

ON FRACTIONAL PROBABILISTIC MEAN VALUE THEOREMS, FRACTIONAL COUNTING PROCESSES AND RELATED RESULTS

ABSTRACT

ALESSANDRA MEOLI

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
Via Giovanni Paolo II, 132, 84084 Fisciano (Sa), Italy
email: ameoli@unisa.it

La tesi raccoglie i risultati dell'attività di ricerca condotta dall'autore nel gruppo di ricerca *Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica*, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno, nell'ambito del Corso di Dottorato in "Matematica, Fisica e Applicazioni", XXIX ciclo. I risultati si collocano all'interfaccia tra Calcolo delle Probabilità e Calcolo Frazionario. Mentre la ricerca in probabilità è oggi ben consolidata e supportata, il calcolo frazionario, cioè lo studio della possibilità di generalizzare il calcolo integrale e il calcolo differenziale classici ad un ordine arbitrario, reale o complesso, ha acquisito notevole popolarità e importanza nel corso degli ultimi quattro decenni, soprattutto in virtù delle sue applicazioni in numerosi campi delle scienze e dell'ingegneria. Inoltre, le intersezioni tra calcolo delle probabilità e calcolo frazionario sono state esplorate con attenzione, ma parzialmente, nel corso degli anni, soprattutto dal punto di vista dei processi stocastici. Lo scopo della tesi è quello di dimostrare alcuni nuovi teoremi che si collocano all'interfaccia tra l'Analisi Matematica e il Calcolo delle Probabilità, e di studiare con rigore certi nuovi processi stocastici e modelli statistici costruiti a partire da risultati classici ben noti e poi modificati mediante le tecniche del calcolo frazionario.

La tesi è strutturata come segue.

Nel primo capitolo si richiamano alcune nozioni di base e le proprietà dei principali operatori e delle funzioni del calcolo frazionario, l'integrale di Riemann-Liouville, le derivate di Riemann-Liouville e di Caputo, la funzione di Mittag-Leffler.

Nel capitolo 2, al fine di ricavare alcuni analoghi probabilistici di tipo frazionario dei teoremi di Taylor e di Lagrange, è stata introdotta la *distribuzione di equilibrio frazionaria di ordine n* definita in termini dell'integrale di Weyl e ne sono state indagate le proprietà principali. In particolare, si dimostra che la distribuzione di equilibrio frazionaria di ordine n costruita a partire da un'assegnata distribuzione di probabilità, coincide con questa se e solo se essa è esponenziale. La distribuzione introdotta viene utilizzata per dimostrare una versione frazionaria dei teoremi di Taylor e del valore medio probabilistici, quest'ultimo applicabile a coppie di variabili aleatorie opportunamente ordinate. Inoltre, si forniscono sia risultati che coinvolgono i momenti normalizzati e un'estensione frazionaria della varianza, sia una formula di interesse nelle scienze attuariali. In conclusione, si discute il teorema di Taylor probabilistico basato sulla derivata frazionaria nel senso di Caputo.

Nel terzo capitolo è stata considerata una generalizzazione frazionaria del processo di Poisson con salti di ampiezza arbitraria, esprimendo la legge di probabilità mediante funzioni di tipo Mittag-Leffler. L'evoluzione del processo è guidata da equazioni differenziali e alle differenze finite frazionarie. Dopo aver studiato due rappresentazioni equivalenti del processo considerato, particolare attenzione è stata posta al problema del tempo di primo passaggio, alla determinazione dei tempi di attesa ed a problemi di tipo asintotico. Tra le altre cose, si è mostrato che il tempo di prima occorrenza di un salto di ampiezza i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, è distribuito come il tempo di prima occorrenza di un evento di un processo di Poisson frazionario di parametro $\lambda_i > 0$, generalizzando, quindi, una importante proprietà valida nel caso classico.

Nel quarto capitolo si propone una generalizzazione del processo di Poisson alternante dal punto di vista del calcolo frazionario, ottenuta sostituendo nel sistema di equazioni differenziali che governa la funzione di probabilità del processo di Poisson alternante la derivata ordinaria con la derivata frazionaria (nel senso di Caputo) o, equivalentemente, mediante argomenti di teoria del rinnovo. La massa di probabilità del nuovo processo è espressa in termini della funzione di Mittag-Leffler con due parametri. Abbiamo studiato il comportamento asintotico delle probabilità di stato e alcune proporzioni che coinvolgono i momenti frazionari dei periodi di rinnovo del processo. Infine, sono state ricavate nuove distribuzioni di tipo Mittag-Leffler relative al processo considerato sfruttando una trasformazione agente su coppie di variabili casuali ordinate stocasticamente, che estende l'operatore equilibrio, di interesse per l'analisi di processi stocastici alternanti.

Nel Capitolo 5 si studia un processo stocastico unidimensionale che descrive un moto aleatorio caratterizzato dall'alternarsi di due diverse velocità in direzioni opposte. Il processo che regola i cambi di velocità (e di direzione) è il processo di Poisson alternante di tipo frazionario studiato nel capitolo 4. In particolare, nell'istante in cui si verifica un evento di tale processo si compie un salto di ampiezza non aleatoria e quindi il cambiamento di direzione. Pertanto, il processo in esame è una generalizzazione del processo del telegrafo integrato con salti. Le densità di transizione in avanti e all'indietro del moto sono espresse come serie uniformemente convergenti

di funzioni di Mittag-Leffler. Particolare attenzione è stata dedicata al caso di salti di ampiezza costante e uguale distribuzione dei tempi di rinnovo. La distribuzione del tempo di primo passaggio attraverso una barriera costante è espressa in modo implicito. Tuttavia, in alcuni casi è data la forma esplicita. L'analisi viene eseguita anche mediante un approccio computazionale.

Partendo da fenomeni di crescita di tipo frazionario, nel capitolo 6 abbiamo costruito un modello statistico a rischi competitivi che coinvolge la distribuzione di Mittag-Leffler. Abbiamo dimostrato l'indipendenza tra il tempo e la causa del fallimento, ed abbiamo indagato alcune proprietà dei tassi di rischio e delle nozioni di invecchiamento relativi. Abbiamo trattato il problema dell'individuazione della distribuzione sottostante dei tempi di guasto latenti quando la loro distribuzione congiunta è espressa in termini di copule e mediante il modello TTE (Time Transformed Exponential). Il caso particolare riguardante la distribuzione Mittag-Leffler è stato trattato numericamente. Il modello proposto è stato adattato al caso di un numero casuale di rischi in competizione indipendenti. Questo porta ad alcune misture di distribuzioni di tipo Mittag-Leffler, i cui parametri sono stati stimati mediante il metodo dei momenti per momenti frazionari.