Università degli Studi di Salerno
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E STATISTICHE

Rosa Ferrentino*

SU ALCUNI PARADOSSI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

WORKING PAPER 3.161
2005

* Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche – Università degli Studi di Salerno – via Ponte Don Melillo – 84084 Fisciano (Salerno), rferrentino@unisa.it

Su alcuni paradossi della teoria degli insiemi

Oggetto di studio del presente lavoro è l'analisi dei più significativi paradossi della teoria degli insiemi, la cui scoperta ha segnato una svolta nella storia della matematica perché ha evidenziato l'esigenza di un più accurato esame delle basi su cui era stato fondato l'edificio matematico.
Si tratta, sostanzialmente, di un excursus storico - dalla nascita all'evoluzione - della teoria degli insiemi o, meglio, di una combinazione tra una trattazione tecnica non strettamente specialistica e profili di carattere storico.

Introduzione

La parola paradosso deriva dal greco "paradoxon", composto da "parà" (contro) e "doxa" (opinione), e indica una proposizione che per il suo contenuto o per il modo in cui è espressa, è in evidente contrasto con l'opinione comune o con i principi generali della logica; una proposizione che appare, cioè, incredibile ma che nello stesso tempo, sottoposta ad un esame critico e rigoroso, risulta o potrebbe risultare valida e fondata.
In realtà, il significato del termine paradosso dipende, come afferma Piergiorgio Odifreddi [12], dai tre periodi storici in cui esso ha avuto grande considerazione ed è insito nel nome con cui veniva chiamato. Per i greci il paradosso era un *paralogismo* cioè un puro e semplice errore di ragionamento; nel medioevo divenne *insolubilia* ossia un dilemma inspiegabile mentre, tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi del Novecento, fu considerato come un'affermazione incredibile, una credenza contraria all'intuizione comune. Il paradosso, tuttavia, è fonte di nuove idee: facendoci dubitare delle nostre credenze indica che ci sono delle teorie da rivedere e dei concetti da ridefinire; suggerisce, cioè, cambiamenti.
In matematica, in particolare, è accaduto spesso che i vecchi **paradossi, alcuni dei quali non ancora risolti, siano stati riconsiderati e talvolta integrati come teoremi o nuovi assiomi. I primi paradossi storici della matematica, quelli proposti da Zenone di Elea, ad esempio, hanno contribuito alla maggior parte dei progressi della matematica moderna ossia alla realizzazione di gran parte del processo di formalizzazione della matematica avvenuto soprattutto tra la metà dell'Ottocento e i primi del Novecento. Opportunamente riveduti e affinati, rappresentarono lo strumento usato dai matematici per dimostrare teoremi che altrimenti sarebbero rimasti inaccessibili. J. Hadamard (1865-1963) affermava che** ***nella storia l'insorgere di contraddizioni e paradossi ha sempre accompagnato l'emergere di nuovi concetti, come è stato per gli irrazionali[1] o per gli immaginari.***

---

[1] La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato, scoperta che aveva messo in crisi la visione pitagorica perché impediva di ridurre tutto a un numero razionale, cessò di essere un paradosso solo quando fu introdotto il concetto di numero irrazionale e quindi la nozione più generale di numero reale.

1. I primi paradossi

Il più antico dei paradossi, e anche il più noto, è quello del mentitore, attribuito ad Epimenide di Creta, uno dei sette sapienti dell'antichità, poeta e taumaturgo, vissuto all'incirca nel VI secolo a. c. e nativo di Cnosso, nell'isola di Creta. Epimenide diceva: *Tutti i Cretesi sono bugiardi.* E dunque Epimenide, che era cretese, diceva la verità o mentiva? Se diceva la verità, allora, essendo cretese, mentiva contrastando, così, l'ipotesi. Se, invece, mentiva, allora i cretesi non erano bugiardi ed egli, essendo cretese, diceva la verità, ancora contro l'ipotesi. Ciascuna delle due possibilità portava, dunque, ad una contraddizione[2].
Un altro celebre paradosso, formulato dal filosofo greco Zenone di Elea (495-435 a.C.), discepolo di Parmenide, è quello di "*Achille e la tartaruga* " in cui Zenone dimostrava l'impossibilità, da parte di Achille, considerato l'uomo più veloce del suo tempo, di raggiungere una lenta tartaruga.
Secondo Zenone, se Achille avesse sfidato la tartaruga alla corsa, concedendole un vantaggio, non sarebbe mai riuscito a raggiungerla perché, mentre Achille avrebbe colmato il vantaggio concesso alla tartaruga, quest'ultima nel frattempo avrebbe percorso un'altra distanza e, mentre Achille avrebbe colmato questa nuova distanza, la tartaruga ne avrebbe percorsa un'altra, e così via. Achille quindi non sarebbe mai riuscito, nonostante la maggiore velocità, a colmare tutti gli svantaggi accumulati a causa del moto lento ma progressivo della tartaruga. Il ragionamento di Zenone, ipotizzando che entrambi gareggino lungo un percorso rettilineo AT e che Achille sia due volte più veloce della tartaruga, può essere così schematizzato: nell'istante in cui inizia la gara, Achille si trova in A mentre la tartaruga in B; nel momento in cui Achille raggiunge il punto B da cui è partita la tartaruga, questa si sarà spostata nel punto C e avrà percorso metà della distanza di Achille. Quando Achille raggiunge C, la tartaruga si sarà spostata

---

[2] Del paradosso del mentitore si sono occupati, fin dall'antichità filosofi e matematici, tra cui Seneca (5 a.C., 65 d.C.), Cicerone(106, 43 a.C.), Aristotele(384,322 a.C.), Paolo di Tarso(I sec. d.C.), i logici medievali Alberto di Sassonia e Guglielmo di Ockham(1290,1347), il filosofo Giovanni Buridano(1295-1360), il matematico polacco americano Alfred Tarski(1903,1983),ecc. Si narra addirittura che il logico Fileta di Cos(340,285 a.C.) fosse morto prematuramente per gli sforzi fatti per risolvere il problema.

in D e avrà percorso metà della nuova distanza di Achille, restando ancora in vantaggio e così via.

A B C D T

In altri termini, ogni volta che Achille raggiunge il punto in cui si trovava prima la tartaruga, essa si è spostata in avanti e, per raggiungerla, egli deve ancora percorrere una frazione di intervallo, ognuna delle quali è la metà della precedente. Questo processo di dimezzamento si ripete all'infinito per cui l'intero segmento AT viene suddiviso in un numero infinito di segmenti sempre minori. Il tempo richiesto per affrontare l'intero percorso è la somma delle quantità di tempo richieste per percorrere ogni singolo tratto e poiché, secondo Zenone, la somma di un numero infinito di termini doveva necessariamente fornire un risultato infinito, Achille non raggiunge la tartaruga sebbene la distanza tra i due si riduca rapidamente.

Il ragionamento di Zenone mostra in effetti che Achille, per quanto veloce possa essere, non potrà mai superare la tartaruga, per quanto lenta questa sia. In realtà, dopo un numero (infinito) di istanti successivi al momento della partenza, Achille raggiunge la tartaruga e nell'istante di tempo immediatamente successivo la supera definitivamente. Per evidenziare l'errore di Zenone, basta osservare che il tempo impiegato da Achille a raggiungere la tartaruga, così come lo spazio da lui percorso in tale tempo, può essere suddiviso in un'infinità di parti che divengono sempre più piccole e che costituiscono i termini di una progressione geometrica decrescente. I matematici all'epoca di Zenone non conoscevano le progressioni geometriche e così, invece di affrontare il problema, preferirono rimuoverlo. Per trovare una soluzione del problema, puramente teorico, sono stati necessari, dall'epoca di Zenone, circa 2000 anni; infatti, soltanto a partire dal secolo diciassettesimo, i matematici cominciarono a comprendere che era possibile estendere il concetto di somma, valido per un numero *finito* di addendi, ad numero *infinito* di addendi .

In particolare, nel 1647 Gregorio di San Vincenzo (1584-1667), nell'Opus Geometricum, dimostrò che a volte un insieme infinito di numeri positivi può avere una somma finita, legittimando così il concetto di convergenza di una serie infinita. In questa sua dissertazione, utilizzò la serie generata dal paradosso di Zenone:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+........$$

e dimostrò che, essa al crescere di n, converge e pertanto ha somma finita, ossia:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....=1$$

Tale uguaglianza costituiva la soluzione del paradosso di Zenone; la somma finita della serie mostrava, infatti, che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga in un tempo e in un luogo determinato.
Quindi, soltanto con lo sviluppo del calcolo infinitesimale e la precisazione poi del concetto di limite, ad Achille fu finalmente possibile raggiungere e superare la tartaruga; Zenone si era, dunque, sbagliato nel modo di concepire le somme di serie infinite.

2. I paradossi della teoria degli insiemi

Vogliamo ora soffermarci su alcuni paradossi, presenti nella teoria
degli insiemi, la cui scoperta mise in crisi l'intera concezione matematica perché evidenziò l'esigenza di una revisione critica e rigorosa del linguaggio e dei concetti di base e quindi dell'edificio matematico. Tale scoperta costituì, cioè, la spia della crisi apertasi nei fondamenti della matematica verso l'inizio del secolo scorso.
Prima di affrontare l'argomento è opportuno, però, percorrere le tappe del lungo processo che ha portato alla costruzione della moderna teoria degli insiemi ed esaminare quali problemi sono stati via via sollevati.

a) La teoria degli insiemi all'inizio del secolo

La cosiddetta teoria intuitiva degli insiemi, che determinò poi il sorgere dei paradossi, nacque alla fine del secolo scorso per opera di George Cantor (1845-1918) il quale, spinto da

sollecitazioni sia di natura matematica che di natura filosofica[3]**, era giunto alla costruzione di una teoria degli insiemi basata su tre assiomi (il principio di estensionalità, lo schema di comprensione e l'assioma della scelta) e culminata, poi, nella teoria dei numeri cardinali e ordinali** [4]**. In realtà, Cantor fu il primo matematico che, tentando di procedere a una fondazione più accurata di tutta la matematica, fece della teoria degli insiemi uno studio sistematico apportando originali contributi. Gli studi sulla teoria delle funzioni e sulle serie trigonometriche lo spinsero ad occuparsi, in particolare, degli insiemi infiniti di punti e i risultati ottenuti lo condussero alla costruzione dei numeri trasfiniti. Tra il 1879 e il 1884 pubblicò, nel "Journal" di Crelle, 6 articoli dal titolo comune *Uber die unendliche lineare punktmannigfaltigkeiten* ("Sulle molteplicità lineari infinite di punti"). In essi, oltre a una serie di risultati matematici, presentava sia le proprietà degli insiemi infiniti di punti - proprietà rivelatesi particolarmente utili nella teoria dell'integrazione e nella costruzione dei numeri reali realizzata, poi, da Dedekind e Weierstrass - che l'elaborazione di nuovi numeri atti a misurare la grandezza di un insieme infinito.**

Il quinto dei sei articoli, in particolare, fu pubblicato da Cantor anche separatamente, nel 1883, con il titolo *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* ("Fondamenti di una teoria generale delle varietà"). Nell'articolo, Cantor estendeva all'infinito il concetto di numero (i numeri trasfiniti erano presentati come estensione del sistema dei numeri finiti mediante due principi di generazione) e poneva sia il problema di determinare la potenza di un insieme infinito, che non poteva certo essere data da un numero naturale (come nel caso degli insiemi finiti), sia quello di stabilire se tutti gli insiemi infiniti avessero la stessa potenza.

La soluzione di Cantor utilizzava le corrispondenze biunivoche e classificava gli insiemi infiniti in base al "numero" dei loro elementi:

---

[3] Tra le motivazioni di tipo matematico ricordiamo quella relativa alla determinazione delle condizioni di unicità dello sviluppo in serie trigonometrica di una funzione di variabile reale, mentre tra quelle di natura filosofica, strettamente connesse con le precedenti, sono da considerare le obiezioni e le osservazioni critiche su alcune concezioni di filosofi a lui anteriori o contemporanei [4].

[4] David Hilbert esaltava l'opera di Cantor come il prodotto più stupefacente del pensiero matematico e nel 1926 esclamava: *Nessuno ci scaccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi.*

i diversi livelli di numerosità degli insiemi infiniti furono trattati da Cantor come nuovi numeri, definiti numeri cardinali. Un suo grande risultato fu, infatti, la possibilità di confrontare gli insiemi infiniti in base alla loro cardinalità: dimostrò, che R non ha la *potenza del numerabile*[5], ma ha una diversa cardinalità detta *potenza del continuo*. Nel 1874, giunse, poi, alla famosa *"ipotesi del continuo"* secondo cui *ogni sottoinsieme infinito di R, non avente la potenza del numerabile, ha la potenza del continuo,* cioè ogni sottoinsieme infinito di R ha o la potenza del numerabile o la potenza del continuo: non esistevano, dunque, cardinalità comprese tra le due, ossia cardinalità superiore al numerabile ma inferiore al continuo.
Cantor diede, dunque, una risposta negativa al quesito, senza però riuscire a trovare una dimostrazione; ancora oggi, oltre un secolo dopo, non è stata trovata una risposta definitiva. Nel 1963 il logico matematico Cohen (nato nel 1934) dimostrò che l'ipotesi del continuo è indipendente dai rimanenti assiomi della teoria degli insiemi allo stesso modo in cui il quinto postulato di Euclide è indipendente dagli altri assiomi della geometria. Ne consegue che è possibile costruire una nuova teoria degli insiemi infiniti negando la validità dell'ipotesi del continuo; si possono, cioè, costruire diverse "aritmetiche dell'infinito"- ciascuna coerente - nelle quali l'ipotesi del continuo può essere vera o falsa. Si ripresenta per la teoria degli insiemi la stessa situazione dell'assioma delle parallele in geometria: così come coesistono geometrie non euclidee, è possibile sviluppare sia teorie degli insiemi in cui vale l'ipotesi del continuo che teorie in cui vale l'ipotesi opposta. Dal teorema di Cohen segue cioè che, come non esiste una geometria assoluta, non esiste una teoria degli insiemi assoluta. La teoria cantoriana degli insiemi infiniti fu un fatto realmente rivoluzionario ma anche oggetto di molte critiche che non consentirono a Cantor di raggiungere una posizione accademica prestigiosa. I ripetuti insuccessi nello studio del problema del continuo e l'ostilità dei matematici spinsero Cantor in una profonda depressione e in un non richiesto isolamento. Non avendo, infatti, la possibilità di una carriera universitaria, Cantor rimase confinato nella piccola sede universitaria di Halle in qualità di professore straordinario, dietro

[5] Cioè la potenza di N e di ogni insieme equipotente a N.

proposta del matematico Heine. L'auspicato passaggio alle prestigiose Università di Gottinga e Berlino, cosa che Cantor considerava come il naturale riconoscimento all'importanza dei propri lavori scientifici, fu contrastato da Leopold Kronecker (1823,1891), suo antico maestro di Berlino, ma anche suo accanito nemico. La vita di Cantor, dopo la scoperta dell'infinito, fu, cioè, *uno di quegli inferni, che gli scienziati sanno ben costruire, quando vogliono, per i loro colleghi.* Nella primavera del 1884 una crisi di origine nervosa lo allontanò per qualche tempo dalla ricerca: si trattava del primo manifestarsi di una malattia che lo costrinse, per lunghi periodi, in una clinica psichiatrica di Halle, dove morì, nel 1918.

Nella fondazione della teoria degli insiemi il nome di Cantor va accumunato a quello di Dedekind (1831,1916) che fu "*non solo il confidente scientifico, il maestro che corregge e indirizza, ma anche l'amico a cui Cantor raccontava le sue speranze, i suoi sforzi, i suoi fallimenti*" [10]. Questa funzione di "padre spirituale" fu poi assunta da Hilbert che valorizzò la nuova teoria di Cantor verso la quale indirizzò alcuni dei suoi allievi come Zermelo e Bernstein.

Un elemento fondamentale per una delle più originali scoperte di Cantor - la teoria dei numeri trasfiniti - era il concetto di buon ordinamento di un insieme[6] di cui Cantor si era occupato a lungo, riuscendo a sviluppare l'originale teoria degli insiemi bene ordinati. Gli elementi essenziali di tale teoria sono delineati nell'ultima grande Memoria di Cantor, i *Beitrage zur begrundung der trasfini-ten mengenlehre* ("Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi trasfiniti") apparsi in due parti, nel 1895 e nel 1897, che rappresentano il traguardo delle ricerche di Cantor e, al tempo stesso, la nascita della teoria degli insiemi astratti. In realtà Cantor, in una precedente memoria dal titolo *Principien einer theorie der ordnungstypen* ("Principi di una teoria dei tipi d'ordine"), aveva già trattato, anche se in modo generale, la teoria degli insiemi ordinati a cui era giunto nel tentativo di

[6] Un insieme è da intendersi ben ordinato se dotato di una relazione che mette in fila, l'uno dietro l'altro, i suoi elementi, a partire dal più piccolo, cioè un insieme ordinato che ha necessariamente un primo elemento, ossia, un minimo. Non tutti gli insiemi ordinati hanno necessariamente un primo elemento, ossia un minimo.

provare l'ipotesi del continuo. Aveva inviato il lavoro allo svedese Mittag Leffler (1846-1927) perché fosse pubblicato nella rivista "Acta" da lui fondata, nel 1882 ma questi, mentre ne era già in corso la stampa, gli aveva consigliato di ritirare il lavoro perché, a suo parere, poteva risultare incomprensibile e screditare, cosi, la teoria dei numeri trasfiniti che aveva costruito.

Nei "*Beitrage"*, Cantor aveva cercato di stabilire come i punti della retta o i numeri reali si potessero ordinare in modo che ogni loro sottoinsieme avesse sempre un primo elemento. Non riuscì, però, ad ottenere tale risultato, sebbene vi avesse dedicato tutte le proprie energie. Il problema dell'esistenza di un buon ordinamento per il continuo restava, dunque, un problema ancora aperto. Solo nel 1904, il matematico tedesco Ernst Zermelo(1871-1953), ne pubblicò una dimostrazione, su una rivista matematica di grande prestigio quale *"Mathematische Annalen",* che includeva allora, tra i suoi responsabili,anche Klein e Hilbert. La sua dimostrazione, da cui si evinceva la possibilità di ben ordinare *ogni* insieme, si basava però sul fatto che il prodotto cartesiano di insiemi non vuoti è non vuoto e su un noto principio insiemistico - noto come *assioma della scelta*[7] *-* che postula l'esistenza di un insieme senza specificare le condizioni che devono soddisfare i suoi elementi e il cui ruolo è decisivo in moltissime dimostrazioni matematiche. In realtà, Zermelo aveva semplicemente sottolineato il collegamento tra l'affermazione, secondo cui ogni insieme non vuoto si può ben ordinare, e quella secondo cui il prodotto cartesiano di insiemi vuoti è vuoto. Più precisamente, aveva dimostrato che la seconda affermazione - chiamata usualmente *assioma moltiplicativo -* è condizione sufficiente per la prima.

La risposta affermativa di Zermelo al problema del buon ordinamento fu oggetto di aspre recensioni. Già nel numero

---

[7] "*Data una collezione arbitraria di insiemi non vuoti, e disgiunti, è possibile scegliere un elemento in ciascuno di tali insiemi in modo che questi elementi costituiscono un (nuovo) insieme cioè, per ogni famiglia di insiemi non vuoti, esiste almeno un insieme che ha uno e un solo elemento in comune con ciascuno degli insiemi non vuoti".* L'assioma è equivalente ad un certo numero di altre proposizioni; in particolare, nel 1904, Kurt Godel dimostrò che l'assioma della scelta, indispensabile nell' Analisi, è compatibile con gli altri assiomi della teoria ZF. Nel 1963, poi, P.Cohen mostrò che tale assioma è indipendente dagli altri assiomi (della teoria ZF).

successivo della rivista ”*Mathematische Annalen”,* apparvero articoli di matematici, come Schoenflies e Bernstein, che si dichiaravano tutt’altro che convinti della teoria di Zermelo da cui, tra l’altro, discendeva la proprietà di tricotomia per i cardinali.
Anche l’ungherese J. Konig (1849-1913) cercò di smentire Zermelo: al Congresso internazionale dei matematici, svoltosi, nel 1904, a Heidelberg, Konig dimostrò, infatti, con un controesempio, che il continuo non era un insieme ben ordinato. Il suo ragionamento, da cui derivava, anche, che l’ipotesi del continuo era falsa, si basava però su un’errata interpretazione della disequaglianza di Bernstein o meglio (come dimostrò Zermelo) sull’applicazione non corretta di un risultato di Bernstein. Qualche anno dopo, E. Borel (1871-1956), condirettore dei ”*Mathematische Annalen”,* affermava che i risultati ottenuti da Zermelo dovevano essere verificati con ragionamenti seri e non euristici come quelli, a suo avviso, di Zermelo; osservava poi che l’assioma moltiplicativo è anche condizione necessaria per il teorema di Zermelo e che quindi i due assiomi, pur apparentemente distinti, risultavano equivalenti. In questo contesto si inseriva uno dei più grandi logici del secolo scorso, Gottlob Frege (1848-1925), che aveva cominciato ad elaborare il proprio programma di ricerca sui fondamenti della Matematica. Frege cercò di mettere a punto il concetto di numero naturale e di accertare se esso poteva costituire la base teorica su cui edificare l’Analisi. In questa sua indagine s’imbatté, però, nell’inadeguatezza del linguaggio usato per le dimostrazioni matematiche e iniziò, così, lo sviluppo di un linguaggio e di una logica formale. Secondo Frege, il metodo di Cantor aveva rivelato un legame troppo stretto con la geometria e aveva pertanto perso il carattere propriamente aritmetico che Cantor intendeva attribuirgli. Anche i tentativi messi in atto dai vari matematici non avevano - a parere di Frege - raggiunto lo scopo di introdurre i numeri irrazionali per via puramente logica per la scarsa osservanza del rigore che la logica invece richiede nel dare le definizioni. Frege sfuggì a tali errori con un procedimento diretto a introdurre i numeri reali per via puramente aritmetica e, cioè, interpretando i numeri reali come rapporti di grandezze. In tal modo, Frege giungeva - come egli stesso osservava in una lettera a Russell del 21 maggio 1903 - in un sol passo dai numeri naturali ai reali, evitando di passare attraverso i numeri razionali.

Nel 1879, già professore all'università di Jena, pubblicò i risultati delle proprie ricerche in un opuscolo dal titolo *Begriffsschrift-Ein der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen denkens* ("Ideografia - Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico") in cui derivava, in modo assolutamente rigoroso, un gran numero di teoremi da pochi assiomi, chiariva la distinzione tra variabili e costanti e introduceva il concetto di funzione logica. L'opuscolo, però, pur contenendo una quantità di idee originali, non colpì in modo particolare i logici e i matematici; così, Frege, amareggiato per l'incomprensione e l'indifferenza verso i suoi lavori, pubblicò, nel 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik* ("I fondamenti dell'aritmetica") che - come affermò più tardi Zermelo, nel 1932 - rappresentava "quanto di più bello e di più chiaro fosse stato fin ad allora pubblicato sul concetto di numero". A tale lavoro fecero seguito altri articoli e poi, nel 1893, il primo volume dell'opera *Grundgesetze der Arithmetik* ("Principi dell'aritmetica"), in cui Frege presentava il proprio programma assiomatico. L'opera rielaborava tutta la matematica partendo dal concetto di insieme, utilizzava un insieme di principi basilari ed esprimeva il tutto in un linguaggio formale. Dieci anni più tardi, nel 1903, usciva il secondo volume della grande opera, in cui Frege trattava la teoria dei numeri reali su basi puramente logiche

b) Il paradosso di Russell

Alla vigilia della pubblicazione del volume di Frege, Bertrand Russell (1872-1970) evidenziò, nel pensiero del grande logico tedesco, una contraddizione che riguardava in particolare il quinto assioma e che è riassunta nel celebre paradosso di Russell.
Entusiasmatosi per i lavori di Peano seguiti al congresso di Parigi del 1900, Russell aveva cominciato la redazione dei *Principles of mathematics* - pubblicati nel 1903 - e, nel passare in rassegna la letteratura più recente e rilevante per il suo argomento, aveva intrapreso uno studio approfondito dei *Grundgesetze* di Frege. Nel corso di tale studio, probabilmente nel 1901, formulò il suo celebre paradosso che turbò, e scosse lo sviluppo della teoria degli insiemi nei primi anni del '900. Russell rivelò la contraddizione in una lettera

inviata il 16 giugno 1902 a G. Frege, con la quale lo informava dell'antinomia che derivava dal suo sistema assiomatico. La lettera giunse quando il secondo volume dei *Grundgesetze* era in corso di stampa e Frege, che riconobbe la contraddizione di Russell, ne diede notizia in una nota finale[8]; cercò, poi, di porre rimedio alla contraddizione attenuando la generalità del V assioma da lui formulato, dalla cui accettazione incondizionata derivava il paradosso. Il tentativo di Frege , alla luce degli studi successivi, si rivelò, però, infruttuoso e così Frege vide crollare il sistema che, a suo avviso, avrebbe dovuto servire da fondamento per tutta la matematica. Russell sosteneva che si doveva respingere la convinzione secondo cui per ogni proprietà esisteva un insieme i cui elementi possedevano quella proprietà: l'insieme poteva non esistere. L'analisi di Russell metteva, cioè, in luce che l'ipotesi - su cui Frege intendeva costruire l'aritmetica – in base alla quale ogni proprietà definisce l'insieme degli elementi che la verificano - era, in realtà, errata. Essa, cioè evidenziava, che uno dei principi della logica assunti da Frege come "universalmente validi" - *il principio di astrazione o di comprensione -* era falso. In particolare, il ragionamento di Russel prendeva in considerazione l'autoappartenenza di un insieme e divideva gli insiemi in due classi, a seconda che essi appartenessero o meno a se stessi.

Ad esempio, l'insieme C di tutti i concetti, essendo esso stesso un concetto, contiene se stesso; l'insieme di tutti gli insiemi con più di dieci elementi è elemento di se stesso[9]; l'insieme degli insiemi non vuoti è ancora un insieme non vuoto e, quindi è elemento di se stesso mentre l'insieme L di tutti i libri non è elemento di se stesso, perché non è un libro, così come l'insieme dei triangoli, non essendo un triangolo, non contiene se stesso come elemento.

[8] *"Non c'è nulla di più spiacevole per uno scienziato che il vedere i fondamenti della sua opera crollare nel momento stesso in cui l'opera viene terminata"* sosteneva Frege alla fine del II volume. In realtà il modo affrettato con cui Frege terminava il lavoro fa pensare a un'interruzione più che a una conclusione del lavoro: ciò che avrebbe dovuto scrivere per una conclusione soddisfacente della ricerca intrapresa veniva, infatti, prospettato in modo succinto.

[9] L'insieme di tutti gli insiemi contenenti più di 10 elementi ha certamente più di 10 elementi ed è perciò elemento di se stesso. L'insieme degli insiemi con 10 elementi non appartiene invece a se stesso, perché ha certo più di 10 elementi.

Analogamente, l'insieme dei numeri naturali, non essendo un numero naturale, non contiene se stesso. Quindi ogni insieme dell'Universo o contiene se stesso come elemento oppure no; si crea, così, l'insieme R che contiene tutti gli insiemi che non contengono se stessi, ossia R è *l'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi*:

$R = \{ X : X \notin X \}$

Il paradosso si ottiene se, considerato l'insieme R, ci si chiede : l'insieme R contiene se stesso come elemento? O meglio, tale insieme è un elemento di se stesso? In base al principio di dicotomia, deve valere una delle due possibilità:

$R \in R$ oppure $R \notin R$

Se R non contiene se stesso, ossia $R \notin R$, allora per definizione è un elemento di se stesso, cioè contiene se stesso come elemento, e questo è un assurdo perché è contro l'ipotesi.

Se invece R contiene se stesso, ossia $R \in R$, allora, per definizione, gode della proprietà che caratterizza gli elementi di R e cioè non contiene se stesso, non è un elemento di se stesso e questo è di nuovo assurdo perché ancora contro l'ipotesi.

In entrambi i casi si giunge, quindi, ad una contraddizione.

Con un semplice ragionamento Russell aveva messo in crisi l'imponente edificio creato da Frege: con il suo celebre paradosso aveva sancito, definitivamente, il fallimento del sistema logico-formale presentato da Frege come fondamento per la matematica.

Come rimedio al paradosso, Russell propose il *principio del circolo vizioso* secondo cui ciò che comprende la totalità di un gruppo non può essere un elemento del gruppo o, meglio, nessuna totalità può contenere elementi definibili solo in termini di tale totalità o elementi che la comprendano o la presuppongano. Russell riuscì, cioè, a eliminare il paradosso giudicando privi di significato i predicati che davano origine a conseguenze contraddittorie e che quindi non producevano un insieme. La soluzione proposta è contenuta in un'opera, in tre volumi, i *Principia Mathematica*, che Russell scrisse, tra il 1910 e il 1913, in collaborazione con Alfred North Whitehead(1861-1947). Partendo dall'analisi del programma di Frege, all'interno della quale si erano manifestate le antinomie, Russell e Whitehead elaborarono un nuovo sistema logico in grado di evitare il possibile sorgere di contraddizioni e di ricostruire l'intero edificio matematico a partire da un numero ristretto di assiomi. In particolare, per evitare il sorgere di situazioni analoghe a quella descritta nel paradosso di Russell, proposero, l'introduzione del concetto di ordine che comportava una complessa stratificazione dell'universo in *tipi* da cui il termine *teoria dei tipi*. Il modello di Russell - Whitehead postulava, dunque, **una gerarchia dei tipi: si partiva da un dominio non vuoto di oggetti, detti *enti,* posti al livello più basso della gerarchia, e si consideravano le proprietà e le relazioni di tali enti ossia gli insiemi di enti e gli insiemi di n-ple ordinate di enti. L'insieme di tutti questi insiemi costituiva il livello di gerarchia successivo. Alcuni insiemi e alcune relazioni definite sulla gerarchia così ottenuta determinava- no, poi, il livello successivo della gerarchia dei tipi.**

Più precisamente, Russell e Whitehead chiamarono: enti di tipo 0 gli elementi; enti di tipo 1 gli insiemi di enti di tipo 0, cioè gli insiemi di elementi; enti di tipo 2 gli insiemi di enti di tipo 1, cioè gli insiemi di insiemi; ecc. Iterando il procedimento si otteneva, così, la gerarchia dei tipi. Si trattava, in sostanza, di organizzare gli enti logici, ad esempio gli enunciati, secondo una disposizione gerarchica partendo dagli enti logicamente più semplici fino a quelli via via più complessi e ottenuti facendo riferimento a enti già definiti. Russell e Whitehead, inoltre, suggerirono un'ulteriore suddivisione in *ordini*, con l'intento di evitare eventuali definizioni di un ente matematico basate su situazioni dipendenti dallo stesso ente da definire. In tal modo, cercavano di ricostruire la matematica sulla base di pochi assiomi e di alcuni concetti primitivi, evitando, però, il sorgere delle note antinomie.

La teoria dei tipi, rappresentò, dunque, la risposta di Russell al problema dei paradossi e, nello stesso tempo, il suo principale contributo alla elaborazione di un nuovo sistema logico. L'impostazione di Russell si rivelò, infatti, complessa e scarsamente utilizzabile, e pose in evidenza la necessità della ricerca di un concreto sistema di logica. Nacque, cioè, l'esigenza di ricostruire in modo rigoroso i contenuti matematici della originaria teoria di Cantor, evitando il sorgere di contraddizioni; così, nel primo scorcio del secolo

scorso, crebbero le teorie assiomatiche, il cui carattere formale, però, unito a una certa artificiosità, fece perdere naturalezza alla teoria di Cantor.
La scoperta di Russell aprì, quindi, ufficialmente un importante capitolo della matematica moderna in quanto segnò l'avvio di una serie di ricerche, in varie direzioni, tese a costruire sistemi logici nei quali fosse possibile evitare il presentarsi sia del paradosso di Russell che di altri. Il paradosso di Russell era, infatti, solo una delle tante contraddizioni che cominciavano ad apparire, a cavallo del secolo, nella teoria degli insiemi: la teoria sviluppata da Cantor, senza una solida impostazione assiomatica, era risultata minata, nei suoi stessi principi, dalla scoperta di alcune contraddizioni o "antinomie", come quella di Burali Forti (o del massimo ordinale), di Cantor (o del massimo cardinale) e di Russell.
Molti matematici cercarono di dare spiegazioni diverse a tali contraddizioni e ad ognuna di queste spiegazioni corrisponde un diverso sistema di fondazione. Oltre al tentativo di Russell, con la sua teoria dei tipi, accenneremo, brevemente, ai tentativi di Hilbert, di Zermelo e a quelli condotti successivamente, e nella stessa direzione, da Skolem e Fraenkel.

c) La soluzione assiomatico-formale di Hilbert e, poi, quella di Godel e di Zermelo.

Come già detto, il paradosso di Russell divenne il simbolo della crisi dei fondamenti della matematica all'inizio del novecento e portò alla formulazione del sistema assiomatico della teoria degli insiemi. In verità, il primo a credere nel metodo assiomatico come mezzo per eliminare le antinomie dalla teoria degli insiemi, fu il tedesco David Hilbert(1862-1943), come egli stesso aveva sostenuto al III congresso internazionale dei matematici, svoltosi ad Heidelberg, nel 1904. Convinto delle gravi difficoltà che insorgono quando si ha a che fare con gli insiemi infiniti, Hilbert propose di formulare, per evitare il sorgere di contraddizioni, un sistema formale che includesse tutte le forme di ragionamento

matematico e che permettesse di scomporre ogni dimostrazione in singoli passaggi dimostrativi in cui niente fosse lasciato all'immaginazione ma potesse essere controllato; un sistema formale a partire dal quale fosse deducibile tutta la matematica. Poiché spesso - come Russell aveva scoperto - un ragionamento apparentemente corretto conduce a situazioni paradossali o meglio a forme di ragionamento che sembrano corrette ma che in realtà non lo sono, Hilbert suggeriva, per stabilire la correttezza di un ragionamento matematico, di servirsi della logica simbolica e di creare un linguaggio artificiale con regole precise. Proponeva, cioè, di unificare metodo assiomatico e logica simbolica e di studiare la matematica dopo averla completamente assiomatizzata e formalizzata. In tal modo una qualunque dimostrazione, essendo formulata in un sistema assiomatico formale, doveva essere assolutamente chiara e rigorosa. Più precisamente, il programma di Hilbert, riassunto nell'articolo *Uber die Grundlagen der Logic und der Arithmetik*("Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica") assumeva come primitivi alcuni oggetti, considerava opportuni assiomi e riduceva l'aritmetica a un sistema di formule. In particolare, proponeva un'introduzione assiomatica anche per i numeri reali con 4 gruppi di assiomi (di connessione, di calcolo, d'ordine e di continuità) sottolineando, però, che essi non erano del tutto indipendenti ma che alcuni di essi potevano essere dedotti dagli altri. Tali idee furono ulteriormente precisate da Hilbert in un successivo lavoro, dal titolo *Neubergrundung der Mathematik* ("Nuova fondazione della matematica") presentato ad Amburgo nel 1922.

L'impostazione di Hilbert metteva, dunque, la teoria degli insiemi al riparo da paradossi e contraddizioni e consentiva un rigoroso controllo dei procedimenti deduttivi. Essa costituiva, cioè, una soluzione definitiva al problema dei paradossi perché dimostrava l'impossibilità del loro insorgere, dal momento che si poteva stabilire definitivamente se un certo ragionamento matematico fosse corretto oppure no. L'idea di Hilbert era, però, di fatto, irrealizzabile: una tale formalizzazione era assolutamente impossibile. Il programma di Hilbert e della sua "scuola" doveva

dunque, come sosteneva Kurt Godel (1906-1978), essere sottoposta ad una revisione. Questi nel dimostrare, nel 1931, il suo famoso teorema di incompletezza, scoprì infatti che Hilbert sbagliava e che non c'era modo di derivare, entro una teoria assiomatica, tutte le verità matematiche. Più precisamente partendo dal paradosso del mentitore, Godel, dimostrò che all'interno dell'aritmetica elementare è impossibile trovare un gruppo di assiomi da cui derivano tutte le proposizioni vere del sistema; vi sono verità aritmetiche non deducibili da questi assiomi. In altri termini, all'interno di certi sistemi - come i sistemi formali della scuola di Hilbert, quelli assiomatici di Zermelo-Fraenkel e di Von Neumann e il sistema sviluppato da Russell e Whitehead - si possono formulare proposizioni aritmetiche che sono indecidibili nell'ambito degli assiomi del sistema, ossia esistono certe preposizioni che non possono essere né dimostrate né invalidate. Nell'articolo dal titolo *Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Matematica* ("Su proposizioni formalmente indeducibili dei Principia Matematica") Godel concluse, cioè, che è possibile che gli assiomi dell'aritmetica portino a contraddizioni**.**
Tale risultato, che è considerato il risultato più decisivo raggiunto nel campo della logica matematica, sembrò - come ogni risultato veramente fondamentale - estremamente difficile e devastante ma stimolò sia i matematici che, e soprattutto, i logici.
Un approccio alternativo al problema dei paradossi e alla contraddittorietà del sistema di Frege, fu proposto da Ernest Zermelo (1871-1953) nel 1908, nello stesso anno in cui Russell pubblicava il suo articolo: *Mathematical logic as based on the theory of types* ("La logica matematica basata sulla teoria dei tipi").
Zermelo, allievo di Hilbert, con le sue *Untersuchungen uber die Grundlagen der Mengenlehre* ("Ricerche sui fondamenti della teoria degli insiemi"), diede una rigorosa impostazione assiomatica alla teoria degli insiemi; cercò, cioè, di riformulare la teoria di Cantor in termini non contraddittori, ricorrendo ad un efficace sistema di assiomi. Poiché, a suo avviso, il sorgere di paradossi poteva derivare da un'insufficiente definizione del concetto d'insieme (per Cantor, un insieme era una qualsiasi collezione di enti del nostro pensiero), osservò anzitutto che era necessaria una sua più dettagliata definizione. Cercò, inoltre, di indebolire il

principio di *comprensione* - secondo cui è possibile formare insiemi a partire da ogni proprietà - in cui si annidava l'origine del paradosso di Russell e propose di sostituire tale principio con quello che consentiva di costruire insiemi di elementi che soddisfano una certa proprietà, ma solo all'interno di un altro insieme già esistente.
Zermelo proponeva, cioè, di sostituire il principio generale di comprensione, che comportava la costruzione di insiemi "troppo grandi", con una serie di altri principi particolari che consentivano la costruzione di insiemi grandi ma non "troppo". In tal modo venivano esclusi quelle condizioni che avrebbero dato luogo ad insiemi "troppo grandi" come, ad esempio, l'insieme di tutti gli insiemi , l'insieme di tutti i cardinali, l'insieme di tutti gli ordinali, ecc. Nel sistema di Zermelo, cioè, il principio di comprensione o di astrazione diventava *il principio di separazione o di isolamento* che, però, permetteva di dimostrare soltanto l'esistenza dell'insieme vuoto e si limitava a generare nuovi insiemi a partire da insiemi già dati, per applicazione reiterata di certe operazioni (l'operazione di riunione e di insieme potenza). Un'idea analoga era già stata avanzata, nel 1906, da Russell che, però, non l'aveva sufficientemente precisata perché aveva creduto di trovare nella teoria dei tipi una soluzione soddisfacente. Zermelo, riuscì, invece, a concretizzare quest'idea, a cui, va precisato, era giunto in maniera indipendente.
La teoria di Zermelo ruotava intorno a un dominio D di oggetti tra cui sussistono certe relazioni fondamentali e si basava su 7 assiomi (assioma della determinazione, degli insiemi elementari, di separazione, dell'insieme potenza, della scelta, dell'unione e dell'infinito), apparentemente indipendenti, che imponevano al dominio una serie di condizioni di esistenza e di chiusura. Includeva, inoltre, ulteriori assiomi come quelli che assicurano l'esistenza dell'insieme vuoto e dell'insieme infinito. Gli assiomi di Zermelo erano, dunque, sufficienti per ottenere tutti i risultati importanti della teoria degli insiemi e non creavano nessuna delle antinomie conosciute. La sua teoria fu, quindi, concepita come una teoria matematica e non come una teoria logica, come invece quella di Russell; il senso di relatività e di arbitrarietà presente nell'impostazione assiomatica mancava ad un'impostazione logica come quella di Russell.

L'assiomatizzazione della teoria degli insiemi ad opera di Zermelo costituì una tappa fondamentale nel processo di salvaguardia dell'edificio matematico dalle antinomie ma ciò nonostante la sua teoria si dimostrò troppo debole, non sufficiente, cioè, a garantire una completa revisione della teoria di Cantor. Infatti, il sistema assiomatico che Zermelo presentò, nel 1908, per consentire un'adeguata ricostruzione della teoria degli insiemi di Cantor, e quindi come rimedio alle antinomie, lasciava aperti i problemi dell'indipendenza e della coerenza degli assiomi. Queste e altre debolezze teoriche rilevate nel sistema di Zermelo furono superate, all'inizio degli anni Venti, grazie al rinnovato interesse per l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi. Toccò al norvegese Thoralf Skolem (1887-1963) modificare il sistema di Zermelo e trarne alcune conseguenze fondamentali sia per la teoria degli insiemi che per il metodo assiomatico. Qualche anno dopo, anche Adolf Fraenkel (1891-1965) riprese i risultati di Zermelo, li perfezionò e propose un sistema assiomatico, noto come teoria di Zermelo-Fraenkel e identificata con la sigla ZF (o talvolta con ZFS per sottolineare i contributi di Skolem). La nuova formulazione della teoria degli insiemi appariva certamente più adeguata: adottava un linguaggio logico formale più preciso e rigoroso, ed evitava ambiguità linguistiche e imprecisioni ancora presenti nella originaria versione di Zermelo. In particolare, veniva considerato l'assioma di regolarità mentre l'assioma di isolamento (ottenuto indebolendo il principio di comprensione di Frege) cambiava nome diventando assioma di separazione. Inoltre, venivano aggiunti l'assioma di rimpiazzamento e di fondazione e veniva eliminato il discutibile assioma della scelta. La sistemazione di Fraenkel, oltre ad ovviare a certi difetti dell'approccio di Zermelo, ne manteneva anche i pregi, riuscendo ad evitare alcune contraddizioni, tra cui il paradosso di Russell.
Accanto alle due teorie proposte per il superamento dei paradossi, la teoria dei tipi di Russell e la teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel-Skolem, altre e numerose versioni sono state teorizzate negli ultimi decenni. Ricordiamo il tentativo di von Neumann, o meglio la teoria assiomatica NBG, dalle iniziali di J. von Neumann, P. Bernays (1888-1979) e K. Godel (1906-1978), che ad essa contribuirono. Anche questa teoria, come la ZFS, individuava assiomi che evitassero paradossi del tipo di Russell e che

consentissero la costruzione di insiemi con un livello di astrazione sempre più alto.
La scoperta delle antinomie logiche, dovuta a Russell, mise dunque in crisi la teoria di Cantor e tutta la matematica (la cosiddetta crisi dei fondamenti) e portò alla teoria assiomatica degli insiemi, nella quale l'idea dominante era che totalità molto grandi esistono, ma che non possono essere considerate come elementi di nuove totalità.

d) I paradossi di Burali-Forti e di Cantor

Il paradosso di Russell era stato solo una delle tante contraddizioni che cominciarono ad apparire nella teoria degli insiemi, tra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento. Per questo motivo vogliamo ora fare qualche considerazione su altri paradossi che, come gli altri, hanno scosso profondamente le intuizioni matematiche e hanno segnato una svolta nella storia della matematica perché, pur avendo indebolito inizialmente la teoria di Cantor e di Frege, hanno permesso di rinvigorirne i fondamenti con assiomi migliori e più consistenti. Fu, infatti, subito chiaro che per invalidare questi paradossi e ottenere coerenza, bisognava raffinare gli assiomi della teoria degli insiemi e della logica.
Cominciamo ad esaminare il paradosso che molti studiosi indicano come il primo trovato nella teoria degli insiemi di Cantor, e cioè il paradosso di Burali-Forti, che prende il nome da un lavoro scritto nel 1897 da Cesare Burali-Forti[10](1861-1931) dal titolo *A question on trasfiniti numbers* e da un altro lavoro, scritto sempre dallo stesso autore nello stesso anno, dal titolo *On well-ordered classes*.
Il paradosso, che è una conseguenza di un argomento introdotto, nel 1897, dal logico italiano per dimostrare, con reductio ad absurdum, che la proprietà di tricotomia non valeva per coppie qualsiasi di numeri ordinali, riguarda l'inesistenza di un numero ordinale trasfinito massimo.
Se esistesse, infatti, un ordinale massimo α, il suo successore $\alpha+1$ sarebbe ancora un ordinale strettamente maggiore di α, cioè $\alpha+1>\alpha$.

[10] Burali-Forti fu assistente di Giuseppe Peano in Torino dal 1894 al 1896 e docente di geometria analitica e proiettiva presso l'accademia militare di Torino.

Questo nuovo numero ordinale, $\alpha+1$, essendo un elemento dell'insieme Ω - dal momento che Ω contiene tutti i numeri ordinali - è minore di α, poiché α è il massimo ordinale, cioè
$\alpha+1 \leq \alpha$
Dovendo allora valere simultaneamente le due diseguaglianze
$\alpha+1 \leq \alpha \qquad \alpha+1 > \alpha$,
segue la contraddizione: non esiste un numero ordinale trasfinito massimo. La contraddizione, basata sull'ipotesi che un tale numero esista, si chiama, appunto, paradosso di Burali-Forti.
Il lavoro di Burali-Forti passò inosservato per qualche anno e per questo - forse ingiustificatamente - ai suoi lavori non fu dato, spesso, credito. Burali-Forti, tra l'altro, non riconobbe subito il suo paradosso; fu il francese L. Couturat (1868-1914) a segnalarlo a Russell e, solo quando Cantor pubblicò nel 1897 un lavoro con il quale provava la tricotomia degli ordinali, il matematico italiano comprese che nel suo argomentare c'era una contraddizione.
Accanto al paradosso di Burali-Forti, noto come il paradosso del massimo ordinale, ricordiamo e descriviamo, brevemente, l'antinomia del massimo cardinale, nota come *antinomia di Cantor.*
Se si considera l'insieme C di tutti gli insiemi, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di C è pure un elemento di C e ciò implica che il cardinale dell'insieme potenza di C è minore o uguale del cardinale di C, ossia $\#\left(2^{c}\right) \leq \#(C)$. In base al teorema di Cantor[11], il cardinale di un insieme è minore del cardinale della classe dei sottoinsiemi dell'insieme considerato, ossia il cardinale di C è minore del cardinale dell'insieme potenza di C: $\#(C) < \#\left(2^{c}\right)$.
Dovendo, allora, valere simultaneamente le due disuguaglianze

$$\#\left(2^{c}\right) \leq \#(C) \qquad \#(C) < \#\left(2^{c}\right)$$

segue la contraddizione, ossia il concetto di insieme di tutti gli insiemi porta ad una contraddizione. La contraddizione, basata sull'ipotesi che un tale insieme esista, è nota, appunto, come il paradosso di Cantor. In modo analogo, considerando l'insieme di tutti i numeri cardinali si giunge ad una contraddizione.

[11] Cantor aveva dimostrato con un ragionamento per assurdo che l'insieme di tutti i sottoinsiemi (detto anche insieme potenza) di un insieme dato deve avere cardinalità maggiore di quella dell'insieme di partenza.

La soluzione ai paradossi, proposta dalla teoria di Zermelo-Fraenkel, è quella secondo cui la totalità degli ordinali e quella dei cardinali non formano un insieme. La moderna teoria assiomatica non consente, cioè, la costruzione di insiemi che comprendono termini come "tutti gli insiemi che hanno la proprietà P", come era possibile, ad esempio, nel sistema assiomatico di Frege.

e) Il paradosso di Banach-Tarski

Un altro paradosso, presente nella teoria degli insiemi, è quello di Banach-Tarski, pubblicato nel 1924 sulla rivista *Fondamenta Mathematicae* da Stephan Banach (1892-1945) e Alfred Tarski (1903-1983) : *E' possibile suddividere una sfera dell'usuale spazio a tre dimensioni, in un numero finito di parti che, ricomposte opportunamente (e cioè ruotate e traslate) formano due sfere identiche a quella di partenza.*
Se poi si vuole esporre il paradosso in un altro modo, si può dire: *Si possono togliere parti della sfera, spostare quelle rimaste e ritornare alla sfera iniziale.*
E' bene chiarire che non si tratta di una contraddizione e di una incoerenza ma piuttosto di un risultato strano, bizzarro ma che tuttavia è in linea con la matematica ufficiale. Si tratta, infatti, di un teorema con ipotesi, tesi e dimostrazione, anche se porta a conclusioni paradossali. La dimostrazione è lunga e sofisticata e riferirne in dettaglio, cioè entrare con maggiori particolari nelle successive fasi della dimostrazione, esula dagli scopi di questo lavoro perché richiederebbe complicazioni non lievi; rimandiamo, quindi, a quella fornita nel giugno del 2001, dal Prof. Emanuele Paolini[12]. Una dimostrazione dettagliata del paradosso si può anche trovare nel libro di Stan Wagon [18]. E' importante sottolineare che in essa svolgono un ruolo importante e decisivo le proprietà delle rotazioni della sfera in uno spazio tridimensionale a tal punto che nel piano il paradosso non sussiste più e, cioè, non sono più possibili duplicazioni magiche. Inoltre, sempre nella dimostrazione, è decisivo l'uso dell'*assioma della scelta,* formulato da Zermelo nel 1904, dal quale si deduce che esistono insiemi non misurabili e, in particolare nello spazio a tre dimensioni, solidi

[12] Il documento è disponibile all'indirizzo: http://www.math.unifi.it/paolini/diletto/banach-tarski/

senza volume: è possibile quindi accettare la duplicazione della materia proprio perché non vengono seguite le leggi della misura. In altri termini porzioni di sfera non misurabili possono riaggregarsi in modo da duplicare la loro unione proprio perché sfuggono alle proprietà che la misura deve ragionevolmente rispettare. Ed è proprio "l'assenza di volume" che, combinata con l'uso di appropriate rotazioni, permette l'incantesimo matematico che emerge nel paradosso. Dall'assioma della scelta - senza il quale il paradosso di Banach Tarski non è dimostrabile - si può anche dedurre il numero minimo di parti in cui si può suddividere una sfera per poi duplicarla. In particolare Raphael M. Robinson, in un articolo del 1947 [13], fissa in 5 questa magica quantità e pertanto il paradosso può anche essere così formulato: *si può tagliare una sfera grande come un pisello in cinque pezzi che, ricomposti, danno una sfera grande come il sole, proprio come in un gioco di prestigio.* Naturalmente la sfera non si può tagliare nel solito modo né si possono disegnare i suoi "pezzi"; in termini più precisi, i pezzi non sono misurabili e non è possibile definire esplicitamente quali sono i punti - che appartengono ai singoli pezzi della sfera - che verranno spostati per costruire le due nuove sfere. In poche parole, nella dimostrazione di Banach – Tarski la decomposizione di cui si afferma l'esistenza non è prodotta esplicitamente. Tutta la costruzione dipende dall'assioma della scelta: se lo si accetta, si deve accogliere anche questa sua conseguenza; se lo si rifiuta, si devono rivedere molte altre certezze. In tal caso, infatti, il numero di teoremi che si possono dimostrare si riduce moltissimo e perciò sono pochi i matematici che rifiutano di usare l'assioma della scelta nei teoremi che essi dimostrano[13].

Il paradosso fa riferimento ad un'analoga analisi svolta da Felix Hausdorff (1868-1942) nel 1914, nello spazio a tre dimensioni, a proposito di una superficie sferica S. Infatti, basandosi in modo decisivo sull'assioma della scelta e usando in modo altrettanto fondamentale le proprietà delle rotazioni nello spazio tridimensionale, Hausdorff dimostrò che, data una sfera, è possibile suddividere la sua superficie in un numero finito di parti che possono essere ricomposte in modo tale da costituire 2 sfere,

---

[13] Molti risultati dell'Analisi dipendono dall'assioma della scelta (Axiom of Choice o AC) che è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel. Un matematico può quindi decidere se assumere che valga AC oppure no.

ciascuna con la stessa superficie di quella iniziale. In particolare Hausdorff provò che una superficie sferica S si può decomporre in quattro parti non vuote e tra loro disgiunte, delle quali tre sono uguali tra loro ma anche uguali alla loro unione. Banach e Tarski dimostrarono un risultato analogo per i volumi e cioè proiettarono la decomposizione di Hausdorff dalla superficie esterna all'interno della sfera, deducendone la sorprendente duplicazione di cui abbiamo parlato. La dimostrazione del paradosso di Banach – Tarski ricalca anche, per certi versi, sebbene con maggiori complicazioni, gli argomenti usati da Giuseppe Vitali (1875-1932) in un suo teorema di Analisi Matematica a proposito della misura di Lebesque: *"Ci sono sottoinsiemi della retta reale che non sono misurabili"* ; come i punti di due segmenti di diversa lunghezza possono essere messi in corrispondenza biunivoca, così le due sfere hanno "lo stesso numero di punti" di quella iniziale. Il paradosso di Banach – Tarski mette dunque in guardia dall'utilizzo di insiemi non misurabili[14], e pone, in evidenza che non è affatto assodato che tutti i corpi, e in particolare tutte le porzioni di sfera, abbiano la loro misura: le parti in cui viene divisa la sfera possono non essere tutte misurabili.

f) Il paradosso di Skolem

Un altro celebre paradosso è quello di Skolem, venuto alla luce nei primi anni del Novecento, grazie al norvegese Thoralf Abert Skolem (1897-1963), che ha il merito di aver portato alla luce il problema riguardante la natura degli enti matematici, e in particolare degli insiemi, dimostrando l'esistenza di insiemi non numerabili che dovrebbero far parte del modello numerabile. Entrare nel merito della dimostrazione del paradosso significherebbe, però, valicare i limiti di questo lavoro e, pertanto, lo descriveremo brevemente e in modo generale.
Skolem provò che per ogni teoria matematica, se consistente[15], esiste un suo modello numerabile (cioè un modello che si può mettere in corrispondenza bunivoca con i numeri interi e, quindi, con tanti elementi quanto sono i numeri interi). La conclusione è,

---

[14] Quelli, cioè, che non hanno un'area o un volume ben definito e costruiti per mezzo dell'assioma della scelta.
[15] In cui, gli assiomi di Zermelo possono essere soddisfatti.

però, paradossale in quanto dimostra che è possibile che un insieme sia al tempo stesso numerabile ma non numerabile nel modello stesso. Infatti, poiché nel dominio numerabile vale il teorema di Cantor, esiste in esso un insieme K non-numerabile, che, però, è non-numerabile solo nell'ambiente insiemistico interno mentre, rispetto a quello esterno, è numerabile perché lo è l'intero dominio. In poche parole, esistono insiemi non numerabili che dovrebbero far parte del modello numerabile. Per sfuggire alle contraddizioni occorre abbandonare il punto di vista secondo cui gli insiemi sono oggetti del "mondo reale" dotati di proprietà assolute, che il matematico ha il solo compito di "scoprire", e introdurre, invece, una concezione "relativistica" degli insiemi che li vede come oggetti facenti parte di strutture matematiche più ampie e dalle cui proprietà dipendono quelle degli insiemi.
Ricordiamo, infine, i paradossi di Richard e di Berry,[16] rilegati, secondo una distinzione dovuta a F. P. Ramsey (1903-1931), nel 1913, tra i paradossi linguistici o semantici e non tra quelli logici[17], come quelli di Russell, Cantor e Burali-Forti.

[16]G. Berry (1867-1928), bibliotecario della Bodleian Library di Oxford, comunicò a Russell, nel 1904, una variante del paradosso del mentitore mentre il francese J. Richard (1862-1956) scoprì, nel 1905, che la numerabilità dell'insieme dei numeri decimali, che possono essere definiti con un numero finito di parole, porta ad una contraddizione.
[17] I paradossi logici sono quelli esprimibili in un linguaggio insiemistico mentre i semantici sono quelli che coinvolgono nozioni come quelle di verità e di definibilità, nozioni che non possono venire formulate direttamente all'interno di un linguaggio formale.

Conclusione

Riesce difficile tracciare una conclusione, se non quella, forse scontata, che la teoria degli insiemi è un edificio spettacolare ma ancora in costruzione e che talvolta quello che apparentemente può sembrare falso, come il paradosso di Banach-Tarski, nasconde inaspettate profondità.

Bibliografia

[1] Banach S.- Tarski A. : «*Sur le dècompositions des ensebles des points en parties respectivement congruentes »* Fundamenta Mathematicae 6,1924.

[2] Bottazini U.-Freguglia P.- Toti Rigatelli L. : *Fonti per la storia della matematica,* Sansoni, Firenze, 1992.

[3] Cantini A.: *I fondamenti della matematica*, Loescher, Torino, 1979.

[4] Casari E.:*Questioni di filosofia della matematica,* Feltrinelli, Milano, 1964.

[5] Cohen P.J.: *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, Feltrinelli, Milano, 1973.

[6] Erickson G.W.-Fossa J.A.: *Dictionary of Parradox*, Lanham, MD: University Press of America,1998.

[7] Faletta N.: *Paradossi*, Longanesi, 1993.

[8] Giuliano Toraldo di Francia: *Ex absurdo,* Feltrinelli, 1997.

[9] Lolli G.:*Teoria assiomatica degli insiemi,* Boringhieri, Torino, 1974.

[10] Lolli G.: *Dagli insiemi ai numeri*, Boringhieri, Torino, 1994.

[11] Monk J.D. : *Introduzione alla teoria degli insiemi,* Boringhieri, Torino, 1972.

[12] Odifreddi, P.: *C'era una volta un paradosso*, Grandi tascabili Einaudi,2002.

[13] Radice Lucio Lombardo: *L'infinito,* Editori Riuniti Roma, 1981.

[14] Robinson R.M.: « *On the dècompositions of spheres* » Fundamenta Mathematicae 34,1947.

[15] Salmon W.(a cura di): *Zeno's paradoxes*, Bobbs-Merrill, Indianapolis, 1970.

[16] Stromberg, K: *"The Banack-Tarski Paradox"* Amer.Math, Monthly 86,3,1979.

[17] Struik D.J.*: Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna,1981

[18] Vitali G.: *Opere sull'analisi reale e complessa - Carteggio*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984.

[19] Wagon S.: *The Banach- Tarski Paradox* , Cambridge University Press, New York, 1993 o 1985??

[20] Wells.D.: *Personaggi e paradossi della matematica,* Mondadori , 2002.

[21] Zellini Paolo: *Breve storia dell'infinito*, Adelphi,1980.

WORKING PAPERS DEL DIPARTIMENTO

1988, 3.1	Guido CELLA *Linkages e moltiplicatori input-output.*
1989, 3.2	Marco MUSELLA *La moneta nei modelli di inflazione da conflitto.*
1989, 3.3	Floro E. CAROLEO *Le cause economiche nei differenziali regionali del tasso di disoccupazione.*
1989, 3.4	Luigi ACCARINO *Attualità delle illusioni finanziarie nella moderna società.*
1989, 3.5	Sergio CESARATTO *La misurazione delle risorse e dei risultati delle attività innovative: una valutazione dei risultati dell'indagine CNR- ISTAT sull'innovazione tecnologica.*
1990, 3.6	Luigi ESPOSITO - Pasquale PERSICO *Sviluppo tecnologico ed occupazionale: il caso Italia negli anni '80.*
1990, 3.7	Guido CELLA *Matrici di contabilità sociale ed analisi ambientale.*
1990, 3.8	Guido CELLA *Linkages e input-output: una nota su alcune recenti critiche.*
1990, 3.9	Concetto Paolo VINCI *I modelli econometrici sul mercato del lavoro in Italia.*
1990, 3.10	Concetto Paolo VINCI *Il dibattito sul tasso di partecipazione in Italia: una rivisitazione a 20 anni di distanza.*
1990, 3.11	Giuseppina AUTIERO *Limiti della coerenza interna ai modelli con la R.E.H..*
1990, 3.12	Gaetano Fausto ESPOSITO *Evoluzione nei distretti industriali e domanda di istituzione.*
1990, 3.13	Guido CELLA *Measuring spatial linkages: input-output and shadow prices.*
1990, 3.14	Emanuele SALSANO *Seminari di economia.*

1990, 3.15 Emanuele SALSANO
Investimenti, valore aggiunto e occupazione in Italia in contesto biregionale: una prima analisi dei dati 1970/1982.

1990, 3.16 Alessandro PETRETTO- Giuseppe PISAURO
Uniformità vs selettività nella teoria della ottima tassazione e dei sistemi tributari ottimali.

1990, 3.17 Adalgiso AMENDOLA
Inflazione, disoccupazione e aspettative. Aspetti teorici dell'introduzione di aspettative endogene nel dibattito sulla curva di Phillips.

1990, 3.18 Pasquale PERSICO
Il Mezzogiorno e le politiche di sviluppo industriale.

1990, 3.19 Pasquale PERSICO
Priorità delle politiche strutturali e strategie di intervento.

1990, 3.20 Adriana BARONE - Concetto Paolo VINCI
La produttività nella curva di Phillips.

1990, 3.21 Emiddio GALLO
Varianze ed invarianze socio-spaziali nella transizione demografica dell'Italia post-industriale.

1991, 3.22 Alfonso GAMBARDELLA
I gruppi etnici in Nicaragua. Autonomia politica ed economica.

1991, 3.23 Maria SCATTAGLIA
La stima empirica dell'offerta di lavoro in Italia: una rassegna.

1991, 3.24 Giuseppe CELI
La teoria delle aree valutarie: una rassegna.

1991, 3.25 Paola ADINOLFI
Relazioni industriali e gestione delle risorse umane nelle imprese italiane.

1991, 3.26 Antonio e Bruno PELOSI
Sviluppo locale ed occupazione giovanile: nuovi bisogni formativi.

1991, 3.27 Giuseppe MARIGLIANO
La formazione del prezzo nel settore dell'intermediazione commerciale.

1991, 3.28 Maria PROTO
Risorse naturali, merci e ambiente: il caso dello zolfo.

1991, 3.29 Salvatore GIORDANO
Ricerca sullo stato dei servizi nelle industrie del salernitano.

1992, 3.30 Antonio LOPES
Crisi debitoria e politiche macroeconomiche nei paesi in via di sviluppo negli anni 80.

1992, 3.31 Antonio VASSILLO
Circuiti economici semplici, complessi, ed integrati.

1992, 3.32 Gaetano Fausto ESPOSITO
Imprese ed istituzioni nel Mezzogiorno: spunti analitici e modalità di relazione.

1992, 3.33 Paolo COCCORESE
Un modello per l'analisi del sistema pensionistico.

1994, 3.34 Aurelio IORI
Il comparto dei succhi di agrumi: un caso di analisi interorganizzativa.

1994, 3.35 Nicola POSTIGLIONE
Analisi multicriterio e scelte pubbliche.

1994, 3.36 Adriana BARONE
Cooperazione nel dilemma del prigioniero ripetuto e disoccupazione involontaria.

1994, 3.37 Adriana BARONE
Le istituzioni come regolarità di comportamento.

1994, 3.38 Maria Giuseppina LUCIA
Lo sfruttamento degli idrocarburi offshore tra sviluppo economico e tutela dell'ambiente.

1994, 3.39 Giuseppina AUTIERO
Un'analisi di alcuni dei limiti strutturali alle politiche di stabilizzazione nei LCDs.

1994, 3.40 Bruna BRUNO
Modelli di contrattazione salariale e ruolo del sindacato.

1994, 3.41 Giuseppe CELI
Cambi reali e commercio estero: una riflessione sulle recenti interpretazioni teoriche.

1995, 3.42 Alessandra AMENDOLA, M. Simona ANDREANO
The TAR models: an application on italian financial time series.

1995, 3.43 Leopoldo VARRIALE
Ambiente e turismo: Parco dell'Iguazù - Argentina.

1995, 3.44 A. PELOSI, R. LOMBARDI
Fondi pensione: equilibrio economico-finanziario delle imprese.

1995, 3.45 Emanuele SALSANO, Domenico IANNONE
Economia e struttura produttiva nel salernitano dal secondo dopoguerra ad oggi.

1995, 3.46 Michele LA ROCCA
Empirical likelihood and linear combinations of functions of order statistics.

1995, 3.47 Michele LA ROCCA
L'uso del bootstrap nella verosimiglianza empirica.

1996, 3.48 Domenico RANESI
Le politiche CEE per lo sviluppo dei sistemi locali: esame delle diverse tipologie di intervento e tentativo di specificazione tassonomica.

1996, 3.49 Michele LA ROCCA
L'uso della verosimiglianza empirica per il confronto di due parametri di posizione.

1996, 3.50 Massimo SPAGNOLO
La domanda dei prodotti della pesca in Italia.

1996, 3.51 Cesare IMBRIANI, Filippo REGANATI
Macroeconomic stability and economic integration. The case of Italy.

1996, 3.52 Annarita GERMANI
Gli effetti della mobilizzazione della riserva obbligatoria. Analisi sull'efficienza del suo utilizzo.

1996, 3.53 Massimo SPAGNOLO
A model of fish price formation in the north sea and the Mediterranean.

1996, 3.54 Fernanda MAZZOTTA
RTFL: problemi e soluzioni per i dati Panel.

1996, 3.55 Angela SPAGNUOLO
Concentrazione industriale e dimensione del mercato: il ruolo della spesa per pubblicità e R&D.

1996, 3.56 Giuseppina AUTIERO
The economic case for social norms.

1996, 3.57 Francesco GIORDANO
Sulla convergenza degli stimatori Kernel.

1996, 3.58 Tullio JAPPELLI, Marco PAGANO
The determinants of saving: lessons from Italy.

1997, 3.59 Tullio JAPPELLI
The age-wealth profile and the life-cycle hypothesis: a cohort analysis with a time series of cross sections of Italian households.

1997, 3.60 Marco Antonio MONACO
La gestione dei servizi di pubblico interesse.

1997, 3.61 Marcella ANZOLIN
L'albero della qualità dei servizi pubblici locali in Italia: metodologie e risultati conseguiti.

1997, 3.62 Cesare IMBRIANI, Antonio LOPES
Intermediazione finanziaria e sistema produttivo in un'area dualistica. Uno studio di caso.

1997, 3.63 Tullio JAPPELLI
Risparmio e liberalizzazione finanziaria nell'Unione europea.

1997, 3.64 Alessandra AMENDOLA
Analisi dei dati di sopravvivenza.

1997, 3.65 Francesco GIORDANO, Cira PERNA
Gli stimatori Kernel per la stima non parametrica della funzione di regressione.

1997, 3.66 Biagio DI SALVIA
Le relazioni marittimo-commerciali nell'imperiale regio litorale austriaco nella prima metà dell'800.
I. Una riclassificazione delle Tafeln zur Statistik der Öesterreichischen Monarchie.

1997, 3.67 Alessandra AMENDOLA
Modelli non lineari di seconda e terza generazione: aspetti teorici ed evidenze empiriche.

1998, 3.68 Vania SENA
L'analisi econometrica dell'efficienza tecnica. Un'applicazione agli ospedali italiani di zona.

1998, 3.69 Domenico CERBONE
Investimenti irreversibili.

1998, 3.70 Antonio GAROFALO
La riduzione dell'orario di lavoro è una soluzione al problema disoccupazione: un tentativo di analisi empirica.

1998, 3.71 Jacqueline MORGAN, Roberto RAUCCI
New convergence results for Nash equilibria.

1998, 3.72 Rosa FERRENTINO
Niels Henrik Abel e le equazioni algebriche.

1998, 3.73 Marco MICOCCI, Rosa FERRENTINO
Un approccio markoviano al problema della valutazione delle opzioni.

1998, 3.74 Rosa FERRENTINO, Ciro CALABRESE
Rango di una matrice di dimensione K.

1999, 3.75 Patrizia RIGANTI
L'uso della valutazione contingente per la gestione del patrimonio culturale: limiti e potenzialità.

1999, 3.76 Annamaria NESE
Il problema dell'inefficienza nel settore dei musei: tecniche di valutazione.

1999, 3.77 Gianluigi COPPOLA
Disoccupazione e mercato del lavoro: un'analisi su dati provinciali.

1999, 3.78 Alessandra AMENDOLA
Un modello soglia con eteroschedasticità condizionata per tassi di cambio.

1999, 3.79 Rosa FERRENTINO
Su un'applicazione della trasformata di Laplace al calcolo della funzione asintotica di non rovina.

1999, 3.80 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della trasformata di Laplace nel caso di una distribuzione di Erlang.

1999, 3.81 Angela SPAGNUOLO
Efficienza e struttura degli incentivi nell'azienda pubblica: il caso dell'industria sanitaria.

1999, 3.82 Antonio GAROFALO, Cesare IMBRIANI, Concetto Paolo VINCI
Youth unemployment: an insider-outsider dynamic approach.

1999, 3.83 Rosa FERRENTINO
Un modello per la determinazione del tasso di riequilibrio in un progetto di fusione tra banche.

1999, 3.84 DE STEFANIS, PORZIO
Assessing models in frontier analysis through dynamic graphics.

1999, 3.85 Annunziato GESUALDI
Inflazione e analisi delle politiche fiscali nell'U.E..

1999, 3.86 R. RAUCCI, L. TADDEO
Dalle equazioni differenziali alle funzioni e^x, $\log x$, a^x, $\log_a x$, x^α.

1999, 3.87 Rosa FERRENTINO
Sulla determinazione di numeri aleatori generati da equazioni algebriche.

1999, 3.88 C. PALMISANI, R. RAUCCI
Sulle funzioni circolari: una presentazione non classica.

2000, 3.89 Giuseppe STORTI, Pierluigi FURCOLO, Paolo VILLANI
A dynamic generalized linear model for precipitation forecasting.

2000, 3.90 Rosa FERRENTINO
Un procedimento risolutivo per l'equazione di Dickson.

2000, 3.91 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della mistura di esponenziali alla teoria del rischio.

2000, 3.92 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variance estimates for neural networks regression models.

2000, 3.93 Alessandra AMENDOLA, Giuseppe STORTI
A non-linear time series approach to modelling asymmetry in stock market indexes.

2000, 3.94 Rosa FERRENTINO
Sopra un'osservazione di De Vylder.

2000, 3.95 Massimo SALZANO
Reti neurali ed efficacia dell'intervento pubblico: previsioni dell'inquinamento da traffico nell'area di Villa S. Giovanni.

2000, 3.96 Angela SPAGNUOLO
Concorrenza e deregolamentazione nel mercato del trasporto aereo in Italia.

2000, 3.97 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Teoremi ingannevoli.

2000, 3.98 Francesco GIORDANO
Una procedura per l'inizializzazione dei pesi delle reti neurali per l'analisi del trend.

2001, 3.99 Angela D'ELIA
Some methodological issues on multivariate modelling of rank data.

2001, 3.100 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Nuove classi di funzioni scalari quasiconcave generalizzate: caratterizzazioni ed applicazioni a problemi di ottimizzazione.

2001, 3.101 Adriana BARONE, Annamaria NESE
Some insights into night work in Italy.

2001, 3.102 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO

Predictive distributions of nonlinear time series models.

2001, 3.103 Roberto RAUCCI
Sul concetto di certo equivalente nella teoria HSSB.

2001, 3.104 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
On stackelberg games: a result of unicity.

2001, 3.105 Roberto RAUCCI
Una definizione generale e flessibile di insieme limitato superiormente in $\Re^n$

2001, 3.106 Roberto RAUCCI
Stretta quasiconcavità nelle forme funzionali flessibili.

2001, 3.107 Roberto RAUCCI
Sugli insiemi limitati in $\Re^m$ *rispetto ai coni.*

2001, 3.108 Roberto RAUCCI
Monotonie, isotonie e indecomponibilità deboli per funzioni a valori vettoriali con applicazioni.

2001, 3.109 Roberto RAUCCI
Generalizzazioni del concetto di debole Kuhn-Tucker punto-sella.

2001, 3.110 Antonia Rosa GURRIERI, Marilene LORIZIO
Le determinanti dell'efficienza nel settore sanitario. Uno studio applicato.

2001, 3.111 Gianluigi COPPOLA
Studio di una provincia meridionale attraverso un'analisi dei sistemi locali del lavoro. Il caso di Salerno.

2001, 3.112 Francesco GIORDANO
Reti neurali per l’analisi del trend: un approccio per identificare la topologia della rete.

2001, 3.113 Marcella NIGLIO
Nonlinear time series models with switching structure: a comparison of their forecast performances.

2001, 3.114 Damiano FIORILLO
Capitale sociale e crescita economica. Review dei concetti e dell'evidenza empirica.

2001, 3.115 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Generalizzazione del concetto di continuità e di derivabilità.

2001, 3.116 Marcella NIGLIO
Ricostruzione dei dati mancanti in serie storiche climatiche.

2001, 3.117 Vincenzo VECCHIONE
Mutamenti del sistema creditizio in un'area periferica.

2002, 3.118 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variable selection in neural network regression models.

2002, 3.119 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Insiemi debolmente convessi e concavità in senso generale.

2002, 3.120 Vincenzo VECCHIONE
Know how locali e percorsi di sviluppo in aree e settori marginali.

2002, 3.121 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Neural networks with dependent data.

2002, 3.122 Pietro SENESI
Economic dynamics: theory and policy. A stability analysis approach.

2002, 3.123 Gianluigi COPPOLA
Stima di un indicatore di pressione ambientale: un'applicazione ai comuni della Campania.

2002, 3.124 Roberto RAUCCI
Sull'esistenza di autovalori e autovettori positivi anche nel caso non lineare.

2002, 3.125 Maria Carmela MICCOLI
Identikit di giovani lucani.

2002, 3.126 Sergio DESTEFANIS, Giuseppe STORTI
Convexity, productivity change and the economic performance of countries.

2002, 3.127 Giovanni C. PORZIO, Maria Prosperina VITALE
Esplorare la non linearità nei modelli Path.

2002, 3.128 Rosa FERRENTINO
Sulla funzione di Seal.

2003, 3.129 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Identificazione del livello intermedio nelle reti neurali di tipo feedforward.

2003, 3.130 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO, Cosimo VITALE
The exact multi-step ahead predictor of SETARMA models.

2003, 3.131 Mariangela BONASIA
La dimensione ottimale di un sistema pensionistico: means tested vs programma universale.

2003, 3.132 Annamaria NESE
Abitazione e famiglie a basso reddito.

2003, 3.133 Maria Lucia PARRELLA
Le proprietà asintotiche del Local Polynomial Bootstrap.

2003, 3.134 Silvio GIOVE, Maurizio NORDIO, Stefano SILVONI
Stima della prevalenza dell'insufficienza renale cronica con reti bayesiane: analisi costo efficacia delle strategie di prevenzione secondaria.

2003, 3.135 Massimo SALZANO
Globalization, complexity and the holism of the italian school of public finance.

2003, 3.136 Giuseppina AUTIERO
Labour market institutional sistems and unemplyment performance in some Oecd countries.

2003, 3.137 Marisa FAGGINI
Recurrence analysis for detecting non-stationarity and chaos in economic times series.

2003, 3.138 Marisa FAGGINI, Massimo SALZANO
The reverse engineering of economic systems. Tools and methodology.

2003, 3.139 Rosa FERRENTINO
In corso di pubblicazione.

2003, 3.140 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Sui problemi di ottimizzazione in giochi di Stackelberg ed applicazioni in modelli economici.

2003, 3.141 Carmine SICA
In corso di pubblicazione.

2004, 3.142 Sergio DESTEFANIS, Antonella TADDEO, Maurizio TORNATORE
The stock of human capital in the Italian regions.

2004, 3.143 Elena Laureana DEL MERCATO
Edgeworth equilibria with private provision of public good.

2004, 3.144 Elena Laureana DEL MERCATO
Externalities on consumption sets in general equilibrium.

2004, 3.145 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Su alcuni criteri delle serie a termini non negativi.

2004, 3.146 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Legame tra le soluzioni di Minty e di Stempacenhia nelle disequazioni variazionali.

2004, 3.147 Gianluigi COPPOLA
In corso di pubblicazione.

2004, 3.148 Massimo Spagnolo
The Importance of Economic Incentives in Fisheries Management

2004, 3.149 F. Salsano
La politica monetaria in presenza di non perfetta osservabilità degli obiettivi del banchiere centrale.

2004, 3.150 A. Vita
La dinamica del cambiamento nella rappresentazione del territorio. Una mappa per i luoghi della Valle dell'Irno.

2004, 3.151 Celi
Empirical Explanation of vertical and horizontal intra-industry trade in the UK: a comment.

2004, 3.152 Amendola – P. Vitale
Self-Assessment and Career Choices: An On-line resource for the University of Salerno.

2004, 3.153 A. Amendola – R. Troisi
Introduzione all'economia politica dell'organizzazione: nozioni ed applicazioni.

2004, 3.154 A. Amendola – R. Troisi
Strumenti d'incentivo e modelli di gestione del personale volontario nelle organizzazioni non profit.

2004, 3.155 Lavinia Parisi
La gestione del personale nelle imprese manifatturiere della provincia di Salerno.

2004, 3.156 Angela Spagnuolo – Silvia Keller
La rete di accesso all'ultimo miglio: una valutazione sulle tecnologie alternative.

2005, 3.157 Davide Cantarelli
Elasticities of Complementarity and Substitution in Some Functional Forms. A Comparative Review.

2005, 3.158 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Subjective Sxpectations in Economics: a Statistical overview of the main findings.

2005, 3.159 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Moments based inference in small samples.

2005, 3.160 Massimo Salzano
Una simulazione neo-keynesiana ad agenti eterogeni.