramente cognitivo e pertanto le abbiamo usate a completamento di un corso intero.

Nel seguito vediamo una carellata sulle domande costruite per ciascun argomento, con riferimento all'analisi degli errori fatta al paragrafo 4.2. Abbiamo considerato anche una serie di quiz raccolti in un 'precorso', che ha il doppio scopo di rinforzare le conoscenze di base e di fare una valutazione diagniostica.

Precorso

Compito 1/8 (Domanda a risposta multipla)

Tutte le soluzioni dell'equazione 3x - 2y + 4z + 2t = -1 sono le terne seguenti. Individuare quelle guiste.

- [ ] $(x, y, z) \in R^3$ $\quad \forall x, y, z \in R$ perché t è un parametro fisso.
- [ ] $(x, y, z, t) \in R^4$ $\quad \forall x, y, z, t \in R$
- [ ] $(x, y, z, t) \in R^4$ $\quad \forall x, y, z, t \in R /\ 3x - 2y + 4z = -1 - 2t$
- [ ] $(x, y, z) \in R^3$, $\forall x, y, z \in R / 3x - 2y + 4z = -1 - 2t$
- [ ] $[(x, y, z, (-1 - 3x + 2y - 4z)/2)] \in R^4$ $\quad \forall x, y, z \in R$

Figura 5.1-1

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-10 *e* Figura 4.2-14*)* che nascono dalle lacune nelle conoscenze di base, soluzioni di un equazione con quattro incognite
2. conoscenza oggettiva
3. comunicazione; uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni
4. uso massiccio dei simboli

Compito 1/6 (Domanda a scelta multipla)

Ho spiegato perché è vero o non è vero che il determinante della matrice A vale 0

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 4 & -12 & 10 \end{bmatrix}$$

Individuare le risposte giuste.

- ( ) Vale 0 perchè tutti i minori $a_{1,2\,;\,1,2}$; $a_{1,2\,;\,1,3}$; $a_{1,2\,;\,2,3}$ valgono zero.
- ( ) Vale 0 perchè usando la regola di Sarrus ho: det A = $a_{11}\, a_{22} + a_{12}\, a_{23} - a_{12}\, a_{21} - a_{13}\, a_{22} = 0$
- ( ) Vale 0 perché il rango della matrice A è zero
- ( ) Non vale 0 ma vale un altro numero perchè la matrice non è quadrata.
- ( ) Si parla per il determinante di una matrice soltanto nei casi quando sono quadrate.
- ( ) Nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.1-2

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.3-9) che nascono dalle carenze di definizione del determinante
2. comprensione e riconoscimento della situazione
3. argomentazioni
4. una domanda del livello logico (è vero o non è vero)
5. linguaggio semplice

Compito 1/11 (Domanda a scelta multipla)

Il rango della matrice seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$ vale:

- 3 perchè il numero minimo tra il numero delle righe e colonne della matrice data è 3.
- 2 perché il minore $a_{1,2;1,2}$ della matrice data è diverso da zero.
- 3 perché il massimo ordine di un minore non nullo della matrice data è 3.
- 0 perché la matrice data non è quadrata e il determinante sua non si può calcolare.
- nessuna delle altre risposte è vera.

Figura 5.1-3

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-9, Figura 4.2-29) che nascono dalle carenze di definizione del rango
2. comprensione e riconoscimento della situazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice

Compito 1/10 (Domanda a scelta multipla)

Sia dato il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -3 \\ x - y/2 + 2z = 4 \end{cases}$$

Quante è il numero delle soluzioni del sistema dato?

- Infinite perché il sistema ha il numero delle equazioni minore del numero di incognite.
- Infinite perché il sistema non è compatibile.
- Uno perchè uso Cramer dopo che ho aggiunto nel sistema dato un terzo equazione equivalente al primo.
- Solo due che dipendono dei valori di z.
- Nessuna perchè il sistema non è compatibile.
- Nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.1-4

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-38, Figura 4.2-43 e Figura 4.2-46) che nascono dalle carenze di teoremi, Rouchè – Capelli e i teoremi di unicità
2. comprensione e riconoscimento della situazione
3. argomentazioni
4. linguaggio non semplice, verbale

P_T7 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati l'equazioni seguenti:

1) $x^2 = 0$

2) $x^2\ 2x = 0$

3) $(x - 2)^3\ (2 - x) = 0$

Indicate le risposte giuste.

- x = 0 è l'unica radice di (1) con molteplicità di x uno ☐
- x = 0 è la la radice di (2) con molteplicità di x tre ☐
- (3) ha tre soluzioni ☐
- (3) ha x = 2 radice con molteplicità di x quattro ☐
- (3) ha x = -2 radice con molteplicità di x quattro ☐

Figura 5.1-5

La domanda fa riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-64) che nascono dalle lacune di base, la molteplicità
2. conoscenza oggettiva
3. argomentazione
4. linguaggio semplice

P_T1 (Domanda a scelta multipla)

Individuare le soluzioni del seguente sistema di disequazione

$$\begin{cases} (x - 1)^2\ (x - 3) > 0 \\ (x - 2) < 2 \end{cases}$$

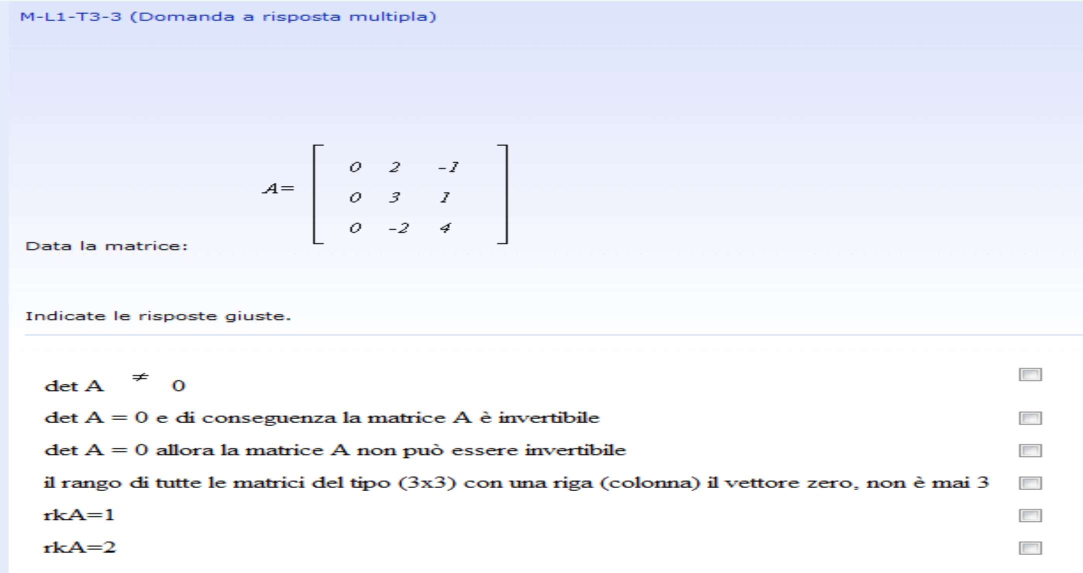
- x < 4 ○
- Impossibile ○
- Indeterminato ○
- x > 3 U x < 4 ○
- x < 4 U x > 3 ○
- Nessuna delle altre risposte è vera ○

Figura 5.1-6

La seconda domanda fa riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-99) che nascono dalle lacune di base, risolvere le disequazioni
2. conoscenza oggettiva
3. formulazione e risoluzione dei problemi
4. linguaggio non semplice, simbolico e verbale

Matrici



M-L1-T3-3 (Domanda a risposta multipla)

Data la matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

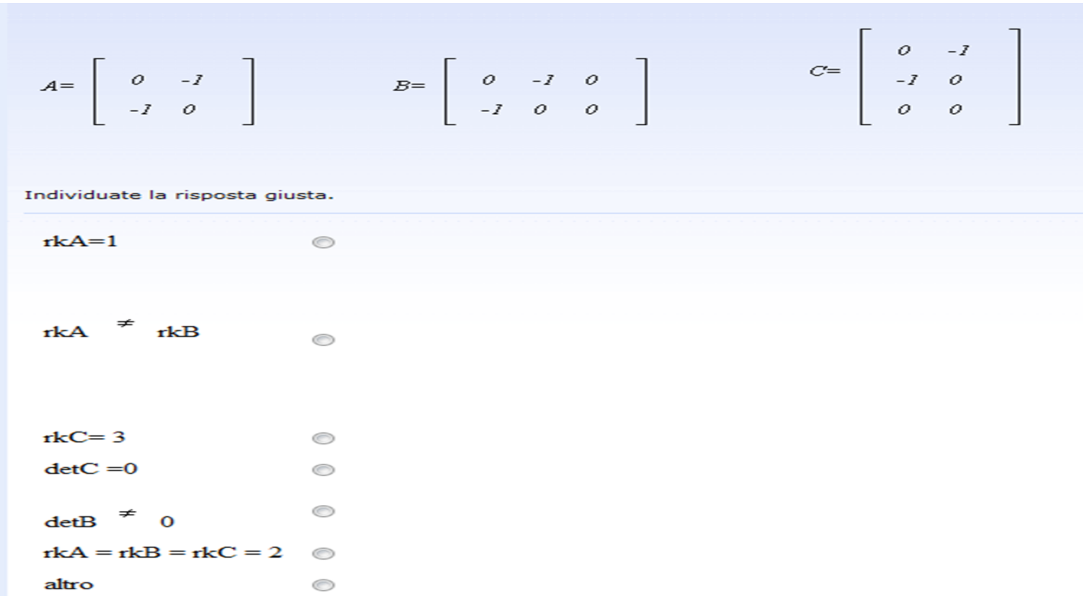
Indicate le risposte giuste.

- det A $\neq$ 0
- det A = 0 e di conseguenza la matrice A è invertibile
- det A = 0 allora la matrice A non può essere invertibile
- il rango di tutte le matrici del tipo (3x3) con una riga (colonna) il vettore zero, non è mai 3
- rkA=1
- rkA=2

Figura 5.1-7

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-45 e Figura 4.2-65)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice
5. calcolo di inversa di matrici non invertibili (con determinante nullo) – risposte 2 e 3
6. rango di matrici con una riga o colonna nulla
7. coerenza tra valore del determinante (risposta 1) e rango (risposte 3, 4 e 5)



$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Individuate la risposta giusta.

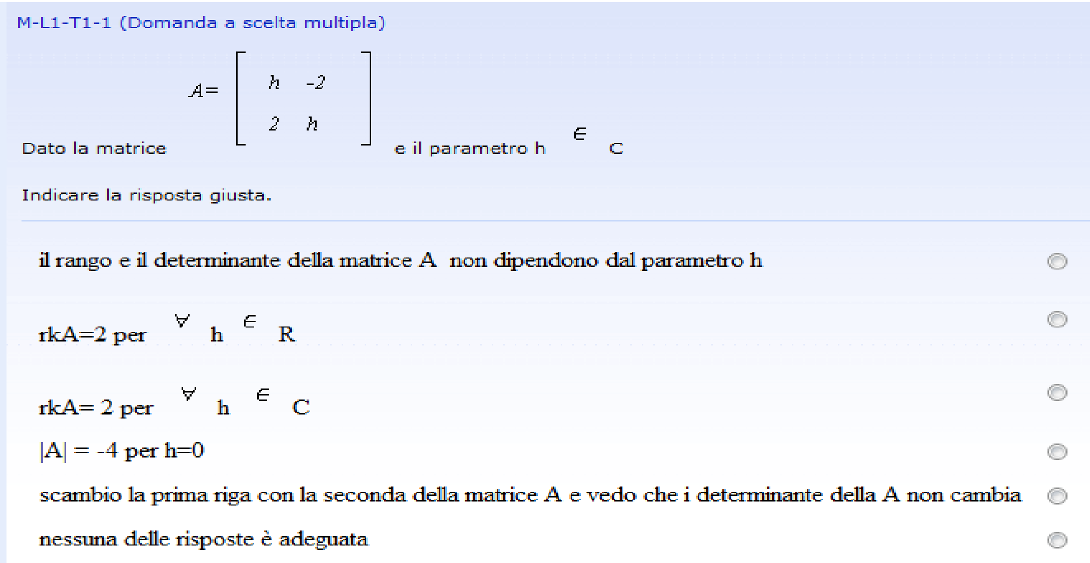
- rkA=1
- rkA $\neq$ rkB
- rkC= 3
- detC =0
- detB $\neq$ 0
- rkA = rkB = rkC = 2
- altro

Figura 5.1-8

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.3-9, Figura 4.3-11)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni

4. le risposte 4 e 5 richiedono la definizione di determinante
5. la risposta 3 richiama la maggiorazione del rango data dal minimo tra il numero di righe e di colonne
6. le risposte 2 e 6 presuppongono l'osservazione che A è sottomatrice di B e C e che il rango di B e C non può superare 2 (come osservato al punto precedente)


M-L1-T1-1 (Domanda a scelta multipla)

Dato la matrice $A=\begin{bmatrix} h & -2 \\ 2 & h \end{bmatrix}$ e il parametro h $\in$ C

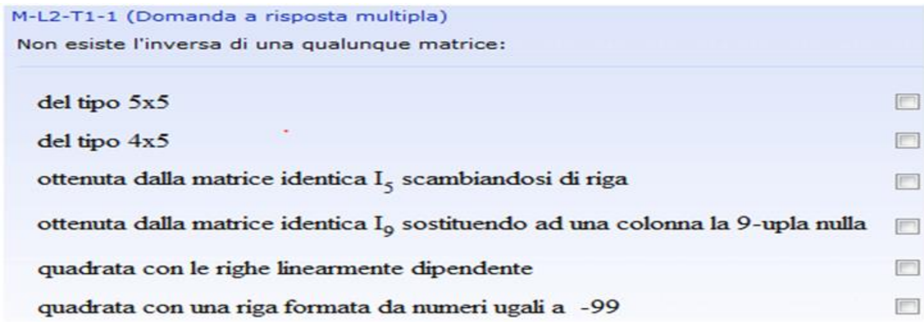
Indicare la risposta giusta.

- il rango e il determinante della matrice A non dipendono dal parametro h
- rkA=2 per $\forall$ h $\in$ R
- rkA= 2 per $\forall$ h $\in$ C
- |A| = -4 per h=0
- scambio la prima riga con la seconda della matrice A e vedo che i determinante della A non cambia
- nessuna delle risposte è adeguata

Figura 5.1-9

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E2 (Figura 4.2-52 e Figura 4.2-56)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni; uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni
4. interpretazioni linguistici e logici dei simboli ℝ e ℂ
5. le risposte 2 e 3 cambiano solo per il contesto in cui varia h
6. la risposta 5 richiama la proposizione relativa alle proprietà del determinante


M-L2-T1-1 (Domanda a risposta multipla)

Non esiste l'inversa di una qualunque matrice:

- del tipo 5x5
- del tipo 4x5
- ottenuta dalla matrice identica I_5 scambiandosi di riga
- ottenuta dalla matrice identica I_9 sostituendo ad una colonna la 9-upla nulla
- quadrata con le righe linearmente dipendente
- quadrata con una riga formata da numeri ugali a -99

Figura 5.1-10

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-65) che nascono dalla definizione di matrice invertibile
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice
5. domanda del tipo 'quando non è così cosa succede?'

6. risposte 1, 2 e 6 matrice quadrate e non quadrate
7. risposta 3 e 5, proprieta del determinante che non coincidono nella inversa della matrice
8. risposta 4, matrice identica che coincide nella inversa della matrice perché il determinante della matrice diventa zero

S_L-L3-T1-6 (Domanda a risposta multipla)

Date A, B $\in$ $M_8(R)$ entrambe con rango 4. Sia w il rango di A + B allora è vero che:

- esistono coppie (A, B) di matrici in cui w = 9 ☐
- w = 8 per tutte le coppie (A, B) ☐
- esistono coppie (A, B) di matrici in cui w = 0 ☐
- w = 4 per tutte le coppie (A, B) ☐
- esistono coppie (A, B) di matrici in cui w = 8 ☐
- esistono coppie (A, B) di matrici in cui w = 7 ☐

Figura 5.1-11

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.3-11)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazione
4. domande per capire che il rango di una matrice non può superare il minimo tra il numero di righe e colonne della matrice
5. operazioni con le matrici, interpretazioni linguistici e logici

Due domande del tipo b).

Siano A e B due matrice quadrate dello stesso ordine con A invertibile e B non invertibile. Allora quale dei seguenti matrici possono essere invertibili?

- BA ○
- AB ○
- A + B ○
- ABA^{-1} ○
- altro ○

Figura 5.1-12

M-L2-T2-1 (Domanda a scelta multipla)

Sia $|A| = 1$ e $|B| = 2$ allora $|(A^{-1}B^{-1})^{-1}|$ è:

- 0 ○
- 1 ○
- 2 ○
- 3 ○
- 4 ○
- altro ○

Figura 5.1-13

La prima domanda fa riferimento a:

1. applicazione in nuova situazione
2. pensiero e ragionamento

La seconda domanda fa riferimento a:

1. valutazione
2. formulazione e risoluzione dei problemi

Sistemi lineari

S_L-L1-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Uno sottospazio di R^3 è rappresentato da una sistema lineare dove le soluzioni sono una terna della forma (3, 2k, -2h) con k, h reali

allora le seguenti terne sono ancora soluzione del sistema:

- (6, 2, 4)
- (3, 6, 2h) con h reale
- nella terna (3, 10, 2h) con h reale ce una sola soluzione del sistema
- (3, 2k, -2) con k reale
- (3, 2, -2) e (3, 6, -8)
- (3, 2, 0) e (3, 0, -2) usando la base canonica
- (3, 12)
- (3, 12, -12, 0)

Figura 5.1-14

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-10, Figura 4.2-14)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazione
4. linguaggio semplice

S_L-L1-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

Sapendo che la terna (1, 1, -1) è la soluzione del equazione AX=B dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora il sistema lineare:

- non è compatibile
- rk A = rk (A | B)
- ha l'unica soluzione sapendo che la terna data è soluzione
- ha l'unica soluzione che l'abbiamo verificato, risolvendo il sistema notiamo che è sola quella
- il sistema ha solo tre soluzioni
- il sistema è omogeneo

Figura 5.1-15

La domanda fa riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-44)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. formulazione e risoluzione dei problemi

4. interpretazioni linguistiche e logiche
5. domande del tipo: ‘sapendo che è vero cosa succede?’
6. la compatibilità del sistema lineare (risposte 1 e 2), il numero delle soluzioni di un sistema (risposte 3, 4 e 5) e sistema omogeneo (risposta 6)

S_L-L2-T1-3 (Domanda a scelta multipla)

Sia AX=B un sistema lineare di m equazioni e n incognite allora è vero che:

- se n < m il sistema è sempre privo di soluzioni ◯
- se n = m+1 il sistema ha sempre una soluzione ◯
- se n = m si può usare sempre Crammer ◯
- se n > m il sistema ha sempre infinite soluzioni ◯
- il sistema ha sempre almena una soluzione se B = 0 ◯
- nessuna delle altre risposte è giusta ◯

Figura 5.1-16

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-4, Figura 4.2-38, Figura 4.2-43, Figura 4.2-46 e Figura 4.2-49)
2. giustificazione e interpretazione; applicazione in nuova situazione
3. pensiero e ragionamento
4. linguaggio non semplice
5. risposta 1 il caso n<m che non coincide nella compatibilità, dipende se rk A = rk A|B
6. risposta 2 e 4 siamo nel caso n>m che dipende dalla compatibilità e se rk A = n
7. risposta 3, si usa Crammer se il sistema è compatibile
8. risposta 5 il sistema omogeneo

Due domande del tipo b):

S_L-L3-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

Sia S un sistema di m equazioni e n incognite e sia S' il sistema ottenuto togliendo l'ultimo equazione. Allora è vero che:

- l'insieme delle soluzioni di S' è contenuto in quello di S ☐
- se S' è impossibile anche S lo è ☐
- se S' ammette soluzioni anche S ne ammette ☐
- se S ammette soluzioni anche S' ne ammette ☐
- se S è impossibile anche S' lo è ☐
- l'insieme delle soluzioni di S è contenuto in quello di S' ☐
- in generale non ce alcuna relazione fra insiemi delle soluzioni di S e S' ☐

S_L-L3-T1-3 (Domanda a scelta multipla)

Siano S un sistema lineare non omogeneo di 4 equazioni e 4 incognite ed il S_0 il sistema lineare omogeneo associato.

Sia (14, 13, 12, 11) una soluzione di S_0 allora (4, 5, 6, 7) + (14, 13, 12, 11) è una soluzione di S:

- se S e S_0 hanno lo stesso rango ◯
- se (4, 5, 6, 7) è la colonna dei termi noti di S ◯
- se (4, 5, 6, 7) è una soluzione di S ◯
- se (14, 13, 12, 11) è la colonna dei termi noti di S ◯
- se (4, 5, 6, 7) è una soluzione di S_0 ◯
- nessuna delle altre risposte è giusta ◯

Figura 5.1-17

Le due domande fanno riferimento a:

1. implicazione fare congetture, confrontazione e trovare la soluzione
2. pensiero e ragionamento
3. la prima domanda ha a che fare con il confronto di due sistemi (insieme delle soluzioni, la compatibilità)
4. la seconda domanda ha a che fare con il confronto della soluzione di un sistema lineare non omogeneo con la soluzione di quello omogeneo

Spazi vettoriali

S_V-L1-TR-4 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato il seguente sottospazio

V = <(x, y, z, t), (x', y', z', t')> dove V $\subseteq$ R^4 e il vettore u che è appartenente allo sottospazio V

Allora questo vettore:

- [ ] deve essere una combinazione lineare dei generatori di V
- [ ] deve essere una combinazione lineare dei vettori della base di V
- [ ] deve essere linearmente dipendente con i generatori di V
- [ ] deve essere linearmente indipendente con i generatori di V
- [ ] creando la matrice A che ha per le righe i generatori di V e questa matrice deve avere lo stesso rango con la matrice creata aggiungendo alla A la terza riga con vettore u dato

Figura 5.1-18

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-6, Figura 4.2-7 e Figura 4.2-11)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice
5. appartenenza di un vettore a uno sottospazio vettoriale, lineare dipendenza e indipendenza

S_V-L2-T1-2 (Domanda a corrispondenza)

Individuate le dimensioni delle base seguenti:

Punteggio minimo	0
Punteggio massimo	9
Punti per corrispondenza mancante	0
Punti per corrispondenza esatta	1
Punti per corrispondenza errata	-1

a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
Non lo so

Elementi da associare	
A = [(x, y, z)]	Non lo so
B = [(x, y), (x', y')]	Non lo so
C = [(x, y, z), (x', y', z')]	Non lo so
D = [(x, y, z, t)]	Non lo so
E = [(x, y, z, t), (x', y', z', t')]	Non lo so
F = (x)	Non lo so
G = (x, y)	Non lo so
H = [(x, y, z), (x', y', z'), (x", y", z")]	Non lo so
E = [(x, y, z, t), (x', y', z', t'), (x", y", z", t")]	Non lo so

Possibili associazioni
a) 1
b) 4
c) 3
d) 1
e) 3
f) 2
g) 2
h) 2
i) 2
j) 0
k) 1

Figura 5.1-19

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-5)

2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. sfruttare la domanda a corrispondenza per calcolare la dimensione della base

S_V-L1-T3-1 (Domanda a corrispondenza)

Sia dato un sistema di vettori B = (a, b, c ...) i vettori singoli del sistema ci appartengono in:

Punteggio minimo	0
Punteggio massimo	6
Punti per corrispondenza mancante	0
Punti per corrispondenza esatta	1
Punti per corrispondenza errata	-1

a
b
c
d
e
f
g
Non lo so

Elementi da associare		Possibili associazioni
[(0, 1), (0, 3), (1, 1)]	Non lo so	a) R^2
(1, -1, 3)	Non lo so	b) R
[(0, 1, 3), (-1, 2, 4)]	Non lo so	c) R^3
[(1, -1, 0), (2, 4, -6), (-1, -1, 3)]	Non lo so	d) R^5
[(1, 4, -1, 0)]	Non lo so	e) R^3
(1, 4, -1, 0)	Non lo so	f) R
		g) R^4

Figura 5.1-20

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-10 e Figura 4.2-14)
2. giustificazione, ragionameto e interpretazione
3. argomentazioni

S_V-L1-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato lo sottospazio vettoriale V = < (0, 0), (-3, 4), (1, 2) > allora è vero che:

- i genaratori di V sono in R^3
- V $\in$ R^2
- i generatori di V sono linearmente dipendenti
- stando il numero dei generatori di V tre allora dim V = 3
- la dim V = 2 perché nei generatori di V si trovano due vettori linearmente indipendenti
- la base di V ha due vettori ed il vettore (0, 0) non può fare mai parte di una base

Figura 5.1-21

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 figure (Figura 4.2-2, Figura 4.2-65)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazione
4. linguaggio verbale e simbolico
5. le risposte 3, 4, 5 e 6 mettono in gioco il legame tra i vettori linearmente dipendente, indipendente e base

S_V-L1-T2-3 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati le due espressioni:

$A \cap B = \Phi$ e $C \cap D = \{ 0 \}$ dove A, B, C e D sono spazi vettoriali.

Allora è vero che:

- l'insieme $C \cap D$ è linearmente dipendente
- l'insieme $C \cap D$ contiene vettori linearmente indipendenti
- se $C \cap D = \{ v \}$ e $v \neq 0$ allora $C \cap D$ è un insieme linearmente indipendente, "0" intendiamo il vettore zero
- $A \cap B$ è un insieme che contiene elementi
- $A \cap B$ è un sottoinsieme di ogni insieme

- $\dim (C \cap D)$ non esiste
- $\dim (C \cap D) = 0$
- $\dim (C \cap D) = \{ 0 \}$
- stando $A \cap B = 0$ allora la $\dim A \cap B = 0$
- stando $A \cap B = 0$ non si può parlare di $\dim A \cap B$

- $C \cap D$ è uno spazio vettoriale
- $A \cap B$ è uno spazio vettoriale
- $A \cap B$ è un insieme che non contiene elementi
- $A \cap B$ non è un sottoinsieme di ogni insieme

Figura 5.1-22

La domanda fa riferimenti a:

1. errori di tipo E2 e E4 (Figura 4.2-13)
2. aromentazione; giustificazione, ragionamento, dimostrazione e interpretazione
3. comunicazione; uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni
4. interpretazioni linguistici e logici (lo scopo di queste domande è di fare notare la differenza tra il vettore nullo e l'insieme vuoto)

S_V-L3-T1-2 (Domanda a scelta multipla)

Nello spazio vettoriale V dei polinomi in x a coefficienti reali di grado $\leq$ 3

l'insieme $\{x, 3x + x^2, 6x^2 + 5, 4x^2\}$ è:

- linearmente indipendente
- un sistema di generatori di V
- linearmente dipendente
- una base di V
- nessuna delle altre risposte è giuste

Figura 5.1-23

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-22)
2. giustificazione, ragionamento, dimostrazione e interpretazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice
5. lineare dipendenza, indipendenza e basi

S_V-L2-T2-4 (Domanda a scelta multipla)

Quali sono le componenti del vettore (-7, 11) rispetto alla base B = [(1,1), (1, 0)]?

- (-7, 11)
- (11, -18)
- (11, -7)
- (7, -11)
- (-18, 11)
- altro

Figura 5.1-24

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-31, Figura 4.2-33 e Figura 4.2-35)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione di problemi
4. domanda del tipo 'quali è tra …'

S_V-L1-T1-4 (Domanda a risposta multipla)

Dato il sottospazio:

V = < (-1, -4, 0, 1), (-1, 0, 0, -2) >

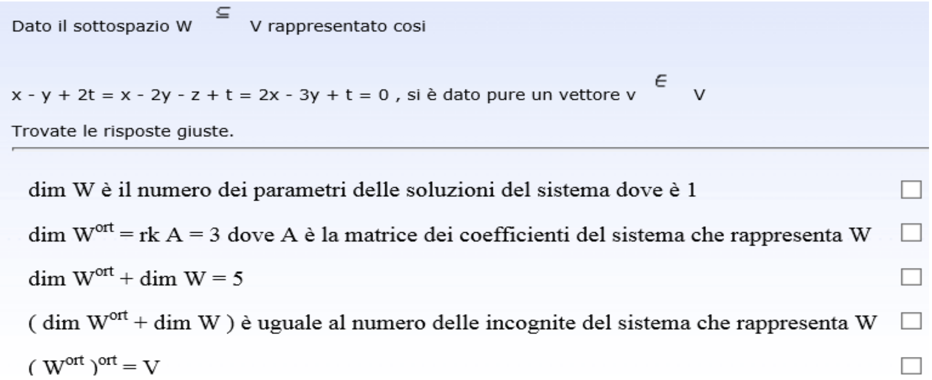
Indicare le risposte giuste.

- i generatori di V sone due vettori linearmente dipendenti
- V è appartente in R^2 perché V ha due generatori
- i vettori di V stanno in R^4 allora V $\subseteq$ R^4
- V non è rappresentata in forma cartesiana
- i generatori di V non sono proporzionali
- stando i generatori di V linearmente indipendenti , la base sua è gli stessi generatori di V
- dim V = 4
- dim V + dim V^{ort} = 4 , dim V = 2 e dim V^{ort} = 2

Figura 5.1-25

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-12, Figura 4.2-19 Figura 4.2-26)
2. giustificazione, ragionamento, dimostrazione e interpretazione
3. argomentazione
4. sottospazio vettoriale rappresentato con i generatori



Dato il sottospazio $W \subseteq V$ rappresentato cosi

$x - y + 2t = x - 2y - z + t = 2x - 3y + t = 0$, si è dato pure un vettore $v \in V$

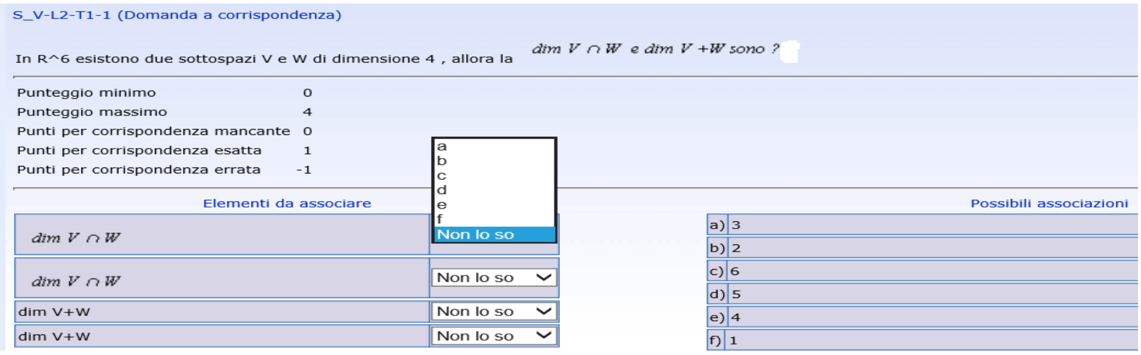
Trovate le risposte giuste.

- dim W è il numero dei parametri delle soluzioni del sistema dove è 1
- dim W^{ort} = rk A = 3 dove A è la matrice dei coefficienti del sistema che rappresenta W
- dim W^{ort} + dim W = 5
- (dim W^{ort} + dim W) è uguale al numero delle incognite del sistema che rappresenta W
- $(W^{ort})^{ort} = V$

Figura 5.1-26

La domanda fa riferimento:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-5, Figura 4.2-9)
2. giustificazione, ragionamento, dimostrazione e interpretazione
3. argomentazione
4. dimensione di uno sottospazio rappresentato in forma cartesina e del sottospazio ortogonale



S_V-L2-T1-1 (Domanda a corrispondenza)

In R^6 esistono due sottospazi V e W di dimensione 4 , allora la $\dim V \cap W$ e $\dim V + W$ sono ?

Punteggio minimo	0
Punteggio massimo	4
Punti per corrispondenza mancante	0
Punti per corrispondenza esatta	1
Punti per corrispondenza errata	-1

Elementi da associare	
$\dim V \cap W$	Non lo so
$\dim V \cap W$	Non lo so
dim V+W	Non lo so
dim V+W	Non lo so

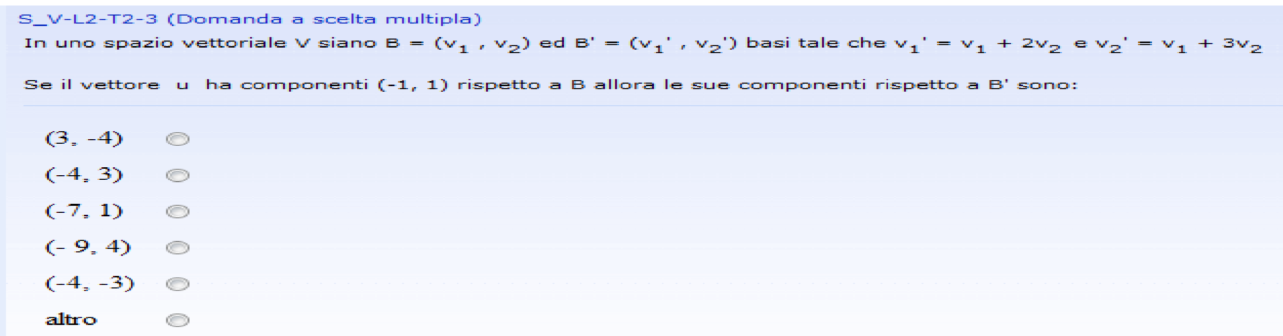
a b c d e f Non lo so

Possibili associazioni
a) 3
b) 2
c) 6
d) 5
e) 4
f) 1

Figura 5.1-27

La domanda fa riferimento:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-6, Figura 4.2-8, Figura 4.2-15)
2. applicazione in nuova situazione; valutazione
3. pensiero e ragionamento
4. dimensione della somma e dell'intersezione di due sottospazi vettoriali



S_V-L2-T2-3 (Domanda a scelta multipla)

In uno spazio vettoriale V siano $B = (v_1 , v_2)$ ed $B' = (v_1' , v_2')$ basi tale che $v_1' = v_1 + 2v_2$ e $v_2' = v_1 + 3v_2$

Se il vettore u ha componenti (-1, 1) rispetto a B allora le sue componenti rispetto a B' sono:

- (3, -4)
- (-4, 3)
- (-7, 1)
- (- 9, 4)
- (-4, -3)
- altro

Figura 5.1-28

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-31, Figura 4.2-33 e Figura 4.2-35)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione di problemi

4. componenti di un vettore dato, rispetto a una base non canonica

Spazi Euclidei

S_E-L1-TR-2 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati due basi dello spazio vettoriale V: $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $B' = (b_1', b_2', b_3')$ dove B' è ortonormale.

Sia dato pure un vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ da V

Individuate le risposte giuste.

- dalla base B si può tirare fuori una base ortonormale ma non è l'unica ☐
- la base B è ortonormale perche è una base ☐
- la base B' è una base ☐
- la linearità dei vettori sulla base ortonormale si mantenga ☐
- le componenti del vettore u rispetto alla base B e B' sono gli stessi ☐
- $c_{B'}(u) = (u \cdot b_1', u \cdot b_2', u \cdot b_3')$ ☐
- i componenti di un vettore in una qualsiasi base non sono unici ☐
- $c_B(u) = (h_1, h_2, h_3)$ tale che $u = h_1u_1 + h_2u_2 + h_3u_3$ ☐

Figura 5.1-29

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-31, Figura 4.2-33 e Figura 4.2-35)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice
5. la risposta 1 mette in gioco la teorema Gram-Schmidt
6. le risposte 2 e 3 fanno riferimento alle differenze tra una base qualsiasi con una base ortonormale
7. le risposte 5 e 7 mettono in gioco le differenze tra le componenti di un vettore rispetto a base o una base ortonormale

S_E-L1-TR-1 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati i vettori u = (1, 2, 1) e v = (2, 0, -2); Per quale dei seguenti vettori w l'insieme {u, v, w} forma una base ortogonale di R^3

- (6, -5, 9) ○
- (-11, 0, 3) ○
- (0, -13, 0) ○
- (7, 7, 7) ○
- (1, -1, 1) ○
- altro ○

Figura 5.1-30

S_E-L1-T2-3 (Domanda a scelta multipla)

Per quale valore di w i vettori (2, 5, w + 2, 3) e (4, w, -3, w) sono ortogonali?

- -11
- -3/5
- -0,8
- -4/10
- -1/5
- altro

Figura 5.1-31

Le domande fanno riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-18, Figura 4.2-36)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione dei problemi
4. base ortogonale e vettori ortogonali

S_E-L1-T2-1 (Domanda a risposta multipla)

In un spazio euclideo sia dato il seguente prodotto scalare:

$u \bullet v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ dove u = (1, 0, -1) e v = (-1, 3, -4)

Individuare le risposte giuste.

- i vettori u e v si dicono ortogonali se $u \cdot v = 0$
- il vettore nullo non è ortogonale a tutti vettori
- se $v_1 \dots v_k$ sono vettori non nulli in R^3 a due a due ortogonali allora $v_1 \dots v_k$ sono vettori linearmente dipendenti
- un insieme è ortogonale se gli elementi sono due a due ortogonali
- un vettore u è normale se $|u| = 0$
- un insieme è ortonormale se è ortogonale con elementi normali
- $u \bullet v = 3$
- $u \bullet v = 11$

Figura 5.1-32

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E1 (Figura 4.3-2) E3 (Figura 4.2-17 e Figura 4.2-32)
2. riconoscimento della situazione; giustificazione e interpretazione
3. argomentazioni
4. lo scopo è di capire quando un insieme è ortogonale e ortonormale
5. le risposte 7 e 8 che mettono in gioco la differenza tra un prodotto scalare dato e quello canonico

In R^3 con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$h \cdot g = (h_1, h_2, h_3)\,(g_1, g_2, g_3) = h_1g_1 + 2h_2g_2 + 2h_3g_3$ si consideri l'insieme $G = \{(1, 0, -1), (2, -1, 1), (2, 1, 0)\}$

e un vettore $u = (2, 0, 1)$

Allora è vero che:

- G non è una base di R^3 ☐
- G è un insieme ortogonale ☐
- una base ortonormale B a partire da G è: {(1/3,-1, -1/3), (2, -1/8, 1/8), (1/6, 6/4, 1/12)} ☐
- $\left\{ (1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3}), (2/\sqrt{8}, -1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}), (1/\sqrt{6}, \sqrt{6}/4; \sqrt{6}/12) \right\}$ è una base ortonormale B a partire da G ☐
- le componenti del vettore u rispetto alla base ortogonale B a partire da G sono: $C_B\,(2, 0, -1) = (4/3, 2/13, 3/7)$ ☐
- le componenti del vettore u rispetto alla base ortogonale B a partire da G sono: $C_B\,(2, 0, -1) = (4/\sqrt{3}, 2/\sqrt{8}, \sqrt{6}/6)$ ☐

Figura 5.1-33

La domanda fa riferimenti a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-31, Figura 4.2-32)
2. applicazione in nuova situazione
3. pensiero e ragionamento
4. base, base ortonormale, e le componenti del vettore dato *u* rispetto a queste basi

Omomorfismi

O-L1-T3-1 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato la seguente applicazione $f : V \to V'$ dove V e V' da R

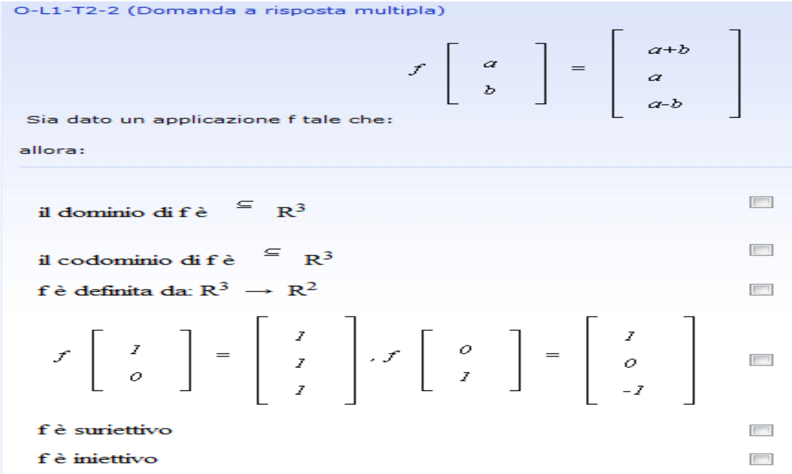
Individuare le risposte giuste.

- $\forall\, v \in V,\ f(V) \subseteq V$ ☐
- $Imf \neq f(V)$ ☐
- la controimmagine della applicazione f è: $\{\, v' \in V' / \exists\, v \in V / v' = f(v) \,\}$ ☐
- $Imf \setminus V' = \varnothing$ ☐
- se $V' \subseteq V,\ Imf \setminus V = \varnothing$ ☐
- se $V \subseteq V'\ Imf \subseteq dom\,(f)$ ☐

Figura 5.1-34

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-49)
2. riconoscimento della situazione; giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni; comunicazione



O-L1-T2-2 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato un applicazione f tale che: $f\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\a\\a-b\end{bmatrix}$

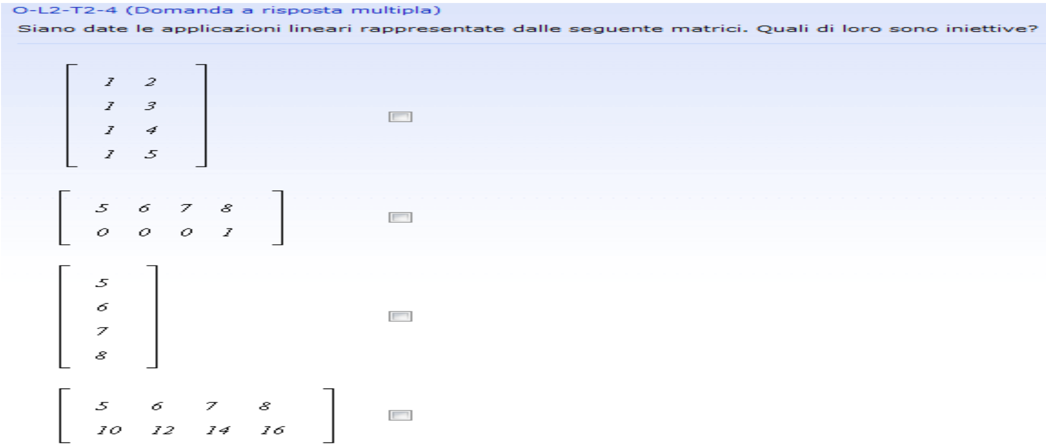
allora:

- il dominio di f è $\subseteq$ $\mathbb{R}^3$
- il codominio di f è $\subseteq$ $\mathbb{R}^3$
- f è definita da: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- $f\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$
- f è suriettivo
- f è iniettivo

Figura 5.1-35

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-67, Figura 4.2-68)
2. giustificazione, ragionamento, dimostrazione e interpretazione
3. argomentazione; formulazione e risoluzine del problema



O-L2-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

Siano date le applicazioni lineari rappresentate dalle seguente matrici. Quali di loro sono iniettive?

- $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\1 & 4\\1 & 5\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 8\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 8\\10 & 12 & 14 & 16\end{bmatrix}$

Figura 5.1-36

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-40, Figura 4.2-41)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. formulazione e risoluzine del problema
4. trovare quando l'applicazione è iniettiva sapendo la matrice rappresentativa

O-L2-T2-1 (Domanda a scelta multipla)

Sia A una matrice di tipo 4x6 di rango 3 e sia f omomorfismo rappresentato di A rispetto a due basi di due spazi vettoriali allora la dim ker f è:

- 2
- 4
- 5
- 6
- nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.1-37

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-68)

2. valutazione
3. formulazione e risoluzione del problema
4. calcolare dim ker *f* quando sappiamo la matrice rappresentativa di *f*

O-L1-TR-7 (Domanda a scelta multipla)

Sia f un endomorfismo di R^3 tale che

f (x, y, z) = (x + y +2z, x + 3y, x + z)

Quale dei sequenti vettori è f^{-1} (1, 2, 3)?

- (27/4, -3/4, -5/4)
- (17/4, -3/4, -1/4)
- (17/4, -3/4, -5/4)
- (17/4, 9/4, -5/4)
- altro

Figura 5.1-38

La domanda fa riferimento a:
1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-49)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione del problema
4. controimmagine di un vettore

O-L1-TR-6 (Domanda a scelta multipla)

Quale è il nucleo del omomorfismo f tale che:

f (x, y, z) = (3x + 2y - z, x - 3y + z, 8x - 2y)

- (11, 2, 11)
- (1, 4, 11)
- (0, 0, 0)
- (4, 7, 11)
- (4, 1, 11)
- altro

Figura 5.1-39

Dato l'endomorfismo f : $R^4 \to R^4$ dove

f [(x, y, z, t)] = (0, x, y, z) allora è vero che:

- dim ker f = 2 e dim Im f = 2
- $dim\ (ker\ f \cap Im\ f) = 1$, $dim\ (ker\ f + Im\ f) = 3$
- dim ker f = 1 e dim Im f = 3
- $dim\ (ker\ f \cap Im\ f) = 2$, $dim\ (ker\ f + Im\ f) = 2$

Figura 5.1-40

La prima domanda fa riferimento a:
1. errori tipo E3 (Figura 4.2-47, Figura 4.2-50)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione del problema
4. il nucleo del omomorfimo dato

La seconda domanda fa riferimento a:
1. errori tipo E3 (Figura 4.2-37, Figura 4.2-48)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione del problema; ragionamento e pensiero
4. risposte 1 e 3 dim ker f e dim Im f
5. risposte 2 e 4 dimensione della somma e intersezione di ker f e Im f

Una domanda del tipo b):

O-L3-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Sia f : V $\rightarrow$ V un endomorfismo e (v_1 , v_2) una base di V allora:

- se g : V $\rightarrow$ V è un endomorfismo tale che g (v_1) = f (v_1) e g (v_2) = f (v_2) allora f = g ☐
- se { f (v_1) , f (v_2) } è una base di V allora f è l'applicazione identica ☐
- { f (v_1) , f (v_2) } è un sistema di generatori di Im f ☐
- f (v_1) ed f (v_2) sono linearmente indipendenti ☐
- se { f (v_1) , f (v_2) } è una base di V allora f è isomorfismo in se stesso (V $\rightarrow$ V) ☐

Figura 5.1-41

La domanda fa riferimento a:

1. implicazione, fare ipotezzi, confrontazione, trovare la soluzione
2. pensiero e ragionamento
3. uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni
4. base di un endomorfismo dato

Diagonalizzazione

D-L1-T2-3 (Domanda a scelta multipla)

Una matrice A $\in$ M_n (K) è diagonalizzabile:

- se A è diagonale
- se A è simmetrica
- se A è quadrata
- se det A $\neq$ 0
- se A è simile ad una matrice diagonale
- se esiste una matrice P $\in$ M_n (K) invertibile tale che $P^{-1}AP = D$ dove D è simile a A
- nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.1-42

La domanda fa riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-59 e Figura 4.2-65)
2. giustificazione, dimostrazioni e interpretazione
3. argomentazioni
4. una domanda del tipo: ‘quando succede così?’
5. matrice diagonalizzabile

D-L1-TR-6 (Domanda a risposta multipla)

Il polinomio a coefficienti reali $t^2 + 11$ non può essere il polinomio caratteristico di una matrice:

- reale di ordine 3 ☐
- reale di ordine 2 ☐
- simmetrica di ordine 3 ☐
- simmetrica di ordine 2 ☐

Figura 5.1-43

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-72)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni

4. una domanda del tipo ‘quando non può essere così?’
5. il legame tra l’ordine della matrice e il polinomio caratteristico

D-L1-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati l'equazioni: (1) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$, (2) $z^3 - 2z - 1 = 0$ e (3) $z^2 - z - 1$

Individuare le risposte giuste.

- senza risolvere dico che (1) ha tre radici reali
- nel (1) faccio questa sostituzione $x = z - t$ dove $t =$ (coefficiente presso x^2)/3 allora x^2 non si elimina
- sostituendo in (1) $x = z - 1$ l'equazione si trasforma in forma ridotta che è la (2)
- per trovare le radice del (2) si usa solo il metodo Ruffini
- usando il metodo Ruffini sul (2) i divisori del termo libero (- 1) sono ± 1 allora vedo che $+1$ è radice del (2)
- $x = -1$ è la radice del (2)
- $x = 2$ è la radice del (1)
- (2) divide $z + 1$
- se la (3) lo moltiplico per $(z + 1)$ mi viene la (2)
- la (3) ha tre radici
- la (3) ha questi due radici $(1+\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2$
- le radici del (1) sono le seguenti $\{-2, (-1+\sqrt{5})/2, (-1-\sqrt{5})/2\}$

Figura 5.1-44

La domanda fa riferimento a:
1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-64)
2. conoscenza oggettiva; riconoscimento della situazione;
3. argomentazioni; formulazione e risoluzione di problemi

D-L1-TR-4 (Domanda a scelta multipla)

Si dica quale fra le seguenti coppie sono autovettori della matrice

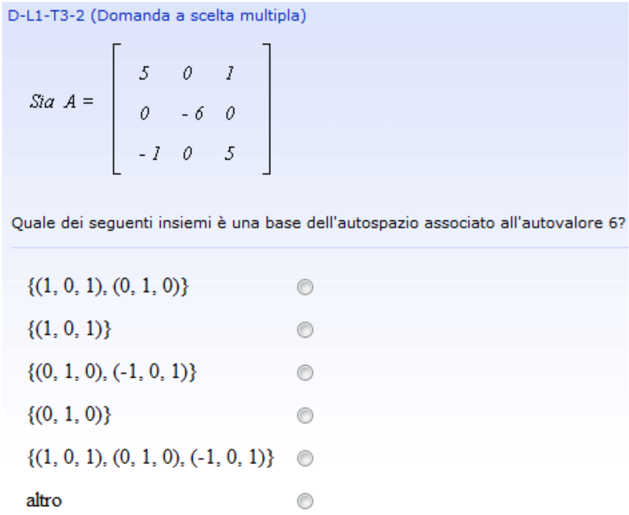
$$\begin{bmatrix} -74 & -108 \\ 54 & 79 \end{bmatrix}$$

- (- 3, 2)
- (- 2, 3)
- (2, -3)
- (3, -2)
- altro

Figura 5.1-45

La domanda fa riferimento a:
1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-73, Figura 4.2-74)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione di problemi

4. calcolare l’autovettore di una matrice



D-L1-T3-2 (Domanda a scelta multipla)

Sia $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

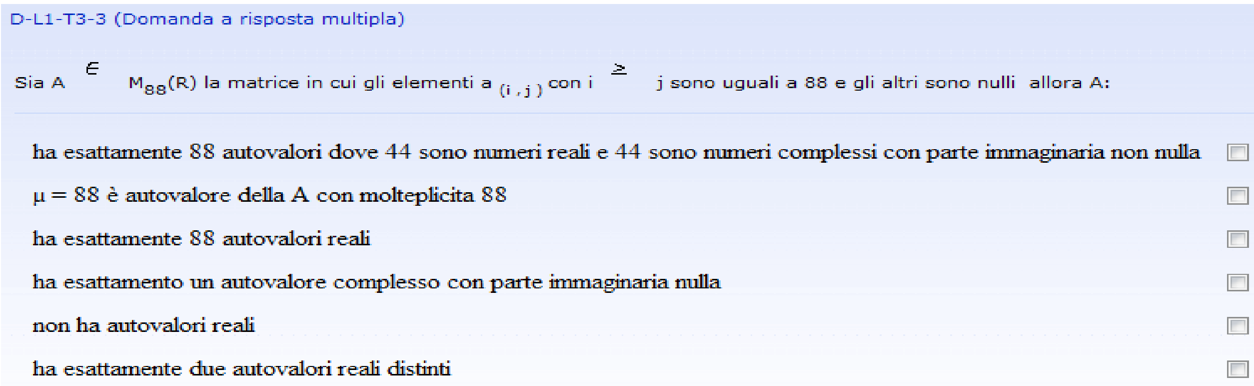
Quale dei seguenti insiemi è una base dell'autospazio associato all'autovalore 6?

- {(1, 0, 1), (0, 1, 0)}
- {(1, 0, 1)}
- {(0, 1, 0), (-1, 0, 1)}
- {(0, 1, 0)}
- {(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)}
- altro

Figura 5.1-46

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-54, Figura 4.2-63, Figura 4.2-61)
2. giustificazione e interpretazione
3. **pensiero e ragionamento**
4. **l’autospazio associato a un autovalore**



D-L1-T3-3 (Domanda a risposta multipla)

Sia A $\in$ M_{88}(R) la matrice in cui gli elementi $a_{(i,j)}$ con i $\geq$ j sono uguali a 88 e gli altri sono nulli allora A:

- ha esattamente 88 autovalori dove 44 sono numeri reali e 44 sono numeri complessi con parte immaginaria non nulla
- $\mu = 88$ è autovalore della A con molteplicita 88
- ha esattamente 88 autovalori reali
- ha esattamento un autovalore complesso con parte immaginaria nulla
- non ha autovalori reali
- ha esattamente due autovalori reali distinti

Figura 5.1-47

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-71)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazione
4. numero dei autovalori di una matrice triangolare inferiore e la loro molteplicità

D-L3-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

In uno spazio vettoriale V di dimensione 4 sia G un endomorfismo.

G è diagonalizzabile se:

- in V ci sono 4 autovettori di G linearmente indipendenti
- in V ci sono 2 autovettori di G linearmente indipendente
- la somma delle molteplicita geometriche degli autovalori di G vale 4
- fissate basi per ogniuno degli autospazi di G allora la loro unione è formata da 3 elementi
- G ammette esattamente 4 autovalori distinti tutti di molteplicita algebrica 1
- fissate basi per ogniuno degli autospazi di G allora la loro unione è formata da 4 elementi

Figura 5.1-48

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-57, Figura 4.2-60, Figura 4.2-63 e Figura 4.2-71)
2. giustificazione, dimostrazione e interpretazione
3. competenze relative a pensiero e ragionamento
4. una domanda del tipo ‘quando è così … ?’
5. diagonalizzazione di un endomorfismo quando si sa la dimensione del spazio vettoriale

D-L2-T3-4 (Domanda a risposta multipla)

Se una matrice A $\in$ $M_n(R)$ ha autovalori complessi a parte immmaginaria non nulla allora:

- il polinomio caratteristico di A ha grado > n
- A non è diagonalizzabile per similitudine (come matrice reale)
- il polinomio caratteristico di A ha grado < n
- A ha almeno un elemento complesso a parte immaginaria non nulla
- A non è simmetrica

Figura 5.1-49

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-53 e Figura 4.2-72)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. una matrice con autovalori complessi

D-L2-T3-3 (Domanda a risposta multipla)

4 è radice di molteplicita 2 del polinomio p(x) se e solo se:

- $p(x) = 16q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x)$ che non ammette 4 come radice
- $p(8) = 0$
- $p(x) = (x - 4)q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x)$ che ammette 4 come radice semplice
- $p(x) = (x - 4)^4q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x)$ che non ammette 4 come radice
- $p(16) = 0$
- $p(x) = 4q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x)$ che ammette 4 come radice semplice

Figura 5.1-50

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-63)
2. giustificazione e interpretazione
3. argomentazioni
4. valore della doppia implicazione ‘se e solo se’
5. la molteplicità di una radice di un polinomio

D-L2-T3-2 (Domanda a scelta multipla)

Può avere il polinomio caratteristico di una matrice A $\in$ $M_n(R)$ il grado > n?

- Si, se stiamo su C
- Si, se rk A > n
- Si, solo se A non è diagonalizzabile
- No, mai
- Si, in tal caso 0 è un autovalore
- Si, solo se sulla diagonale principale di A ce almeno un elemento uguale a zero
- Nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.1-51

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-72)
2. giustificazione, ragionamento e interpretazione
3. argomentazioni
4. il legame tra l'ordine della matrice e il grado del suo polinomo caratteristico

D-L2-T2-1 (Domanda a risposta multipla)

Siano date l'equazioni del primo, secondo, terzo e quarto grado e anchè il sistema.

1) $x^2 = 0$

2) $2x = 0$

3) $x^2\ 2x = 0$

4) $(x -)\ (1 - x) = 0$

5) $(x - 1)\ (1 - x)\ x = 0$

6) $\begin{cases} x(x-3) = 0 \\ x(x-3) = 0 \end{cases}$

7) $(x - 2)^3\ (2 - x) = 0$

Indicate le risposte giuste.

- x = 0 è l'unica radice di (1) con molteplicità di x uno
- x = 0 è la radice di (2) con molteplicità di x uno
- x = 0 è radice di (3) con molteplicità di x due
- x= 0 è la radice di (3) con molteplicità di x tre
- x = 1 è la radice di (4) con molteplicità di x uno
- (5) ha due radici x=1 con moltiplicità di x uno e x = 0 con molteplicità di x uno
- il sistema (6) non ha nessun soluzione
- (7) ha x=2 radice con molteplicità di x quatro

Figura 5.1-52

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-55 e Figura 4.2-63)
2. conoscenza oggettiva; comprensione, riconoscimento della situazione
3. argomentazioni

D-L2-T2-2 (Domanda a risposta multipla)

Dato la matrice

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ allora è vero che:

- gli autovalori della A sono: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ☐
- gli autovalori della A non sono finiti ☐
- gli autovalori della A superano l'ordine della matrice ☐
- (1, 2) è l'autovettore della A ☐
- $(1, \sqrt{2})$ è autovettore della A ☐
- u = (x, y) è autovettore della A e sono infiniti e della forma $y = \sqrt{2}\, x, y = -\sqrt{2}\, x$ ☐
- la matrice P che diagonalizza A è: $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{-\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ☐
- $m_a(\sqrt{2}) = m_a(-\sqrt{2}) = 1$, $m_g(\sqrt{2}) = 2 - rk(A - \sqrt{2}\, I) = 1$ ☐
- $m_g(-\sqrt{2}) = 2 - rk(A + \sqrt{2}\, I) = -1$ ☐
- A è diagonalizzabile ☐
- A è diagonalizzabile ortogonalmente ☐

Figura 5.1-53

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-57, Figura 4.2-60, Figura 4.2-63, Figura 4.2-61 e Figura 4.2-72)
2. applicazione in nuova situazione; giustificazione e interpretazione
3. pensiero e ragionamento
4. autovalori, autovettori, matrice diagonalizzabile e diagonalizzabile ortogonalmente

Una domanda del tipo b):

D-L3-T1-3 (Domanda a scelta multipla)

Dato un sottospazio

$W \subseteq U, W \neq \{0\}, W \neq U$ e $f: U \rightarrow U$ l'applicazione che ad un vettore v associa la sua proiezione ortogonale f (v) su W allora:

- ne 0 ne 1 sono autovalori di f ○
- 0 è un autovalore di f mentre 1 non lo è ○
- 0 e 1 sono autovalori di f ○
- 1 è autovalore di f mentre 0 non lo è ○
- nessuno dei precedenti ○

Figura 5.1-54

La domanda fa riferimento a:

1. implicazione, confrontare e trovare la soluzione

2. pensiero e ragionamento
3. uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni

Geometria 2D

G_2D-L1-T1-4 (Domanda a scelta multipla)

Quale è il coseno dell'angolo tra i vettori (0, -6, 8) e (1, 1, 1)?

- $\sqrt{3}$
- 0,5
- -11/127
- $\sqrt{3}\ /\ 15$
- $\sqrt{3/15}$
- $3\ /\ \sqrt{15}$
- altro

Figura 5.1-55

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E1 e E3 (Figura 4.2-92 e Figura 4.2-97)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione di problemi
4. angolo tra vettori

Data la seguente conica: $3x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 6y + 3 = 0$ la matrice associato alla conica è:

- $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} A & h \\ h^T & k \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} coeff. di x^2 & (coeff. di xy)/2 \\ (coeff. di xy)/2 & coeff. di y^2 \end{pmatrix}$ e $h = \begin{pmatrix} (coeff. di x)/2 \\ (coeff. di y)/2 \end{pmatrix}$

k è termine noto della equazione della conica

Figura 5.1-56

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-82)
2. comprensione della situazione
3. argomentazioni

4. matrice associata alla conica ed equazione data in forma matriciale

G_2D-L2-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

Cosa rappresentano in piano l'equazioni seguenti:

(a) $y^2 = 0$

(b) $x^2 - y^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

(a) rette parallele immaginarie coniugate	☐
(a) un punto immaginario	☐
(a) una parabola verso il basso	☐
(a) rette parallele reali coincidenti	☐
(b) solo il punto (0, 0)	☐
(b) è un insieme vuoto in R^2	☐
(b) rette reale incidenti	☐
(c) è un ellisse reale	☐
(c) è un ellisse immaginario	☐
(c) è una conica degenere	☐

Figura 5.1-57

G_2D-L3-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Sia data la conica H: $x^2 + hy^2 = h$ per h reale.

Cosa rappresenta la conica H al variare di h?

per $h < 0$ è iperbole	☐
per $h < 0$ è una conica degenere	☐
per $h > 0$ è una conica non degenere	☐
per $h > 0$ non è un ellisse	☐
per $h > 0$ è un ellisse immaginario	☐
per nessun valore di h da R H è una parabola	☐
per $h = 0$ è una conica non degenere	☐
per $h = 0$ sono rette parallele reali coincidenti	☐
per $h \geq 0$ è una conica non degenere	☐
per $h \leq 0$ è una conica degenere	☐

Figura 5.1-58

Le due domande fanno riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-80, Figura 4.2-83, Figura 4.2-100)
2. comprensione, riconoscimento della formula e situazione
3. argomentazioni
4. classificazione delle coniche

G_2D-L1-TR-5 (Domanda a risposta multipla)

Data la seguente conica ß in forma $ax^2 + by^2 + cxy + ey + f = 0$ dove A' è la matrice associato alla conica; A è la matrice della forma quadratica. Allora è vero che:

se questa conica lo porto in forma canonica i termini misti (xy) rimangano	☐
se la conica è degenere allora perde le sua fattezze curvilinie	☐
la rotazione dal punto di vista algebrico che porta ß in forma canonica corrisponde alla diagonalizzazione della matrice A	☐
la traslazione dal punto di vista algebrico che porta ß in forma canonica corrisponde al complemento dei quadrati che fa scomparire i termini lineari	☐
la conica ß è sempre una curva	☐
l'equazione di ß si può scrivere in forma: (x y 1) A' (x y 1)	☐
l'equazione della forma quadratica di ß è: F_q (ß): (x y) A $(x\ y)^T$	☐

Figura 5.1-59

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-88)
2. comprensione della situazione
3. argomentazione
4. forma canonica, conica degenere, rotazione, traslazione e forma quadratica

G_2D-L1-TR-6 (Domanda a risposta multipla)

In uno spazio Euclideo rispetto ad un riferimento cartesiano quali delle seguenti equazioni rappresentano rette aventi il vettore direzionale (2, -1, -1):

- [ ] $2x - y - z = 0$
- [ ] $\begin{cases} x = -2y + 5 \\ z = y - 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} -2x + 5y + z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$

Figura 5.1-60

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-90)
2. giustificazione e ragionamento
3. argomentazione; rappresentazione
4. vettore direzionale di una retta rappresentata in forma cartesiana e parametrica

G_2D-L2-T3-4 (Domanda a scelta multipla)

Dato la conica seguente

$\hat{W}$: $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y = -2$

La riduzione di $\hat{W}$ in forma canonica è:

- ( ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- ( ) $3x^2 + y^2 - 2x - 2y = -2$
- ( ) $\begin{cases} X = x - 1/3\sqrt{2} \\ Y = y - 1/\sqrt{2} \end{cases}$
- ( ) $9X^2 + 3Y^2 = -4$
- ( ) altro

Figura 5.1-61

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-78, Figura 4.2-84, Figura 4.2-85 e Figura 4.2-86)
2. implicazione fare ipotizzi, confrontazioni e trovare la schema della soluzione
3. competenze relative a pensiero e ragionamento

G_2D-L2-T2-2 (Domanda a risposta multipla)

Cosa rappresenta la seguente conica Þ : $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$?

- un ellisse ☐
- una parabola ☐
- un iperbolo ☐
- rette parallele ☐
- una circonferenza ☐
- un ellisse immaginario ☐
- una circonferenza immaginaria ☐

Figura 5.1-62

La domanda fa riferimento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-81)
2. comprensione, riconoscimento della formula e situazione
3. formulazione e risoluzione di problemi
4. classificazione delle coniche

Due domande del tipo b):

G_2D-L2-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

L'equazione $(a_1 + a_2 k)\, x + (b_1 + b_2 k)\, y + (c_1 + c_2 k) = 0$ dove k è un paràmetro reale rappresenta:

- un fascio improprio di rette se $a_2 = b_2 = 0$ e $c_2 \neq 0$ ☐
- sempre un intero fascio di rette proprio oppure improprio ☐
- un fascio proprio di rette se a_1, a_2, b_1, b_2 sono diversi da 0 ☐
- un fascio proprio di rette ☐
- un fascio improprio di rette ☐
- una retta nel piano se $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ ☐

G_2D-L3-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

Quali delle seguenti equazioni rappresentano circonferenze (di raggio positivo) in un piano rispetto ad un riferimento cartesiano?

- $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ ☐
- $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ☐
- $x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0$ ☐
- $4x^2 + (2y + 1)^2 - 3 = 0$ ☐
- $x^2 - y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ ☐

Figura 5.1-63

Queste domande fanno riferimento a:

1. giustificazione, ragionamento e interpretazione
2. argomentazione; formulazione e risoluzione di problemi

Geometria 3D

G_3D-L1-T3-3 (Domanda a risposta multipla)

In R^3 siano dati i piani

h : x + 11z = 19

g : y + 11z = 19

Allora è vero che:

- h è ortogonale al piano yz ☐
- h è ortogonale all'asse z ☐
- h è ortogonale all'asse x ☐
- h è ortogonale al piano xz ☐
- g è ortogonale al piano xz ☐
- g è ortogonale all'asse x ☐
- g è ortogonale al piano yz ☐
- g è ortogonale all'asse z ☐

Figura 5.1-64

G_3D-L1-T3-2 (Domanda a scelta multipla)

Il sottospazio di R^3 che rispetto ad un riferimento cartesiano ha equazioni

$$\begin{cases} x = 11 + l + 2m \\ y = -l + m \\ z = 13 \end{cases}$$

con l, m da R rappresenta:

- un piano parallela all'asse z ○
- un piano parallela al piano xy ○
- una retta parallela all'asse z ○
- una retta parallela al piano xy ○
- nessuna delle altre risposte è adeguata ○

Figura 5.1-65

Le due domande fanno riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-93 e Figura 4.2-94)
2. applicazione in nuova situazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice

G_3D-L1-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

In uno spazio Euclideo di dimensione 3 rispetto ad un riferimento cartesiano. Sia r la retta di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 11 \\ y = -13 \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in R$$

che è:

- parallela al piano xy ☐
- ortogonale al piano xy ☐
- ortogonale al piano yz ☐
- parallela all'asse z ☐
- parallela all'asse x ☐
- ortogonale all'asse z ☐

Figura 5.1-66

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-93)
2. applicazione in nuova situazione
3. argomentazioni
4. linguaggio semplice

$r \ : \ \begin{cases} y = 1 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

Se esiste una rappresentazione parametrica della retta r tale che il punto P (-3, 1, 4) si otenga per il valore del parametro t = 2 è:

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in R$

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in R$

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \end{cases}$

non esiste la retta chiesta

Figura 5.1-67

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-91)
2. comprensione della situazione
3. argomentazioni
4. equazione parametriche di una retta nello spazio che passa per un punto

$\begin{cases} 2x + 3z - 1 = 8 \\ -x - z + 1 = -6 \end{cases}$ il vettore direzionale della retta è:

$[\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}]$

$[\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}]$

$[\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}]$

$[\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}]$

$[\det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}]$

Figura 5.1-68

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-90)
2. applicazioni di procedure e algoritmi
3. formulazione e risoluzione di problemi
4. vettore direzionale di una retta nello spazio rappresentata in forma cartesiana
5. vettore messo in termini di determinanti e non dei suoi valori

G_3D-L1-T3-5 (Domanda a risposta multipla)

In uno spazio Euclideo di dimensione 3 rispetto ad un riferimento cartesiano, il sottospazio di equazione y = 13x è:

- ☐ un piano contenente l'asse z
- ☐ una retta ortogonale al piano xy
- ☐ una retta parallela all'asse z
- ☐ non esiste perche manca la coordinata z
- ☐ un piano ortogonale al piano xy
- ☐ una retta passante per l'origine

Figura 5.1-69

La domanda fa rifermento a:

1. errori tipo E3 (Figura 4.2-95)
2. applicazione in nuova situazione
3. argomentazioni

Due domande del tipo b):

G_3D-L2-T1-1 (Domanda a scelta multipla)

Siano date le due rette

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad con\ t \in R \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Individuate la risposta giusta.

- ○ sono parallele al piano ß : x + y + z = 0
- ○ sono sghembe e hanno distanza 3
- ○ hanno gli stessi vettori direzionali
- ○ si intersecano in un punto del piano y = 1
- ○ non si intersecano mai
- ○ nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.1-70

G_3D-L2-T2-2 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati i due piani Þ : x = 11 e ß : z = 12 allora:

- ○ contengono entrambi la rette $$r : \begin{cases} x = 10 \\ z = 12 \end{cases}$$
- ○ contengono entranbi la retta $$s : \begin{cases} x = 11t \\ y = 13t \\ z = 12\,t \end{cases} \quad t \in R$$
- ○ esiste una retta parallela a ß e perpendicolare ed Þ
- ○ si tagliano in una ratte con vettore direzionale (11, 12, 13)

Figura 5.1-71

Le domande fanno riferimento:

1. applicazione in nuove situazione
2. pensiero e ragionamento
3. posizione reciproca di rette e piani

In R^3 con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare

$u \bullet v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ Si consideri l'insieme:

S = {a, b, c} dove a = (1, -1, 2); b = (-1, 3, 1) e c = (-2, 1, -1)

Individuare le risposte giuste.

- [ ] a · b = -2; b · c = 4 e a ·c = -5
- [ ] a · b = -1; b · c = 5 e a · c = -10
- [ ] a · b = (-7, -3, 2)
- [ ] a · b = (-7, -6, 6)
- [ ] a x b = (-7, -3, 2)
- [ ] b x c = 5
- [ ] a x (b x c) = (8, -29, -11)
- [ ] a x (b x c) = (1, -13, -7)

Figura 5.1-72

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-23, Figura 4.2-34)
2. applicazioni di procedure e algoritmi; riconoscimento della formula e situazione
3. argomentazioni; formulazione e risoluzione di problemi
4. differenza tra prodotto scalare e vettoriale

Siano dati le rette

$$r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in R \quad , \quad s : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

i piani

$$\Pi : -x + 4y + 6z + 6 = 0 \quad e \quad \Psi : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 2t - 3s \\ z = 4 + 2t + s \end{cases} \quad t, s \in R$$

Segno $\alpha = r \wedge s$, $\beta = r \wedge \Pi$, $\gamma = r \wedge \Psi$, $\varphi = s \wedge \Pi$, $\omega = s \wedge \Psi$, $\theta = \Pi \wedge \Psi$

allora:

$\alpha = \arccos \sqrt{6/11}$

$\alpha = \arccos \sqrt{11/6}$

$\alpha = \arcsin \sqrt{6/11}$

$\alpha = \pi / 4$

$\beta = \arcsin (- 2/7 \sqrt{583})$

$\beta = \arccos (- 2/7 \sqrt{583})$

$\beta = \arcsin (- 7/ \sqrt{583})$

$\gamma = \arccos 2/11$

$\gamma = \arcsin (- \sqrt{2/11})$

$\gamma = \pi / 7$

$\varphi = \arccos (7/ \sqrt{6} \sqrt{53})$

$\varphi = \arccos (\sqrt{318} / 7)$

$\varphi = \arcsin (7/ \sqrt{6} \sqrt{53})$

$\omega = \arcsin (- 9/10 \sqrt{3})$

$\omega = \arccos (- 3 \sqrt{3} / 10)$

$\omega = \pi / 9$

$\theta = \arccos [(- 11 \sqrt{2}) / 5 \sqrt{53}]$

$\theta = \arcsin (- 22/5 \sqrt{106})$

$\theta = \arccos 12/13$

$\theta = 2\pi$

Figura 5.1-73

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-92)
2. valutazione
3. formulazione e risoluzione di problemi
4. angolo tra rette, piani, retta ed piano nello spazio, dati in forma cartesiana o parametrica

Una domanda del tipo b):

G_3D-L1-TR_2-5 (Domanda a scelta multipla)

Dato un punto P (2, - 3, 1) e la retta

$$r : \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 1 + 5t \\ z = - 3t \end{cases} \quad t \in R$$

Se esiste il piano passando per il punto P ed ortogonale ed r é:

- x - 5y - 3z = - 20
- - x = 5y = 3z - 20
- - x + 5y - 3z + 20 = 0
- $\begin{cases} x = - 1 + 2t - 4s \\ y = 16 - 11t + 13s \\ z = 11 + 7t - 5s \end{cases} \quad t, s \in R$
- non esiste il piano chiesto
- altro

Figura 5.1-74

La domanda fa riferimento a:

1. implicazione fare ipotizzi confrontazione trovare la schema della soluzione
2. competenze relative a pensiero e ragionamento
3. passaggio di un piano per un punto ed ortogonale a una retta

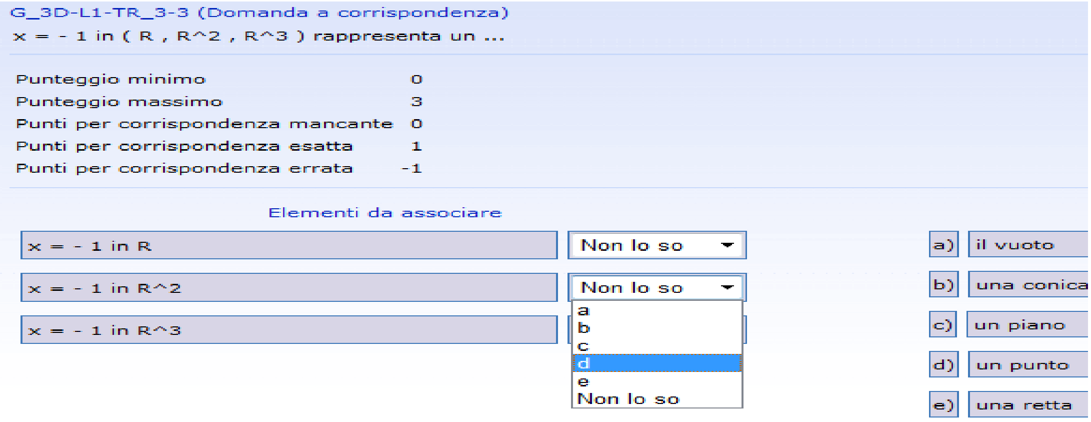


Figura 5.1-75

La domanda fa riferimento a:

1. errori di tipo E3 (Figura 4.2-94)
2. riconoscimento della situazione
3. argomentazioni

Diverse domande del tipo b):

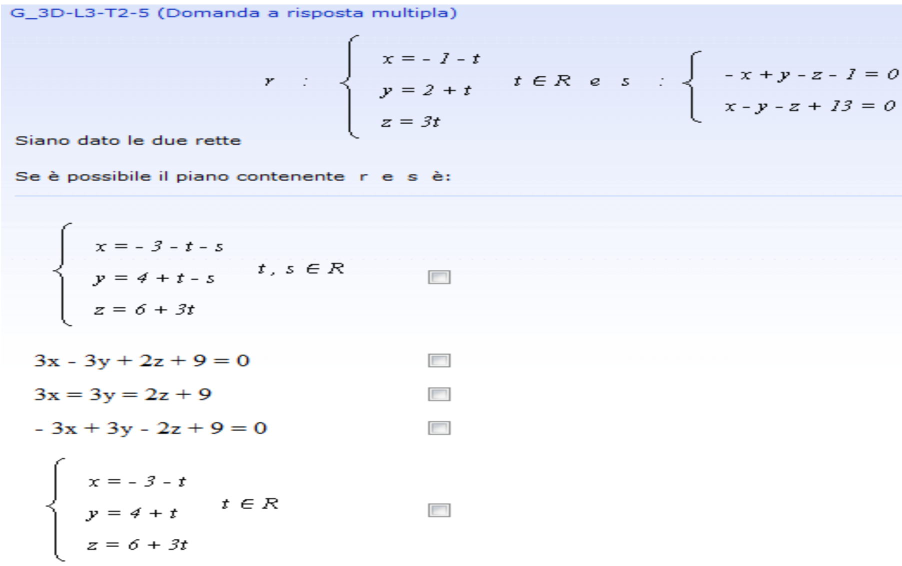


Figura 5.1-76

Il piano contenente a due rette, una rappresentata in forma parametrica e l’altra in forma cartesiana.

G_3D-L3-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

Siano dato il piano e la retta

$$\Pi \ : \ \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 1 + t - s \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad t, s \in R \qquad e \quad r \ : \ \begin{cases} -y + z = 11 \\ x + y = 19 \end{cases}$$

Se esiste un piano che passa per la retta r ed ortogonale al piano Π è:

- $x - y + 2z - 41 = 0$
- $x = y = 2z - 41$
- $2x - 2y + 4z - 82 = 0$
- $2x - y + 2z - 39 = 0$
- $\begin{cases} x = 4 - t + 5s \\ y = 1 + 3t - 2s \\ z = -3 + 2t - s \end{cases} \quad t, s \in R$

Figura 5.1-77

Il piano che passa per una retta e ortogonale a un piano.

G_3D-L3-T2-1 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati il punto P(1, 4, 1) e la retta e il piano seguente

$$r \ : \ \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad e \quad \Pi \ : \ x - 4y + z = 0$$

L'equazioni parametriche della retta s passante per il punto P incidente a r e parallela al piano sono:

- $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + z + 14 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in R$
- $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 + s \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t, s \in R$
- non esiste
- nessuna delle altre risposte è vera

Figura 5.1-78

L'equazione parametrica di una retta, passante per un punto, incidente a un'altra retta e parallelo a un piano.

G_3D-L3-T2-2 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati il piano ¶ : $x - y + z = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$$

e il punto $A = (1, 0, 1)$

Quali delle seguenti rette è parallela a ¶ ortogonale ad r e passa per il punto A:

- $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in R$
- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Figura 5.1-79

Retta parallela a un piano e ortogonale a un'altra retta che passa per un punto.

G_3D-L3-T1-3 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati le rette

$$r : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in R \qquad s : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 6 = 0 \end{cases}$$

Se è possibile trovare l'equazione della retta passando per il punto P (1, -1, 3) incidente a r ed ortogonale a s?

- $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 + 5t \\ z = 11 - 2t \end{cases} \quad t \in R$
- $\begin{cases} x - y + 6z = 13 \\ 4x + 3y - 11z = -11 \end{cases}$
- $7x = -y = -5z - 7$
- $-2x - y + 3z - 8 = 0$
- $\begin{cases} 7x + y + 5z + 7 = 0 \\ -2x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$
- non è possibile trovare l'equazione della retta
- nessuna delle altre risposte è vera

Figura 5.1-80

Retta che passa per un punto incidente a un'altra retta e ortogonale a un'altra retta.

Le ultime domande del tipo b) si riferiscono a:

- domande che non siamo partiti dagli errori
- implicazione fare ipotizzi confrontazione trovare la schema della soluzione
- competenze relative a pensiero e ragionamento

5.2 Metodologia

La metodologia costruttivista usata prevede non solo singole attività, ma si basa soprattutto sul fatto che tali attività sono simultaneamente presenti (nella stessa domanda, e nel blocco delle domande) e dalle scelte possibili delle loro mutue relazioni, sia nella fase di progettazione sia in quella di gestione dello stesse.

Le attività si concretizzano in corsi predefiniti dal docente, elaborati secondo gli standard della piattaforma IWT[1]. I corsi sono di grana differente, in corrispondenza di due fasi, che, a discrezione, possono essere usate in ordine di complessità crescente:

- **Fase *Micro***, minicorsi con test per argomento, guidato con attività opzionale;
- **Fase *Macro*,** corso completo che può essere fruito tanto in versione guidata, con percorsi a più vie in alternativa, sia in versione a scelta dallo studente con percorsi non sequenziali.

Nella **fase *micro*** i minicorsi sono organizzati secondo una struttura a più livelli, come illustrato nella figura seguente:

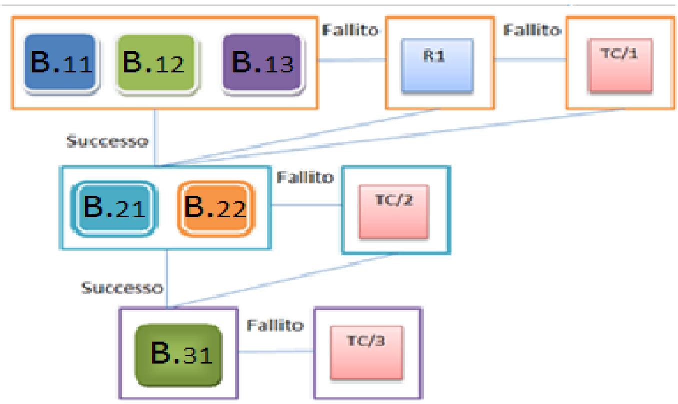


Figura 5.2-1

Per ogni argomento, abbiamo distinto due o tre livelli di difficoltà, in ordine crescente. I parametri che hanno portato alla definizione del livello di difficoltà sono stati scelti in base alla tipologia di errore, alla presenza contemporanea di più tipologie, all'uso della componente linguistica (sia in termini di verbale, simbolica, mista, sia in termini di registro – da colloquiale ad evoluto), alla natura degli stessi concetti coinvolti, al numero dei concetti trattati.

Il primo livello è diviso in due gruppi di attività (cfr. Figura 5.2-1):

- Una parte obbligatoria, costituita dai primi tre blocchi, B.11; B.12; B.13;
- Una parte opzionale, costituita da test come attività di recupero e test di comprensione (R1 e TC/1).

[1] http://www.momanet.it/index.php/it/soluzioni/e-learning-training

Nell’attività obbligatoria troviamo vari blocchi di test. I blocchi possono comprendere attività didattiche omogenee o di diversa natura: un blocco (B.--) può trattare un solo concetto (dunque omogeneo) con una o più tipologie degli errori; un altro blocco può trattare più concetti (diversa natura) con una o più tipologie degli errori. I blocchi sono di diversa granularità (cfr. Figura 5.2-7). Una stessa domanda dentro un blocco può trattare un concetto o più concetti con una o più tipologie degli errori.

L’attivita opzionale è divisa in:

- test analogo R1, solo nel primo livello;
- test di comprensione per ogni livello.

Se lo studente ha avuto esito positivo nell’attività obbligatoria, allora può accedere al livello superiore, altrimenti è guidato verso un test di comprensione. Al primo livello, dopo aver fallito la prima attività, ne viene data una analoga, per cercare di evitare l'esito negativo sia dovuto a fattori non cognitivi per (ansia, casualità, etc).

L’attività analoga R1 è stato costruito prevalentemente basandosi sulle risposte sbagliate contenute nell’attività precedente. Inoltre, viene abbassato il livello di difficoltà, viene utilizzato un registro linguistico meno sofisticato. In questo tipo di attività, abbiamo inserito anche una minima spiegazione delle risposte sbagliate, date nei test precedenti. Questa spiegazione viene ampliata e approfondita nel test di comprensione, che si pone quindi proprio come attività di apprendimento per il superamento di errori frequenti.

Dopo un test di comprensione, lo studente va al livello successivo. Questo perché l'obiettivo di questo tipo di test non è quello di valutare la conoscenza dello studente, ma quello di porre l'attenzione sulle cause dei fallimenti precedenti, dando agli studenti gli strumenti per superarli.

I test di comprensione affrontare i seguenti punti:

- *Capire il problema*. Per affrontare questo punto, il test, comprende domande volte a chiarire allo studente i dati e il testo del problema. Errori E1 ed E2 sono particolarmente affrontati: il primo tipo, per l'importanza della lettura del problema, per rendere chiaro qual è un ‘ambiente’ in cui si trova il problema; il secondo tipo, per l’importanza di poter coordinare i vari sistemi semiotici utilizzati in matematica sia per comprendere sia per risolvere. È anche importante per aiutare gli studenti a richiamare la definizione degli oggetti coinvolti nel problema e le loro proprietà, che possono essere sfruttate per ottenere la soluzione.

- *Comprendere la soluzione*. Capire perché alcune soluzioni date sono corrette. Gli errori E3 ed E4 sono più il focus in questo caso.

- *Capire perché alcune soluzioni date non sono corrette*. In questo caso, dato in un problema una soluzione non corretta, gli studenti sono tenuti a trovare la ragione della non correttezza. A un livello più basso, questo può essere fatto indicando puntualmente il pezzo errato e chiedendo spiegazioni, poi a un livello superiore, si richiede allo studente anche di individuare l'errore. Tutti i tipi di errori possono essere affrontato qui.

Passiamo ora a esaminare la **fase *macro***. Come detto, qui abbiamo sia la possibilità di percorsi guidati che liberi.

Nel primo caso le attività sono organizzate in una struttura *guidata*, corso completo con percorsi a più vie da percorrere in alternativa, come illustrato nella figura seguente:

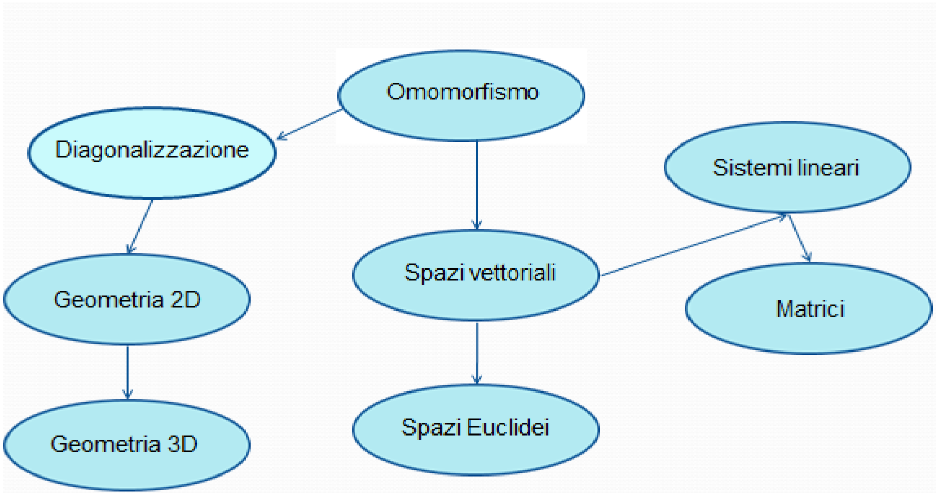


Figura 5.2-2

In questa figura i nodi rappresentano attività della fase micro, ovvero sono minicorsi come li abbiamo visti nella Figura 5.2-1.

Nel secondo caso, abbiamo una struttura *non guidata*, corso completo, con percorsi non sequenziali a scelta dallo studente, come illustrato nella figura seguente:

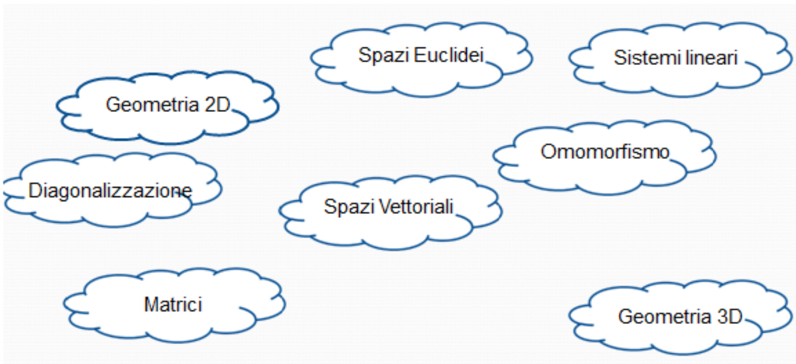


Figura 5.2-3

Le tabelle seguenti schematizzano il lavoro fatto, in termini di numero dei minicorsi, test, domande.

CORSO COMPLETTO	Pre-corso	Corso 1	Corso 2	Corso 3	Corso 4	Corso 5	Corso 6	Corso 7	Corso 8
Algebra lineare	----	Matrici	Sistemi lineari	Spazi vettoriali	Spazi euclidei	Omomor.	Diagonali.	Geo.2D	Geo.3D

Figura 5.2-4 - I minicorsi secondi gli argomenti trattati

Algebra lineare	Matrici	Sistemi lineari	Spazi vettoriali	Spazi euclidei	Omomorfi.	Diagonalizz.	Geo. 2D	Geo.3D
Test-3Do	4	1	2	6	2	2	4	3
Test-4Do	2	4	6	-	4	3	2	5
Test-5Do	1	1	-	-	1	4	3	7
Test-6Do	-	-	-	-	-	1	1	-
Test-7Do	-	-	1	-	1	-	-	-

Figura 5.2-5 - Il numero dei test secondo i minicorsi (argomenti)[2]

Algebra lineare	**Scelta multipla**	**Risposta multipla**	**Domanda a corrispondenza**
Matrici	12	16	-
Sistemi lineari	12	13	-
Spazi vettoriali	9	22	5
Spazi euclidei	4	13	-
Omomorfismo	10	27	1
Diagonalizzazione	14	31	-
Geometria 2D	9	33	-
Geometria 3D	35	32	1

CORSO COMPLETTO	Scelta multipla	Risposta multipla	Domanda a corrispondenza
Algebra lineare	105	187	7

Figura 5.2-6 - Il numero delle domande secondo i minicorsi e corso completo

[2] Test-3Do è un test con 3 domande, Test-4Do è con 4 domande e cosi via

Matrici	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	3 Test-3Do	1 Test-5Do	1 Test-2Do
II livello	2 Test-4Do	-	1 Test-2Do

Sistemi lineari	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	1 Test-3Do 1 Test-4Do	1 Test-4Do	1 Test-2Do
II livello	1 Test-4Do	-	1 Test-2Do
III livello	1 Test-5Do	-	1 Test-2Do

Spazi vettoriali	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	3 Test-4Do	1 Test-7Do	1 Test-2Do
II livello	2 Test-4Do	-	1 Test-2Do
III livello	1 Test-4Do	-	1 Test-2Do

Spazi euclidei	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	2 Test-3Do	1 Test-3Do	1 Test-3Do
II livello	1 Test-3Do	-	1 Test-2Do

Omomorfismi	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	1 Test-5Do 2 Test-4Do	1 Test-7Do	1 Test-2Do
II livello	2 Test-4Do	-	1 Test-2Do
III livello	1 Test-5Do	-	1 Test-2Do

Diagonalizzazione	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	2 Test-4Do 1 Test-5Do	1 Test-6Do	1 Test-3Do
II livello	2 Test-5Do 1 Test-4Do	-	1 Test-2Do
III livello	1 Test-5Do	-	1 Test-2Do

Geometria 2D	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	2 Test-5Do 1 Test-3Do	1 Test-6Do	1 Test-3Do
II livello	2 Test-4Do 1 Test-5Do	-	1 Test-2Do
III livello	1 Test-3Do	-	1 Test-2Do

Geometria 3D	Test	Test analogo	Test di comprensione
I livello	2 Test-5Do 3 Test-4Do	2 Test-5Do 1 Test-3Do	1 Test-4Do
II livello	2 Test-4Do 1 Test-5Do	-	1 Test-3Do
III livello	2 Test-5Do	-	1 Test-3Do

Figura 5.2-7 - numero dei test, con il numero delle domande secondo le strutture dei minicorsi

Pre-corso	Domande	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
	Scelta multipla	8	8	8	3
	Rispos.multipla	4	4	4	5

Figura 5.2-8 - numero dei test, il numero delle domande, (scelta multipla e risposta multipla) nel precorso

5.3 Struttura delle attività quiz

In questo paragrafo andiamo a esaminare la struttura che abbiamo dato ai minicorsi per ciascuna delle principali aree dell'algebra lineare: matrici, sistemi lineari, spazio vettoriale, spazio euclideo, omomorfismo, diagonalizzazione, geometria 2D e geometria 3D. Per ciascun'area andremo a vedere esempi di domande dei vari livelli.

- **Matrici**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

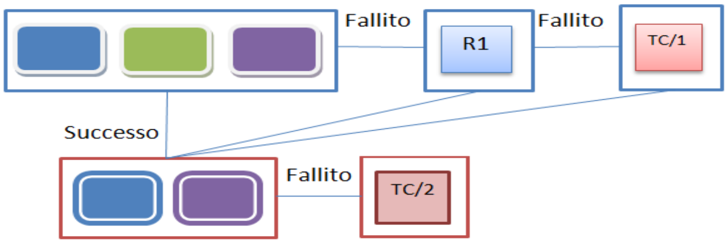


Figura 5.3-1

Al I livello troviamo una domanda del tipo mostrato nella seguente figura:

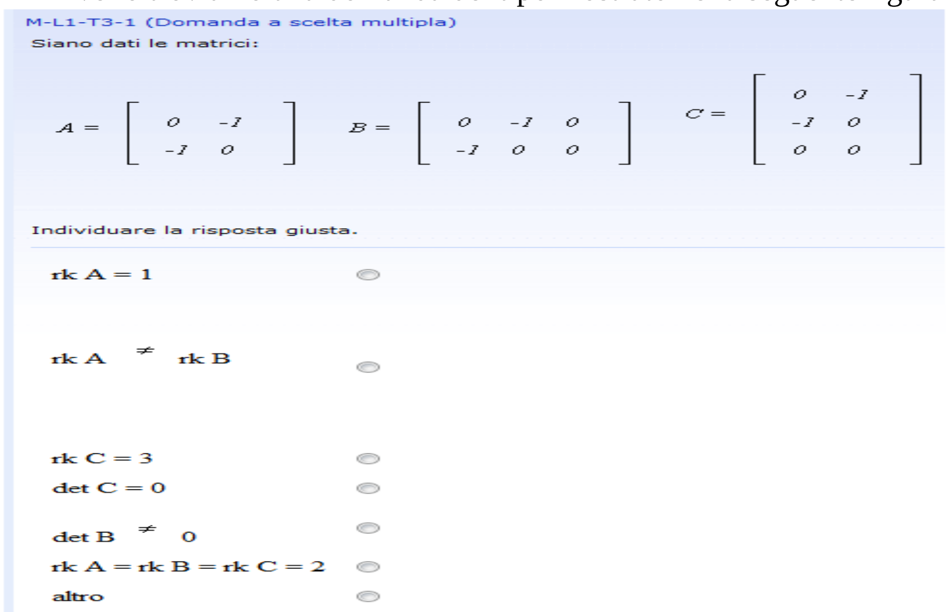


Figura 5.3-2

La domanda è stata costruita a partire da una matrice A di ordine 2 con determinante diverso da zero, a cui sono state affiancate due matrici B e C ottenute con l'aggiunta di una riga o di una colonna nulla.

I concetti in gioco sono rango e determinante: ovviamente il primo non cambia per le tre matrici, mentre il secondo ha senso solo per la prima matrice. Inoltre il det A è un minore non nullo di B e di C.

Le risposte sbagliate hanno a che fare con:

- definizione di rango e influenza della riga/colonna nulla;
- limitazioni del rango e definizione di determinante.

La domanda non è omogenea, perché mette in gioco più concetti (rango e determinante di una matrice) ed è legata a errori di tipo E3. Il linguaggio usato è simbolico.

Nell'attività analoga R1, troviamo una domanda come ad es. quella mostrata nella figura seguente:

M-L1-TR-5 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Indicare le risposte giuste.

- il determinante della matrice A è 2
- il rango della matrice B è minore uguale a 2
- il rango della matrice C è 4
- il rango della matrice C dipende dal valore del suo determinante
- solo il determinante della matrice C (essendo quadrata) si può calcolare
- se nella matrice A aggiungo nella terza riga il vettore nullo allora il determinante della A lo posso calcolare

Figura 5.3-3

Questa domanda tratta gli stessi concetti messi in gioco nel test precedente, legato alla stessa tipologia E3 degli errori. Le risposte sbagliate nel primo test qui vengono coinvolte diversamente, affiancandole con un minimo di spiegazione. Il linguaggio verbale ha sostituito quello simbolico del test precedente.

Nel test di comprensione abbiamo domande come quelle mostrate nella figura seguente:

T_C-M-L1-3 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati le matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Individuare le risposte giuste

- rk A = 2 perché $a_{11} \neq 0$ e det A $\neq 0$
- rk B non esiste perché la matrice B non è quadrata
- rk A = 1 perché $a_{11} \neq 0$ e det A = 0
- rk B = 2 perché 2 è il numero minimo tra il numero delle righe e colonne della matrice B
- In una qualsiasi matrice aggiungendo una riga o colonna il vettore nullo, il suo rango non cambia perché non cambia il valore del determinante
- rk C > rk A perché la matrice A è sottomatrice della matrice C
- rk A = rk B = rk C = 1 perché 1 è il massimo ordine di un minore non nullo della A, B e C

Figura 5.3-4

Le domande del test di comprensione differiscono dal test analogo R1 perché le risposte contengono sempre anche una spiegazione approfondita. Inoltre è da notare che questa domanda tratta solo il concetto del rango, quindi si abbassa anche il livello di difficoltà rispetto al numero di concetti coinvolti.

Passando al II livello, abbiamo domande come quella mostrata nella figura seguente:

M-L2-T1-1 (Domanda a risposta multipla)
Non esiste l'inversa di una qualunque matrice:

- del tipo 5x5
- del tipo 4x5
- ottenuta dalla matrice identica I_5 scambiandosi di riga
- ottenuta dalla matrice identica I_9 sostituendo ad una colonna la 9-upla nulla
- quadrata con le righe linearmente dipendente
- quadrata con una riga formata da numeri ugali a -99

Figura 5.3-5

Il livello della difficoltà è diverso dal primo perché per lo stesso concetto (l'inversa di una matrice) entrano in gioco più tipologie degli errori (E2 ed E3). Il linguaggio usato è prevalentemente verbale. In questo livello aumenta il numero dei concetti coinvolti (inversa di una matrice, matrice identica e quadrata, linearita dipendente, proprieta del determinante). Il livello di difficoltà è aumentato anche per l'uso della negazione 'non'.

Nella Figura 5.3-6 mostriamo un blocco del II livello:

M-L2-T1-3 (Domanda a risposta multipla)
Sia $A=(a_{ij}) \in M_5(R)$ che sicuramente |A|=0 allora:

- $\forall j \in N_n \quad a_{1j}=0$
- $\forall i \in N_n \quad a_{ii}=0$
- nella matrice A ci sono 18 elementi nulli e 7 non nulli
- $i \geq j \Rightarrow a_{ij}=0$

M-L2-T1-4 (Domanda a scelta multipla)
È nullo il determinante di:

- $\forall A \in M_4(R)$ con esattamente 15 elementi uguale a 16,28
- $\forall A \in M_4(R)$ con 8 elementi positivi e 8 elementi negativi
- $\forall A \in M_4(R)$ con esattamente 4 elementi non nulli
- $\forall A \in M_4(R)$ con una riga (colonna) con elementi tutti nulli
- nessuna delle altre risposte è giusta

M-L2-T2-4 (Domanda a scelta multipla)
Sia A una matrice reale quadrata di ordine 5. É vero che:

- se |A| =0 allora in A esiste una riga che è combinazione lineare delle altre
- |A| =0 solo se i complimenti algebrici dei elementi di quinta riga sono tutti nulli
- se |A| $\neq$ 0 allora in A non esiste alcun minore di ordine 4 avente determinante non nullo
- se |A| $\neq$ 0 allora la matrice A deve avere almeno 5 elementi non nulli
- nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-6

Questo blocco tratta un solo concetto (determinante nullo) legato a due tipologie di errori: E2 e E3. Il linguggio usato è verbale, simbolico e misto. È importante la simultaneità delle tre domande: la prima domanda chiede: ‘se una matrice ha determinante uguale a zero cosa succede’, la seconda chiede: ‘quando è nullo il determinante di una matrice’, la terza mette insieme le due richieste precedenti.

➢ **Sistemi lineari**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

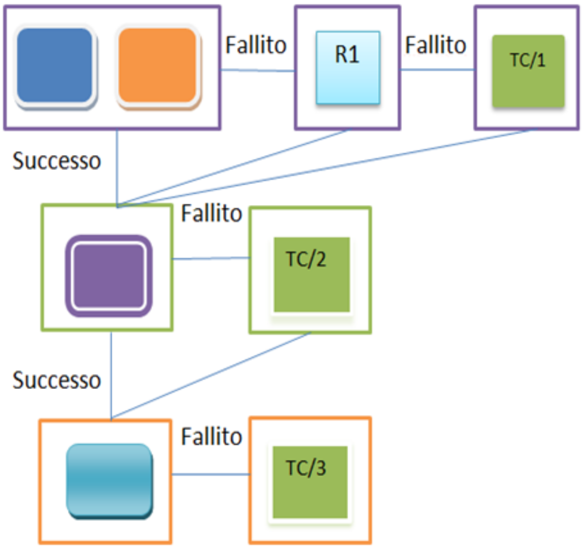


Figura 5.3-7

La Figura 5.3-8 mostra una domanda del I livello:

S_L-L1-T2-1 (Domanda a scelta multipla)
Dato il sistema lineare AX = B dove:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

allora il sistema:

- non ha soluzioni
- ha ∞^1 soluzioni perche rkA = rk (A | B) = 2
- ha una sola soluzione perche rk A = rk (A | B) = 2
- (1, -1) è tra le sue soluzioni
- ha soltanto due soluzioni

Figura 5.3-8

È una domanda focalizzata su un solo concetto (soluzione del sistema lineare) ed è legato agli errori di tipo E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con la compatibilità del sistema. Il linguaggio è più simbolico e il registro è evoluto.

La Figura 5.3-9 mostra una domanda del test analogo R1:

S_L-L1-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

Sapendo che la terna (1, 1, -1) è la soluzione del equazione AX=B dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora il sistema lineare:

- non è compatibile
- rk A = rk (A | B)
- ha l'unica soluzione che l'abbiamo verificato, risolvendo il sistema notiamo che è sola quella
- per risolverla uso Cramer
- rk A = 2
- non ha l'unica soluzione

Figura 5.3-9

Notiamo che il sistema non è 3x2 ma 3x3 (forse più facile, rispetto a quello della domanda vista prima). Nella domanda del test precedente domandiamo la compatibilità del sistema senza sapere nessuna delle sue soluzioni, invece in questo test si sa una soluzione del sistema. Il linguaggio usato è più semplice paragonato al primo test.

Nella figura seguente vediamo una domanda del test di comprensione:

T_C-SL-L1-4 (Domanda a risposta multipla)

Sapendo che la terna (a, b, c) con a, b e c da R è la soluzione di un sistema lineare.

Individuare le risposte giuste

- Il sistema non è compatibile perché non sapiamo esattamente il numero delle soluzioni del sistema
- Il sistema è compatibile perché sapiamo che il sistema ha almeno una soluzione
- Stando la terna data da R^3 allora il sistema è 3x3
- Da quanto è dato dal problema non è detto che il numero delle ingognite coincide col numero dei equazioni del sistema
- Stando la terna data da R^3 e pure una soluzione data allora il sistema ha soltanto 3 soluzioni
- Nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-10

Passiamo al secondo livello in Figura 5.3-11:

S_L-L2-T1-3 (Domanda a scelta multipla)

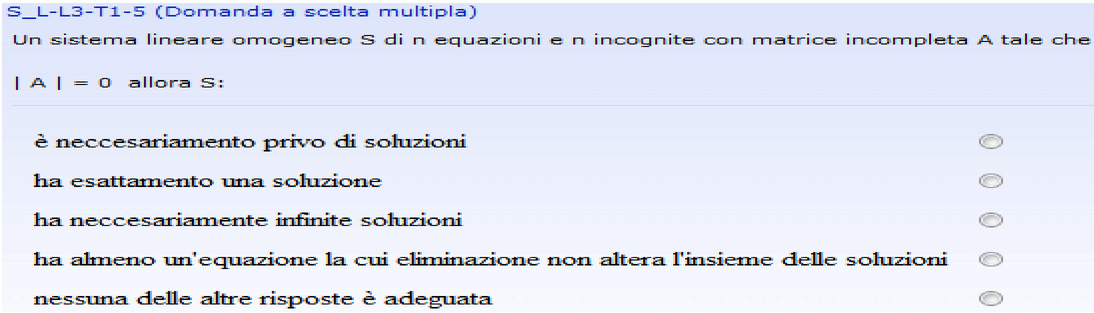
Sia AX=B un sistema lineare di m equazioni e n incognite allora è vero che:

- se n < m il sistema è sempre privo di soluzioni
- se n = m+1 il sistema ha sempre una soluzione
- se n = m si può usare sempre Crammer
- se n > m il sistema ha sempre infinite soluzioni
- il sistema ha sempre almena una soluzione se B = 0
- nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.3-11

La domanda è legata a un concetto (soluzione del sistema lineare) e a più tipologie degli errori: E2 ed E3. Il registro linguistico usato è più evoluto, usando termini ‘se’, ‘sempre’, ‘almeno’ e ‘nessuna’. Nella domanda precedente il sistema era già impostato (3x2), dunque eravano solo del caso della prima risposta di questa domanda. Qui affrontiamo anche il caso generale. La risposta 3 inganna molto, poiché è un errore ricorrente degli studenti.

Vediamo nella Figura 5.3-12 una domanda del terzo livello:


S_L-L3-T1-5 (Domanda a scelta multipla)

Un sistema lineare omogeneo S di n equazioni e n incognite con matrice incompleta A tale che

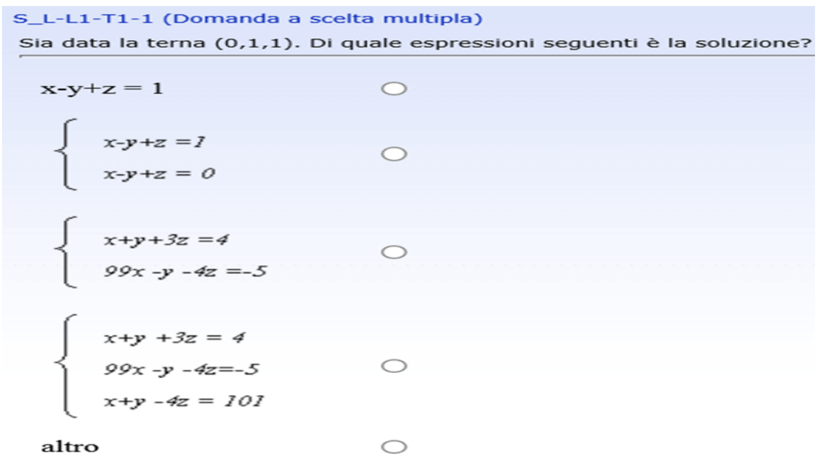
| A | = 0 allora S:

- è neccesariamento privo di soluzioni
- ha esattamento una soluzione
- ha neccesariamente infinite soluzioni
- ha almeno un'equazione la cui eliminazione non altera l'insieme delle soluzioni
- nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-12

La domanda è legata a un solo concetto (soluzione del sistema lineare) e a più tipologie degli errori: E2 e E3. Il registro linguistico usato è ancora più evoluto. Il sistema, avendo il determninate uguale a zero, inganna di più (abbiamo spesso osservato che in tali casi gli studenti non vanno a controllare la condizione di compatibilità, ma rispondono secondo una propria convinzione). La difficolta è aumentata anche dalla risposta 4, che richiede il collegamento tra rango, lineare indipendenza delle equazioni e insieme delle soluzioni.

Nel seguito vediamo un blocco omogeneo del I livello, focalizzato su numero e insieme delle soluzioni di un sistema lineare.


S_L-L1-T1-1 (Domanda a scelta multipla)

Sia data la terna (0,1,1). Di quale espressioni seguenti è la soluzione?

- $x-y+z=1$
- $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 99x-y-4z=-5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 99x-y-4z=-5 \\ x+y-4z=101 \end{cases}$
- altro

S_L-L1-T1-4 (Domanda a scelta multipla)

Il numero delle soluzioni di un sistema di equazioni che può ammette è:

- nessuna oppure il sistema è compatibile
- soltanto due
- almeno una e il sistema è compatibile
- infinite e il sistema è incompatibile
- soluzioni non reali allora il sistema è incompatibile

S_L-L1-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

Sapendo che la terna (1, 1, -1) è la soluzione del equazione AX=B dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora il sistema lineare:

- non è compatibile
- rk A = rk (A | B)
- ha l'unica soluzione sapendo che la terna data è soluzione
- ha l'unica soluzione che l'abbiamo verificato, risolvendo il sistema notiamo che è sola quella
- il sistema ha solo tre soluzioni
- il sistema è omogeneo

S_L-L1-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Uno sottospazio di R^3 è rappresentato da una sistema lineare dove le soluzioni sono una terna della forma (3, 2k, -2h) con k, h reali allora le seguenti terne sono ancora soluzione del sistema:

- (6, 2, 4)
- (3, 6, 2h) con h reale
- nella terna (3, 10, 2h) con h reale ce una sola soluzione del sistema
- (3, 2k, -2) con k reale
- (3, 2, -2) e (3, 6, -8)
- (3, 2, 0) e (3, 0, -2) usando la base canonica
- (3, 12)
- (3, 12, -12, 0)

Figura 5.3-13

➢ Spazio vettoriale

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

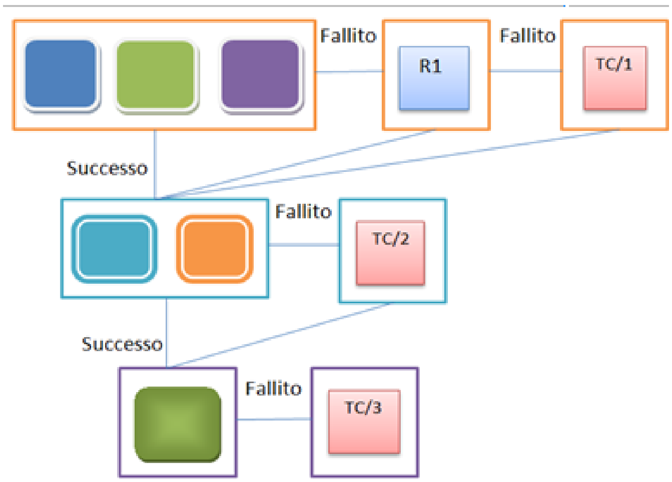


Figura 5.3-14

La Figura 5.3-15 mostra una domanda del I livello:

S_V-L1-TR-3 (Domanda a scelta multipla)

Siano u, v e w i generatori di un sottospazio vettoriale V.

Indicare la risposta giusta.

- se u, v, w sono linearmente indipendenti allora sono anche u e v
- se u, v, w sono linearmente dipendenti allora lo sono anche u e v
- se u, v, w generano V ma non sono una base allora u e v generano V
- se u, v, w generano V allora dimV = 3
- la dim V^{ort} non dipende se lo sottospazio V di quale spazio ci appartiene
- nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-15

La domanda verte su più concetti legati a errori di tipo E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con basi e dimensione di un sottospazio vettoriale, $\dim V^{\perp}$, e lineare dipendenza. Il linguaggio usato è semplice.

La figura seguente mostra una domanda del test analogo:

S_V-L1-T1-4 (Domanda a risposta multipla)

Dato il sottospazio:

V = < (-1, -4, 0, 1), (-1, 0, 0, -2) >

Indicare le risposte giuste.

- i generatori di V sone due vettori linearmente dipendenti
- V è appartente in R^2 perché V ha due generatori
- i vettori di V stanno in R^4 allora V $\subseteq$ R^4
- V non è rappresentata in forma cartesiana
- i generatori di V non sono proporzionali
- stando i generatori di V linearmente indipendenti , la base sua è gli stessi generatori di V
- dim V = 4
- dim V + dim V^{ort} = 4 . dim V = 2 e dim V^{ort} = 2

Figura 5.3-16

La domanda tratta gli stessi concetti messi nel test precedente, legati alla stessa tipologia E3 degli errori. Le risposte sbagliate nel primo test qui sono presenti con un minimo di spiegazione. Il linguaggio usato è semplice.

Al II livello troviamo domande come quella mostrata in Figura 5.3-17:

S_V-L3-T1-2 (Domanda a scelta multipla)

Nello spazio vettoriale V dei polinomi in x a coefficienti reali di grado $\leq$ 3

l'insieme {x, 3x + x^2, 6x^2 + 5, 4x^2} è:

- linearmente indipendente
- un sistema di generatori di V
- linearmente dipendente
- una base di V
- nessuna delle altre risposte è giuste

Figura 5.3-17

La domanda tratta più concetti legati alle stesse tipologie degli errori E3. Rispetto al primo livello vengono messi in gioco altri concetti come ‘quando un insieme è linearmente dipendente, indipendente, quando forma una base', etc. Inoltre lo spazio vettoriale non è uno spazio numerico ma è uno spazio di polinomi.

Di seguito mostriamo una domanda del test di comprensione:

Sia dato il sottospazio vettoriale di R^3

$H = < u_1, u_2, u_3 >$ dove $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 2, 6)$ e $u_3 = (2, 4, 6)$

Individuare le risposte giuste

- u_1 e u_2 sono vettori linearmente indipendenti perché non esistono scalari k_1 e k_2 diverso da zero da R tale che $k_1u_1 + k_2u_2 = 0$
- u_2 e u_3 sono vettori linearmente indipendenti perché $rk \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 1$
- u_1 e u_3 sono vettori linearmente dipendenti perché sono proporzionali $2u_1 = u_3$
- u_1 e u_3 sono linearmente indipendenti perché esistono i scalari $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$ tale che $k_1u_1 + k_2u_3 = 0$
- L'insieme H è linearmente dipendente perché contiene vettori linearmente dipendenti che sono u_1 e u_3
- $B = (u_1, u_2)$ è una base del sottospazio H perché a) B è un insieme linearmente indipendente infatti $k_1(1, 2, 3) + k_2(1, 2, 6) = 0 \Rightarrow (k_1, k_2) = 0$ e b) B è un sistema di generatori infatti per $(5, 10, 21)$ da H esiste $k_1 = 3, k_2 = 2$ / $(5, 10, 21) = 3(1, 2, 3) + 2(1, 2, 6)$
- $B_1 = (u_1, u_2)$ e $B_2 = (u_2, u_3)$ sono basi del sottospazio H ma non hanno lo stesso numero di vettori
- $B = (u_1, u_3)$ è una base del sottospazio H perché contiene vettori linearmente dipendenti

Figura 5.3-18

In Figura 5.3-19 una domanda del III livello, che richiede una base dell'intersezione di due sottospazi a partire dai generatori dei due spazi, utilizzando solo il linguaggio simbolico:

S_V-L3-T1-4 (Domanda a scelta multipla)

Siano G e H i seguenti sottospazi di R^4

$G = < (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) >$

$H = < (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) >$

$U = G \cap H$ allora una base di U è:

- $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
- $\{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$
- $\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$
- $\{(0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$

Figura 5.3-19

Vediamo nel seguito un blocco di domande:

S_V-L1-T2-4 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato lo sottospazio vettoriale V = < (0, 0), (-3, 4), (1, 2) > allora è vero che:

- i generatori di V sono in R^3
- V $\subseteq$ R^2
- i generatori di V sono linearmente dipendenti
- la dim V = 3 perché il numero di generatori di V è 3
- la dim V = 2 perché nei generatori di V si trovano due vettori linearmente indipendenti
- la base di V ha due vettori ed il vettore (0, 0) non può fare mai parte di una base

S_V-L1-T2-2 (Domanda a risposta multipla)

Sia B = (w_1, w_2, w_3) una base di uno spazio vettoriale V.

Individuare le risposte giuste.

- stando il vettore nullo linearmente dipendente con ogni vettore allora w_1 può essere il vettore (0, 0)
- la base è un insieme linearmente indipendente ed il vettore nullo che è linearmente dipendente con ogni vettore non può essere mai appartenente nella base B
- B è un sistema massimale di vettori linearmente indipendente di V
- B è un sistema massimale di generatori di V
- nessuna delle altre risposte è adeguata

S_V-L1-T2-1 (Domanda a risposta multipla)

Siano dati le due espressioni:

$A \cap B = \Phi$ e $C \cap D = \{ 0 \}$ dove A, B, C e D sono spazi vettoriali.

Indicare le risposte giuste.

- dim $(C \cap D)$ non esiste
- dim $(C \cap D) = 0$
- dim $(C \cap D) = \{ 0 \}$
- stando $A \cap B = \emptyset$ allora non si può parlare di dim $A \cap B$
- stando $A \cap B = \emptyset$ allora la dim $A \cap B = 0$
- $A \cap B$ è un insieme che non contiene elementi
- l'insieme $C \cap D$ è linearmente dipendente

Figura 5.3-20

Il focus della prima domanda sta nella presenza del vettore nullo tra i generatori del sottospazio dato V, e di come questo impatta sul calcolo di una base di V e quindi della dimensione di V. Invece nella seconda domanda, il focus è invertito: data una base, si richiede se il vettore nullo può appartenere alla base. Lo scopo della terza domanda è di fare notare la differenza tra l'insieme vuoto e il vettore nullo.

- **Spazio euclideo**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

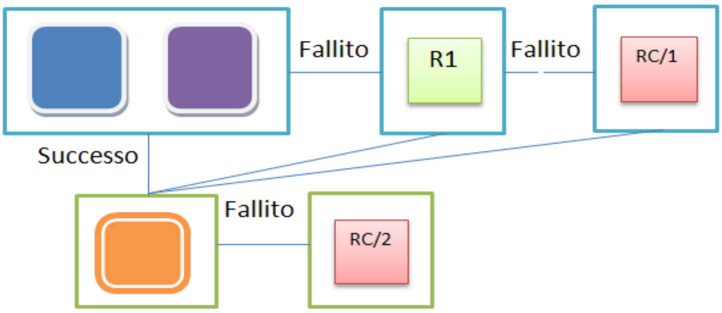


Figura 5.3-21

La Figura 5.3-23 mostra una domanda del I livello:

S_E-L1-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

In un spazio euclideo sia dato il seguente prodotto scalare:

$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ dove $u = (1, 0, -1)$ e $v = (-1, 3, -4)$

Individuare le risposte giuste.

- $u \cdot v = 3$
- $u \cdot v = 11$
- $u \cdot v = (-1, 0, 4)$
- $|u| = 2$
- $u \cdot v = -3$
- $|v| = 26$

Figura 5.3-22

La domanda mette in gioco più concetti legati a più tipologie di errori, E1 ed E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con prodotto scalare di due vettori e la norma di un vettore. Il linguaggio usato è simbolico.

La Figura 5.3-23 mostra una domanda del test analogo:

S_E-L1-T2-1 (Domanda a risposta multipla)

In un spazio euclideo sia dato il seguente prodotto scalare:

$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ dove $u = (1, 0, -1)$ e $v = (-1, 3, -4)$

Individuare le risposte giuste.

- la norma di un vettore non può essere negative
- il prodotto scalare è sempre un numero non negativo
- il prodotto scalare di due vettori non può risultare zero
- la norma di un vettore è la distanza del vettore stesso dal vettore nullo
- $u \cdot v = 3$ non è vero perché non ho usato il prodotto scalare dato
- $|v| = 26^{1/2}$ è vero perché ho usato il prodotto scalare standard

Figura 5.3-23

Questa domanda tratta gli stessi concetti messi nel test precedente, legati alla stessa tipologia E1 ed E3 degli errori. Le risposte sbagliate nel primo test vengono riportate insieme a un minimo di spiegazione. Il linguaggio usato è semplice e verbale, sostituendo quello simbolico del test precedente.

La Figura 5.3-24 mostra una domanda del test di comprensione:

T_C-SE-L1-4 (Domanda a risposta multipla)

In R^3 con la struttura di spazio euclideo siano dati i seguenti prodotti scalari:

a) $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$

b) $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Individuare le risposte giuste

- Per a) bisogna dimostrare chè è davvero un prodotto scalare invece per b) no che è ovvio che è un prodotto scalare essendo quello standart (canonico)
- a) e b) sono prodotti scalari dato dal quesito
- a) e b) sono prodotti scalari diversi perché sono definiti con due regole diverse
- a) è un prodotto scalare standart (canonico) come la b) perché ogni prodotto scalare è quello standart
- b) è un prodotto scalare in uno spazio euclideo perché gode le quattre proprieta del prodotto scalare
- In R^3 è possibile definire infiniti prodotti scalari dove uno di questi può essere la b)
- Nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-24

Passando al II livello, vediamo un esempio di domanda in Figura 5.3-25:

S_E-L2-T1-1 (Domanda a risposta multipla)

In R^3 con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$h \cdot g = (h_1, h_2, h_3)(g_1, g_2, g_3) = h_1g_1 + 2h_2g_2 + 2h_3g_3$ si consideri l'insieme $G = \{(1, 0, -1), (2, -1, 1), (2, 1, 0)\}$

e un vettore $u = (2, 0, 1)$

Allora è vero che:

- G non è una base di R^3
- G è un insieme ortogonale
- una base ortonormale B a partire da G è: $\{(1/3, -1, -1/3), (2, -1/8, 1/8), (1/6, 6/4, 1/12)\}$
- $\left\{ (1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3}), (2/\sqrt{8}, -1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}), (1/\sqrt{6}, \sqrt{6}/4; \sqrt{6}/12) \right\}$ è una base ortonormale B a partire da G
- le componenti del vettore u rispetto alla base ortogonale B a partire da G sono: $C_B(2, 0, -1) = (4/3, 2/13, 3/7)$
- le componenti del vettore u rispetto alla base ortogonale B a partire da G sono: $C_B(2, 0, -1) = (4/\sqrt{3}, 2/\sqrt{8}, \sqrt{6}/6)$

Figura 5.3-25

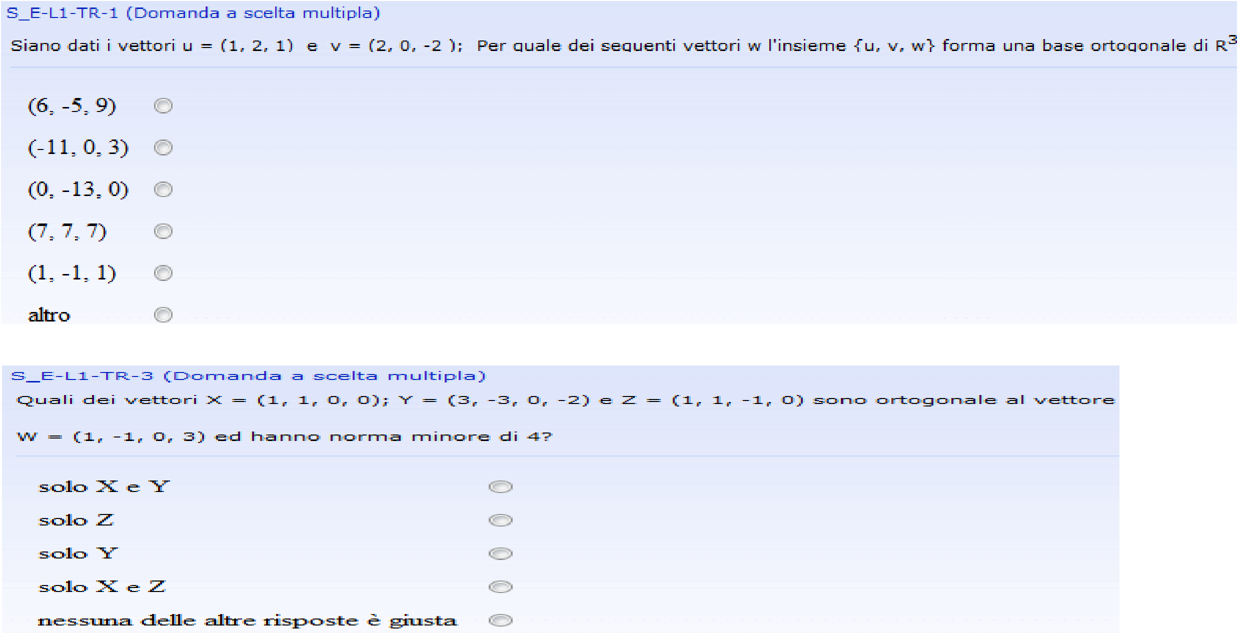
La domanda mette in gioco più concetti (base, base ortonormale, componenti di un vettore rispetto a questi basi) legati a più tipologie degli errori, E1, E2, E3 e E4.

Di seguito mostriamo un blocco di domande:

S_E-L1-T2-3 (Domanda a scelta multipla)

Per quale valore di w i vettori (2, 5, w + 2, 3) e (4, w, -3, w) sono ortogonali?

- -11
- -3/5
- -0,8
- -4/10
- -1/5
- altro



S_E-L1-TR-1 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati i vettori u = (1, 2, 1) e v = (2, 0, -2); Per quale dei seguenti vettori w l'insieme {u, v, w} forma una base ortogonale di R^3

- (6, -5, 9)
- (-11, 0, 3)
- (0, -13, 0)
- (7, 7, 7)
- (1, -1, 1)
- altro

S_E-L1-TR-3 (Domanda a scelta multipla)

Quali dei vettori X = (1, 1, 0, 0); Y = (3, -3, 0, -2) e Z = (1, 1, -1, 0) sono ortogonale al vettore W = (1, -1, 0, 3) ed hanno norma minore di 4?

- solo X e Y
- solo Z
- solo Y
- solo X e Z
- nessuna delle altre risposte è giusta

Figura 5.3-26

Le domande sono omogenee, tutte trattano il concetto d'insieme ortogonale. La prima e la terza domanda chiedono quando due a tre vettori sono ortogonali, la seconda chiede quando un insieme è una base ortogonale.

➢ **Omomorfismi**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

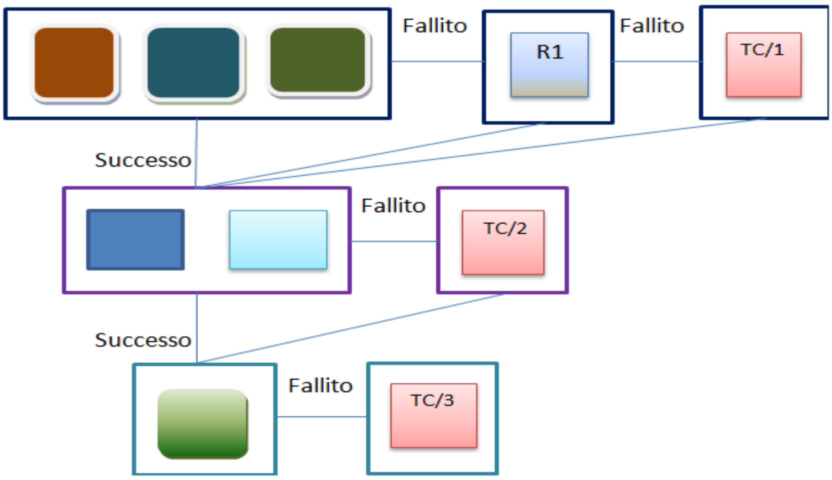


Figura 5.3-27

Nelle due figure seguenti sono mostrate una domanda rispettivamente di I livello e di II livello:

O-L1-TR-5 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato un applicazione f tale che:

f (a, b) = (a + b, a, a - b)

Indicare le risposte giuste.

- il dominio di f è in R^2 ☐
- f è suriettivo ☐
- $Im\, f \subseteq R^2$ ☐
- f è definita da $R^3 \longrightarrow R^2$ ☐
- dim Im f = { 2 } ☐
- dim ker f = 1 ☐
- dim ker f = {0} ☐

Figura 5.3-28

O-L2-T1-2 (Domanda a risposta multipla)

In un qualsiasi omomorfismo f : V → V ' non è possibile che sia:

- dim ker f > dim V ' ☐
- dim Im f > dim V ' ☐
- dim ker f > dim Im f ☐
- dim ker f < dim Im f ☐
- dim V > dim V ' ☐
- dim Im f > dim V ☐

Figura 5.3-29

La domanda del I livello mette in gioco più concetti legati a più tipologie degli errori E2, E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con applicazione suriettiva, la definizione di f, dim ker f e dim Imf. Il linguaggio usato è semplice, misto (verbale e simbolico). Invece la domanda del II livello mette in gioco più concetti legati a più tipologie degli errori e sbagli, E1, E3 e S2. Notiamo, al posto di 'applicazione' è stato messo 'omomorfismo'. Il linguaggio è soltanto simbolico. Il livello di difficoltà è aumentato anche per l'uso della negazione 'non'.

La Figura 5.3-30 mostra una domanda del test analogo:

O-L1-TR-4 (Domanda a risposta multipla)

Sia dato un applicazione f tale che:

$$f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \\ a-b \end{bmatrix}$$

E' vero che:

- il dominio di f è in R^3 ☐
- la matrice che rappresenta l'omomorfismo è: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ☐
- senza sapere che f è iniettivo oppure suriettivo e stando f definito da: $R^2 \longrightarrow R^3$, dico subito che f non è isomorfismo perché dim $R^2 \neq$ dim R^3 ☐
- se l'omomorfismo f è rappresentato in altro forma matriciale: f (a, b) = (a+b, a, a-b) non cambia niente ☐
- $Im\, f = < f\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$ ☐
- f è iniettivo perché dim ker f = 0 ☐
- f non è suriettivo perché dim Imf è diverso da 3 ☐

Figura 5.3-30

Questa domanda tratta gli stessi concetti del test precedente, legati alla stessa tipologia E2 ed E3 degli errori. Le risposte sbagliate nel primo test qui vengono corredate di un minimo di spiegazione.

Il linguaggio usato è semplice e verbale, al posto di quello simbolico del test precedente. Cambiando la forma della rappresentazione di f forse la difficoltà si abbassa.

Di seguito una domanda del test di comprensione:

Sia f : $R^3 \to R^2$ l'endomorfismo tale che f (x, y, z) = (x + y, x)

Individuare le risposte giuste

Im f = < (1, 1), (1,0), (0, 0) > perché i generatori di Im f sono le colonne della matrice rappresentativa di f che è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Im f = < (1, 1, 0), (1, 0, 0) > perché i generatori di Im f sono le righe della matrice rappresentativa di f

La base di Im f = {colonne linearmente indipendenti della matrice rappresentativa di f }= {(1, 1), 1, 0)}

$$\ker f: \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \left\{ (0,\ 0,\ z)\ /\ z \in R \right\}$$

Una base di ker f è {(0, 0, 1)}

ker f è rappresentato dall'equazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dim Im f = 2 perché 2 è il numero dei vettori linearmente indipendenti di Im f

dim ker f = 1 perché 1 è il numero dei parametri del soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice rappresentativa di f

f è iniettivo perché dim ker f è diverso da zero

f è suriettivo perchè dim Im f = 2 = dim R^2 dove R^2 è il codominio di f

Figura 5.3-31

Nella figura seguente passiamo a vedere una domanda del III livello:

O-L3-T1-1 (Domanda a risposta multipla)

Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo K e

f : V → W è un omomorfismo allora è vero se:

dim (Im f) = k, la matrice associata ad f rispetto a base qualsiasi ha rango k

dim V = 7 e dim W = 3, la dim ker f $\geq$ 4

risulta che f (0) = 0, l'omomorfismo è iniettivo

solo l'omomorfismo è iniettivo, risulta che f (0) = 0

dim V < dim W, f è iniettiva

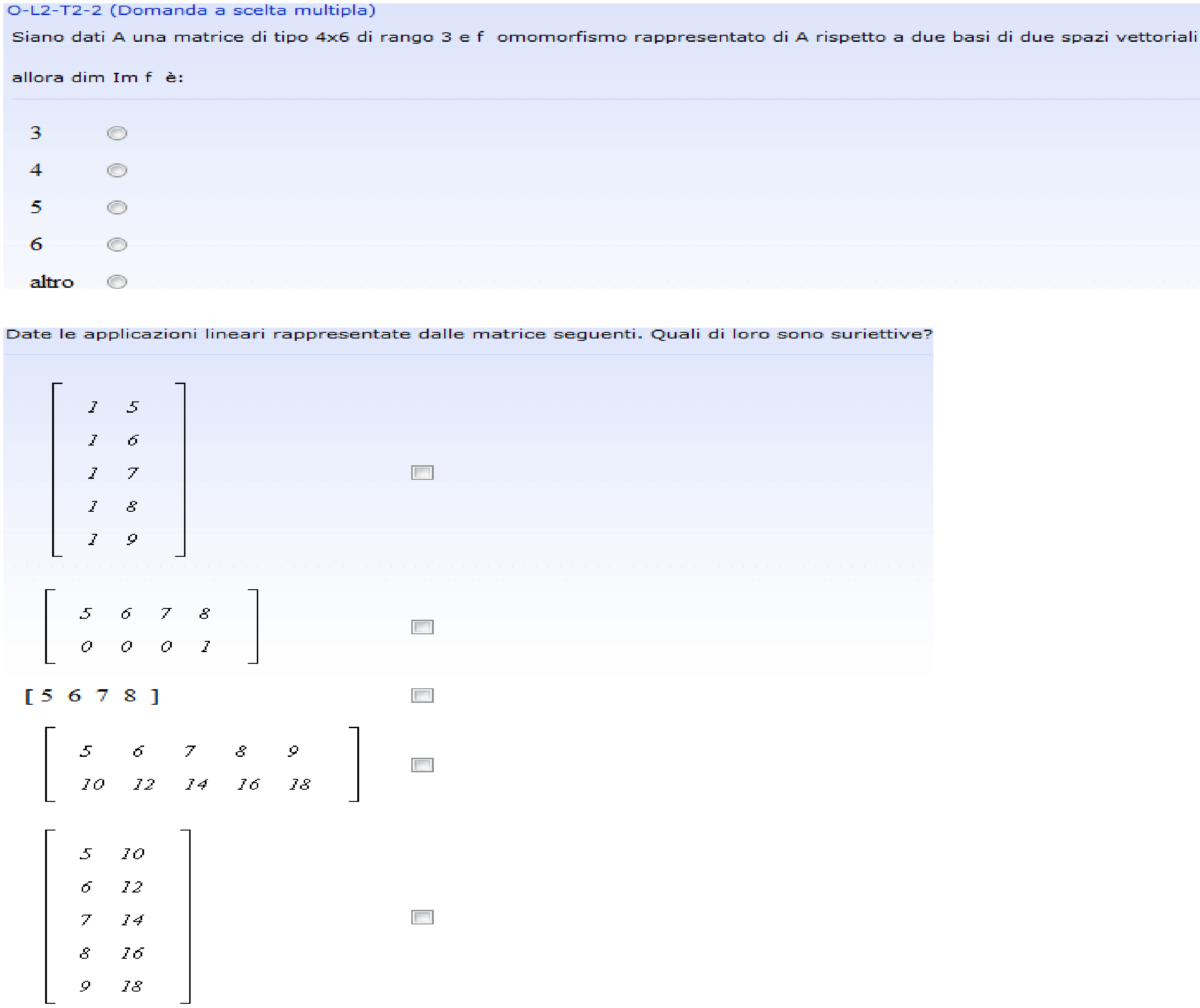
dim V = dim W, f è un isomorfismo

dim V > dim W, f è suriettiva

Figura 5.3-32

Nella domanda si mettono in gioco più concetti legati a diverse tipologie degli errori E2, E3 ed E4. Notiamo che aumenta anche il numero dei concetti rispetto ai livelli precedenti (cfr. per esempio le risposte 1, 3, 4 e 6). La parola 'se' è messa nella domanda e non nelle risposte: forse la difficoltà cresce a livello linguistico.

Vediamo di seguito un blocco di domande:



O-L2-T2-2 (Domanda a scelta multipla)

Siano dati A una matrice di tipo 4x6 di rango 3 e f omomorfismo rappresentato di A rispetto a due basi di due spazi vettoriali allora dim Im f è:

- 3
- 4
- 5
- 6
- altro

Date le applicazioni lineari rappresentate dalle matrice seguenti. Quali di loro sono suriettive?

- $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $[\,5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8\,]$
- $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \\ 7 & 14 \\ 8 & 16 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$

Figura 5.3-33

Nella prima domanda dim Imf sapendo il rango di una matrice rappresentativa, la seconda ancora verte su dim Imf, attraverso la richiesta di suriettività, date alcune matrici rappresentative dell'omomorfismo. Nello stesso blocco ci sono anche domande simili su dim ker f e sull'iniettività.

- **Diagonalizzazione**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

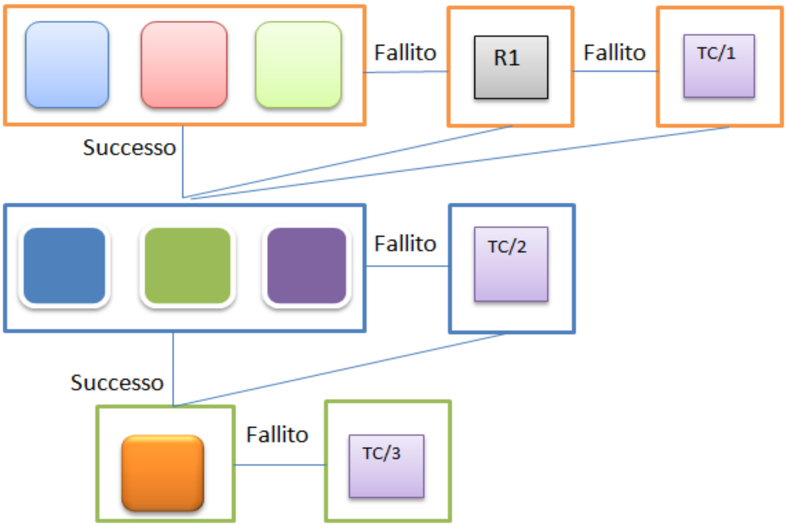


Figura 5.3-34

Nella Figura 5.3-35 mostriamo una domanda del I livello:

D-L1-T3-2 (Domanda a scelta multipla)

$$Sia\ A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Quale dei seguenti insiemi è una base dell'autospazio associato all'autovalore 6?

- {(1, 0, 1), (0, 1, 0)}
- {(1, 0, 1)}
- {(0, 1, 0), (-1, 0, 1)}
- {(0, 1, 0)}
- {(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)}
- altro

Figura 5.3-35

La domanda riguarda gli autospazi ed è legata a un errore di tipo E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con la molteplicità algebrica dell'autovalore 6, la rappresentazione dell'autospazio e le sue base. Il linguaggio usato è soltanto simbolico.

Nella Figura 5.3-36 vediamo una domanda del test analogo:

Data la matrice: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Individuare le risposte giuste

gli autovalori della matrice A sono: $w_1 = 0$ e $w_2 = 3$

gli autovalori della matrice A non sono distinti

l' autospazio relativo al autovalore $w_2 = 3$ è:

$$V_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2t, t) \ \forall t \in R$$

Una sua base è {(-2, 1)}

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

la molteplicità algebrica dell'autovalore 3 è 1

nessuna delle altre risposte è giuste

Figura 5.3-36

Questa domanda mette in gioco lo stesso concetto del test precedente, legata alla stessa tipologia E3 degli errori. Le risposte sbagliate del primo test qui vengono riportate diversamente e con un minimo di spiegazione. Il linguaggio usato è semplice e verbale, mentre nel test precedente era soltanto simbolico. Notiamo che qui nelle risposte troviamo anche suggerimenti per la soluzione. Infine, nel primo test era data una matrice 3x3 qua abbiamo messo una matrice 2x2.

La Figura 5.3-37 mostra una domanda del II livello:

Dato la matrice

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ allora è vero che:

gli autovalori della A sono:

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

gli autovalori della A non sono finiti

gli autovalori della A superano l'ordine della matrice

(1, 2) è l'autovettore della A

$(1, \sqrt{2})$ è autovettore della A

u = (x, y) è autovettore della A e sono infiniti e della forma

$y = \sqrt{2}\, x,\ y = -\sqrt{2}\, x$

la matrice P che diagonalizza A è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Figura 5.3-37

La domanda mette in gioco più concetti rispetto al livello prcedente (autovalori, autovettori, la matrice che diagonalizza la matrice A ecc.) legati a più tipologie degli errori E3 ed E4.

Di seguito vediamo una domanda del test di comprensione:

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Individuare le risposte giuste

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(w) = det\,(A - wI) = det \begin{bmatrix} -1-w & 3 \\ 5 & 1-w \end{bmatrix} = -(1+w)(1-w) - 15 = w^2 - 16$$

Il polinomio caratteristico di A è $w^2 - 16$ allora la matrice A ha un solo autovalore doppio che è $w = 4$

Gli autovalori di A sono dati dagli zeri del suo polinonimo caratteristico allora $w^2 - 16 = 0 \Rightarrow w_1 = 4$ e $w_2 = -4$

Gli autospazi relativi agli autovalori di A sono:$V_4 = \{u \in R^2 / (A - 4I)\, u = 0\}$ e $V_{-4} = \{u \in R^2 / (A + 4I)\, u = 0\}$

$$V_4 : \begin{cases} -5x + 3y = 0 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, 5t/3)\ \forall t \in R$$

Una sua base è $B_4 = \{(3, 5)\}$

$$V_{-4} : \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, -t)\ \forall t \in R$$

Una sua base è $B_{-4} = \{(1, -1)\}$

Figura 5.3-38

Passiamo al III livello in Figura 5.3-39:

D-L3-T1-4 (Domanda a risposta multipla)

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, u e v due suoi autovettori associato agli autovalori x_u e x_v allora:

u e v sono anche autovettori di $f \circ f$

$u + v$, $u - v$ sono autovettori

$u + v$ è autovettore $\Leftrightarrow x_u + x_v \neq 0$

se $u + v$ è autovettore allora $x_u = x_v$

Figura 5.3-39

La domanda mette in gioco diversi concetti (composizione dell’endomorfismo, autovalori, autovettori, la somma e diferenza di loro etc.) ed è legata a diverse tipologie degli errori E2, E3 ed E4. Il registro linguistico usato è evoluto.

Nella figura seguente mostriamo un blocco di domande:

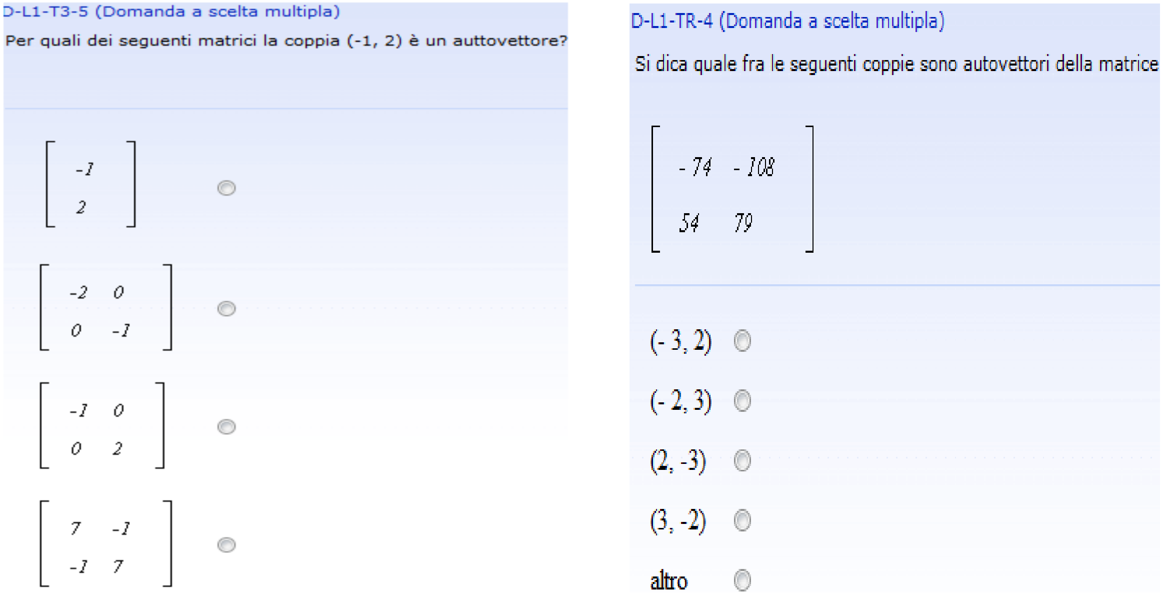


Figura 5.3-40

Le due domande mostrate hanno richiesto un'inversa all'altra: dato un vettore, individuare la matrice di cui è autovettore; viceversa, data una matrice, individuare quale tra quell dati ne è autovettore. In questo blocco troviamo domande simili che riguardano gli autovalori.

- **Geometria 2D**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

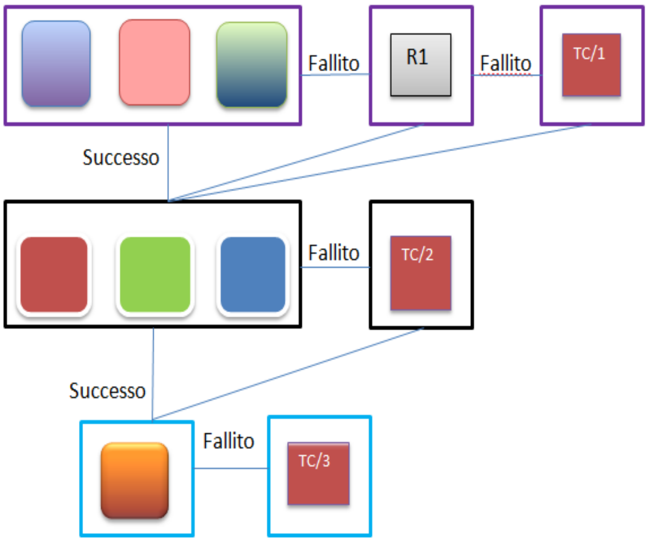


Figura 5.3-41

Nelle due figure seguenti vediamo una domanda del test rispettivamente di I livello e del test analogo.

G_2D-L3-T1-3 (Domanda a risposta multipla)

Sia data la conica H: $x^2 + hy^2 = h$ per h reale.

Cosa rappresenta la conica H al variare di h?

- per $h < 0$ è iperbole
- per $h < 0$ è una conica degenere
- per $h > 0$ è una conica non degenere
- per $h > 0$ non è un ellisse
- per $h > 0$ è un ellisse immaginario
- per nessun valore di h da R H è una parabola
- per $h = 0$ è una conica non degenere
- per $h = 0$ sono rette parallele reali coincidenti
- per $h \geq 0$ è una conica non degenere

Figura 5.3-42

G_2D-L1-T2-5 (Domanda a risposta multipla)

Cosa rappresentano in piano l'equazioni seguenti?

(1) $x^2 = 0$

(2) $x^2 + y^2 = 0$

(3) $x^2 - y^2 = 0$

- (1) rette parallele reali distinte
- (1) rette parallele reali coincidenti
- (1) è un punto reale
- (2) una circonferenza con centro (0, 0)
- (2) rette immaginarie incidenti in un punto reale
- (2) rette reali incidenti
- (3) solo il punto (0,0)
- (3) una coppia di rette parallele
- (3) rette reali incidenti
- (3) due rette $y = x$, $y = - x$ che si intersecano in (0, 0)

Figura 5.3-43

La prima domanda mette in gioco più concetti legati a diverse tipologie degli errori E2 ed E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con la classificazione delle coniche (degenere e non, tipi). Il linguaggio è semplice, misto, più verbale che simbolico.

La domanda del test analogo mette in gioco gli stessi concetti del test precedente, ed è legata alla tipologia E3 degli errori. Nel primo test trattiamo un caso di conica con parametro, mentre nel secondo caso chiediamo che tipo di coniche sono quelle date: in entrambi i casi si tratta della classificazione, dapprima nel caso generale e poi in casi particolari. Il linguaggio usato è semplice e solo verbale.

Una domanda del test di comprensione:

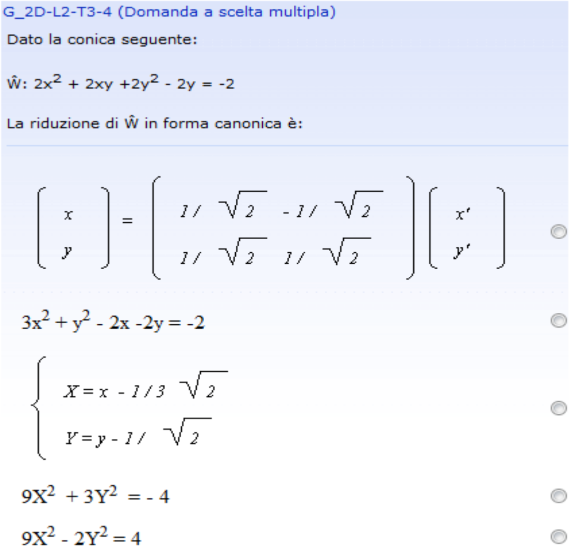
Data la seguente conica G : $-2kxy + 4x = 1$ con k da R

Individuare le risposte giuste

- La matrice associato alla conica è $A' = \begin{pmatrix} 0 & -k & 2 \\ -k & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\det A' = -\det \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = k^2$ e $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -k^2$
- Il valore di det A è sempre negativo per ogni k da R allora G è sempre una iperbole
- Per $k = 0$ det $A = 0$ allora la conica è degenere
- Per $k \neq 0$ la conica G è una iperbole perché det $A < 0$
- Per $k = 0$ det $A' = 0$ e det $A = 0$ allora G rappresenta rette parallele distinte perché $|A'_{11}| + |A'_{22}| < 0$ dove A'_{11} e A'_{22} sono le matrice subordinate di A' cancellando rispettivamente la prima colonna e la prima riga e la seconda riga e seconda colonna

Figura 5.3-44

Nelle figure seguenti, vediamo due domande rispettivamente di II livello e di III livello.


G_2D-L2-T3-4 (Domanda a scelta multipla)

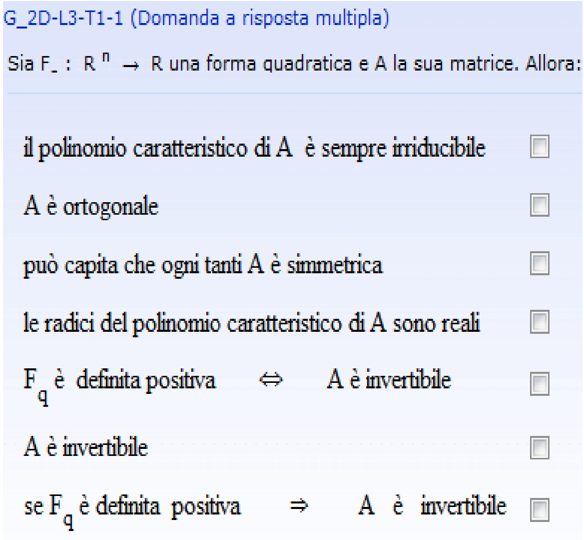
Dato la conica seguente:

Ŵ: $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y = -2$

La riduzione di Ŵ in forma canonica è:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- $3x^2 + y^2 - 2x - 2y = -2$
- $\begin{cases} X = x - 1/3\sqrt{2} \\ Y = y - 1/\sqrt{2} \end{cases}$
- $9X^2 + 3Y^2 = -4$
- $9X^2 - 2Y^2 = 4$

Figura 5.3-45


G_2D-L3-T1-1 (Domanda a risposta multipla)

Sia $F_{\_} : R^n \rightarrow R$ una forma quadratica e A la sua matrice. Allora:

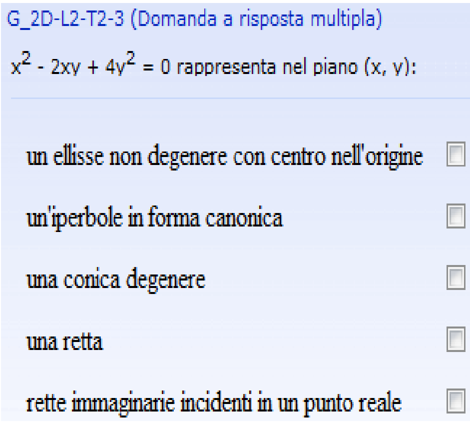
- il polinomio caratteristico di A è sempre irriducibile
- A è ortogonale
- può capita che ogni tanti A è simmetrica
- le radici del polinomio caratteristico di A sono reali
- F_q è definita positiva $\Leftrightarrow$ A è invertibile
- A è invertibile
- se F_q è definita positiva $\Rightarrow$ A è invertibile

Figura 5.3-46

La domanda del secondo livello mette in gioco un concetto (riduzione di conica in forma canonica), legata a diverse tipologie degli errori E2, E3 ed E4. Abbiamo a che fare ancora con la classificazione delle coniche ma in più è richiesto di conoscere anche le equazioni canoniche. Il linguaggio usato è soltanto simbolico.

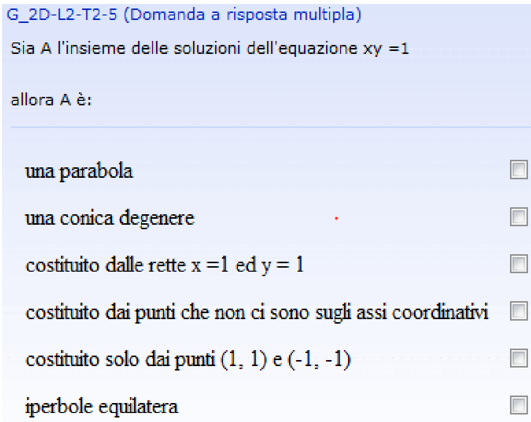
La domanda del terzo livello mette in gioco diversi concetti legati a varie tipologie degli errori E2 ed E3. Il registro linguistico è più evoluto rispetto ai casi precedenti.

Vediamo nel seguito un blocco di domande:


G_2D-L2-T2-3 (Domanda a risposta multipla)

$x^2 - 2xy + 4y^2 = 0$ rappresenta nel piano (x, y):

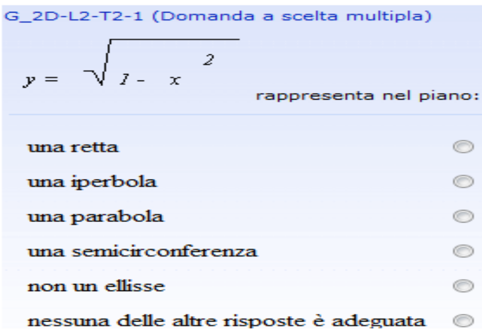
- un ellisse non degenere con centro nell'origine
- un'iperbole in forma canonica
- una conica degenere
- una retta
- rette immaginarie incidenti in un punto reale


G_2D-L2-T2-5 (Domanda a risposta multipla)

Sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione xy =1

allora A è:

- una parabola
- una conica degenere
- costituito dalle rette x =1 ed y = 1
- costituito dai punti che non ci sono sugli assi coordinativi
- costituito solo dai punti (1, 1) e (-1, -1)
- iperbole equilatera


G_2D-L2-T2-1 (Domanda a scelta multipla)

$y = \sqrt{1 - x^2}$ rappresenta nel piano:

- una retta
- una iperbola
- una parabola
- una semicirconferenza
- non un ellisse
- nessuna delle altre risposte è adeguata

Figura 5.3-47

La prima domanda contiene termini ‘x^2’, ‘xy’ e ‘y^2’, la seconda solo termini misti ‘xy’ e la terza non ha termini misti ‘xy’ soltanto ‘x^2, e ‘y^2,

- **Geometria 3D**

Il percorso è illustrato nella figura seguente:

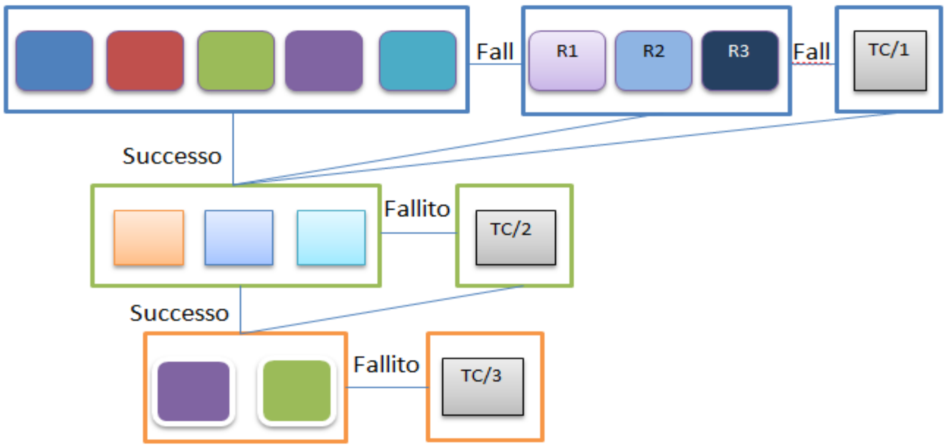


Figura 5.3-48

Nelle figure sotto vediamo due domande rispettivamente di I livello e di II livello.

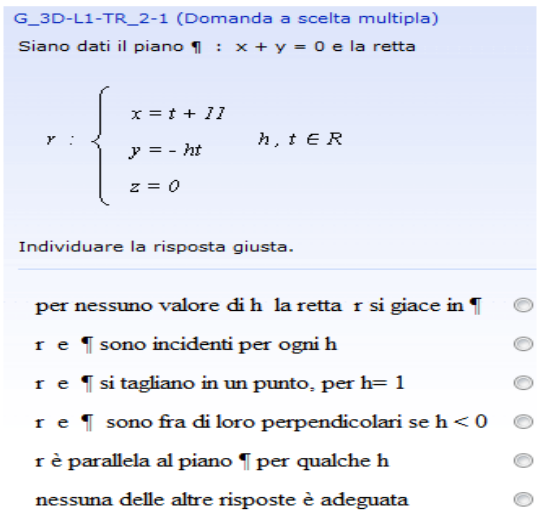


Figura 5.3-49

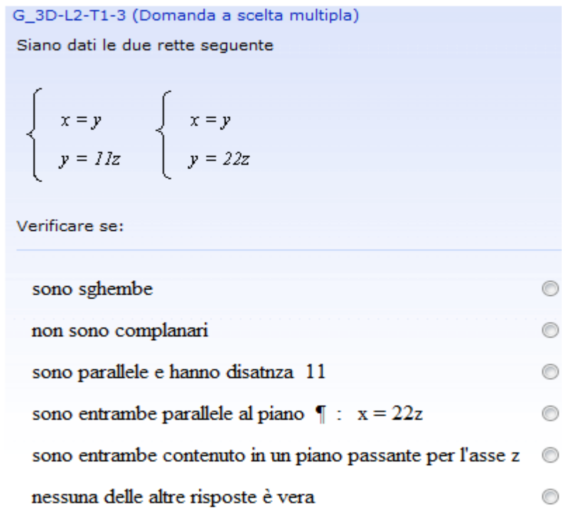


Figura 5.3-50

La domanda del primo livello mette in gioco più concetti legati a diverse tipologie degli errori E2 ed E3. Le risposte sbagliate hanno a che fare con appartenza della retta nel piano, ortogonalità tra la retta e il piano, parallelismo tra la retta e il piano e l’intersezione tra di loro. Il linguaggio è semplice, misto, più verbale che simbolico.

La domanda del secondo livello mette in gioco più concetti legati a diverse tipologie degli errori E2 e E3 e E4.

Nella Figura 5.3-51mostriamo una domanda del test analogo:

In uno spazio Euclideo di dimensione 3 rispetto ad un riferimento cartesiano. Sia r la retta di equazioni:

$$r : \begin{cases} x = 11 \\ y = -13 \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in R$$

e il pinao W: 6z = 10

che è:

- parallela al piano xy ☐
- ortogonale al piano xy ☐
- ortogonale al piano yz ☐
- parallela all'asse z ☐
- parallela all'asse x ☐
- ortogonale all'asse z ☐
- parallela al piano W ☐
- la retta r si taglia con il piano xy ☐

Figura 5.3-51

Questa domanda mette in gioco gli stessi concetti del test precedente, legati alla tipologia E3 degli errori. A differenza del primo test dove era chiesta al variare di h la posizione reciproca tra la retta e il piano, qui la domanda è posta in un caso concreto. Il linguaggio usato è semplice e verbale, mentre nel test precedente era misto.

Nella Figura 5.3-52 vediamo una domanda del III livello:

Siano dati il piano ¶ : x - y + z = 0 e la retta

$$r : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$$

e il punto A = (1, 0, 1)

Quali delle seguenti rette è parallela a ¶ ortogonale ad r e passa per il punto A:

- $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in R$ ☐
- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ☐
- $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$ ☐

Figura 5.3-52

La domanda mette in gioco più concetti a legati a diverse tipologie degli errori E1, E2, e fortemente E3, E4. Il linguaggio usato è soltanto simbolico.

La Figura 5.3-53 mostra una domanda del test di comprensione:

$$r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Per le rette r e s, individuare le risposte giuste.

I vettori direzionali delle rette sono: $v_s = (2, 2, 0)$ che coincide con i coefficienti vicino al parametro t e

$$v_r \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_r = (-1, -1, 0)$$

che è il prodotto vettoriale dei vettori dei coefficienti delle due equazioni di r

$$v_r \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_r = (0, 1, 1)$$

perché è il prodotto vettoriale dei vettori dei coefficienti delle due equazioni di r

r || s perché $v_r \parallel v_s$ infatti $rk \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 1$

r non è ortogonale a s perché $v_r \parallel v_s$

La retta r è ortogonale all'asse z perché $v_r \cdot v_z = (-1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$

La retta s è ortogonale all'asse x perché $v_s \cdot v_x = (2, 2, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0$

La retta r è ortogonale all'asse z perché $v_r \cdot v_z = 0$ allora anche la retta s è ortogonale all'asse z perché r || s

r è parallela al piano xy perché il vettore direzionale di r è ortogonale con vettore normale di xy infatti $(-1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$

s è parallela al piano xy perché r è parallelo al paino xy ed r || s

Figura 5.3-53

Per tutti gli argomenti ci sono blocchi di domande di diversa natura che trattano vari concetti dentro lo stesso argomento legati a una tipologia sola degli errori e più tipologie degli errori. La stessa cosa vale per le singole domande dentro il blocco.

5.4 Implementazione

La pianificazione delle attività didattiche è strutturata in modalità e-learning implementata nella piattaforma IWT. Le attività sono corsi semplici, intesi come percorsi predefiniti dal docente, secondo gli standard della piattaforma. Un corso contiene vari 'test dinamici', per scelta nostra al fine di evitare le risposte casuali. La dinamicità dei test è a due livelli e consiste nel fatto che, in fase di costruzione del test, il docente sceglie solo quante domande il test deve includere e per ogni domanda quante risposte devono essere visualizzate. In tal modo, la piattaforma automaticamente, ogni volta che uno studente richiama un test, va a prelevare quel certo numero di domande, scegliendole a caso in un database e per ciascuna domanda presenta un certo numero di risposte, anche queste scelte casualmente tra quelle memorizzate nell'oggetto 'domanda' del database, ordinandole di volta in volta in modo casuale.

Le risposte, nelle domande dei test di comprensione, sono invece in forma statica perché vogliamo che lo studente veda tutte le spiegazioni delle risposte giuste e sbagliate. Questa scelta è giustificata dal fatto che la piattaforma non consente un uso del feedback adeguato, puntuale su ogni risposta, e quindi lo abbiamo sostituito con i test di comprensione o, in seguito, con discusioni sui forum. La tipologia di domande è quella degli standard dei quiz a risposta chiusa (scelta multipla, risposta multipla, domanda a corrispondenza).

Le attività basate sui quiz sono state utilizzate a vari scopi:

- valutazione diagnostica (precorso);
- auto-valutazione formativa (corso semplice per argomento);
- valutazione finale (corso completo con tutti gli argomenti)

Il precorso è illustrato nella figura seguente:

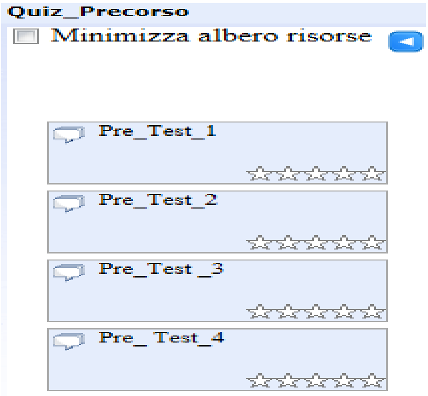


Figura 5.4-1

Come si vede nella figura, il precorso contiene quattro test (per il numero delle domande cfr. Figura 5.2-8).

La figura seguente illustra l'implementazione di un corso semplice per argomento e la sua corrispondenza con la struttura descritta in precedenza:

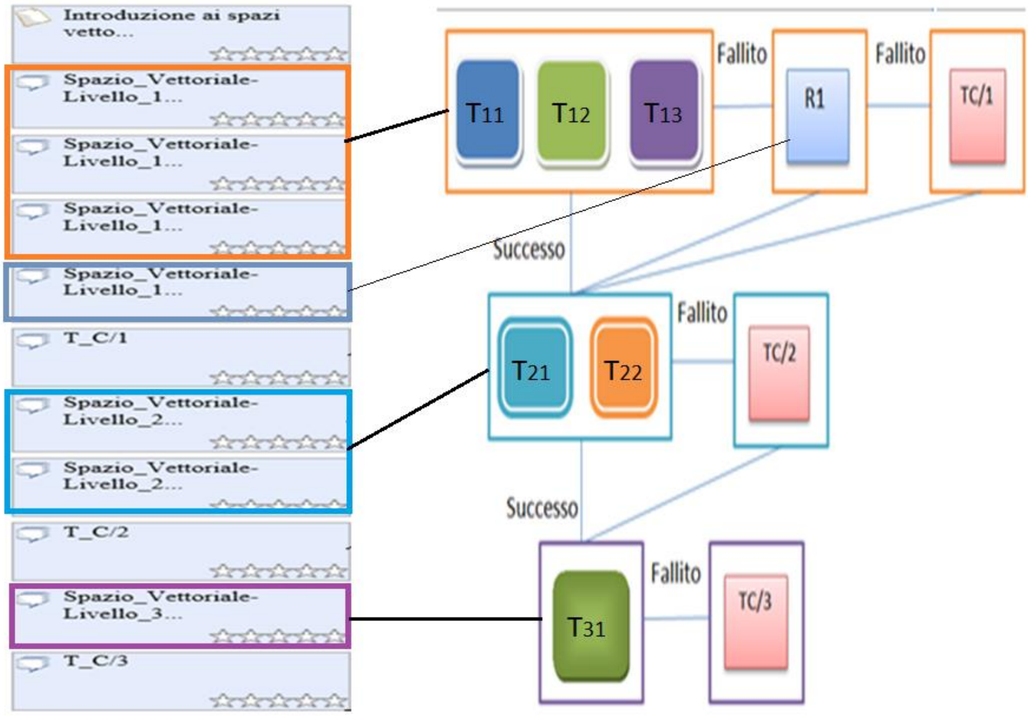


Figura 5.4-2

Come si vede nella prima figura l'argomento è spazio vettoriale. Siccome la piattaforma IWT non permette la ramificazione automatica dei percorsi, nel corso abbiamo aggiunto un file di descrizione (chiamato introduzione) del percorso da seguire, mostrato in figura seguente:

Il corso che segue verte sulle conoscenze riguardanti gli spazi vettoriali.

È strutturato su tre livelli, secondo il grado di difficoltà e della tipologia di errore frequente rilevata nelle prove scritte.

Nel I livello trovi tre test, che puoi fare in un ordine qualsiasi. A ogni utilizzo del test ti saranno presentate domande che non necessariamente sono sempre le stesse. Alla consegna del test ti sarà visualizzato il punteggio ottenuto e ti sarà detto se lo hai superato o no.

Se non hai superato almeno due dei tre test del I livello, vai al test di recupero. Se non hai superato il test analogo R1, vai al test di comprensione TC/1

Se hai superato almeno due dei tre test del I livello o hai superato il test analogo R1 o il test di comprensione TC/1 vai al livello II.

Se non hai superato almeno un test del livello II, vai al test di comprensione TC/2

Se hai superato almeno un test del livello II o il test di comprensione TC/2, vai al livello III.

Se non hai superato il test di livello III, vai al test di recupero TC/3.

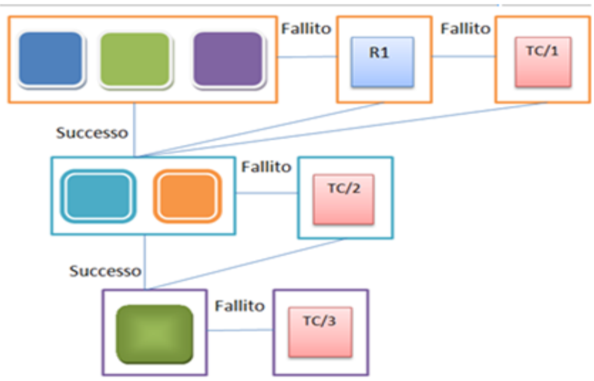


Figura 5.4-3

Il corso completo è presentato come nella figura seguente e le scelte dello studente sui vari blocchi da fruire determinano il suo percorso di apprendimento:

Figura 5.4-4

I cinque test comprendono rispettivamente i seguenti argomenti: matrici e sistemi lineari, spazi vettoriali ed euclidei, omomorfismi e diagonalizzzazione, geometria 2D e geometria 3D.

Il corso completo si presenta come in Figura 5.4-5. A differenza del caso precedente, il percorso è guidato, nel senso che lo studente non può passare al blocco successivo senza aver fruito e superato quello precedente,

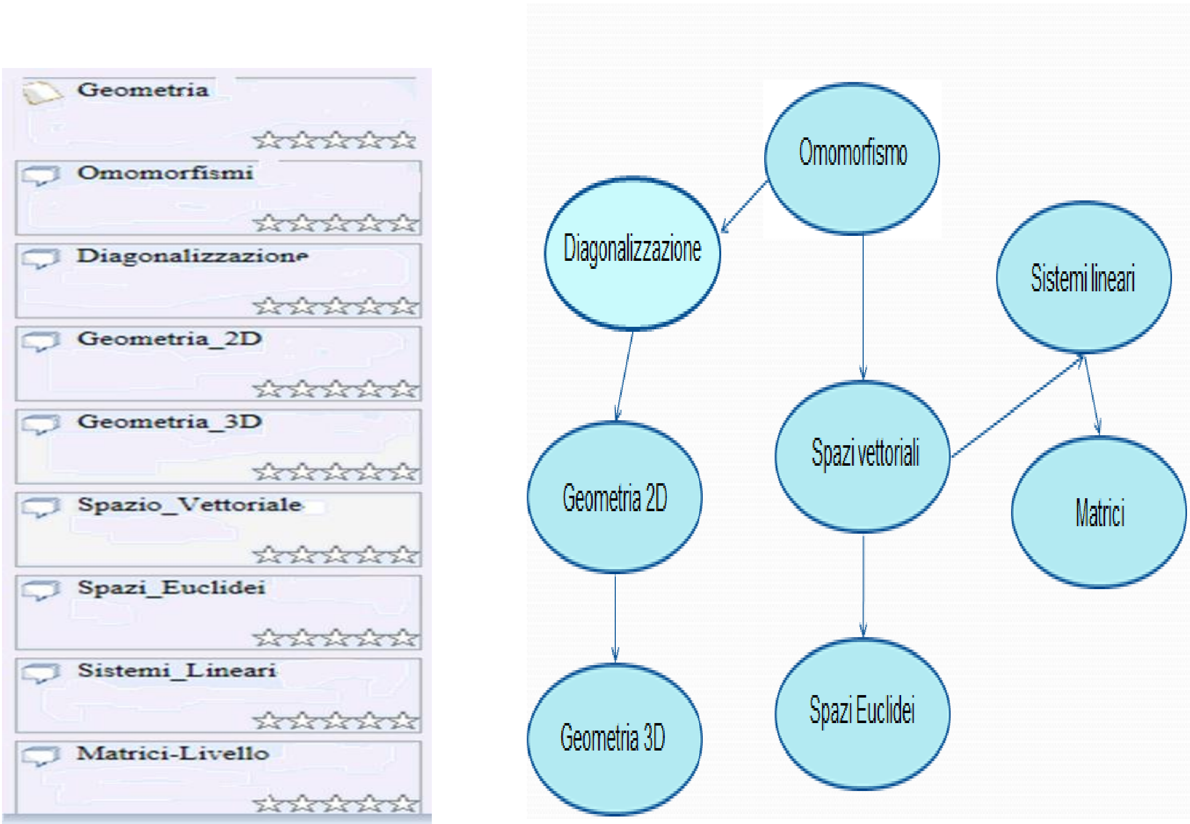


Figura 5.4-5

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Albano, G. (2010). Mathematics education: teaching and learning opportunities in blended learning. In Juan et al. (eds.): *Teaching Mathematics Online: Emergent Technologies and Methodologies*.

Albano, G., Ferrari, P.L. (2008). Integrating technology and research in mathematics education: the case of e-learning. *In Garcia Peñalvo (ed.): Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies* pp.132-148.

Albano, G., Ferrari, P.L. (2013). Mathematics education and e-learning: meaningful use of the quiz-modules. *Proc. of ICTMT11 (International Conference on Technology in Mathematics Teaching).*

Albano, G., Pepkolaj, L. (2014). Formative Self-Assessment to Support Self-driven Mathematics Education at University level. *Lecture Notes in Computer Science* series, Vol. 8699, pp. 82-91, "New Horizons in Web Based Learning", ICWL 2014 International Workshops, revised Selected Papers, Springer International Publishing.

Alessandri, G. (2008). *Dal desktop a Second Life. Tecnologie nella didattica.* Morlacchi Editore.

Alessandri G. (2013). *Tecnologie autonome nella didattica*. Morlacchi Editore.

Antiseri, D. (2001). Elogio dell'errore. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 101 – 106.

Bachaman, Lyle F.: 1990. *Fundamental Considerations in language Testing,* Oxford (UK): Oxford University Press.

Bacon, F. (1620). The new organ or true directions concerning the interpretation of nature. *Retrieved from www.constitution.org/bacon/nov_org.html.*

Baily, K.M. : 1998. *Learning About Language Assessment. Dilemmas and Directions. Pacific Grove* : Heinle & Heinle.

Baldacci, M. (2005). *Personalizzazione o individualizzazione?* Erickson.

Baldini, M. (1998). *Karl Popper e Sherlock Holmes.* Roma: Armando.

Baldini, M. (2001). Prefazione. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 7 – 12.

Bartalini, T. (2008). *Quality of learning and teaching mathematics with Computer Aided Assessment.* Ph.D. Thesis in Computer Science, Università degli Studi di Firenze (Italy).

Binanti, L. (2001). Introduzione. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 13 – 29.

Blanco, M., Estela, M. R., Ginovart, M. & Saà, J. (2009). Computer Assisted Assessment throughMoodle Quizzes for Calculus in an Engineering Undergraduate Course. *Proceedings of* *the CIEAEM61 “Mathematical activity in classroom practice and as research object in didactics: twocomplementary perspectives”,* Université de Montréal, Montréal.

Borasi R. (1988). Sbagliando s’impara: alternative per un uso corretto degli errori nella didattica della Matematica, *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 11, n. 4, pp. 366–402.

Borasi R. (1996). Fare degli errori un trampolino di lancio per la ricerca: un esperimento d’insegnamento, *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 19B, n. 5, ottobre 1996, pp. 428–476, e soprattutto: p.135.

Brousseau G. (1995), L’insegnamento di un modello dello spazio, *in: Gallo E., Ferrari M. e Speranza F. (eds.), La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi, Quaderno C.N.R. 15, Pavia,* pp. 19-44.

Cardellini, L. (2004). Alle radici del costruttivismo radicale. Informatica & scuola. Anno XII, n.3. Retrivalfrom:*http://www.scienzepostmoderne.org/OpereComplete/AlleRadiciDelCostruttivismoRadicale.pdf*

Conole, G. & Warburton, B. (2005). A review of computer-assisted assessment. *ALT-J, Research in Learning Technology,* Vol, 13, No. 1, pp.17-31.

Conradie, J., Frith, J. (2001). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 42, pp. 225-235.

Coppola, C.; Pacelli, T.; Pepkolaj, L. (2013). E-learning e matematica: stato dell’arte tra ricerca in tecnologia e didattica. *L’Educazione Matematica*, Serie X, Vol. 3, n. 1, pp. 9-44.

D’Amore B.; Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica.* 2, pp. 139-163.

D’Amore B., Fandino Pinilla M.I. (2006). Che problema i problemi! *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 6, vol.29 A – B. pp. 645-664. Editore: Centro Morin, Paderno del Grappa (TV).

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang.

Duval, R.: 2000, 'Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2, pp. 135-169.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 61, n. 1, pp. 103-131.

Enriques, F. (2001). Verità ed errore. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell’errore, Rubbettino*, pp. 55 – 57.

Ferrari, P.L.: 2003, 'Abstraction in Mathematics', *In Saitta, L. (Ed.), The abstraction paths: from experience to concept*, Phil.Trans.R.Soc.Lond. B, Vol.358, No.1435, pp. 1225-1230.

Ferrari, P.L.: 2004, 'Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning', *In Johnsen Høines, M. & Berit Fuglestad, A. (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen (Norway)*, vol.2, pp. 383-390.

Ferrari, P.L.: 2004, *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Bologna: Pitagora Editrice.

Ferrari, P.L.: 2013. E-learning e matematica: Rappresentazione e comunicazione in matematica, le potenzialità dell'e-learning. *L'educazione matematica.* N1/2013 pp. 63-70.

Funder D. C. (1987), Errors and mistakes: Evaluating the Accuracy of Social Judgment. *Psychological Bulletin; 1987*, Vol 101, No 1, pp. 75-90.

Giaconi, C. (2008). *Le vie del costruttivismo*. Armando Editore.

Giovannini A. (1942). L'errore nelle matematiche. Periodico di matematiche, IV, XXII. Retrival from:*http://www.google.it/url?sa=t&rct=j&q=perrin%20glorian%20error%201996&source=web&cd=6&ved=0CEkQFjAF&url=http%3A%2F%2Fscienzeformaz.urbino.com%2Fimages%2Fimage.asp%3FID%3D5008%26Scarica%3DY&ei=OmuoUYefJYboOoi5gJAN&usg=AFQjCNE8STMU3vcz4PGZXJg2GSiKyO9ZzQ* p. 81.

Haeck, Wim, Nan Yeld, Jurie Conradie, Neill Robertson & Adrienne Shall: 1997, 'A Developmental Approach to Mathematics Testing for University Admissions and Course Placement', *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 71-91.

Harlow, H. F. (1959). Learning set and error factor theory. In S. Koch (ed.), Psychology: A study of ascienceVol.2).NewYork:McGrawHill.*Inhttp://www.recsam.edu.my/R&D_Journals/YEAR2011/dec2011vol2/kako%20luneta%20(237-261).pdf)+*

Ibabe, I. & Jauregizar, J. (2008). Formative online assessment in e-learning. In Garcia Penalvo (ed.): *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies,* pp. 279-300.

Jenkins, M. (2004-05). Unfulfilled promise: formative assessment using computer-aided assessment. *Learning and Teaching in Higher Education,* Issue 1, 2004-05, pp. 67-80.

Melis, E. (2004). Erroneous Examples as a Source of Learning in Mathematics. *In IADIS International Conference*, Lisbon, Portugal.

Mirabella, A. (2012). Il ruolo e la gestione dell'errore in campo didattico ovvero una rivalutazione pedagocico-didattica dell'errore. Sbagliando s'impara, una rivalutazione dell'errore.

Mollo, G. (2001). Il valore dell'errore nella dinamica dell'apprendimento. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 155-182.

Montessori, M. (2001). L'errore e il suo controllo. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 127 – 133.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), pp. 3-14.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (eds.): *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* 3-5 January 2003. Athens: Hellenic Mathematical Society, pp. 115-124 (2003).

O'Halloran, K.L.: 2005. *Mathematical Discourse. Language, Symbolism and Visual Images*. London: Continuum.

Osterlind, Steve J.: 1998. *Constructing Test Items: Multiple Choice, Constructed-Response, Performance and other Formats, Boston:* Kluwer Academic Publishers.

Pellerey, M. (2004). Le competenze individuali e il portfolio, Scandicci, *La Nuova Italia* 2004.

Pellerey, M (2012). L'eredita di Luigi Calonghi nella ricerca pedagogico-didattica. Retrival from *(http://www.giombattistaamenta.it/wp-content/uploads/2012/12/Pellerey-Leredita%CC%80-di-Luigi-Calonghi1.pdf)*

Pepkolaj, L. (2015). Una metodologia per la costruzione di percorsi autoformativi per la matematica in e-learning. In corso di stampa su *L'Educazione Matematica*.

Pesci, A. (2012). *I suggerimenti della ricerca in didattica della matematica per la pratica scolastica*. Appunti per il corso di Didattica della Matematica. Terza Edizione. Pavia.

Pollo, M. (2013). E-learning e matematica: autoapprendimento, autovalutazione e comunità di apprendimento in un corso di matematica su piattaforma. *L'educazione matematica*, N 1/2013, pp. 81-88.

Popper, K. (2001). Riflessioni epistemologiche sull'errore e sulla verità. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 59 - 71.

Postman, N. (2001). Fallibismo ed educazione. *In (L. Binanti, a cura di) Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore, Rubbettino,* pp. 135-138.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), pp. 163-172.

Roediger, H. L., & Karpicke, J.D. (2006). The power of testing memory: Basic research and implications for educational practice. *Perspectives on Psychological Science*, 1, pp. 181-210.

Roediger, H. L., Putnam, A. L., & Smith, M. A. (2011). Ten benefits of testing and their applications to educational practice. In J. Mestre & B. Ross (Eds.), *Psychology of learning and motivation: Cognition in education* (pp. 1-36). Oxford: Elsevier.

Setzu, S., Polo, M., Onnis, G. (2011). E-learning e comunità di apprendimento su piattaforma Moodle: attività di preparazione ai test d'ingresso all'Università. *Atti Didamatica* 2011.

Smith G. H., Wood L. N., Coupland M., Stephenson B., Crawford K. & Ball G. (1996). Constructing mathematical examinations to assess a range of knowledge and skills. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology,* 27(1), pp. 65-77.

Spagnolo, F; Valenti, S. (1984). "Errori matematici": un'occasione didattica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.* Vol. 7-N. 1, pp. 19-34.

Vinner, S.: 1997. 'The Pseudo-Conceptual and the Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning', *Educational Studies in Mathematics*, 34, pp. 97-125.

Von Glasersfeld, E. (1992) Apprendimento e Insegnamento dal punto di vista del Costruttivismo, *L'educazione Matematica*, Vol. 3.a.1, aprile pp, 27–37.

Wiens, A. (2007). An Investigation into Careless Errors Made by 7th Grade Mathematics Students. Math in the Middle Institute Partnership Action Research Project Report; *In partial fulfillment of the MA Degree Department of Mathematics University of Nebraska-Lincoln July*.

Zan, R. (2012). *Difficoltà in matematica Osservare, interpretare, intervenire*. Springer Verlag.

Zan R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 35 A.

Zan, R. (2005). Materiali per i precorsi, a.a 2004-2005.

Zan, R. (2007). Materiali relativi al 'Progetto Porta'.

Zan, R. (2002). Materiali del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica.

Zollo, G. (2012). Il valore dell'errore nel processo di apprendimento. *In (A. Mirabella a cura di) Il ruolo e la gestione dell'errore in campo didattico ovvero una rivalutazione pedagocico-didattica dell'errore. Sbagliando s'impara, una rivalutazione dell'errore.* pp. 36-42.