



Università degli Studi di Salerno

Dipartimento di Fisica “E.R. Caianiello”

Dottorato di Ricerca in Matematica, Fisica ed Applicazioni

XXX Ciclo (XVI Ciclo - Nuova Serie)

Curriculum Matematica

Tesi di dottorato in:

Aspetti fisico-matematici dei Materiali Auxetici con

Memoria di Forma

Candidato:

Francesco Pugliese

Tutor:

Prof. Michele Ciarletta

Co-tutor:

Prof. Vincenzo Tibullo

Coordinatore:

Prof. Roberto Scarpa

a.a. 2017/2018

Introduzione	3
Capitolo I - Meccanica del Continuo	6
1.1 Deformazione del corpo continuo	8
1.2 Cinematica dei moti continui	11
1.3 Forze in un corpo continuo	12
Teorema di Cauchy	14
1.4 Teorema del trasporto	16
1.5 Equazioni di bilancio	17
1.5.1 Equazione di continuità	19
1.5.2 Bilancio della quantità di moto	20
1.5.3 Bilancio del momento della quantità di moto	21
1.5.4 Conservazione dell'energia	22
Capitolo II - Materiali Auxetici	23
2.1 Caratteristiche principali	23
2.2 Meccanismi di deformazione	24
2.3 Principali applicazioni	27
2.4 Storia dei materiali auxetici	31
2.4.1 Analisi geometria chirale esagonale	32
2.4.2 Microstrutture a comportamento auxetico: rotazione di poligoni	35
2.4.3 Teoria non lineare: il modello di Blatz-Ko	36
Capitolo III - Transizioni di fase e Memoria di forma	42
3.1 L'approccio di Caputo	43
3.1.2 Proprietà degli operatori frazionari	44
3.2 Modello differenziale	45
3.3 Leggi della Termodinamica	49
3.4 Memoria di forma nell'equazioni costitutive dei materiali auxetici	54
3.5 Relazione tensione-deformazione per materiali auxetici	56
3.6 Simulazioni numeriche	58
Sviluppi futuri	62
Bibliografia	63

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si colloca nel campo della modellazione matematica dei materiali, la quale ci permette di descrivere quantitativamente e qualitativamente le caratteristiche meccaniche del materiale in questione al fine di ottimizzarne le applicazioni ingegneristiche.

Nell'ambito della teoria della Meccanica dei Continui gioca un ruolo fondamentale il cosiddetto coefficiente di Poisson, o *Poisson's Ratio*, il quale rappresenta il rapporto tra la contrazione laterale e l'allungamento longitudinale di un materiale sottoposto a sforzo di trazione; nella quasi totalità dei materiali odierni tale coefficiente, comunemente indicato con la lettera ν , ha un valore positivo e molto prossimo ad $1/3$, per materiali comuni impiegati in edilizia, e ad $1/2$, per materiali gommosi.

Nell'ultimo ventennio, nonostante molti libri di testo affermino categoricamente che il coefficiente di Poisson è un valore sempre positivo, si sono viste diverse applicazioni di materiali, definiti *Auxetici* (dal greco *Auxeticos*, ossia "che tende ad aumentare"), con tale rapporto negativo. In particolare, questi, se sottoposti ad uno sforzo di trazione, tendono ad espandersi nella direzione trasversale alla sollecitazione, nonché a

comprimersi nella stessa direzione se sottoposti, invece, ad una compressione.

Tale capacità è dovuta alla particolare struttura microscopica delle molecole, la quale determina notevoli proprietà meccaniche come l'elevata capacità di assorbimento di energia, la resistenza a frattura, rigidità flessionale e resistenza al taglio.

Risulta evidente che a seguito di tali proprietà, i materiali auxetici vengono impiegati nella realizzazione di dispositivi di protezione e/o di fissaggio, materiali da imballaggio ed antiurto, rivestimenti, schiume e spugne; si ipotizza che anche il tessuto osseo vivo abbia capacità auxetiche.

Nel 1987, Roderic Lakes, professore dell'università del Wisconsin, ha sintetizzato per la prima volta schiume staticamente isotrope con un coefficiente di Poisson pari a -0.7 . È importante sottolineare, però, che il rapporto di Poisson nei processi di deformazione non è costante; di conseguenza si ha la necessità di caratterizzare la struttura interna del materiale con un processo di trasformazione chiamato *transizione di fase*.

Un approfondimento sulle transizioni di fase ci mostra un'ulteriore interessante caratteristica auxetica, nota come memoria di forma, ovvero la capacità del materiale di recuperare la forma originaria dopo esser stato sottoposto ad opportune sollecitazioni e conseguenti deformazioni indotte.

Al fine di realizzare una corretta analisi dei materiali con coefficiente di Poisson negativo, vedremo come questi si inseriscono nella teoria della meccanica dei continui ed in particolare come obbediscono alle leggi della fisica e alle equazioni di bilancio; da qui verrà presentato poi un modello non lineare atto a descrivere al meglio il comportamento auxetico.

Capitolo I - Meccanica del Continuo

La meccanica del continuo è la parte della meccanica classica che studia il comportamento di corpi continui, ovvero sistemi fisici macroscopici in cui la dimensione dei fenomeni osservati sia tale per cui questi non siano influenzati dalla struttura molecolare della materia; difatti, si assume che, nello spazio occupato dal corpo, la materia sia distribuita con continuità.

In modo più formale, si definisce corpo continuo, un corpo i cui punti materiali, dotati di massa, sono identificabili con i punti geometrici di una regione regolare dello spazio fisico; quest'ultima viene rappresentata da una funzione nota come densità di massa.

Il corpo continuo, modello che include sia i solidi che i fluidi, è associato al concetto di corpo deformabile, in quanto durante il moto subisce variazioni di forma e di volume. Un caso particolare di corpo continuo è il corpo rigido il cui studio, sviluppato dalla meccanica razionale, è definito sulla base di un numero finito di gradi di libertà e conduce a sistemi di equazioni differenziali ordinarie. I continui deformabili si possono pensare invece come sistemi con infiniti gradi di libertà e le relative equazioni meccaniche assumono la forma di equazioni alle derivate parziali.

La meccanica del continuo consiste nella caratterizzazione cinematica del corpo individuandone configurazione, deformazione e moto a seconda della massa e delle forze ad esso applicate. Pertanto vengono sviluppate due tipi di relazioni, definite come:

- equazioni fondamentali del corpo continuo;
- leggi costitutive.

Le prime sono leggi fisiche, valide per ogni corpo a prescindere dal materiale di cui è costituito, che conducono alla teoria della statica e della dinamica.

Sono note come equazioni di bilancio:

- conservazione della massa
- bilancio della quantità di moto
- bilancio del momento della quantità di moto
- bilancio dell'energia

Le seconde, invece, caratterizzano il comportamento del corpo a seconda dello specifico materiale di cui è composto.

Entrambe i tipi di relazioni della meccanica del continuo hanno carattere tensoriale; da un punto di vista matematico, un tensore è definito a partire da uno spazio vettoriale e non dipende da un particolare sistema di riferimento.

1.1 Deformazione del corpo continuo

Per corpo continuo si intende un insieme di particelle in corrispondenza biunivoca con i punti di un dominio dello spazio euclideo tridimensionale \mathcal{E} .

Consideriamo un corpo continuo che all'istante t_0 occupa la regione di spazio limitata Ω con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare.

La cinematica di tale corpo può essere descritta fissando un sistema di assi cartesiani ortogonali di origine O e le rispettive coordinate di ogni singolo punto appartenente al corpo; tali coordinate saranno funzione di una variabile di evoluzione che è il tempo t .

Possiamo allora distinguere una *configurazione di riferimento o iniziale* C^* , all'istante di tempo t_0 , ed una *configurazione attuale* C al generico istante t . Considerando un generico punto P^* del corpo, possiamo individuare, nella configurazione iniziale C^* , il vettore posizione $\mathbf{X} = \mathbf{OP}^*$ (coordinate materiali o lagrangiane); analogamente, nella configurazione attuale C , considerando lo stesso punto P , ma ad un istante diverso, possiamo individuare il vettore posizione $\mathbf{x} = \mathbf{OP}$ (coordinate spaziali o euleriane).

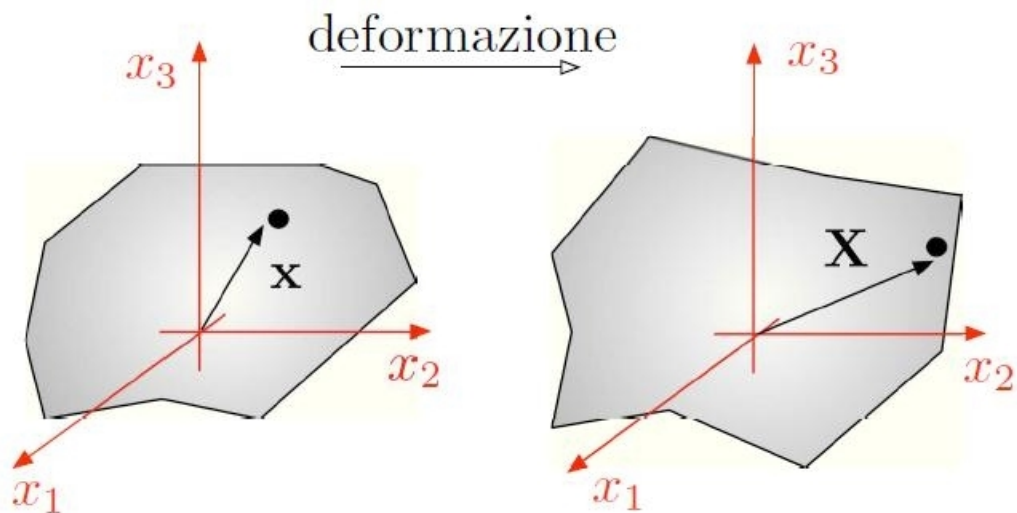


FIG.1: CONFIGURAZIONE ATTUALE C, GENERICO ISTANTE DI TEMPO T
 FIG.2: CONFIGURAZIONE INIZIALE C*, ISTANTE DI TEMPO T₀

Risulta evidente che il vettore posizione \mathbf{x} dipende sia dal punto P considerato, il quale mantiene la sua individualità fisica, sia dall'istante di tempo considerato.

Pertanto è valida la seguente relazione:

$$(1.1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

Tale funzione vettoriale, di classe C^2 , ci permette di conoscere la posizione di un qualunque punto di C a partire dalla sua posizione in C*; si richiede inoltre che tale funzione sia invertibile, ovvero stabilisca una corrispondenza biunivoca tra C* e C.

Introduciamo così l'*operatore gradiente di deformazione*, che ci permette di passare dalle coordinate *euleriane* a quelle *lagrangiane* e viceversa:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \parallel F_{iA} \parallel ; F_{iA} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}$$

Le componenti del gradiente costituiscono la matrice Jacobiana associata alla trasformazione (1.1), la quale, avendo escluso per ipotesi la sovrapposizione delle particelle, dovrà essere localmente invertibile; ovvero supponiamo che:

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0 \quad \forall \mathbf{X} \text{ e } \forall t \geq 0$$

Poiché per $t = 0$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I}$$

si ha che

$$J(0) = 1$$

Dunque, per ragioni di continuità, $J(t)$ dovrà essere sempre positivo per ogni istante di tempo; difatti se esistesse un tempo t tale che $J(t) < 0$, allora esisterà un tempo $t' \in [0, t]$ tale che $J(t') = 0$; quindi in ogni configurazione risulta sempre $J(\mathbf{X}, t) > 0$.

La trasformazione inversa, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, ci permette di introdurre il vettore spostamento:

$$(1.2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

e di definire il gradiente di spostamento:

$$Grad \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \parallel \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \parallel$$

Dalla (1.2) segue la relazione tra il gradiente di deformazione ed il gradiente di spostamento:

$$(1.3) \quad \text{Grad } \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}}$$

1.2 Cinematica dei moti continui

Passiamo ora allo studio delle condizioni di moto ed equilibrio di un corpo continuo. In particolare, la cinematica, analizza il moto e la deformazione di un corpo prescindendo dalle cause che determinano tali effetti; pertanto è necessario definire in modo rigoroso gli enti matematici che li descrivono.

Consideriamo la *configurazione iniziale* C^* fissa, ovvero il nostro punto di partenza; la *configurazione attuale* C , invece, sarà variabile e funzione del tempo t . Definiamo così la *velocità* della particella, individuata al generico istante t dal vettore posizione \mathbf{x} , il seguente vettore:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

Tale grandezza vettoriale, esprimibile anche nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, è funzione di \mathbf{X} e t ; essa viene definita *velocità lagrangiana* e, fissato un punto $P^* \in C^*$, descrive la velocità della particella istante per istante.

Possiamo sostituire \mathbf{X} , per ottenere la velocità nella *formulazione euleriana*:

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Analogamente possiamo ora definire un'altra grandezza cinematica fondamentale, l'accelerazione, nella sua *formulazione lagrangiana*:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

e nella sua formulazione euleriana:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt}$$

Una particolare attenzione va rivolta, invece, all'*operatore gradiente di*

$$\text{velocità } \nabla \mathbf{v} \equiv \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\| .$$

Tale operatore, in generale non simmetrico, si può scomporre nella somma di una parte simmetrica $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$, detto *tensore di deformazione* ed una antisimmetrica $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$, detto *tensore di spin*, dove:

$$\mathbf{D} = 1/2 (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$$

$$\mathbf{W} = 1/2 (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T)$$

1.3 Forze in un corpo continuo

Prima di introdurre quelle che sono le relazioni fondamentali che descrivono la dinamica e/o la statica di un continuo, occorre classificare le forze che agiscono sul corpo e che ne influenzano il comportamento.

Definiamo così *Forze esterne*, quelle forze che possono agire su ogni elemento di volume del continuo (*forze di volume*) o sulla sua superficie (*forze di superficie*).

Preso un punto $P \in C$, si consideri un elemento di volume dV intorno al punto e sia dm la sua massa; la forza di volume si rappresenta come:

$$\mathbf{F} dV$$

essendo poi $\rho = dm / dV$, segue che:

$$\mathbf{F} dV = \mathbf{b} dm$$

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{b}$$

dove \mathbf{b} ha le dimensioni di una accelerazione; le forze del tipo $\mathbf{b} dm$ prendono il nome di forze di massa.

Le forze di superficie, invece, agiscono sulla superficie esterna del continuo. Preso un punto $P \in \Sigma$, frontiera del corpo, rappresentiamo le forze di superficie come

$$\mathbf{f} d\Sigma$$

dove \mathbf{f} ha le dimensioni di una forza su unità di superficie.

Dalla teoria della meccanica dei continui, in risposta alle forze esterne, nascono degli sforzi interni al corpo al fine di equilibrare le suddette sollecitazioni; tali sforzi vengono comunemente chiamati *forze interne*.

Si consideri un punto $P \in C$ ed un piano π passante per P ; preso poi un elementino di superficie $d\sigma$ nell'intorno di P appartenente a π , indichiamo con $d\sigma^+$ la superficie concorde al verso di \mathbf{n} , normale al piano π , mentre con $d\sigma^-$ la superficie opposta.

La risultante delle forze di contatto che le particelle di una superficie esercitano sull'altra viene rappresentata come:

$$\mathbf{t}_n d\sigma$$

la quale dipende dalla posizione del punto P e dal versore normale \mathbf{n} ; ha dimensioni di una forza su unità di superficie e prende il nome di *sforzo specifico*.

A tal proposito enunciamo il Teorema di Cauchy che permette di ottenere \mathbf{t}_n qualunque sia \mathbf{n} , purché siano noti gli sforzi specifici nelle tre direzioni normali corrispondenti ai versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ della base scelta.

Teorema di Cauchy

Per ogni versore $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$ vale l'identità:

$$(1.4) \quad \mathbf{t}_n \equiv \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3$$

dove \mathbf{t}_n è lo sforzo specifico nella direzione \mathbf{n} , e \mathbf{t}_i ($i=1, 2, 3$) indicano gli sforzi specifici nelle direzioni $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_i$.

Osservazione 1

Indichiamo le componenti degli sforzi con:

$$\mathbf{t}_1 \equiv (t_{11}, t_{12}, t_{13}); \mathbf{t}_2 \equiv (t_{21}, t_{22}, t_{23}); \mathbf{t}_3 \equiv (t_{31}, t_{32}, t_{33})$$

e con \mathbf{t} la seguente matrice:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix}$$

Possiamo scrivere la (1.4) come

$$t_{ni} = t_{ij} n_j$$

ovvero

$$(1.5) \quad \mathbf{t}_n = \mathbf{t} \mathbf{n}$$

La matrice associata all'operatore \mathbf{t} viene chiamata **Tensore degli sforzi di Cauchy**.

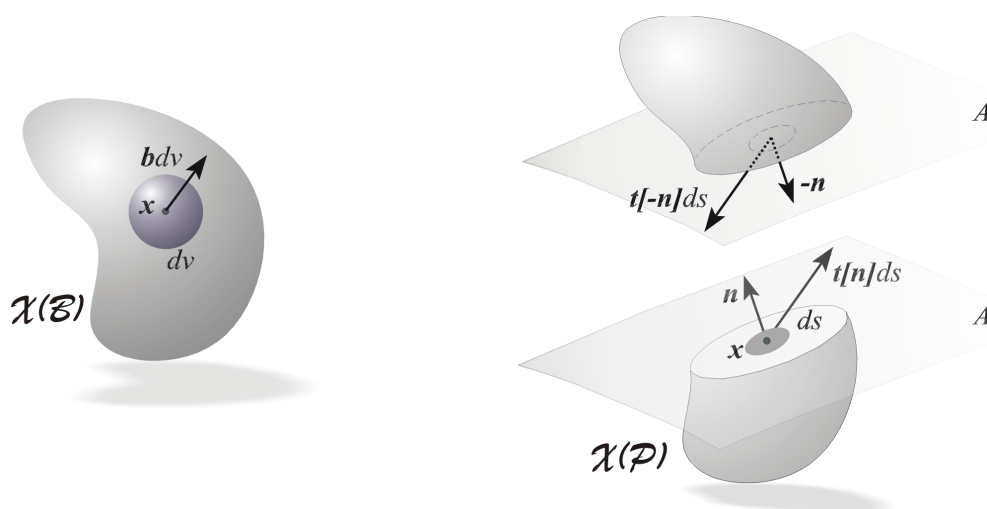


FIG. 3 = RAPPRESENTAZIONE FORZE ESTERNE E FORZE INTERNE DI CAUCHY

1.4 Teorema del trasporto

Nel definire le leggi fisiche di un continuo, lavoreremo con integrali il cui dominio di integrazione è variabile nel tempo. Pertanto, è doveroso avvalersi del *teorema del trasporto*, il quale ci permette di semplificare tali operazioni nel seguente modo;

Sia C una regione regolare limitata dello spazio, per ogni campo ψ di classe C^1 vale l'identità:

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \int_C \psi \, dV = \int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} \right) dV$$

Dimostrazione. Trasformiamo l'integrale al primo membro in un integrale sul dominio C^* , indipendente dal tempo, secondo la relazione $dC = J \, dC^*$:

$$\frac{d}{dt} \int_C \psi \, dV = \frac{d}{dt} \int_{C^*} \psi J \, dV^*$$

tenendo conto della positività di J , ovvero $J > 0$, e poiché C^* non è variabile nel tempo, allora è possibile passare la derivata sotto il segno di integrale:

$$\int_{C^*} \frac{d}{dt} (\psi J) \, dV^*$$

segue che:

$$\int_{C^*} \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} \right) J \, dV^*$$

tornando al dominio iniziale C :

$$\int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} \right) dV$$

da cui la tesi:

$$\frac{d}{dt} \int_C \psi dV = \int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} \right) dV.$$

1.5 Equazioni di bilancio

Dalla teoria della meccanica dei continui, le equazioni di bilancio descrivono la variazione nel tempo di grandezze definite in uno spazio C , dal punto di vista lagrangiano; a tal proposito vanno considerate determinate entità, chiamate *sorgenti*, le quali contribuiscono a tale variazione.

Sia, quindi, ψ una funzione degli elementi di C ed ipotizziamo che il contributo alla variazione di tale funzione sia dovuto a:

- un flusso attraverso la frontiera del corpo rappresentabile con $\int_{\partial C} \underline{\phi} \cdot \underline{n} d\sigma$, ove $\underline{\phi}$ è la densità di flusso ed \underline{n} la normale esterna a C nei di ∂C .
- sorgenti distribuite in C il cui contributo è rappresentato da $\int_C \rho r dV$, dove r è la densità per unità di massa delle sorgenti. Tale contributo può essere intrinseco al corpo oppure di origine esterna.

Sotto queste ipotesi l'equazione di bilancio per ψ prende la seguente forma:

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \int_C \psi dV = \int_{\partial C} \underline{\phi} \cdot \underline{n} d\sigma + \int_C \rho r dV$$

In sostanza stiamo affermando che, considerata una determinata grandezza, la variazione temporale della densità totale deve essere pari alla normale del flusso che attraversa la superficie, più eventuali sorgenti; nel caso non vi fosse il termine di sorgente, la legge di bilancio prende comunemente il nome di *legge di conservazione*.

Dai postulati fondamentali della meccanica dei continui, è noto che le equazioni di bilancio devono valere per ogni sottoinsieme materiale del corpo considerato; dunque, limitandoci a sottoinsiemi per i quali vale il teorema della divergenza, ed avvalendoci del teorema del trasposto, possiamo esprimere la (1.7) nella seguente forma:

$$(1.8) \quad \int_C \left\{ \frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} - \operatorname{div} \underline{\phi} - \rho r \right\} dV = 0$$

Nell'ipotesi che tale equazione sia valida per ogni C e che le funzioni sotto il segno di integrale siano continue, allora questa equivale a dire che:

$$(1.9) \quad \frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{div} \underline{\phi} + \rho r$$

che è la legge di bilancio localmente definita.

1.5.1 Equazione di continuità

La prima legge di bilancio riguarda una grandezza fisica di ogni corpo comunemente chiamata *massa*; trattandosi di continui, supponiamo che nella configurazione al generico istante t esista una funzione $\rho(\mathbf{x}, t)$, strettamente positiva e di classe C^1 , chiamata *densità di massa*. La massa di ogni parte P del corpo è:

$$m(P) = \int_P \rho \, dv$$

Analogamente, se consideriamo la medesima parte P_0 , all'istante iniziale $t=0$, con ρ_0 densità di massa nella configurazione iniziale, la massa di P_0 sarà:

$$m(P_0) = \int_{P_0} \rho_0 \, dV$$

La legge di conservazione della massa implica che:

$$\int_P \rho \, dv = \int_{P_0} \rho_0 \, dV$$

Da quanto detto in precedenza, nella forma locale, tale equazione diventa:

$$\rho \mathbf{J} = \rho_0$$

Questa è comunemente chiamata equazione di continuità in forma lagrangiana, da cui risulta chiaramente che $d(\rho J)/dt = 0$. Pertanto

l'equazione di continuità in forma spaziale sarà:

$$(1.10) \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Un corpo materiale che è capace di subire solo moti isocori è detto incomprimibile, ed avrà $\mathbf{J} = 1$. Questo ci permette di affermare, sotto queste ipotesi, che la densità di massa è costante, ovvero $\rho = \rho_0$.

1.5.2 Bilancio della quantità di moto

Un corpo materiale di massa m che si muove ad una certa velocità $\underline{\mathbf{v}}$, avrà una *quantità di moto* pari al prodotto della massa per la velocità. Pertanto questa grandezza fisica quantifica la forza necessaria per fermare il corpo in un'unità di tempo; è molto utile, difatti, per studiare in maniera approfondita urti e reazioni. Nella meccanica dei continui si afferma che la derivata temporale della *quantità di moto* è uguale alle forze agenti sul corpo.

Supponendo che sul corpo agiscano delle generiche forze esterne di densità $\rho \mathbf{b}$, e forze interne di contatto quantificate dal vettore sforzo \mathbf{t}_n , allora, per ogni istante t , la legge di bilancio della *quantità di moto* sarà:

$$(1.11) \quad \frac{d}{dt} \int_C \rho \mathbf{v} dV = \int_C \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial C} \mathbf{t}_n d\sigma$$

dove, come detto in precedenza, \mathbf{b} è la densità di forza per unità di massa e \mathbf{t}_n è il vettore sforzo per un'unità di area ∂C . Assumendo che \mathbf{b} sia un

campo vettoriale continuo su C e che \mathbf{t} sia continuo e di classe C_1 , allora l'equazione può essere scritta nella forma:

$$(1.12) \quad \int_C \rho \mathbf{a} dV = \int_C \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial C} \mathbf{t}_n d\sigma$$

Applichiamo il teorema della divergenza tale che:

$$\int_{\partial C} \mathbf{t}_n d\sigma = \int_{\partial C} \mathbf{t} \mathbf{n} d\sigma = \int_C \operatorname{div} \mathbf{t} dV$$

Avendo ora tutti integrali di volume, dall'arbitrarietà di C e poiché tutti i campi sono regolari, otteniamo l'equazione in forma locale, detta *equazione del moto*:

$$(1.13) \quad \rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \mathbf{b}$$

1.5.3 Bilancio del momento della quantità di moto

Consideriamo come polo l'origine O del nostro sistema di riferimento, e calcoliamo il *momento della quantità di moto* come segue:

$$\mathbf{K}_O = \int_C \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV$$

Analogamente calcoliamo il momento delle forze di massa e degli sforzi interni rispetto al medesimo polo O :

$$\mathbf{M}_O = \int_C \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial C} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n d\sigma$$

Definiti i momenti di tali grandezze, possiamo affermare che la derivata temporale del *momento della quantità di moto* è uguale al momento delle forze agenti su C, ovvero:

$$(1.14) \quad \frac{d}{dt} \int_C \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_C \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial C} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n d\sigma$$

1.5.4 Conservazione dell'energia

Per concludere il discorso sulle leggi di bilancio, postuliamo la legge di conservazione dell'energia (prima legge della termodinamica), che per ogni sottoinsieme C del corpo ed ogni istante t, si esprime nella forma:

$$(1.15) \quad \frac{d}{dt} \int_C \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right) dV = \int_C \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + s) dV + \int_{\partial C} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h d\sigma$$

dove ε è la densità di energia per un'unità di massa, s è la densità di sorgenti di calore per unità di massa ed unità di tempo ed h è il flusso di calore attraverso la superficie ∂C misurato per unità di area ed unità di tempo.

Supponiamo ora che ε sia una funzione di classe $C^{0,1}$, h di classe $C^{1,0}$ ed s continua; in base a tali ipotesi la legge di conservazione dell'energia assume la seguente forma:

$$(1.16) \quad \int_C \rho \varepsilon dV = \int_C \left(t_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho s \right) dV + \int_{\partial C} h d\sigma$$

Capitolo II - Materiali Auxetici

2.1 Caratteristiche principali

La comparsa dei materiali auxetici, ossia che esibiscono un coefficiente di Poisson ν negativo, risale alla fine della seconda guerra mondiale, ma sono diventati oggetto di studio e ricerca soltanto a metà degli anni ottanta.

La caratteristica macroevidente di questi materiali, che li rende diversi dalla quasi totalità di quelli che ci circondano, è quella di esibire una dilatazione o una contrazione laterale se sottoposti rispettivamente a una trazione o a una compressione longitudinale.

Il termine auxetico deriva dal greco $\alpha\upsilon\chi\eta\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$ (auxeticos) ovvero “che tende a crescere” e fu coniato per la prima volta da Evans e dal suo gruppo di lavoro durante uno studio per la produzione di polietilene microporoso con coefficiente di Poisson negativo.

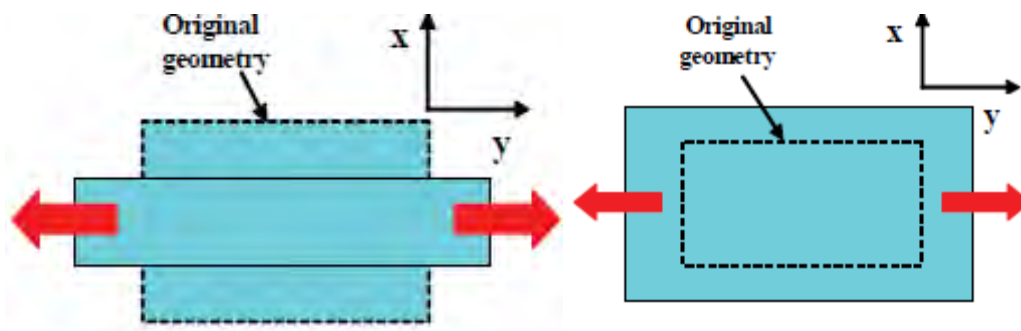


FIG. 4 = COMPORTAMENTO CONVENZIONALE PER UN CARICO DI TRAZIONE
FIG. 5 = COMPORTAMENTO AUXETICO PER UN CARICO DI TRAZIONE

Un comportamento inaspettato si verifica comunque non solo in compressione o in trazione, ma anche in flessione, dove la classica curvatura anticlastica è sostituita da una di tipo sinclastico. Tale concetto può essere così descritto: se soggetto a flessione un materiale convenzionale mostra una deformata di tipo a sella, mentre un materiale auxetico tende ad alzarsi nella zona centrale conformandosi adeguatamente alla curvatura.

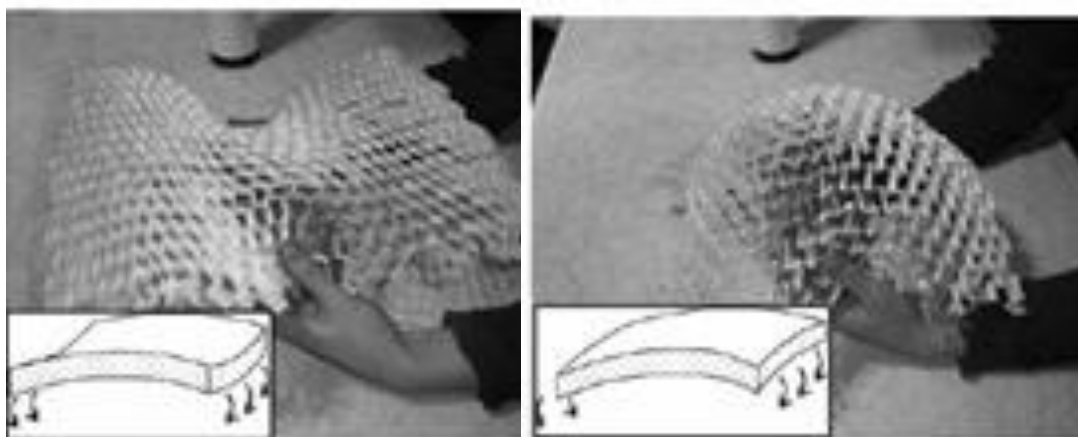


FIG. 6 = COMPORTAMENTO CONVENZIONALE ANTICLASTICO
FIG. 7 = COMPORTAMENTO AUXETICO SINCLASTICO

2.2 Meccanismi di deformazione

Per capire come sia possibile che un materiale, sottoposto a trazione, possa espandersi lateralmente risulta utile basarsi su delle rappresentazioni.

Quando la forza tira la struttura in una direzione, ad esempio verticalmente, si ha una contemporanea apertura o dilatazione orizzontale, perpendicolare alla direzione del carico.

Il ragionamento può essere esteso a una struttura più complessa, composta da un numero elevato di celle fondamentali che obbediscono al seguente

meccanismo di deformazione. Un tale materiale può essere pensato come costituito da una serie di *array* regolari connessi, che guidano l'intera deformazione.

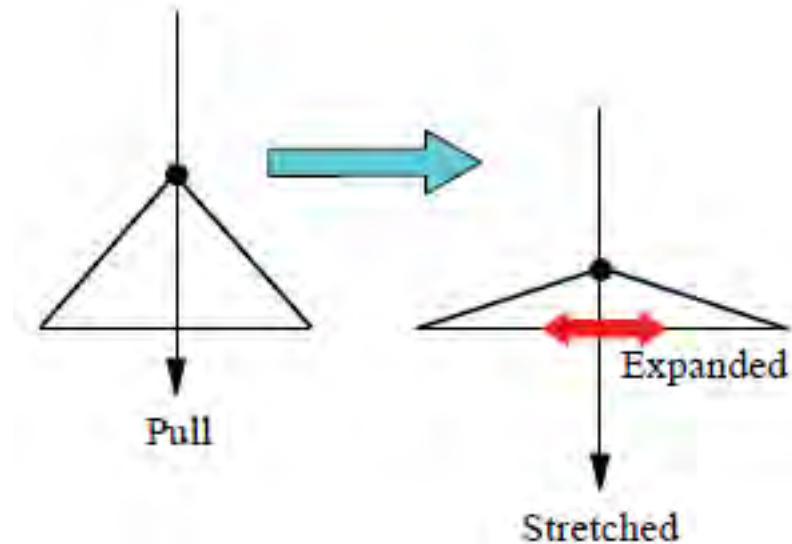


FIG. 8 = MECCANISMO DI DEFORMAZIONE AUXETICO

Per una geometria di tipo aperto (Fig. 9) le celle si allungano nella direzione di applicazione del carico ed in seguito si contraggono trasversalmente, offrendo quindi al materiale un coefficiente di Poisson positivo. Per una geometria auxetica (Fig. 10), invece, l'allungamento delle celle causa la medesima deformazione nella direzione ortogonale a quella di applicazione del carico; un comportamento poco intuitivo, ma in continuo sviluppo.

Attualmente, la produzione di materiali auxetici riguarda soprattutto schiume, fibre e compositi; sono stati sintetizzati numerosi polimeri ed il loro impiego è sempre più diffuso. Bisogna però ricordare che i materiali auxetici esistono anche in natura, non necessitano di nessuna trasformazione e/o lavorazione per mostrare il loro comportamento atipico.

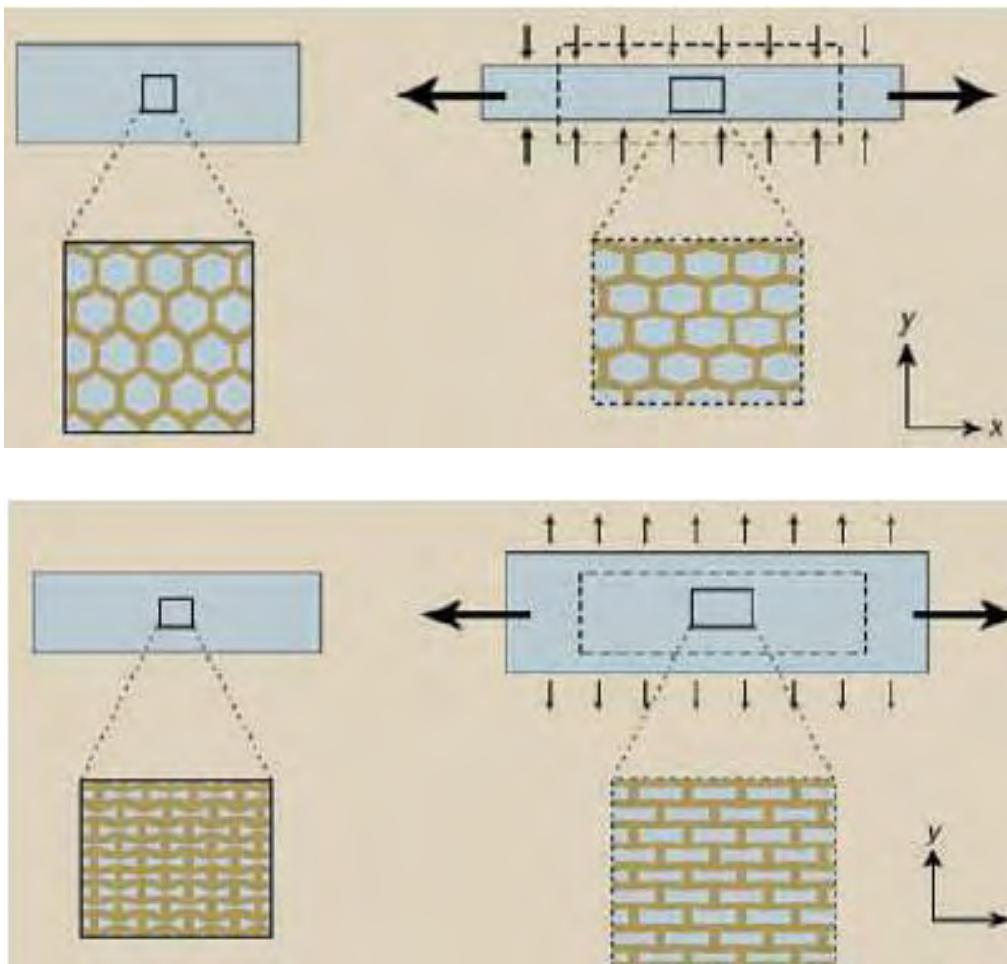


FIG. 9 = CELLE FONDAMENTALI IN UN MATERIALE CONVENZIONALE
FIG. 10 = CELLE FONDAMENTALI IN UN MATERIALE AUXETICO

Esempi famosi sono la grafite pirolitica, alcuni minerali ricchi di silicio come la cristobalite (SiO_2) o la pirite (FeS_2); purtroppo questi materiali non trovano ancora applicazioni utili, in quanto non è possibile avere un controllo delle loro proprietà meccaniche e le loro deformazioni, che avvengono su scala atomica, rendono difficile stabilizzare il fenomeno.

Le celle elementari che costituiscono la struttura base della maggior parte dei materiali auxetici possono essere rappresentate in diverse forme.

Tramite semplici formule trigonometriche, è possibile calcolare la rotazione delle singole celle in relazione al carico applicato, descrivendo così, in maniera piuttosto accurata, il comportamento complessivo della struttura.

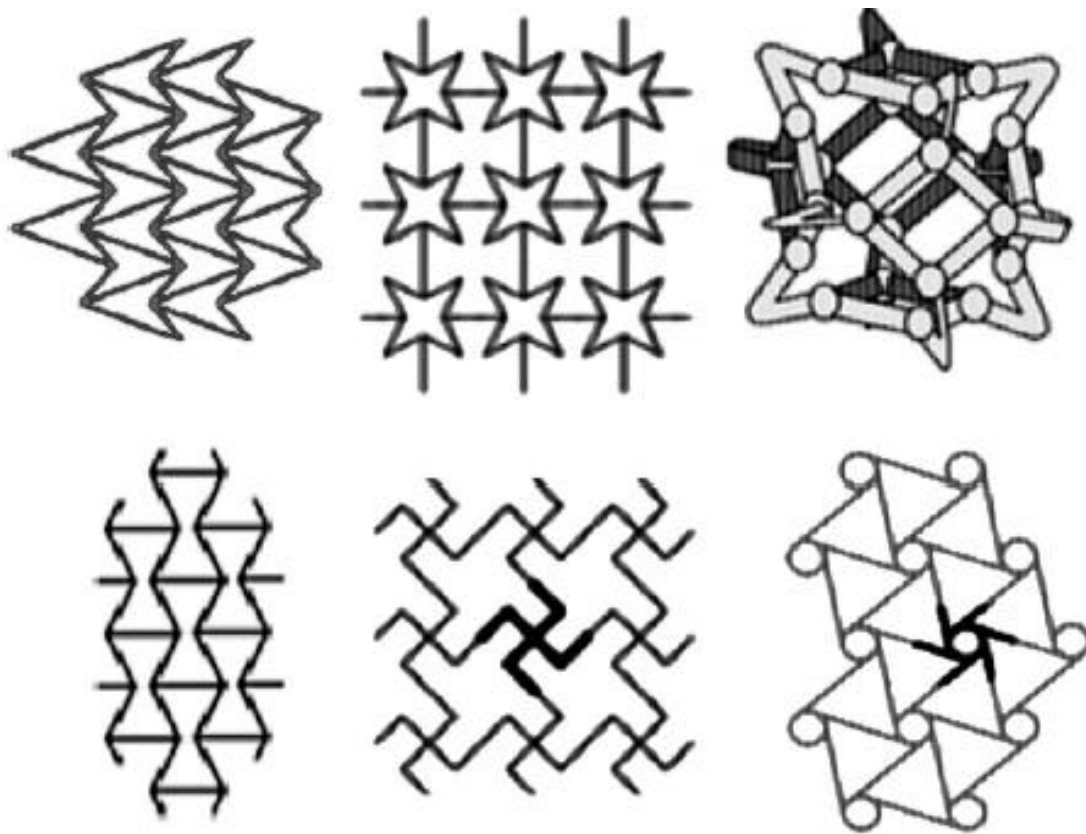


FIG. 11 = ESEMPI DI STRUTTURE ELEMENTARI CHE GLOBALMENTE GARANTISCONO UN COMPORTAMENTO AUXETICO

2.3 Principali applicazioni

Date le caratteristiche precedentemente descritte, i materiali auxetici, spesso citati con l'acronimo *NPR* (*Negative Poisson's ratio*), vengono principalmente utilizzati per migliorare le prestazioni meccaniche dei materiali già esistenti. Recenti studi infatti, supportati e finanziati dalla NASA e da Boeing, hanno dimostrato che è possibile ottenere una maggior resistenza al taglio, all'indentazione e un aumento della tenacità.

Anche le proprietà acustiche e di assorbimento delle vibrazioni migliorano nettamente se si impiegano materiali che esibiscono un coefficiente di Poisson negativo.

In generale le applicazioni più significative si hanno in quei campi dove sono richieste le seguenti caratteristiche:

- Aumento della rigidità
- Resistenza alle sollecitazioni di taglio
- Minore propagazione delle cricche all'interno del materiale stesso
- Buone proprietà acustiche associate a un efficiente assorbimento delle vibrazioni
- Tenacità e modulo di resilienza elevati

La seguente tabella riassume i settori in cui tali materiali vengono maggiormente impiegati.

Campo di applicazione	Tipo di applicazione
Aereospaziale	Protezioni termiche, assorbitori di suoni e vibrazioni, rivetti, palette per motori a turbina, fusoliere aerei, profili alari
Automotive	Paraurti, cuscinetti, dispositivi di fissaggio, componenti con elevata resistenza allo sforzo di taglio
Biomedico	STENT, bende, TR-BAND, pelle artificiale, protesi
Industria tessile	fibre, tessuti, stoffe
Materiali compositi	fibre, matrici
Militare	giubbotti antiproiettile, elmetti, rivestimenti ad alto assorbimento di energia
Sensoristica	Idrofoni, dispositivi piezoelettrici, sensori di vario genere

Un'applicazione recente, e che merita di essere approfondita, riguarda l'utilizzo di fibre auxetiche ideali per l'accoppiamento con una matrice di tipo tradizionale, realizzando così un materiale composito. Questo accoppiamento fa sì che il lavoro di *pull-out* della fibra sia maggiore, rendendo l'interfaccia con la matrice più resistente; nel momento in cui la fibra viene tirata tende ad espandersi perpendicolarmente alla direzione di applicazione del carico, andando così a bloccarsi nella matrice ed aumentando, di conseguenza, la forza necessaria per estrarla.

Settore militare: materiali protettivi

Il settore militare è in prima fila per l'utilizzo dei materiali auxetici e in particolare per quanto riguarda armature ed indumenti protettivi.

Ad esempio, i giubbotti antiproiettile necessitano di alcuni centimetri di spessore e quindi sono in generale pesanti e poco flessibili; impiegando, invece, materiali auxetici si è in grado di garantire una buona protezione, leggera e con un comfort maggiore per l'utilizzatore.

Inoltre, data l'elevata capacità di assorbimento degli urti, tali materiali sono ideali rivestimenti per elmetti: difatti, a seguito di un impatto localizzato, il materiale sarebbe in grado di fluire da zone limitrofe a quella colpita, prevenendo così lesioni alla scatola cranica.

Dispositivi di fissaggio e rivetti

Ricordando che una delle principali caratteristiche degli NPR è quella di espandersi lateralmente se sottoposti a una trazione assiale, una loro ideale

applicazione si ha nei dispositivi di fissaggio. L'inserimento di tali dispositivi sarebbe infatti facilitato dalla contrazione laterale che si ha in seguito alla compressione, mentre una eventuale rimozione sarebbe ostacolata garantendo una maggiore aderenza al foro. È stato infatti constatato che durante l'inserimento, la curva spostamento-carico mostra un tratto ascendente iniziale, la cui pendenza tende a diminuire fino a che il dispositivo non è completamente inserito. Durante la rimozione invece si nota un significativo aumento della resistenza a tale tipologia di carico poiché la curva stessa presenta un elevato coefficiente angolare; piccoli spostamenti necessitano, quindi, di una forza elevata.

Limitazioni

Le applicazioni dei materiali auxetici sono in rapido aumento, nonostante spesso siano ostacolate da fenomeni non sempre chiari e non facilmente descrivibili con formule matematiche.

Inoltre i costi di produzione tendono ad essere elevati, pertanto, in molti campi, si preferisce ancora utilizzare materiali tradizionali seppur con prestazioni inferiori. Un materiale, per manifestare un comportamento auxetico, richiede una porosità diffusa in quanto i meccanismi di deformazione molecolare necessitano di spazio; questo comporta complessivamente una minore rigidità rispetto al materiale omogeneo equivalente e quindi, di conseguenza, non si presta bene ad essere impiegato come supporto meccanico.

2.4 Storia dei materiali auxetici

Nel 1987, Lakes ha scoperto coefficienti di Poisson negativi per schiume poliuretatiche (PU) con struttura rientrante; difatti, i primi esempi di materiali polimeri a comportamento auxetico furono delle schiume a cella aperta in prolitilene a bassa densità. Lakes sviluppò un metodo di compressione triassiale, al quale abbinò una fase termica capace di modificare la struttura della cella ottenendo una cella a struttura rientrante; le deformazioni indotte dalle applicazioni di calore causavano una fase di rilassamento delle tensioni interne, fondamentale per far sì che la struttura rientrante fosse mantenuta. Con questo metodo Lakes ottenne valori di Poisson di circa -0.7.

Successivamente, Evans e Chan, svilupparono una nuova tecnica di deformazione delle schiume polimeriche per garantire una maggiore stabilità della struttura. Tale tecnica prevedeva l'inserimento di un blocco di schiuma convenzionale in un tubo d'alluminio di minore sezione, per poi sottoporlo ad una fase di compressione; successivamente veniva sottoposto ad un trattamento termico per stabilizzare la struttura interna.

Variando il tipo di schiuma e la fase termica si ottennero valori del modulo di Poisson tra -0.5 e -0.8.

Oltre alle schematizzazioni illustrate in precedenza, diversi ricercatori si sono concentrati sullo sviluppo dei cosiddetti materiali auxetici alveolari.

In particolare, una geometria di materiale alveolare di notevole interesse è quella chirale, ideata da Lakes.

Tale modello ha la caratteristica di presentare un valore di modulo di Poisson isotropo nel piano pari a -1. Tale struttura è stata realizzata in poliammide mediante tecniche di prototipazione rapida, simulazioni al computer e prove sperimentali. Il confronto con strutture a nido d'ape convenzionali (centrosimmetriche) ha evidenziato che quelle auxetiche, a pari valore di densità, mostrano un comportamento migliore a compressione.

2.4.1 Analisi geometria chirale esagonale

Un esempio di geometria chirale interessante è quella esagonale, le cui celle sono formate connettendo legamenti rettilinei ad un nodo centrale.

In fig. 12 è rappresentata una chirale esagonale in cui il nodo centrale è circolare e congiunge sei legamenti rettilinei, della stessa lunghezza, i cui punti di unione formano angoli di 60° .

La struttura è composta da anelli di raggio r e spessore t_c collegati da legamenti di lunghezza L e spessore t_b .

Nel seguito indicheremo con R la distanza tra due nodi, con β l'angolo tra il legamento e la linea fittizia che collega i centri di due anelli mentre l'angolo tra due legamenti adiacenti sarà pari a 2θ .

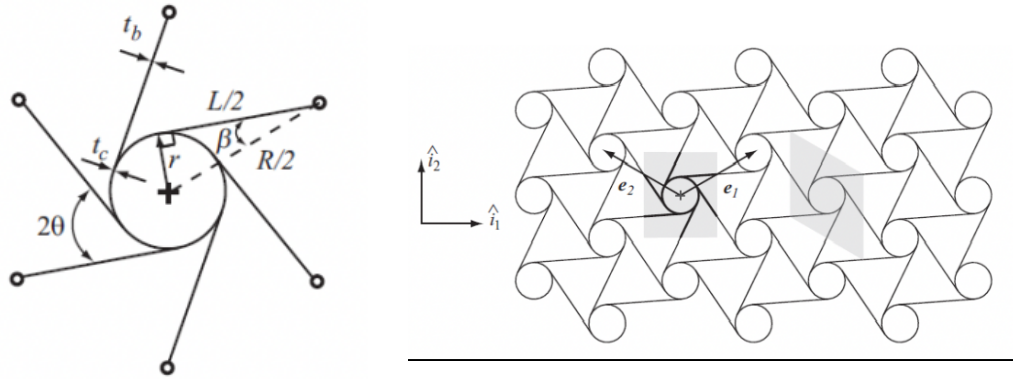


FIG. 12-13 = GEOMETRIACHIRALE DI LAKES

A questo punto, ricaviamo le seguenti relazioni:

$$\sin\beta = \frac{2r}{R}; \tan\beta = \frac{2r}{L}; \cos\beta = \frac{L}{R}$$

Osserviamo in fig.13 che, considerando come stato di partenza quello indeformato, quando si applica un carico di compressione uniaassiale lungo le direzioni \mathbf{i}_1 o \mathbf{i}_2 del sistema di riferimento fissato, i legamenti sono vincolati ai nodi centrali, i quali ruotano a seconda della sollecitazione applicata e si flettono in modo da conservare l'orientamento con i punti di contatto.

Tuttavia, indicando con ϕ la rotazione angolare dei nodi centrali si ha che la deflessione angolare del legamento misurata nel punto di contatto è proprio pari a ϕ poiché si deve conservare la tangenza in quel punto.

Si ricava così che gli spostamenti lungo le direzioni valgono:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{2R\sin\phi\cos\theta}{R\cos\theta}; \mathbf{e}_2 = \frac{2R\sin\phi\sin\theta}{R\sin\theta}$$

Analizzando un singolo legamento (fig. 14), indicando con r il raggio della circonferenza e con R la lunghezza del legamento e supposto che θ sia costante e pari a 30° e che per piccole deformazioni $r \sin\phi \approx r\phi$, abbiamo

che:

$$e_1 = 2\phi \frac{r}{R}$$

$$e_2 = 2\phi \frac{r}{R}$$

Di conseguenza i moduli di Poisson nelle due direzioni varranno:

$$\nu_{12} = -\frac{e_1}{e_2} = -1$$

$$\nu_{21} = -\frac{e_2}{e_1} = -1$$

Così facendo abbiamo dimostrato analiticamente che questi materiali hanno un rapporto di Poisson negativo sia dal punto di vista teorico che pratico.

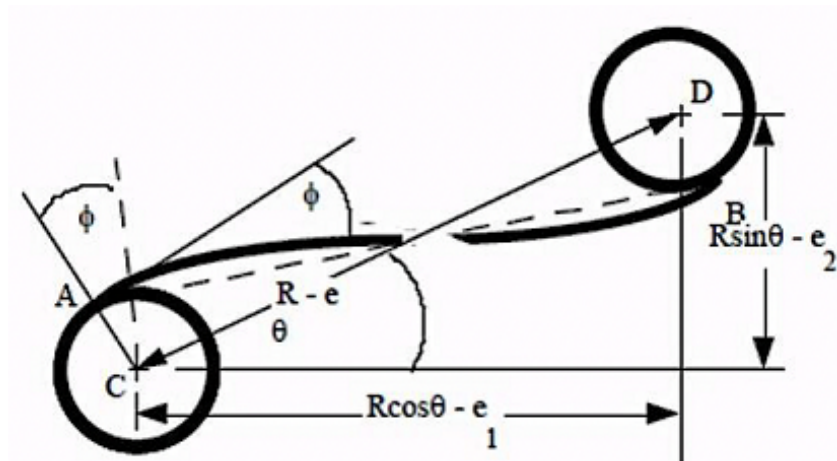


FIG. 14 = SINGOLO LEGAMENTO

2.4.2 Microstruttura a comportamento auxetico: rotazione di poligoni

I lavori incentrati su micro-strutture a comportamento auxetico attraverso la rotazione di poligoni hanno avuto un'importanza fondamentale poiché alcuni materiali cristallini presenti in natura presentano caratteristiche geometriche simili e mostrano sperimentalmente un coefficiente di Poisson negativo.

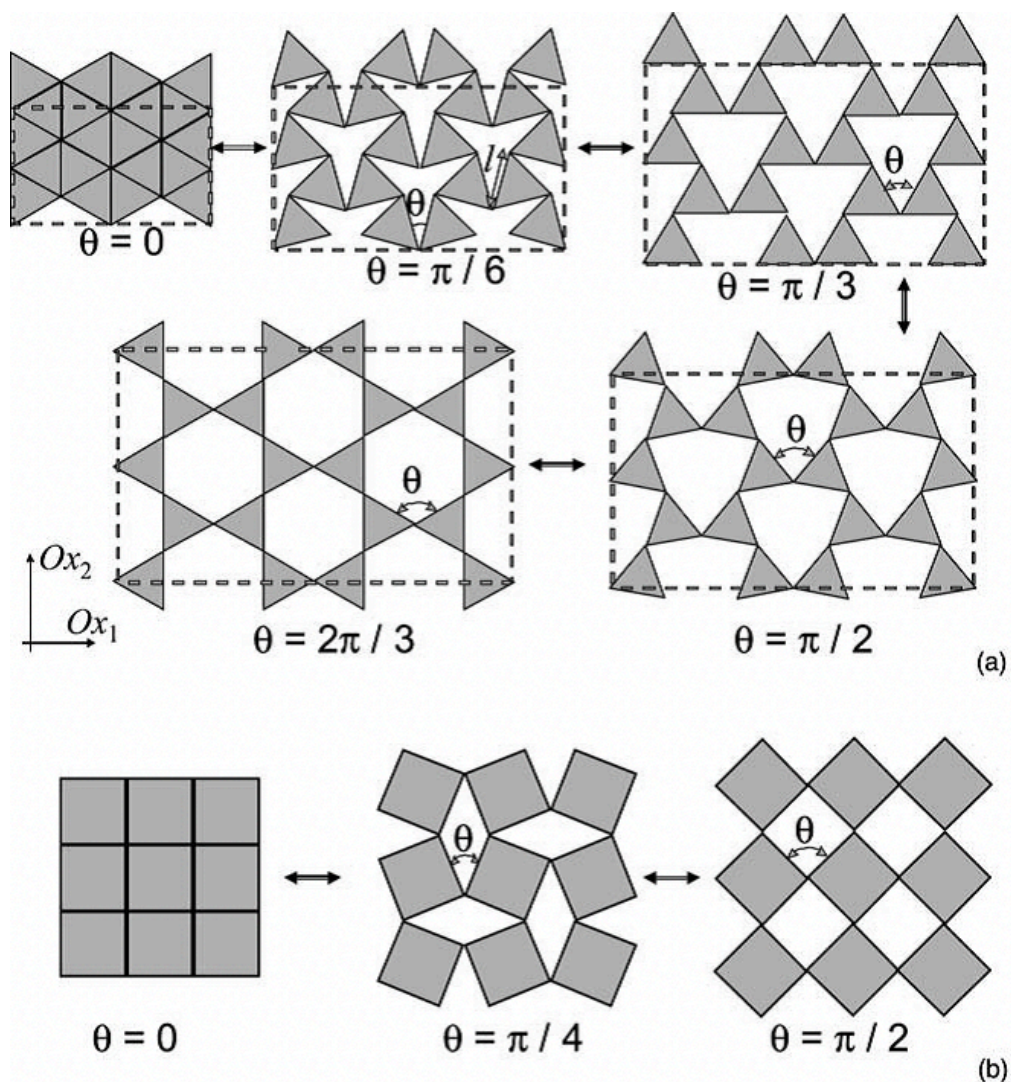


FIG. 15 = GEOMETRIA AUXETICA CON ROTAZIONE DI POLIGONI

Questa teoria fu inizialmente studiata e applicata da Grima nel 1999, il quale si avvale di una struttura a rotazione di quadrati per spiegare il comportamento auxetico di alcuni zeoliti.

Una micro-struttura costituita da quadrati o triangoli equilateri connessi tra loro attraverso semplici cerniere presenta un modulo di Poisson negativo se, quando sottoposta a carico, si deforma attraverso un meccanismo in cui i poligoni restano rigidi, ma ruotano gli uni rispetto agli altri.

2.4.3 Teoria non lineare: il modello di Blatz-Ko

Nella teoria elastico lineare, l'effetto auxetico è rappresentato da un rapporto di Poisson negativo; i modelli abili a descrivere la relazione tra microstruttura e costanti costitutive si basano su una relazione cinematica tra spostamenti, rotazioni e deformazioni, entità che in quanto tali, dipendono strettamente dalla microstruttura stessa.

Inoltre, i modelli lineari si avvalgono dell'ipotesi di piccole deformazioni, cosa che viene meno nelle relazioni tra le deformazioni osservate nei dati sperimentali.

Nella teoria non lineare, invece, le costanti costitutive non possono essere usate per rappresentare proprietà meccaniche di materiali elastici non lineari, poiché, in generale, tali grandezze vengono meglio descritte da funzioni costitutive.

Vediamo come il modello di Blatz-Ko , scegliendo un'adeguata funzione di Poisson, può essere esteso per descrivere il comportamento auxetico di un materiale.

Il moodello di Blatz-Ko considera la seguente relazione tra deformazione laterale e longitudinale:

$$\lambda_1 = \lambda^{-\nu_0}$$

dove ν_0 (rapporto di Poisson infinitesimo) è stato determinato per via sperimentale.

La corrispondente funzione di Poisson è:

$$\nu(\lambda) = \frac{1 - \lambda^{-\nu_0}}{\lambda - 1}$$

È banale mostrare che se $\nu_0 > 0$, allora la funzione di Poisson è positiva e se $\lambda > 1$, allora $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$.

Viceversa , se $\nu_0 < 0$ allora la funzione di Poisson è negativa e se $\lambda > 1$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$, il che corrisponde alla deformazione laterale osservata nei materiali auxetici.

Per $\nu_0 > 0$, $\nu(\lambda)$ ha un asintoto verticale per $\lambda = 0$ e decresce monotonicamente a 0.

Per $\nu_0 < 0$, essa raggiunge il minimo a $\lambda = 0$ ($\nu_0 = -1$) e cresce monotonicamente fino al suo asintoto orizzontale $\lambda = 0$.

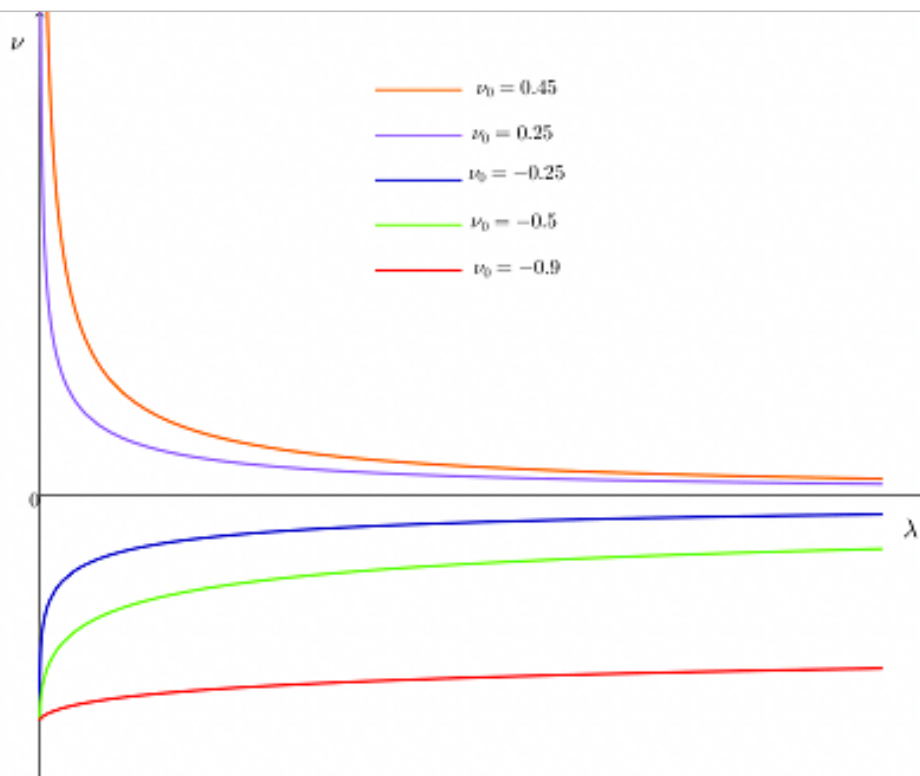


FIG. 16 = FUNZIONE DI POISSON DEL MODELLO DI BLATZ-KO

Poiché l'effetto del modulo di Poisson negativo è dovuto a un cambiamento nella microstruttura del materiale sottoposto a deformazione, per descrivere al meglio il comportamento di un materiale auxetico dobbiamo considerare una funzione di Poisson più complessa di quella proposta da Blatz-Ko.

Una possibile funzione è la seguente:

$$\nu(\lambda) = \nu_0 [1 + \pi^2 \nu_0^2 (\lambda - 1)^2]^{-q}$$

La cui corrispondente deformazione laterale λ_1 è data da:

$$\lambda_1 = 1 - \nu_0 (\lambda - 1) [1 + \pi^2 \nu_0^2 (\lambda - 1)^2]^{-q}$$

Nel caso generale il coefficiente q dipende dai due parametri costitutivi ν_0 e λ_1 nel modo seguente:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi^2(\lambda_1 - 1)^2\nu_0^2}, q \geq \frac{1}{2}$$

che ha un chiaro significato fisico.

Infatti:

- ν_0 è il modulo di Poisson infinitesimale, cioè $\nu(\lambda) \rightarrow \nu_0$ quando $\lambda \rightarrow 1$;
- λ_1 è la deformazione per la quale il materiale non si espande più lateralmente ma inizia a contrarsi.

Le fig. 17 e 18 a seguire, mostrano i grafici della funzione di Poisson e della corrispondente deformazione.

Osserviamo che per $\nu_0 < 0$, la funzione di Poisson è negativa ed il materiale assume un comportamento auxetico; in fig.17 il coefficiente λ_1 controlla la velocità con cui la funzione si avvicina all'asintoto orizzontale. D'altra parte, la funzione $\lambda_1(\lambda)$ in fig.18 cresce fino a $\lambda = \lambda_1$ e poi inizia a decrescere fino a quando la deformazione laterale è completata.

Per $\nu_0 > 0$ la funzione è positiva e decrescente. Se $\lambda < \lambda_1$ il materiale si comporta come un continuo classico e si contrae lateralmente a fronte di

un'espansione longitudinale. Quando $\lambda = \lambda_1$ il materiale ritorna in una fase auxetica ed inizia ad espandersi lateralmente.

In entrambi i casi ($\nu > 0$ e $\nu < 0$), quando $\lambda \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \frac{1}{2}$ e λ ha un asintoto orizzontale in $1 + \frac{1}{\pi}$ per $\nu < 0$ ed in $1 - \frac{1}{\pi}$ per $\nu > 0$.

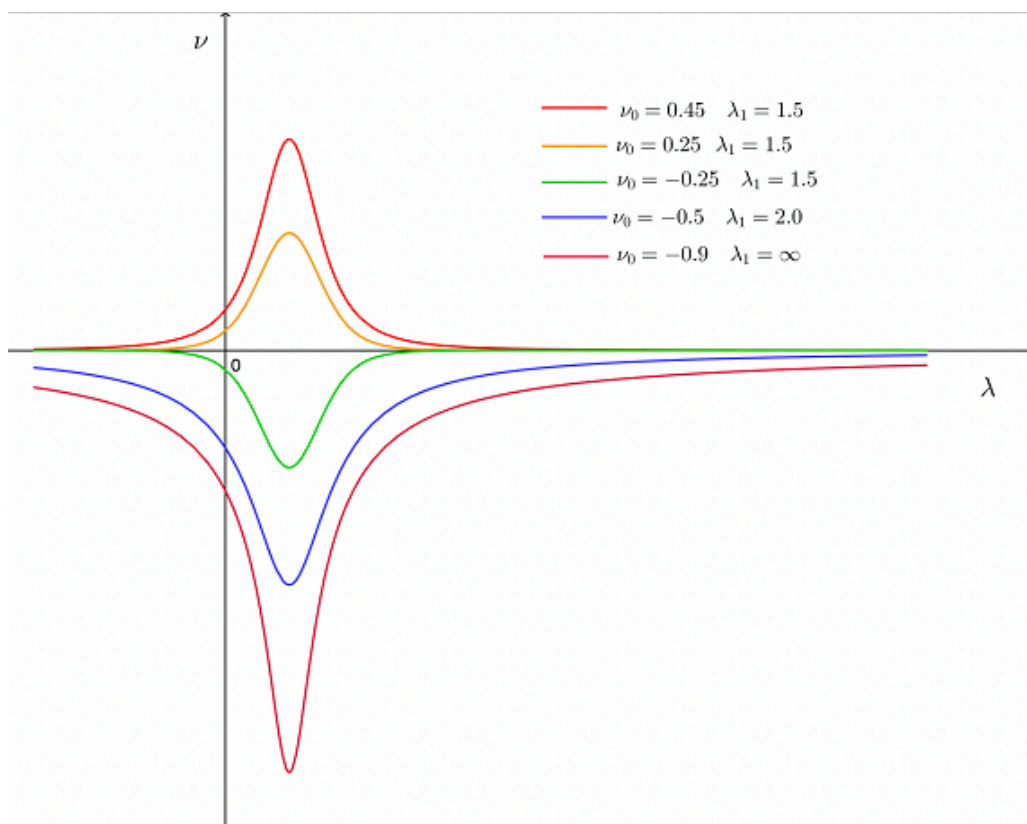


FIG. 17 = FUNZIONE DI POISSON ν_0 RISPETTO AL PARAMETRO λ

Essendo quindi λ_1 limitata superiormente ed inferiormente, abbiamo che la massima deformazione laterale per un materiale soggetto a tensione semplice è pari a $\frac{1}{\pi}$.

A questo punto utilizzando le espressioni della funzione di Poisson e della deformazione laterale per il calcolo del tensore degli stress di Cauchy \mathbf{T} , in termini di λ prevista dal modello di Blatz-Ko, otteniamo:

$$\hat{\underline{T}} := \frac{\mathbf{T}}{\mu_0} = -\frac{f}{\lambda} - \left(\frac{1-f}{\lambda^3} - f\lambda\right) [1 - (\lambda - 1)\nu_0(\pi^2(\lambda - 1)^2\nu_0^2 + 1)^{-q}]^{-2} +$$

$$+ \frac{1-f}{\lambda} [1 - (\lambda - 1)\nu_0(\pi^2(\lambda - 1)^2\nu_0^2 + 1)^{-q}]^{-4}$$

dove $\hat{\underline{T}}$ è il tensore di Cauchy normalizzato ed f è un'opportuna funzione tale che $0 \leq f \leq 1$.

In particolare, fissato $f = 1$, il modello costitutivo dipende da soli tre parametri: μ_0 , ν_0 e λ_1 .

Inoltre, con tali espressioni, è possibile ricavare anche il modulo di Young:

$$E_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = 2\mu_0(1 + \nu_0)$$

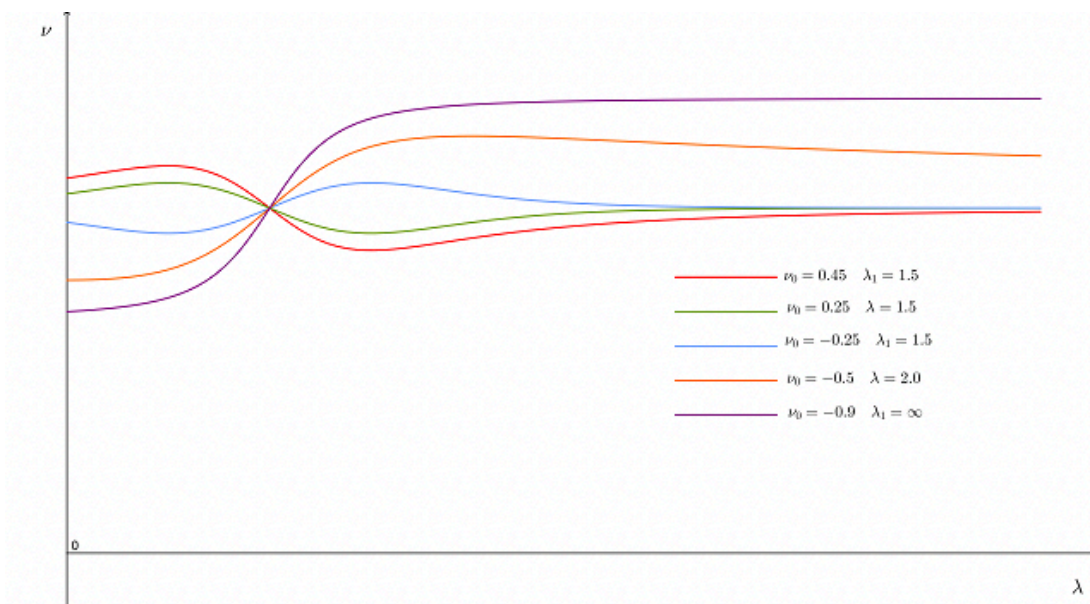


FIG. 18 = FUNZIONE DI DEFORMAZIONE λ_1 RISPETTO AL PARAMETRO λ

Capitolo III - Transizioni di fase e Memoria di forma

Le transizioni di fase sono conseguenza di mutamenti della struttura interna del materiale con variazioni significative del comportamento fisico, meccanico e termodinamico del corpo. Difatti, al variare di grandezze fisiche come pressione, temperatura campo elettrico e magnetico, la struttura molecolare del corpo cambia, alterando le proprietà fisico-meccaniche del materiale stesso.

Problematiche relative alle transizioni di fase sono state ampiamente trattate da Landau e Ginzburg, tramite modelli fisico-matematici ed una serie di lavori sulla superconduttività; recentemente, però, sono state formulate diverse teorie con l'utilizzo delle derivate frazionarie a coefficienti variabili, le quali ci permettono di osservare in maniera accurata le variazioni della struttura interna di un materiale durante una transizione di fase.

In questo capitolo presentiamo un modello per lo studio della transizione di fase di metalli puri (alluminio, acciaio, bronzo, zinco, argento, etc.), i quali mostrano una buona duttilità nella fase solida. Di seguito, durante la transizione di fase, osserviamo il passaggio del materiale da una fase fluido-viscosa ad una solida visco-plastica.

A tal proposito utilizziamo la derivata frazionaria di Caputo, in regime di piccole deformazioni; la transizione viene descritta da un modello di campo

di fase $\alpha(x,t)$, che soddisfa l'equazione di Ginzburg-Landau e tale che $\alpha \in [a,1]$, dove $0 < a \ll 0.5$. Per $\alpha = 1$ abbiamo la fase liquida, per $\alpha = a$ la fase visco-plastica; in seguito verificheremo la compatibilità con la Prima e la Seconda legge della Termodinamica.

3.1 L'approccio di Caputo

Nella reologia moderna, campo dove la derivata frazionaria riesce a modellare bene il comportamento meccanico di diversi materiali, è spesso necessario risolvere problemi di viscoelasticità partendo da condizioni iniziali espresse in termini di derivate di ordine intero (si pensi, per esempio, alla velocità di deformazione che rappresenta la derivata prima rispetto tempo della funzione deformazione).

M. Caputo intorno al 1967 ha fornito la seguente definizione di operatore frazionario:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

che abbrevieremo con D^α e prende il nome di *Differintegrale di Caputo*, valido per $n - 1 < \alpha < n$.

L'espressione ottenuta è frutto di un'interpolazione tra derivate di ordine intero, infatti per $\alpha \rightarrow n$, l'espressione diventa una n-esima derivata della funzione $f(t)$.

3.1.2 Proprietà degli operatori frazionari

Le proprietà che riguardano le derivate e gli integrali di ordine intero si possono estendere anche agli operatori frazionari; questo conferma il fatto che il calcolo differenziale e integrale ordinario è un sottoinsieme del calcolo frazionario.

Linearità

Analogamente alla derivazione di ordine intero, anche la derivazione frazionaria è un'operatore lineare:

$$D^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t)$$

la linearità è conseguenza della stessa definizione di derivazione frazionaria.

Regola di Leibnitz

Date due funzioni $f(t)$ ed $g(t)$ la regola di Leibnitz consente di valutare la derivata n-esima del loro prodotto:

$$\frac{d^n}{dt^n}[g(t)f(t)] = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} g^{(r)}(t)f^{(n-r)}(t)$$

dove $\binom{n}{r}$ rappresenta il coefficiente binomiale e $g^{(r)}(t)$ è la derivata intera di ordine r .

3.2 Modello differenziale

Per il nostro modello, indichiamo con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il dominio del corpo \mathcal{B} e con $[0, T]$ l'intervallo di tempo in cui osserviamo la transizione di fase.

Per lo studio di questi materiali è opportuno utilizzare la seguente equazione costitutiva:

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(x, t) = -p_\alpha(\theta)\mathbf{I} + \mathbf{A}(x) {}^C D_t^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresentano i tensori di sforzo e deformazione, mentre \mathbf{A} è un tensore del quarto ordine funzione di α , definito positivo, e θ la temperatura assoluta. L'operatore ${}^C D_t^\alpha$ rappresenta la derivata frazionaria di Caputo di ordine α definita come segue:

$$(3.2) \quad {}^C D_t^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}'(x, t) = \frac{d}{d\tau} \boldsymbol{\varepsilon}(x, \tau)$ e Γ è la funzione gamma di Eulero.

Infine, nell'ipotesi di corpo incomprimibile nella fase liquida e in quella solida, la pressione p è funzione di α e θ .

Abbiamo così le seguenti restrizioni:

$$(3.3) \quad p_\alpha(\theta) = \begin{cases} \textit{indefinita} & \text{per } \alpha = a \\ \gamma(\theta - \theta_T) + p_T & \text{per } \alpha \in (a, 1) \\ \textit{inderterminata} & \text{per } \alpha = 1 \end{cases}$$

dove θ_T e p_T indicano la temperatura assoluta e la pressione del punto triplo relativo al diagramma di fase in Fig.19, mentre $\gamma > 0$ rappresenta l'inclinazione della retta di transizione solido-liquida.

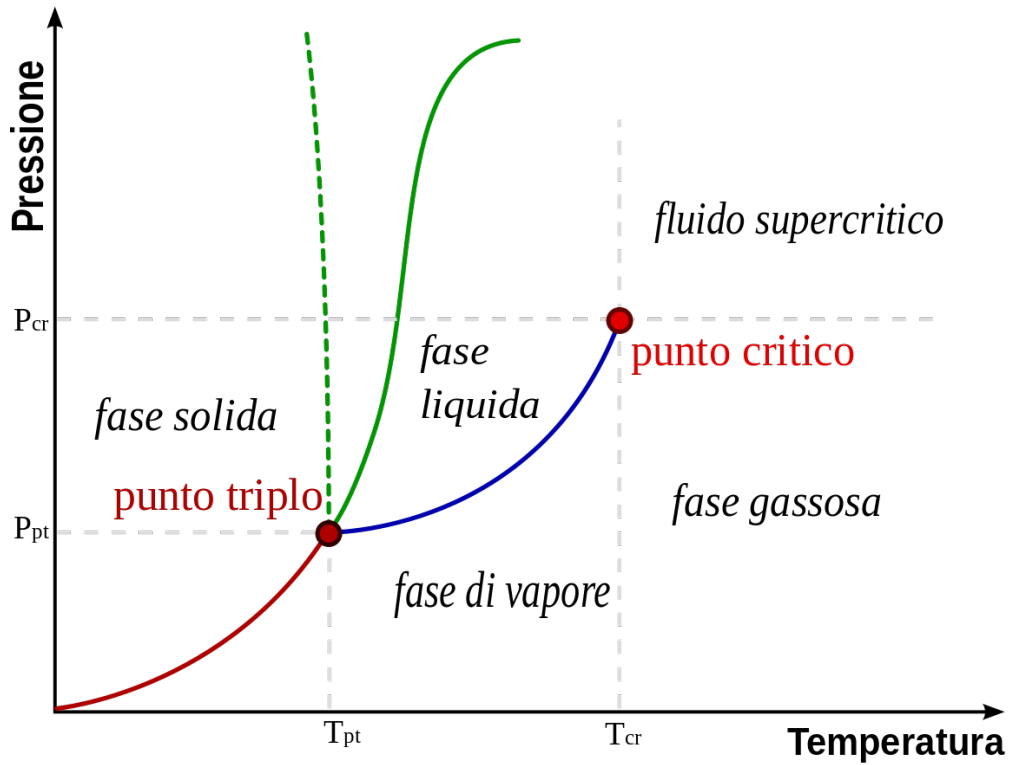


FIG. 19 = DIAGRAMMA DI FASE

Dalla (3.1), (3.2) e (3.3), otteniamo la seguente equazione costitutiva tensione-deformazione:

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(x, t) = -p_\alpha(\theta)\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'(x, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha(x, \tau)}} d\tau$$

Per $\alpha = 1$ il modello descrive una fase fluida visco-elastica, mentre per $\alpha = a$ una fase solida visco-plastica.

Quindi, la funzione $\alpha(x, t)$ è in grado di descrivere l'evoluzione della transizione di fase, la quale sarà controllata dall'equazione di Ginzburg-Landau.

$$(3.5) \quad \lambda(x) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) = \kappa(x) \nabla^2 \alpha(x, t) - \theta_T F'(\alpha(x, t)) - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} (p - p_T) \right) G'(\alpha(x, t)) - \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t))^2}{(s)^{2+\alpha}} ds$$

dove indichiamo con $\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, \tau) := \boldsymbol{\varepsilon}(x, t - \tau)$ la storia passata dello stato deformativo $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$, mentre i potenziali $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ descrivono una transizione del primo ordine e possono essere rappresentati dai seguenti polinomi del quarto ordine:

$$(3.6) \quad F(\alpha) = \frac{(\alpha - a)^4}{4(1 - a)} - \frac{(\alpha - a)^3}{3(1 - a)}$$

$$G(\alpha) = \frac{(\alpha - a)^4}{4(1 - a)} - 2 \frac{(\alpha - a)^3}{3(1 - a)} + \frac{(\alpha - a)^2}{2(1 - a)}$$

Inoltre, nell'ipotesi di incomprimibilità per la fase liquida e solida, la pressione sarà definita solo durante la transizione di fase.

Infine introduciamo l'equazione del moto:

$$(3.7) \quad \rho(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(x, t) = - \nabla p(x, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_E(x, t) + \rho(x) \mathbf{b}(x, t)$$

dove il vettore \mathbf{v} indica la velocità, \mathbf{b} le forze di massa e lo sforzo $\boldsymbol{\sigma}_E$ è definito come segue:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_E(x, t) &= \frac{\mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'(x, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha(x, \tau)}} d\tau \\ &= \frac{\mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'(x, t - s)}{s^{\alpha(x, t-s)}} ds \end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione anche l'equazione di continuità nella forma classica:

$$\dot{\rho}(x, t) = -\rho(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(x, t)$$

Per questo modello, dove il campo di fase α individua una nuova variabile che soddisfa la legge di bilancio (3.5), è comodo ricordare l'energia libera di Landau nella seguente forma:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \psi_L(\theta, \alpha, \varepsilon^t, \nabla \alpha) &= \frac{1}{2} \kappa (\nabla \alpha)^2 + \theta_T F(\alpha) + \left(\theta - \frac{1}{\gamma} (p - p_T) \right) G(\alpha) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds \end{aligned}$$

Di conseguenza l'equazione (3.5) può essere scritta come:

$$\lambda(x) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) = -\delta_\alpha \psi_L(\theta, \alpha, \nabla \alpha)$$

dove δ_α indica la derivata variazionale rispetto ad α .

Dato che la temperatura gioca un ruolo fondamentale nella transizione di fase, dobbiamo considerare l'equazione di bilancio del calore:

$$(3.10) \quad \rho(x)h(x, t) = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, t) + \rho(x)r(x, t)$$

dove lo scalare $h(x, t)$ indica il *calore interno*, il vettore \mathbf{q} il *flusso di calore* e lo scalare r la *sorgente di calore*.

Il flusso di calore può essere supposto funzione di $\nabla\theta$ come segue:

$$(3.11) \quad \mathbf{q}(x, t) = -k(x)\nabla\theta(x, t), k(x) \geq 0$$

3.3 Leggi della Termodinamica

Introduciamo ora la Prima e la Seconda legge della Termodinamica al fine di ottenere l'equazione del calore e provare la compatibilità con il nostro sistema.

Prima, però, definiamo la potenza meccanica interna \mathcal{P}_m^i e la potenza strutturale \mathcal{P}_s^i :

$$(3.12) \quad \mathcal{P}_m^i(t) = \boldsymbol{\sigma}(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t)$$

$$= (-p(\alpha, \theta)\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha(x, \tau)}} d\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t)$$

$$(3.13) \quad \mathcal{P}_s^i(t) = \frac{d}{dt} \left(\kappa \frac{(\nabla\alpha)^2}{2} \right) + \theta_T \dot{F}(\alpha) + \left(\theta - \frac{1}{\gamma}(p - p_T) \right) \dot{G}(\alpha) + \gamma \dot{\alpha}^2$$

$$+ \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \int_0^\infty \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds$$

Introduciamo, inoltre, la nozione di *stato* s e *processo* P , definite come segue:

$$s(x, t) = (\theta(x, t), \boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s), \alpha(x, t), \nabla\alpha(x, t))$$

$$P = (\dot{\theta}(x, t), \nabla \mathbf{v}(x, t), \nabla \theta(x, t), \dot{\alpha}(x, t), \nabla \dot{\alpha}(x, t))$$

Consideriamo ora:

Prima legge della termodinamica

Esiste una funzione di stato $e(s)$, chiamata energia interna, quale:

$$(3.14) \quad \rho \dot{e}(s) = \mathcal{P}_m^i(s, P) + \mathcal{P}_s^i(s, P) + \rho h(s, P)$$

dove la potenza del calore interno h è funzione della coppia stato-processo (s, P) .

Essendo l'energia interna $e(s)$ una funzione di stato, supponiamo che $e(s) = e(\theta, \alpha, \boldsymbol{\varepsilon}^t, \nabla \alpha)$.

Dalla (3.12) e dalla (3.14) segue che:

$$(3.15) \quad \rho h(s, P) = \rho \dot{e}(\theta, \alpha, \boldsymbol{\varepsilon}^t, \nabla \alpha) - \boldsymbol{\sigma}(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) - \frac{d}{dt} \left(\kappa \frac{(\nabla \alpha)^2}{2} \right) \\ - \theta_T \dot{F}(\alpha) - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} (p - p_T) \right) \dot{G}(\alpha) - \gamma \dot{\alpha}^2 \\ - \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \int_0^\infty \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds$$

A seguire abbiamo:

$$(3.16) \quad \boldsymbol{\sigma}_E(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) \\ = \frac{\alpha \mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t)}{s^{1+\alpha(x, t-s)}} \cdot \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\varepsilon}(x, t-s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t)) ds \\ + \frac{\alpha \mathbf{A}(x)}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t)}{s^{1+\alpha(x, t-s)}} \cdot \frac{d}{ds} (\boldsymbol{\varepsilon}(x, t-s) - \boldsymbol{\varepsilon}(x, t)) ds$$

Così, l'energia meccanica libera $\Psi_E(\boldsymbol{\varepsilon}^t(x, s))$ è definita come segue:

$$(3.17) \quad \Psi_E(\varepsilon^t(x, s)) = \frac{\alpha \mathbf{A}(x)}{2\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{1+\alpha(x, t-s)}} ds$$

Dove, dalla (3.16), abbiamo:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & \dot{\Psi}_E(\varepsilon^t(x, s)) \\ &= \sigma_E(x, t) \cdot \dot{\varepsilon}(x, t) - \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{2\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds \\ & \quad - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds \end{aligned}$$

dove $\tilde{\alpha}(x, t - s) = \frac{d}{ds} \alpha(x, t - s)$. Infine, dalla definizione (3.12):

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}_m^i(s, P) &= p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \sigma_E(x, t) \cdot \dot{\varepsilon}(x, t) \\ &= p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{\Psi}_E(\varepsilon^t(x, s)) \\ & \quad + \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds \\ & \quad + \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{2\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds \end{aligned}$$

Ora consideriamo la seguente funzione:

$$e_r(\theta, \alpha) = e(\theta, \alpha, \varepsilon^t, \nabla \alpha) - \Psi_E(\varepsilon^t(x, s)) - \kappa \frac{(\nabla \alpha)^2}{2} - \left(\theta_T + \frac{1}{\gamma} p_T \right) G(\alpha)$$

L'equazione del calore (3.10) assume così la seguente forma:

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad & \rho \dot{e}_r(\theta, \alpha) + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds \\
& - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} p\right) \dot{G}(\alpha) - \gamma \dot{\alpha}^2 + \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds \\
& = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, t) + \rho(x) r(x, t)
\end{aligned}$$

Seconda Legge della Termodinamica

Esiste un potenziale $\eta(s)$, chiamato funzione *entropia*, così definito:

$$(3.21) \quad \rho \dot{\eta}(s, (x, t)) \geq \rho \frac{h(s(x, t), P(x, t))}{\theta(x, t)} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q}(\nabla \theta(x, t)) \cdot \nabla \theta(x, t)$$

Dalla disequazione (3.21) ed utilizzando la (3.14) abbiamo:

$$\begin{aligned}
(3.22) \quad & \rho \theta \dot{\eta} \geq \rho h(s(x, t), P(x, t)) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \\
& = \rho \dot{e}_r(\theta, \alpha) + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{(s)^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds \\
& - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} p\right) \dot{G}(\alpha) + \gamma \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta
\end{aligned}$$

Dall'energia libera $\psi = e_r - \theta \eta$ e dalla legge di Fourier (3.11) abbiamo:

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad & \rho \dot{\psi} + \rho \eta \dot{\theta} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds \\
& - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} p\right) \dot{G}(\alpha) - \left(\theta - \frac{1}{\gamma} p\right) \dot{G}(\alpha) - \gamma \dot{\alpha}^2 + \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \dot{\alpha}(x, t) \\
& \times \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \tilde{\alpha}(x, t - s) ds - \frac{k}{\theta} (\nabla \theta)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Adesso, supponiamo che l'energia libera ψ e l'entropia η sono funzione solo di $\theta, \alpha, \nabla \alpha$. Quindi per sostituzione di \mathcal{P}_m^i e \mathcal{P}_s^i abbiamo:

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad & \rho(\psi_\theta + \eta)\dot{\theta} - \rho\gamma\dot{\alpha}^2 - p\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \lambda\rho\dot{G}(\alpha)\right) + \delta_{\varepsilon^t}\psi \\
& + \rho\left[\psi_\alpha - \theta G' + \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds\right] \dot{\alpha} \\
& - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha)}{2\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds \\
& + (\rho\psi_{\nabla\alpha} - \chi \nabla\alpha) \cdot \nabla\dot{\alpha} - \frac{k}{\theta}(\nabla\theta)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Dalla Seconda legge della Termodinamica (3.23) per l'arbitrarietà e la linearità di $\dot{\theta}, \dot{\alpha}, \nabla\dot{\alpha}$ abbiamo le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad & \eta(\theta, \alpha, \nabla\alpha) = -\psi_\theta(\theta, \alpha, \nabla\alpha), \quad \rho\psi_{\nabla\alpha}(\nabla\alpha) = \chi \nabla\alpha \\
& \psi_\alpha(\theta, \alpha) = \theta G'(\theta) + \frac{\Gamma'(1 - \alpha(x, t))}{\Gamma^2(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds
\end{aligned}$$

Infine, come conseguenze dell'incomprimibilità della fase liquida e della fase solida, la pressione p risulta non definita. Dall'arbitrarietà di $p > 0$, durante la transizione di fase abbiamo:

$$(3.25) \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \lambda\rho\dot{G}(\alpha) = 0$$

L'energia libera sarà una funzione di stato che dipende da $(\theta, \alpha, \rho, \nabla\alpha)$

$$(3.26) \quad \psi = \int e_{r,\theta}(\theta) d\theta - \theta \int \frac{e_{r,\theta}(\theta)}{\theta} d\theta$$

$$+ \frac{\alpha \mathbf{A}(x)}{2\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} ds + \theta G(\alpha) + \frac{\chi}{2\rho} (\nabla \alpha)^2$$

L'entropia è quindi data da

$$(3.27) \quad \eta = \int \frac{e_{r,\theta}}{\theta} d\theta - G(\alpha)$$

Dalla (3.20) segue che:

$$(3.28) \quad \rho \dot{e}_r(\theta(x, t), \alpha(x, t)) - \frac{\alpha \mathbf{A}(x)(1 + \alpha(x, t))}{2\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon^t(x, s) - \varepsilon(x, t))^2}{s^{2+\alpha(x, t-s)}} \\ \times \tilde{\alpha}(x, t - s) ds - \theta(x, t) \dot{G}(\alpha(x, t)) - \gamma \dot{\alpha}^2(x, t) \\ = - \nabla \cdot \mathbf{q}(x, t) + \rho(x) r(x, t)$$

Infine, il problema differenziale è completato dall'equazione del moto (3.7)

e dall'equazione di continuità (3.25).

3.4 Memoria di forma nell'equazioni costitutive dei materiali auxetici

I materiali auxetici presentano un effetto di "memoria di forma", cioè la capacità del materiale di tornare alla forma originale dopo essere stato sottoposto a deformazione; si tratta di una proprietà ben nota nelle leghe metalliche.

Il materiale dopo aver subito una deformazione plastica con un cambio permanente della forma, è capace di ritornare alla forma iniziale sotto opportune condizioni, in particolare al di sopra di una determinata temperatura detta temperatura di transizione.

L'utilizzo della derivata frazionaria è la prova della presenza di memoria di forma in molti fenomeni scientifici, tuttavia a volte si ottengono solo approssimazioni del primo ordine, necessarie per la compatibilità del modello con la Seconda Legge della Termodinamica.

La memoria di forma viene generalmente inserita nelle equazioni costitutive che rappresentano il materiale in questione, anche se non sempre le derivate frazionarie risultano compatibili con i dati sperimentali ottenuti. Difatti, si è visto che i materiali plastici vanno studiati senza alcun preconcetto sull'uso di un qualsiasi tipo di derivata; gli esperimenti in laboratorio ci mostreranno, in seguito, il modello appropriato per la memoria di forma del materiale o fenomeno in oggetto.

Sono stati fatti vari tentativi con l'utilizzo di equazioni costitutive esponenziali, ma la soluzione al problema viene dagli studi di Michele Caputo, il quale, partendo da dati sperimentali è riuscito a trovare una soluzione per modellare questo particolare fenomeno. Questo perché ogni materiale ha il proprio tipo di memoria e di equazione costitutiva, pertanto è necessario adattare l'approccio con la derivata frazionaria ad ogni singolo caso.

Il più grande problema riguardo la modellazione matematica dei materiali auxetici è quello di trovare una serie di equazioni costitutive che descrivono in maniera adeguata le proprietà meccaniche del suddetto materiale; nel corso degli anni sono stati fatti diversi tentativi, tra i quali ricordiamo

Blumfeld ed Edwards (2012) i quali presentano una teoria detta “the explicit relation between the local Auxetic strain and the local rotation and expansion of auxetons, the elementary building block of Auxetic materials” ed il modello di Ciarletta (2013) che riproduce le proprietà di un materiale auxetico con l’uso del modello di Landau ed una memoria di forma rappresentata dalle derivate del primo ordine delle relazioni tensione-deformazione.

Dagli studi di Caputo, presentiamo una relazione tensione-deformazione tridimensionale basata su tre parametri elastici, sulla memoria di forma rappresentata da una derivata frazionaria e su un parametro adimensionale, introdotto al fine di modellare le proprietà del materiale auxetico.

L’utilizzo di tre parametri elastici, invece che dei classici due, rappresenta la possibilità di avere un rapporto di Poisson sia negativo che positivo, mentre, il parametro adimensionale rappresenta lo stato del materiale, il quale può dipendere dalla temperatura o da altre condizioni fisiche.

3.5 Relazione tensione-deformazione per materiali auxetici

Le relazioni tensione-deformazione con memoria di forma sono le seguenti:

$$\tau_{ij} = \delta_{ij} \left(n - \frac{m}{g} \right) e_{rr} + 2 \left(\frac{f}{g(y)} \right) \varepsilon_{ij} + 2 \left(\frac{f}{g(y)} \right) \eta D^{(n)} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij} e_{rr}}{3} \right)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, τ_{ij} e ε_{ij} sono rispettivamente le componenti del tensore di stress e del tensore di deformazione, n, m, f sono parametri elastici positivi, e_{rr} è la dilatazione, y è un parametro fisico interno (ad esempio la temperatura) e $g(y)$ rappresenta un campo di fase capace di descrivere l'evoluzione della struttura interna del materiale; $D^{(n)}$ è la derivata frazionaria di Caputo.

Notiamo che effettivamente i parametri elastici sono tre: $ng, m/g, f/g$ mentre $g(y)$ è un parametro introdotto per adattare il modello ai materiali auxetici; la forma di $g(y)$ può essere definita dopo i risultati del lavoro sperimentale.

Dato che operiamo con la trasformata di Laplace (LT), assumendo valori nulli per tensione e deformazione all'istante $t = 0$, abbiamo:

$$T_{ij} = \delta_{ij} \left(n - \frac{m}{g} \right) E_{rr} + 2 \left(\frac{f}{g} \right) E_{ij} + 2 \left(\frac{f}{g} \right) \eta D^{(z)} \left(E_{ij} - \frac{\delta_{ij} E_{rr}}{3} \right)$$

dove $T_{ij} = LT\tau_{ij}$, $E_{rr} = LTe_{rr}$ e $E_{ij} = LT\varepsilon_{ij}$.

Il rapporto di Poisson, indicato con P , nel caso di assenza di memoria di forma ($\eta = 0$) è ottenuto calcolando le deformazioni causate dalla pressione lungo l'asse x_1 e stimando il loro rapporto. Vediamo, quindi, che il rapporto di Poisson vale:

$$P = \frac{-0.5(ng - m)}{(ng - m + f)}$$

il quale è positivo se

$$\left(\frac{m - f}{n} \right) < g < \left(\frac{m}{n} \right)$$

e negativo se

$$\left(\frac{m-f}{n}\right) > g \text{ oppure } g > \left(\frac{m}{n}\right)$$

Le condizioni di velocità delle onde possono modificare le condizioni di positività/negatività del rapporto di Poisson, ma non portano a cambiamenti drastici.

In conclusione, le equazioni costitutive proposte descrivono le proprietà basi di un materiale auxetico. L'utilizzo di tre parametri elastici permette il confronto con un materiale perfettamente elastico o perfettamente plastico, mentre la generica funzione dimensionale $g(y)$ definisce la soglia per una possibile transizione di fase per diverse proprietà del materiale.

3.6 Simulazioni numeriche

Considereremo adesso l'equazione costitutiva proposta da Caputo, e su questa faremo alcune simulazioni numeriche per verificarne la bontà nel riprodurre il comportamento di un materiale auxetico.

In primo luogo ci riduciamo al caso bidimensionale, per cui il fattore 3 che compare nella formula che definisce il tensore di stress deve essere sostituito con 2

$$\tau_{ij} = \left(n - \frac{m}{g(\theta)}\right) \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \frac{2f}{g(\theta)} \varepsilon_{ij} + \frac{2f}{g(\theta)} \eta D^{(\alpha)} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} \right]$$

Per quanto riguarda i valori dei parametri che compaiono in questa equazione, osserviamo che il rapporto di Poisson ν è espresso da

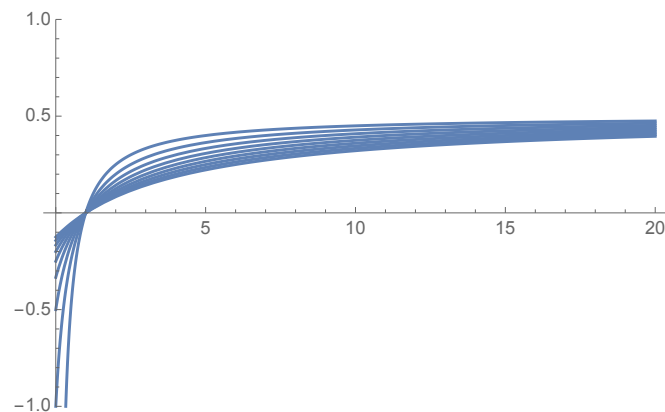
$$\nu = \frac{ng(\theta) - m}{2(ng(\theta) - m + f)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{ng(\theta) - m}}$$

Supponiamo un andamento lineare crescente per la funzione $g(\theta)$, del tipo

$$g(\theta) = \theta_0 + \omega\theta$$

con θ_0 e ω entrambi uguali a 1. Supponiamo inoltre $\eta = 1$.

Facendo prove con diversi valori dei parametri elastici n, m, f , scegliamo i seguenti valori $n = 2, m = 4, f = 1$, a cui corrisponde il seguente grafico per il rapporto di Poisson



dove in ascissa sono riportati i valori della temperatura θ , in ordinata il rapporto di Poisson, mentre le varie curve sono relative a diversi valori del parametro f (da 2 a 10).

Consideriamo adesso un tensore di deformazione diagonale, quindi senza deformazioni di taglio

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 0 \\ 0 & \beta_2(t) \end{pmatrix}.$$

Anche per le funzioni β_1, β_2 assumiamo per semplicità un andamento lineare rispetto al tempo, del tipo

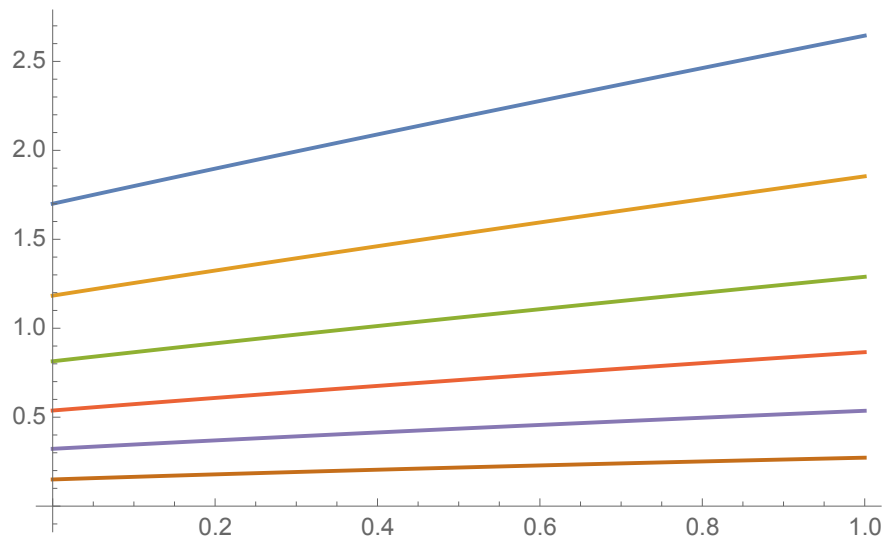
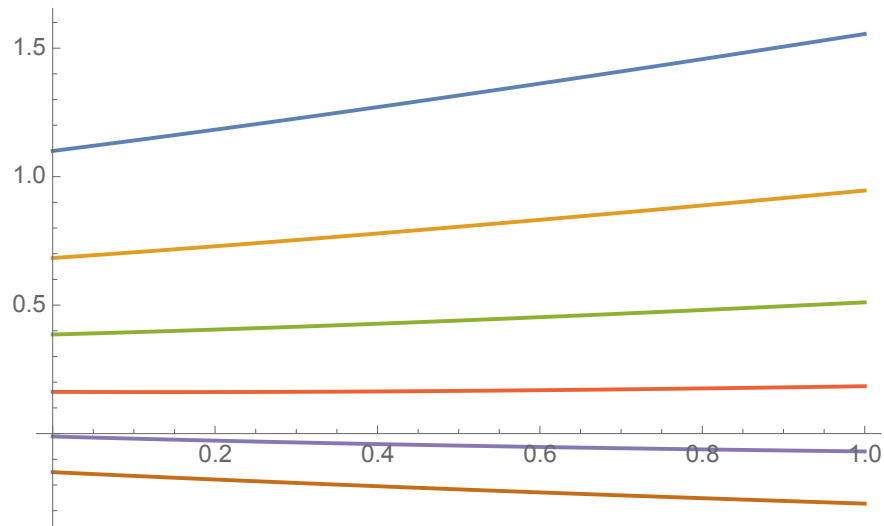
$$\beta_i(t) = a_i + b_i t, \quad i = 1, 2$$

I valori delle costanti che compaiono nell'approssimazione lineare rispetto al tempo scelta per gli elementi diagonali del tensore di deformazione sono i seguenti:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1/2, & b_1 &= 1/4, \\ a_2 &= -1/5, & b_2 &= 1/10, \end{aligned}$$

che corrispondono ad una compressione orizzontale che inizia da un fattore $-1/2$ ed aumenta in valore assoluto fino a $-3/4$ (per una scala dei tempi che va da 0 a 1), ed analogamente, ma di minore entità, la compressione verticale. Andiamo a verificare quali sono i valori ottenuti per il tensore di stress.

I risultati ottenuti sono mostrati nei seguenti due grafici che rappresentano le due componenti diagonali, τ_{11}, τ_{22} , mentre la componente non diagonale è ovviamente nulla. In ascissa il tempo durante il quale viene effettuata la deformazione, mentre le diverse linee corrispondono a diversi valori della temperatura.



Dai grafici si evince che è possibile che in corrispondenza di uno sforzo orizzontale prossimo a zero (seconda linea dal basso del primo dei precedenti grafici) o addirittura negativo, si abbia uno sforzo positivo nella corrispondente linea del secondo grafico. Possiamo interpretare questo risultato al contrario, cioè applicando uno sforzo di compressione lungo un solo asse si ottiene una compressione in entrambe le direzioni, risultato evidentemente compatibile con la definizione di materiale auxetico.

Sviluppi futuri

In questo lavoro di tesi abbiamo svolto un'approfondita analisi dei materiali auxetici, mostrando diversi aspetti e diverse teorie, dalla modellazione della microstruttura, fino allo studio di equazioni costitutive con fenomeni di transizione di fase e di memoria di forma; tutto ciò ha messo in luce molte delle caratteristiche derivanti da un coefficiente di Poisson negativo, tuttavia, nonostante i risultati ottenuti da molti grandi studiosi, ad oggi ancora non esiste una teoria generale che descriva questi materiali.

Le simulazioni numeriche qui effettuate pongono l'accento sulle straordinarie possibilità dei materiali NPR, ma uno sviluppo decisivo necessita di una maggiore trattazione sperimentale; sarebbe opportuno confrontare i risultati ottenuti con vere e proprie prove di laboratorio, in modo da valutare al meglio la bontà dei modelli teorici-numeriche nel riprodurre casi reali.

Così facendo si potrebbe uscire dalla teoria matematica, per passare ad un approccio pratico, essenziale, come la definizione e lo studio di processi produttivi innovativi, che porterebbero alla diffusione su larga scala dei materiali auxetici.

Bibliografia

- Bianchi M, Scarpa F, Smith CW.: *Shape memory behaviour in auxetic foams: mechanical properties*, Acta Materials (2010)
- Caputo M.: *Memory in constitutive equations and auxetic media*, Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali (2017)
- Caputo M., Ciarletta M., Fabrizio M., Tibullo V.: *Melting and solidification of pure metals by a phase-field model*, Rend. Lincei Mat. Appl. 28 (2017)
- Ciarletta M., Fabrizio M., Tibullo V.: *A phase field model for a solid-liquid phase transition*, Mechanics Research Communications (2011)
- Ciarletta M., Fabrizio M., Tibullo V.: *Shape memory and phase transition for auxetic materials*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2012)
- Ciarletta M., Iesan D.: *Elementi di Meccanica dei Continui con Applicazioni*, Pitagora Editrice Bologna (1997)
- Evans K.E., Alderson A.: *Auxetic Materials: Functional Materials and structures from lateral thinking*. Advanced Materials (2000)
- Fabrizio M.: *Ginzburg-Landau equations and first and second order phase transitions*, International Journal of Engineering Science (2006);
- Grima JN , Evans KE : *Auxetic behaviour from rotating triangles*. Journal of Materials Science (2006)

- Grima JN, Evans KE: *Auxetic behaviour from rotating squares*.
Journal of Materials Science (2000);
- Grima JN, Manicard E, Attard D: *Auxetic behaviour from connected different-sized squares and rettangles*. Royal Society Publishing (2011);
- Landau LD, Ginzburg VL.: *On the theory of superconductivity*, Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (1950);
- Tessari M.: Tesi di Laurea “*Studio del comportamento auxetico di materiali compositi laminati*” (2013)

