



DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA CIVILE PER
L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO

Ciclo: VIII Nuova Serie (2006-2009)

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Salerno

**MONITORAGGIO DELLE RETI IDRICHE :
MODELLAZIONE IDRAULICA DELLA RETE
E MODELLAZIONE STOCASTICA DELLA
DOMANDA**

**MONITORING WATER SYSTEM:
HYDRAULIC MODELLING OF SYSTEM AND
STOCHASTIC MODELLING OF DEMAND**

Allievo
ING. (DOTT.) GIUSEPPE BELARDI

Coordinatore
prof. ing. R.M.A. Napoli

Relatore:
PROF. ING. PAOLO VILLANI

MONITORAGGIO DELLE RETI IDRICHE: MODELLAZIONE IDRAULICA
DELLA RETE E MODELLAZIONE STOCASTICA DELLA DOMANDA

Copyright © 2009 Università degli Studi di Salerno – via Ponte don Melillo, 1 – 84084
Fisciano (SA), Italy – web: www.unisa.it

Proprietà letteraria, tutti i diritti riservati. La struttura ed il contenuto del presente volume non possono essere riprodotti, neppure parzialmente, salvo espressa autorizzazione. Non ne è altresì consentita la memorizzazione su qualsiasi supporto (magnetico, magnetico-ottico, ottico, cartaceo, etc.).

Benché l'autore abbia curato con la massima attenzione la preparazione del presente volume, Egli declina ogni responsabilità per possibili errori ed omissioni, nonché per eventuali danni dall'uso delle informazione ivi contenute.

Finito di stampare il 30/03/2010

Ai miei genitori, ai miei fratelli
ed al mio amore Raffaella.

INDICE GENERALE

INDICE GENERALE.....	i
indice delle figure.....	v
indice delle tabelle	ix
SOMMARIO	xiii
ABSTRACT	xv
RINGRAZIAMENTI.....	xvii
About the author.....	xix
1 Introduzione	1
1.1 Premessa	1
1.2 Inquadramento generale	5
1.3 Studio di casi semplici	8
2 STUDIO DELLA RISPOSTA DELLA RETE ALLE RICHIESTE AI NODI.....	9
2.1 Premessa	9
2.2 Studio di una rete a maglia triangolare chiusa	11
2.3 Caso di studio : maglia triangolare	15
2.3.1 Caso di portata defluente dal nodo 1 al 2.....	17
2.3.2 Caso di portata defluente dal nodo 2 al nodo 1.....	20
2.3.3 Punti limite del “campo di esistenza”.....	23
2.3.4 Equazioni delle curve limite del “campo di esistenza”	29
2.3.5 Analisi probabilistica campo di variabilità H_1 - H_2	37
3 STUDIO DI UN SISTEMA IN SERIE.....	45
3.1 Premessa	45
3.2 Punti limite del “campo di esistenza”	46
3.3 Equazioni delle curve limite del “campo di esistenza”	50
3.4 Analisi probabilistica del campo di variabilità H_1 - H_2	57
4 IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA	63
4.1 Premessa	63
4.2 Impostazione analitica generale.....	64
4.3 Caso di doppia richiesta in serie	65
4.3.1 Analisi della distribuzione di probabilità condizionata dei carichi ai nodi.....	69
4.4 Caso con tripla richiesta in serie	72

4.4.1	Analisi della distribuzione di probabilità condizionata dei carichi ai nodi.....	74
4.4.2	Analisi dei risultati ottenuti	76
5	APPLICAZIONE DEL FILTRO DI KALMAN ALLE RETI IN PRESSIONE IN FASE DI CALIBRAZIONE	79
5.1	Premessa.....	79
5.2	Filtro di Kalman per reti in pressione in fase di calibrazione...	80
5.3	Applicazione del filtro di Kalman ad alcuni casi semplici	83
5.3.1	Sistema semplice ad una richiesta	83
5.3.2	Sistema a maglia aperta con tre richieste.....	84
5.3.3	Sistema triangolare	86
5.3.4	Sistema triangolare con scabrezza casuale	89
5.3.5	Sistema complesso a più maglie chiuse e più richieste.....	91
5.3.6	Sistema a maglia quadrata chiusa con due set di osservazioni.....	93
5.3.7	Sistema a maglia triangolare con due set di osservazioni..	96
5.3.8	Sistema ad anello con due set di osservazioni.....	98
5.4	Discussione risultati ottenuti.....	101
5.5	Andamento della funzione di GAIN.....	103
6	DEFINIZIONE ANALITICA DI SISTEMI OSSERVABILI E NON OSSERVABILI	105
6.1	Premessa.....	105
6.2	Possibili scenari di sistemi idrici in pressione	107
6.2.1	Equazione con $n=m+1$	107
6.2.2	Equazione con $n > m+1$	111
6.2.3	Disequazione “positiva” con $n = m+1$	112
6.2.4	Disequazione “negativa” con $n = m+1$	112
6.2.5	Disequazione “positiva” con $n > m+1$	112
6.2.6	Disequazione “negativa” con $n > m+1$	116
6.2.7	Riassunto risultati ottenuti	116
7	FILTRO DI KALMAN PER INCOGNITE DI TIPO MISTO	119
7.1	Premessa.....	119
7.2	Sistema a maglia chiusa: incognita una portata erogata.....	125
7.2.1	Sistema a maglia chiusa: campo variabilità ridotto	132
7.2.2	Un solo set di osservazioni: sistema non determinabile .	133
7.2.3	Due set di osservazioni: sistema osservabile	135
7.2.4	Tre set di osservazioni: sistema osservabile.....	136
7.2.5	Confronto tra sistema vincolato e sistema libero	137
7.3	Sistema a maglia chiusa: due portate erogate incognite.....	139

7.4	Sistema a maglia chiusa: tre portate erogate incognite	142
7.5	Sistema a maglia chiusa: quattro portate erogate incognite	145
7.6	Sistema a maglia chiusa: tutte le portate erogate incognite.....	148
7.7	Sistema a maglia chiusa: tutti i carichi incogniti	150
7.8	Sistema a maglia chiusa: note m perdite di carico.....	152
8	CONCLUSIONI	159
	Bibliografia	163

INDICE DELLE FIGURE

Figura 2.1.1 Sistema DDA (per caso una richiesta dal serbatoio).....	10
Figura 2.1.2 Sistema PDA (per caso una richiesta dal serbatoio).....	10
Figura 2.1.3 Sistema Triangolare	12
Figura 2.2 Funzione di densità di distribuzione delle portate richieste ...	16
Figura 2.3 Funzione di distribuzione cumulata delle portate richieste	16
Figura 2.4 Funzione di distribuzione cumulata dei carichi nei nodi di domanda	17
Figura 2.5 Grafico andamento delle portate nei tratti.....	17
Figura 2.6 Grafico andamento delle portate nei tratti.....	20
Figura 2.7 Campo di variazione delle portate richieste nei nodi 1 e 2.....	23
Figura 2.8 Campo di esistenza ottenuto da 50000 simulazioni imponendo $r_1 > r_2$	34
Figura 2.9 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 < r_2$	34
Figura 2.10 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 = r_2$	35
Figura 2.11 Campo di esistenza adimensionale determinato con $r_1 > r_{12} > r_2$	35
Figura 2.12 Campo di esistenza adimensionalizzato determinato con $r_{12} < r_1 = r_2$	36
Figura 2.13 Campo di esistenza determinato con 50.000 simulazioni imponendo che $r_1 = r_2$ ed r_3 trascurabile.....	37
Figura 2.14 Distribuzione cumulata del carico H_1 (marginale).....	38
Figura 2.15 Distribuzione cumulata del carico H_2 (marginale).....	38
Figura 2.16 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (variabile tra il loro valore minimo ed un valore massimo pari a 160 m).....	39
Figura 2.17 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_1 - $F_{x,y}$	40
Figura 2.18 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_2 - $f_{x,y}$	40
Figura 2.19 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_1 - $f_{x,y}$	41

Figura 2.20 Distribuzione cumulata della condizionata di H_1 rispetto ad H_2	41
Figura 2.21 Distribuzione cumulata della condizionata di H_2 rispetto ad H_1	42
Figura 2.22 Distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 rispetto a ΔH_2 nel caso di maglia triangolare.....	43
Figura 2.23 Distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_2 rispetto a ΔH_1 nel caso di maglia triangolare.....	43
Figura 3.1 Sistema con doppia richiesta in serie dal serbatoio.....	45
Figura 3.2 Campo di variazione delle portate richieste nei nodi 1 e 2.....	47
Figura 3.3 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 < r_2$	54
Figura 3.4 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 > r_2$	55
Figura 3.5 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 = r_2$	55
Figura 3.6 Distribuzione cumulata del carico H_1 (marginale).....	57
Figura 3.7 Distribuzione cumulata del carico H_2 (marginale).....	58
Figura 3.8 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m).....	59
Figura 3.9 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m).....	60
Figura 3.10 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m) nel piano H_2 - $f_{x,y}$	60
Figura 3.11 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m) nel piano H_1 - $f_{x,y}$	61
Figura 3.12 Distribuzione cumulata della condizionata di H_1 rispetto ad H_2 (avendo stabilito che il massimo carico in entrambi i nodi fosse di 160 m).....	61
Figura 3.13 Distribuzione cumulata della condizionata di H_2 rispetto ad H_1 (avendo stabilito che il massimo carico in entrambi i nodi fosse di 160 m).....	62

Figura 4.1 Campo di variabilità delle portate richieste e dei relativi carichi ai nodi.....	67
Figura 4.2 Sistema a maglia aperta con tre richieste in serie	73
Figura 4.3 Confronto fra sistema in linea (rosso) e maglia triangolare (rosa).....	78
Figura 5.1 Sistema ad un'unica richiesta.....	83
Figura 5.2 Sistema ad albero con quattro richieste in serie	84
Figura 5.3 Sistema a maglia chiusa triangolare	86
Figura 5.4 Sistema complesso a 4 maglie chiuse con 8 richieste	91
Figura 5.5 Sistema a maglia rettangolare con 3 richieste	94
Figura 5.6 Sistema ad anello.....	98
Figura 5.7 Andamento del GAIN in funzione degli step per tutti i casi esaminati	104
Figura 6.1 Maglia triangolare con raddoppio su un lato	108
Figura 6.2 Maglia triangolare	113
Figura 7.1 Sistema complesso a maglia chiusa	119
Figura 7.2 Sistema complesso a maglia chiusa	152

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 5.1 Dati iniziali (di progetto) sistema ad albero con quattro richieste	85
Tabella 5.2 Riassunto risultati ottenuti dopo 5 step	85
Tabella 5.3 Riassunto risultati ottenuti dopo 6 step	86
Tabella 5.4 Caratteristiche topologiche ed idrauliche del sistema	87
Tabella 5.5 Caratteristiche topologiche ed idrauliche del sistema	88
Tabella 5.6 Risultati del filtro di Kalman dopo 4 step	88
Tabella 5.7 Risultati del filtro di Kalman dopo 6 step	89
Tabella 5.8 Media e varianza della scabrezza data dalle simulazioni.....	89
Tabella 5.9 Risultati del filtro di Kalman dopo 6 step	90
Tabella 5.10 Risultati del filtro di Kalman dopo 11 step	90
Tabella 5.11 Riassunto dati iniziali sistema complesso a 4 maglie chiuse con 8 richieste	91
Tabella 5.12 Risultati ottenuti sistema complesso al 6 step.....	92
Tabella 5.13 Riassunto dati iniziali sistema ad una rettangolare	94
Tabella 5.14 Riassunto dati misurati al primo istante per la maglia rettangolare.....	94
Tabella 5.15 Riassunto dei dati idraulici al secondo istante di misura per maglia rettangolare	95
Tabella 5.16 Riassunto risultati ottenuti al 4 step	95
Tabella 5.17 Riassunto risultati ottenuti al 4 step	96
Tabella 5.18 Primo set di osservazioni per sistema triangolare	97
Tabella 5.19 Secondo set di osservazioni per sistema triangolare	97
Tabella 5.20 Riassunto risultati ottenuti all' 8 step	97
Tabella 5.21 Riassunto risultati ottenuti all' 8 step	97
Tabella 5.22 Riassunto dati per sistema ad anello.....	98
Tabella 5.23 Riassunto dati per sistema ad anello-triangolare (1 set).....	100
Tabella 5.24 Riassunto dati per sistema ad anello-triangolare (2-set)	100
Tabella 5.25 Riassunto risultati ottenuti al 3 step	100
Tabella 5.26 Riassunto risultati ottenuti al 3 step	101
Tabella 6.1 Riassunto “campo di esistenza” delle reti idriche.....	117
Tabella 7.1 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa	126
Tabella 7.2 Caratteristiche topologiche di un sistema complesso a maglia chiusa.....	126

Tabella 7.3 Risultati sistema complesso a maglia chiusa con una simulazione.....	127
Tabella 7.4 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa.....	128
Tabella 7.5 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, due set di osservazioni.....	128
Tabella 7.6 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, due set di osservazioni.....	129
Tabella 7.7 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa.....	130
Tabella 7.8 Risultati sistema complesso maglia chiusa, tre set di osservazioni.....	130
Tabella 7.9 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, tre set di osservazioni.....	131
Tabella 7.10 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, tre set di osservazioni.....	131
Tabella 7.11 Dati inizializzazione filtro di Kalman esteso, un set di osservazioni.....	133
Tabella 7.12 Risultati coefficiente di scabrezza con un set di osservazioni.....	134
Tabella 7.13 Risultati coefficiente di scabrezza con due set di osservazioni.....	135
Tabella 7.14 Risultati coefficiente di scabrezza con tre set di osservazioni.....	136
Tabella 7.15 Confronto tra i risultati con e senza vincoli sui parametri incogniti.....	138
Tabella 7.16 Confronto tra i risultati con e senza vincoli sui parametri incogniti.....	138
Tabella 7.17 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 1 set oss.....	140
Tabella 7.18 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 2 set oss.....	140
Tabella 7.19 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 3 set oss.....	140
Tabella 7.20 Risultati sistema vincolato : 2 coeff. di scabrezza noti e 1 set oss.....	141
Tabella 7.21 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note ed un set di osservazioni.....	143
Tabella 7.22 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note e due set di osservazioni.....	143

Tabella 7.23 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note e tre set di osservazioni.....	144
Tabella 7.24 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note ed un set di osservazioni (caso vincolato).....	144
Tabella 7.25 Risultati filtro modificato con 4 scabrezze note e 2 set di oss.....	146
Tabella 7.26 Risultati filtro modificato con 5 scabrezze note e 2 set di oss.....	147
Tabella 7.27 Risultati ottenuti per il filtro modificato con due scabrezze note.....	148
Tabella 7.28 Risultati ottenuti per il filtro modificato con due scabrezze note.....	149
Tabella 7.29 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa	156
Tabella 7.30 Caratteristiche topologiche sistema complesso a maglia chiusa.....	156
Tabella 7.31 Secondo set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa.....	157
Tabella 7.32 Risultati ottenuti con regressione multivariata.....	157
Tabella 7.33 Riassunto risultati ottenuti per sistema misto con n nodi di cui due nodi tripli.	158

SOMMARIO

La presente tesi di dottorato analizza alcuni concetti relativi al problema del monitoraggio e della calibrazione delle reti idriche. L'efficienza di una rete di distribuzione idrica si può misurare in termini di minimizzazione delle perdite idriche e dei consumi energetici, garantendo nel contempo la funzionalità del sistema in termini di portate distribuite e carichi ai nodi di domanda. Nelle strutture acquedottistiche, accanto al sistema di controllo (o telecontrollo) della rete, è necessario sempre associare un sistema di monitoraggio in tempo reale, che consenta di conoscere sufficientemente in ogni istante lo stato della rete. Poiché, però, lo stato di una rete di condotte, anche di non grande estensione, dipende da un numero elevato di parametri e grandezze, nella pratica si può ipotizzare di avere a disposizione solo un numero limitato di misure, insufficiente alla caratterizzazione diretta di tutte le grandezze della rete a cui si supplisce utilizzando una modellazione idraulica del sistema, ottenendo così una conoscenza imperfetta dello stato del sistema. Allo scopo di ottenere la conoscenza della rete con un prefissato livello di affidabilità, viene presentata una metodologia che si avvale contemporaneamente alla modellazione della struttura idraulica della rete anche della modellazione della struttura stocastica della domanda ai nodi, ottenendo una struttura di correlazione stocastico-strutturale che lega le distribuzioni dei valori delle grandezze osservate ai nodi di misura alle analoghe distribuzioni delle grandezze non misurate direttamente. Applicando tale metodologia, in un semplice ambito di pura Demand Driven Analysis (DDA), si sono potute fare le seguenti considerazioni: (i) pur considerando le domande tra loro indipendenti, per cui se misurassimo Q_1 non avremmo alcuna informazione sulla portata Q_2 richiesta contemporaneamente, si è visto che i carichi ai nodi (o le portate circolanti nei tratti), sono tra di loro correlati, per cui la misura di H_1 contiene informazioni sul valore di H_2 contemporaneo; (ii) tale correlazione non si limita all'individuazione di zone di valori proibiti, ma con le usuali ipotesi che si fanno sulla distribuzione delle domande ai nodi, poiché è possibile ottenere le distribuzioni condizionate $f(H_2|H_1)$, è possibile, accettato un prefissato rischio di errore, anche restringere la stima di H_2 ad un campo di valori molto più contenuto; (iii) è possibile valutare in quali nodi sia più conveniente effettuare la misura, utilizzando come parametro di scelta proprio il nodo che consente che l'ampiezza dell'intervallo di stima nei nodi non misurati sia minima. Per alcuni casi semplici analizzati è stato possibile ottenere la completa parametrizzazione analitica del fenomeno, consistente nei rapporti relativi tra i fattori di resistenza lungo i percorsi e nei rapporti tra questi ed i fattori di dispersione delle distribuzioni di probabilità

delle domande ai nodi. L'analisi dei risultati ottenuti dal modello al variare dei parametri del sistema consente la valutazione dell'importanza relativa dei diversi fattori sulla dispersione delle stime condizionate e, in definitiva, permette di valutare l'efficienza che si avrebbe sulla conoscenza dello stato della rete attraverso monitoraggio parziale della rete.

Per reti più realistiche, ma più complesse, si è fatto ricorso a metodi di simulazione Montecarlo.

La seconda parte del presente lavoro analizza alcuni concetti relativi al problema della calibrazione nelle reti idriche, fornendo, per essi, le possibili esemplificazioni e risoluzioni. A valle di tale studio vengono presentate una serie di applicazioni, tramite l'utilizzo della tecnica del filtro di Kalman, proposta inizialmente da Todini [1999], per la stima del coefficiente di scabrezza, in varie tipologie di reti idriche. Ogni qual volta si vogliono conoscere le caratteristiche topologiche ed idrauliche di una rete idrica (sia a maglia chiusa o aperta), è necessario fare riferimento alle equazioni del moto e a quelle di continuità, esplicitate nella forma matriciale. Dallo sviluppo di tali matrici, a seconda di quali sono i parametri noti e quali incogniti, è possibile definire se il sistema analizzato è o meno determinabile e, nel caso di non determinabilità, a quale tipologia di non determinabilità si fa riferimento. Il primo caso esaminato, già proposto da Todini [1999], considera un sistema in cui sono note a priori tutte le portate erogate ai nodi (Q_i) e tutti i carichi nei nodi (H_i). Le incognite di tale problema sono le scabrezza dei tratti della rete e le portate circolanti, la cui determinazione è possibile tramite un sistema non lineare. L'approccio basato sul filtro di Kalman è utile in quanto trasforma la non linearità in un sistema lineare (Todini-1999), riducendo lo sforzo computazionale e minimizzando l'incertezza di stima. Al contrario, la misura di tutte le portate circolanti (Q_{ij}) e, quindi, indirettamente delle portate erogate ai nodi (Q_i), rende il sistema matriciale proposto di tipo omogeneo, che può essere risolto solo realizzando anche tante misure di differenza di carico quante sono le maglie chiuse della rete. Più in generale, sono state analizzate le condizioni di osservabilità in casi in cui le grandezze note sono di tipo misto, cioè carichi ai nodi, portate circolanti nei tratti e portate erogate. Con opportune regole, è possibile mostrare che tutti i sistemi osservabili risultano non determinabili solo per mancanza di osservazioni. Il numero di set di osservazioni teoricamente necessario per risolvere il problema della calibrazione del sistema è stato determinato ed è funzione della topologia della rete e del numero di portate erogate incognite e di portate circolanti note.

ABSTRACT

This thesis analyzes some concepts related to the problem of monitoring and calibration of water systems. The efficiency of a water distribution network can be measured in terms of minimizing water leakage and energy consumption, while we ensure the functionality of the system in terms of distributed flow and head nodes. In the flow networks, in addition to the network control system (or remote), we must always involve a real time monitoring system so we can know, at each moment, the status of the network. However, the network status depends on a several number of parameters, in practice we usually can assume to have available a limited number of measures, which are insufficient for a direct characterization of all hydraulic elements. For this reason, we use an hydraulic modeling of the system, so we obtain an imperfect knowledge of the system status. In order to obtain the knowledge of the network with a fixed level of reliability, we present a methodology that uses both the modeling of the hydraulic structure of the system and the modeling of the stochastic structure of demand nodes. With this model we obtain a correlation stochastic-structural that joins the distribution of values of the observed parameters at measured nodes with the same distribution of parameters not directly measured in the same nodes and in the other ones.

Applying this methodology in a simple framework of pure Demand Driven Analysis (DDA), we have obtained the following considerations: (i) If we considered the demands independent of each other, for example if we measured Q_1 we wouldn't have any information on the flow Q_2 simultaneously, we have seen that the heads of the nodes (or the flow circulating in the pipes) are related with each other, so the H_1 measure contains information about the contemporary H_2 value (ii) this correlation is not limited to identify areas of forbidden values but, with the usual hypothesis that we made on the distribution of the flow requests to the nodes, it is possible to obtain the conditioned distributions $f(H_2 | H_1)$ and so, if we define a fixed risk of error, we restrict the estimation of H_2 to a much smaller range of values, (iii) we can determine which node is more convenient to make the measurement, using as a choice parameter the node which allows the minimal width of the estimated unmeasured nodes. For some simple cases analyzed, we have obtained a complete analytical parameterization of the system, this is due to relationship between the roughness factors of the pipes and the relationship between these factors and the dispersion of the probability distribution of the flow requests to the nodes. The analysis of the results, which was obtained from the model with

varying parameters of the system, allows the assessment of the relative importance of various factors on the dispersion of conditioned estimations and, ultimately, it allows the efficiency that would be knowledge of the network state by partial monitoring of the system. For more realistic networks, with more nodes and pipes, we can use a Monte Carlo simulation method.

The second part of this thesis analyzes some concepts related to the calibration problem in water networks in which we provide to obtain the possible resolutions. After this study we present various applications to estimate the roughness coefficient, by using the Kalman filter method, which was initially proposed by Todini [1999], in various types of water networks. Whenever we want to know the characteristics of a topological and hydraulic water network (both looped or open), we consider the equations of motion and continuity, in explicit matrix form. From the development of these matrices, depending on which of the parameters are known and unknown, we can define whether the system is determinable or not. The first examined case, already proposed by Todini [1999], considers a system in which all the flow demands (Q_i) and all heads are known in the nodes (H_i). The unknowns of this problem are the roughness of the pipes and the circulating flow, whose determination is possible through a nonlinear system. The approach based on Kalman filter is useful as it converts the non-linearity in a linear system (Todini-1999), so it reduces the computational effort and minimizes the uncertainty of estimation. Instead, the measure of all circulating flow (Q_{ij}) and indirectly of flow request to the nodes (Q_i), makes the system matrix proposed homogeneous, which can be solved only by making m measures of the heads difference. More generally, we have analyzed the conditions of observability in case of the known quantities are of mixed type, as heads to the nodes, flow circulating in the pipes and to the nodes. With appropriate rules, we can show that all observable systems are not determinable due to lack of observations. The number of sets of observations theoretically necessary to solve the calibration problem of the system was determined and it is a function of network topology and the number of flow request unknowns and flow circulating notes.

RINGRAZIAMENTI

Al termine di questo lavoro di ricerca è doveroso ringraziare il Prof. Ing. Paolo Villani per il costante e preziosissimo supporto e incoraggiamento durante i tre anni.

Altro affettuoso pensiero e ringraziamento è rivolto ai colleghi del LIDAM per i momenti trascorsi insieme e il supporto morale nei momenti più duri.

ABOUT THE AUTHOR

Giuseppe Belardi, nato a Salerno il 09.03.1982, laureato in Ingegneria Civile (L. S.) 110 e lode/110 nell'a.a. 2005/06, con tesi dal titolo "Metodologia per il rilievo dell'analisi della rete idrica del Comune di Battipaglia". Vincitore del concorso per il Dottorato di Ricerca presso la Facoltà di Ingegneria Civile e per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Salerno sulla cattedra di Costruzioni Idrauliche a.a. 2006/07. Partecipazione a vari seminari e convegni come "Approvvigionamento e distribuzione idrica : Esperienza, Ricerca e Innovazione" Fe 2007, "Leakage technology conference" e "La progettazione e la gestione dei sistemi acquedottistici e fognari" Fe 2008, "L'impiego di tecnologie innovative dal basso impatto ambientale nel progetto e nella costruzione della rete fognaria di Pompei, alla luce delle principali esperienze europee" Pompei 2009, "2° Forum sulla sicurezza dei sistemi idrici. Glevip : le linee guida per la tutela dell'acqua" Cassino 2009, ecc. Presentazione e pubblicazione negli atti dei convegni dei seguenti articoli : "Monitoraggio delle reti idriche: modellazione idraulica della rete e modellazione stocastica della domanda" (Atti del convegno " La ricerca delle perdite e la gestione delle reti di acquedotto" di Perugia 20-21 settembre 2007) ; "Risoluzione del problema della calibrazione in alcune tipologie di reti idriche a maglie chiuse " (Atti del convegno " La ricerca delle perdite e la gestione delle reti di acquedotto" di Aversa 17-18 settembre 2009).

Giuseppe Belardi, born on the 9th March 1982 in Salerno, graduated in Civil Engineering with 110 cum laude /110 during a.y. 2005/06 with a thesis entitled "Metodologia per il rilievo dell'analisi della rete idrica del Comune di Battipaglia". Ph.D student in Environmental Engineering at University of Salerno. Participation in various workshops and conferences as "Approvvigionamento e distribuzione idrica : Esperienza, Ricerca e Innovazione" Fe 2007, "Leakage technology conference" and "La progettazione e la gestione dei sistemi acquedottistici e fognari" Fe 2008, "L'impiego di tecnologie innovative dal basso impatto ambientale nel progetto e nella costruzione della rete fognaria di Pompei, alla luce delle principali esperienze europee" Pompei (NA)

2009, "2° Forum sulla sicurezza dei sistemi idrici. Glenip: le linee guida per la tutela dell'acqua" Cassino 2009, etc.

Presentation and publication in the proceedings: "Monitoraggio delle reti idriche: modellazione idraulica della rete e modellazione stocastica della domanda" (Proceedings " La ricerca delle perdite e la gestione delle reti di acquedotto" Perugia 2007) ; "Risoluzione del problema della calibrazione in alcune tipologie di reti idriche a maglie chiuse " (Proceedings " La ricerca delle perdite e la gestione delle reti di acquedotto" Aversa 2009).

1 INTRODUZIONE

1.1 PREMESSA

Oltre ai problemi di progetto e di verifica di una rete idrica a maglie chiuse, di un acquedotto cittadino, diviene sempre più importante il problema legato alla necessità di gestire in maniera razionale, reti complesse, chiamate a rispondere ad esigenze sempre più contrastanti tra di loro: in questi casi, tutte le soluzioni fanno esplicitamente riferimento alla presenza di un sistema di monitoraggio, dalle cui prestazioni, quindi, dipende gran parte dell'efficienza della soluzione.

Tale problema è diventato premente, soprattutto, dalla fine degli anni '90 in quanto la risorsa idrica, l'acqua, è divenuta non più fonte illimitata, ma, per colpa anche dell'uso "selvaggio" che se ne è fatto nel tempo, è diventata una risorsa che si esaurirà in pochi decenni. Per questo motivo, la maggior parte degli enti gestori della risorsa idrica stanno considerando importante non solo garantire il servizio alle utenze ma anche l'ottimizzare "le perdite" in rete (che da studi fatti in precedenza dallo scrivente presso l'ASIS di Battipaglia ammonterebbero a circa il 30 % della portata immessa in rete durante l'anno, valore da non sottovalutare visto che tale risorsa in particolari periodi dell'anno risulta scarsa e quindi non disponibile all'utenza). Per poter studiare come "si comporta" la rete in particolari condizioni di esercizio, poiché durante il funzionamento giornaliero i parametri idrodinamici cambiano continuamente, è conveniente far ricorso a dei modelli particolari di simulazione e a dei sistemi di acquisizione dei dati tali che permettano di conoscere tutte le caratteristiche della rete durante tutte le fasi di esercizio del sistema. Infatti, la presenza di una rete di monitoraggio è necessaria per derivare, in fase operativa, le principali caratteristiche idrodinamiche del sistema. Tale rete, però, molto spesso non è sufficiente per dare tutte le informazioni necessarie per la conoscenza ottimale dei parametri incogniti, poiché viene usato un numero troppo esiguo di punti di misura. Oltre al problema dell'esiguità dei punti di misura, bisogna considerare che ogni qual volta si vanno a fare le misure di campo, si può

incorrere in errori di misura che possono essere di varia natura. Per tale motivo, il valore reale della portata, sia circolante che erogata, può essere affetto da incertezza delle misure e, quindi, da errore che può essere casuale o statistico. L'errore casuale è definito come qualsiasi errore di misurazione che può incidere con la stessa probabilità in aumento o in diminuzione sul valore misurato. Dalla definizione segue che una serie ripetuta di misurazioni comporta la progressiva riduzione dell'errore casuale, poiché i singoli scostamenti si annullano reciprocamente, essendo tale errore a media nulla. Questo genere di errore è prodotto da fenomeni aleatori derivati da errori di lettura degli strumenti o fluttuazioni indotte da fenomeni esterni, come disturbi, variazioni di temperatura ecc. Più uno strumento è preciso e meno questi fenomeni aleatori influenzano la misurazione (e dunque più piccoli sono mediamente gli errori casuali associati). L'errore casuale nella misurazione è in qualche modo non eliminabile. Questo è dovuto al fatto che l'errore dipende non solo dal misuratore e dal sistema di misura ma anche dal sistema misurato. Invece, l'errore sistematico è definito come lo scostamento tra il valore ottenuto con una misurazione ed il valore reale della grandezza studiata ed è indice dell'accuratezza dei dati. È detto sistematico perché è costante al ripetersi della misura, e per questo non può essere eliminato con la ripetizione della misurazione, come avviene per l'errore casuale. Tale non eliminabilità rende particolarmente difficoltoso determinare l'entità di esso, ma anche la stessa presenza dell'errore, a meno di ricorrere a metodi di rilevamento alternativi o valutazioni di coerenza di sistemi di dati. L'errore sistematico è in genere prodotto dall'utilizzo di uno strumento difettoso, alterato, non calibrato. Questo tipo di errore può essere corretto quando se ne conosce l'origine, altrimenti non se ne può tener conto. La soluzione, in questo caso, consiste nel cercare di ottenere la stessa informazione con misure di tipo differente.

La metodologia che verrà affrontata, ipotizzate le misure effettuate sui sistemi non affette da nessun tipo di errore, sarà quella basata su un modello di simulazione idraulico, su un modello probabilistico della domanda e di conseguenza di un modello probabilistico dei parametri idraulici nei nodi sensibili. In tali casi si ricorre a diverse tecniche di stima, a seconda che si tratti del problema di caratterizzare lo stato di funzionamento della rete, in termini di carichi, velocità e portate (problema diretto) o di caratterizzare i parametri idraulici della rete stessa, in termini di caratteristiche geometriche e di scabrezza (problema

inverso). Ad es., Shamir and Howard (1977) mostrano come, noto lo stato idrodinamico in un nodo e in un tratto monitorato, sia possibile determinare una matrice di sensitività per tutti i nodi della rete mediante un approccio nodale; tale approccio è ripreso sostanzialmente da Burrows et al. (2000), che realizzano un software (*Netbase*) che permette l'utilizzo combinato di una tecnica DMA (District Metered Area), per il monitoraggio, insieme con un modello di simulazione idraulica ed un sistema GIS per stimare, con una matrice di regressione, i coefficienti di influenza negli altri nodi della rete; Andersen and Powell (2000) implementano un algoritmo basato sui minimi quadrati ponderati (WLS), originariamente proposto da Bargiela (1984) che esplicitamente tiene conto del fatto che non in tutti i nodi sono note le caratteristiche di funzionamento; nel caso di reti idrauliche con forti componenti non-lineari, come la presenza di valvole ed impianti di sollevamento, diversi Autori, come ad es. Lurette and Lecoeuche (2003), mostrano l'utilità di far riferimento ad un'architettura neurale per risolvere il problema diretto.

Per problemi inversi, quali la calibrazione del modello di simulazione idraulica della rete, si richiede al sistema di monitoraggio di derivare una stima affidabile dei parametri della rete, come la scabrezza delle pareti nei singoli tratti: ad es. Gofman and Rodeh (1981) utilizzano una metodologia che considera le scabrezze incognite all'interno di un solutore della rete sottoforma di equazioni di maglia per ogni condizione di carico; Walski (1983,1986) partendo dall'ipotesi che la rete funzioni in moto permanente, mostra come sia possibile semplificare lo schema della rete raggruppando i tratti in condotte equivalenti e determinando, in maniera esplicita, i parametri globali in base ai quali modificare la scabrezza e le portate erogate ai nodi così da ottenere la congruenza con le misure effettuate; Bhave (1988) propone un metodo in cui si suddivide l'intera rete in sottozone in funzione dei sensori disponibili, ricavando i coefficienti di correzione per le portate e le scabrezze di ogni sottozona; Boulos and Wood (1990) hanno introdotto un fattore globale di resistenza invece che la scabrezza dei tratti. Recentemente Todini (1999), considerando noti tutti i parametri nodali, ha messo l'accento sulla valutazione esplicita dell'incertezza nelle stime in fase di calibrazione ed ha proposto una tecnica di stima delle scabrezze di parete sotto forma di problema inverso, utilizzando un algoritmo di soluzione basato sul filtro di Kalman che permette di ridurre al minimo l'incertezza di stima.

Come si è detto, tutti questi lavori propongono, in diversi modi,

l'utilizzo di una rete di monitoraggio già data. Essenzialmente, in un contesto di calibrazione del sistema, ottenuta effettuando una serie di test di campo, durante i quali si registrano in continuo, per alcuni giorni, pressioni e portate in alcuni nodi del sistema, definiti a priori, Del Giudice et al. (2003) utilizzano un criterio di minimizzazione degli errori di stima per risolvere un problema di allocazione ottimale dei sensori per ottenere una stima della scabrezza delle pareti; essi forniscono anche una breve rassegna della bibliografia sull'argomento. De Schaetzen et al. (2000) affrontano il problema della ricerca del minimo numero di nodi da monitorare e della loro locazione, con prefissato grado di affidabilità sulle stime di scabrezza, utilizzando una combinazione di un algoritmo genetico e di un algoritmo di massima entropia.

Utilizzando un approccio basato sul metodo di simulazione di tipo Montecarlo, Pianese e Villani (1994) hanno analizzato l'affidabilità della rete in termini di definizione di indici di prestazione e Bovolin e Villani (2004) hanno proposto una metodologia di individuazione dei nodi *sensibili*, ovvero dei nodi della rete più utili ai fini del monitoraggio. Nel presente studio, si propone, invece, di determinare i legami tra le variabili aleatorie che caratterizzano la rete utilizzando il metodo delle distribuzioni derivate (si veda, ad es., Papoulis, 1973): in particolare, si analizza il comportamento che assumono i valori delle diverse grandezze nella rete, sotto la condizione che in un nodo, una delle variabili, che simula il monitoraggio, abbia valore costante e noto. In questa maniera è possibile analizzare le relazioni tra $[H]$ e $[Q_i]$ sotto forma di distribuzioni condizionate. Tale approccio permette di ottenere una struttura di correlazione stocastico - strutturale che lega le distribuzioni dei valori delle grandezze non misurate direttamente ai valori delle grandezze osservate ai nodi di misura. Esso, però, è poco pratico se applicato su una rete reale, data l'enormità delle combinazioni possibili. Una volta delineato lo schema generale, quindi, si cercano le relazioni fra i vari punti di interesse di una rete a partire dallo studio di casi semplici, con pochi nodi, allo scopo di ottenere una guida analitica al comportamento delle reti reali, più complesse. A valle di tale studio, viene presentata una metodologia, già proposta da Todini (1999) e sviluppata successivamente da Belardi e Villani (2009), riguardante il problema inverso (calibrazione) improntata sull'applicazione di una tecnica di stima del coefficiente di scabrezza in varie tipologie di reti idriche (dal caso semplice ad una uscita ad uno più complesso con molte richieste). Le prime reti considerate hanno noti sia i carichi nei nodi che le portate erogate in esso in ogni

istante, ed il problema risulta di tipo non lineare per quanto riguarda la stima della scabrezza. Per risolvere tale problema si è utilizzato un approccio basato sul filtro di Kalman che permette di convertire il problema da non lineare a lineare (Todini-1999).

L'applicazione di tale metodologia ai casi semplici esaminati permette di ottenere la convergenza del metodo in tutti i casi esaminati e con varie ipotesi sugli elementi della rete. Successivamente è stata ampliata la metodologia (Belardi e Villani 2009) anche a casi in cui le variabili incognite non erano tutte le scabrezze ma vari parametri della rete. Per tale metodologia sono stati analizzati vari casi semplici, tramite i quali è stato possibile ottenere un quadro generale di tutti i casi possibili che possono aversi nello studio delle reti idriche.

1.2 INQUADRAMENTO GENERALE

Una rete idrica a maglie chiuse può essere caratterizzata dai seguenti elementi:

- N = nodi della rete
- L = lati della rete, che per definizione sono quei tratti, con caratteristiche omogenee che collegano due nodi
- M = maglia della rete, che per definizione è una sequenza di tronchi o lati L della rete nella quale il nodo finale di ciascun tronco coincida con il nodo iniziale del successivo. Se è una maglia chiusa, allora, il primo nodo e quello finale coincidono.

Con questa simbologia, specificando che con M si son volute indicare le maglie elementari della rete (cioè quelle maglie che al loro interno non contengono altre maglie), si può ottenere la seguente *relazione topologica fondamentale delle reti piane*:

$$L - M = N - 1 \quad (1.1)$$

Quindi la rete potrà essere caratterizzata soltanto dalla coppia di valori (N,L) .

La completa descrizione di ogni elemento della rete dipende da caratteristiche sia geometriche che costruttive che sono :

- 3 N coordinate spaziali dei nodi
- 3 L valori del diametro D, della lunghezza l, della scabrezza ε
- 2 N quote piezometriche e portate richieste ai nodi
- 3 L portate, velocità e perdite di carico lungo i tratti della rete

Di queste grandezze le uniche che possono essere considerate note sono le 3 N coordinate dei nodi e gli L valori delle lunghezze dei tratti di condotta (se non si vuole considerare anche l'ottimizzazione del tracciato della rete). Per tale motivo il problema assume $2 N + 5 L$ come dimensione, per cui è necessario un numero di relazioni fisiche tra le grandezze sopra definite sufficiente per rendere il problema determinato. Le equazioni che si possono utilizzare sono le seguenti :

- equazioni di continuità : N-1 nei nodi e L lungo i tratti
- equazioni del moto : L lungo i tratti ed M lungo le maglie

In linea generale, queste sono le uniche equazioni che si possono utilizzare. In realtà, è possibile utilizzare, in particolari punti della rete, delle relazioni specifiche tra le precedenti grandezze per esempio quando vi è presenza di una valvola (in cui la relazione tra le portate circolanti o erogate ed i carichi idraulici si possono rappresentare mediante relazioni analitiche di tipo Torricelliano), oppure nei nodi di domanda. Queste equazioni, però, non riducono il numero delle incognite del problema poiché, per poterle utilizzare, bisogna anche caratterizzare parametricamente tali relazioni (come il coefficiente di efflusso o il grado di apertura della valvola). Da quanto finora detto, si evince che il numero delle equazioni a disposizione sono in quantità minore rispetto alla dimensione del problema, per cui bisognerà di volta in volta, a seconda dei casi che si stanno studiando (cioè se il problema è di progetto o di verifica) andare a fissare alcune grandezze in modo da dare delle condizioni al contorno o vincoli tali da ottenere un risultato congruente e compatibile con il sistema. Nel caso di verifica, infatti, vengono fissate le scabrezze, le condizioni di erogazione nei nodi e i diametri delle condotte della rete; mentre, nel caso di progetto vengono fissate condizioni di vincolo sulle L velocità lungo i tratti o sugli M valori di carico ai nodi ed N-1 condizioni di minimo costo ai nodi. (Ippolito,1993)

Oltre ai suddetti problemi, altro caso da analizzare è la valutazione dell'*affidabilità della rete di distribuzione in esercizio*. Tale problema, che nell'ultimo decennio è divenuto sempre più insistente, per quanto detto in precedenza, è stato affrontato in maniera diversa da vari studiosi del settore, cercando di ottenere una metodologia capace di risolvere tale problema. Per esempio, è possibile risolvere tale problema soltanto rilassando l'ipotesi di conoscenza completa di alcune caratteristiche della rete, come per es. secondo lo studio fatto dal Pianese e Villani (1994), considerando incognite le portate erogate ai nodi e per esse proporre un semplice modello di variabilità stocastica, ottenendo dall'analisi della variabilità del funzionamento della rete degli indici di prestazione dei singoli elementi e della rete stessa che possono essere utili per poi attuare dei piani di ristrutturazione.

Ipotizzando, invece, incognite le scabrezze delle condotte o comunque i parametri di resistenza idraulica da inserire nelle equazioni del moto lungo i tratti, si deve affrontare il problema della calibrazione del modello (Ferreiri et al. 1994) in cui il problema è quello di aggiornare periodicamente la valutazione dei parametri di resistenza, utilizzando misure di pressione e di portata in punti della rete opportunamente scelti. Questi due problemi, appena detti, sono quelli più sentiti in fase di esercizio, la cui caratteristica comune è quella di avere misure puntuali di portate e pressione, che permettano di stimare in tempo reale il comportamento di tutta la rete. Con la sola modellistica idraulica, come si è visto, non è possibile analizzare la rete in modo preciso e, quindi, scartando l'ipotesi di andare a fare una campagna di misure in tutti i punti della rete, per evidenti problemi di economia, si cercherà di determinare quali sono i punti dove è più conveniente andare a monitorare ed ottenere informazioni utili per quantificare tutti gli elementi della rete, nonché il suo comportamento durante la fase di esercizio.

1.3 STUDIO DI CASI SEMPLICI

Prima di iniziare lo studio di una rete reale, costituita da una quantità di nodi elevata, è conveniente partire dallo studio di reti semplici con pochi nodi (3 al massimo 4-5) in modo da poter controllare il comportamento della rete soggetta a particolari condizioni di richiesta ai nodi, per poi ottenere un risultato tale che, dopo essere stato adimensionalizzato e standardizzato, permetterà di fornire un criterio generale di comportamento che potrà essere poi utilizzato anche nello studio successivo delle reti reali.

Di seguito, quindi, verranno affrontati i seguenti casi :

1. Studio di una rete a maglie chiuse di tipo triangolare
2. Studio di una maglia aperta con due richieste in parallelo

L'approccio che è stato utilizzato, è stato quello di partire da delle ipotesi semplici di richiesta ai nodi, in modo tale da semplificare il problema senza perderne però di generalità dei risultati, e, scrivendo le equazioni di continuità e del moto per la rete, ottenere delle formule tali da caratterizzare il sistema in modo univoco. Già l'analisi comparata di questi casi semplici fa emergere un comportamento qualitativo sostanzialmente simile e generalizzabile, con la possibilità di ottenere strutture di correlazione tra le diverse variabili idrauliche (ad es. i carichi assunti contemporaneamente in due nodi differenti) che riflettono la struttura topologica del sistema idraulico. Le più elementari di tali strutture, che definiremo 'ad aquilone' o CHYTE (Codomain of HYdraulics and Topological Elements), si prestano a rappresentare i vincoli di esistenza dei valori incogniti e, come tali, permettono di restringere il campo di incertezza nei problemi di monitoraggio.

A valle dello studio teorico è stato anche realizzato un caso pratico per verificare la correttezza dei risultati teorici raggiunti.

2 STUDIO DELLA RISPOSTA DELLA RETE ALLE RICHIESTE AI NODI

2.1 PREMESSA

Nel seguito si mostrerà come analizzare la risposta della rete, in termini di pressioni ai nodi e di portate circolanti nei tratti, quando essa è sottoposta a sollecitazioni ai nodi. Allo scopo, è possibile fare riferimento a due principali tipologie di approccio, soprattutto nell'ambito di problemi di verifica delle reti idriche, denominati rispettivamente DDA (Demand Driven Analysis) e PDA (Pressure Driven Analysis). Queste due tipologie hanno alla base delle ipotesi differenti che possono essere sintetizzate nel modo seguente:

- DDA è un modello basato sull'ipotesi che la portata richiesta ai nodi di domanda Q_{ri} sia sempre erogabile, dando per assunto che il carico nei nodi H_{ri} è tale da permettere sempre ogni richiesta Q_{ri} .
- PDA è un modello, invece, che oltre alle equazioni di continuità e del moto, considera anche le equazioni $Q_i = f(H_i)$ che forniscono la relazione tra la portata erogata al nodo Q_{ri} e l'effettivo carico disponibile H_{ri} .

Per comprendere la differenza sostanziale che esiste tra i due metodi, in Figura 2.1 e 2.2, vengono riportate le curve $Q_e - H_{nodo}$ ottenute per un sistema semplice con una sola erogazione considerando il metodo DDA ed il metodo PDA rispettivamente.

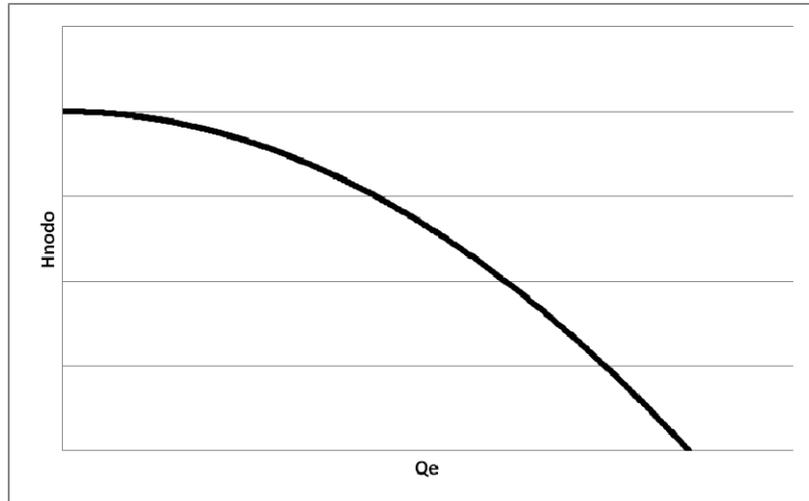


Figura 2.1.1 Sistema DDA (per caso una richiesta dal serbatoio)

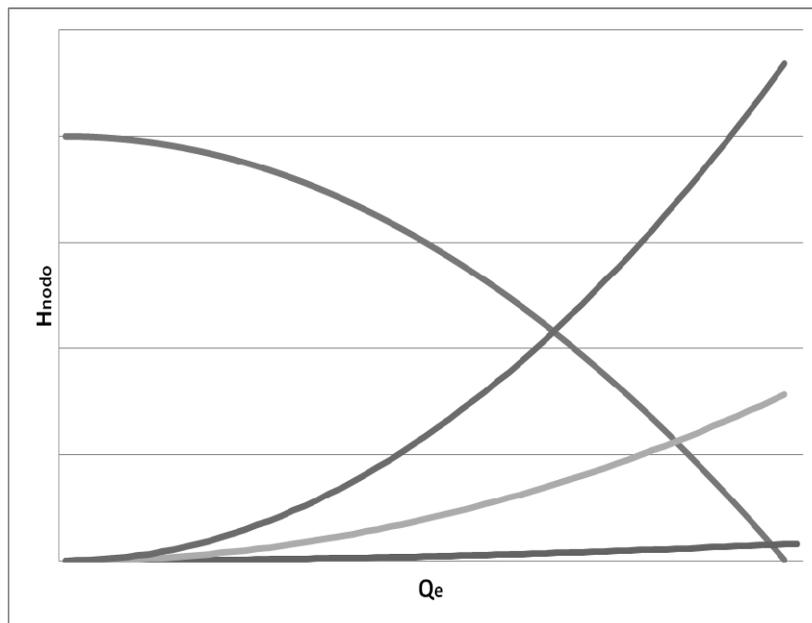


Figura 2.2.2 Sistema PDA (per caso una richiesta dal serbatoio)

Dall'analisi delle figure si osserva come in Figura 2.1.1 per un sistema DDA ad ogni portata richiesta in un nodo corrisponde un carico nel nodo secondo le relazioni di continuità e del moto e vale anche il

viceversa. Nella Figura 2.1.2, invece, viene riportata la curva risolutiva del sistema che è formata da una parte discendente (uguale a quella della figura 2.1.1) che considera le equazioni di continuità e del moto (curva azzurra) ed una seconda curva (curva marrone – verde – viola che si differenziano per il grado di apertura del nodo N) che è data dalla relazione $Q_i = f(H_i)$ tra portata erogata e carico disponibile nel nodo. In tale caso, vista la compresenza di due curve ed essendo un metodo basato sul carico disponibile, bisogna entrare nel grafico con il valore del carico nel nodo e determinare di conseguenza il valore della portata erogata nel nodo (non vale il viceversa in quanto si avrebbero due soluzioni possibili).

Lo studio che è presentato in questa tesi si basa sulle ipotesi del modello DDA, in quanto è attualmente il modello di riferimento nelle analisi teoriche e corrisponde anche ad un modello di rete sovradimensionata quale generalmente risultano nei casi pratici le normali reti di distribuzione idropotabile. Inoltre, tale modello, come si vedrà nel seguito, introduce minori vincoli topologici, lasciando maggiori incertezze di stima delle grandezze non monitorate. Questo vuol dire che, dal punto di vista dell'analisi di una rete per la progettazione di reti di monitoraggio, ipotizzare un sistema DDA significa operare a vantaggio di sicurezza.

2.2 STUDIO DI UNA RETE A MAGLIA TRIANGOLARE CHIUSA

Per poter comprendere in modo completo lo studio della maglia triangolare, con le relative equazioni, è conveniente partire prima dall'analizzare il problema dal punto di vista probabilistico. Lo schema che si considera è il seguente :

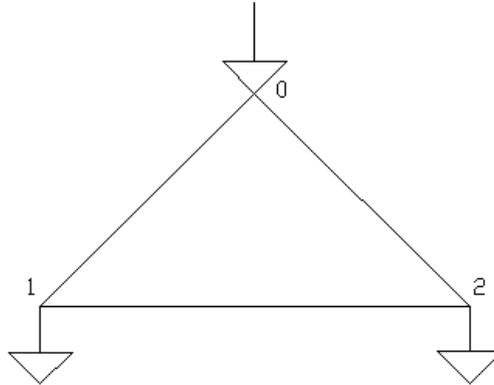


Figura 2.3.3 Sistema Triangolare

In cui le portate Q_1 e Q_2 e i relativi carichi H_1 e H_2 non sono noti a priori e sui quali bisogna studiare il comportamento al variare delle condizioni al contorno. Inizialmente vengono considerate note a priori e fisse nel tempo le resistività r_1, r_2, r_3 nei tre lati della maglia e il carico nel nodo di ingresso (H_0), nonché viene data alle portate in uscite una distribuzione arbitraria (nel caso da trattare viene data una distribuzione di tipo uniforme).

Prima di iniziare la trattazione del caso specifico deve essere fatta una premessa sui metodi che si possono utilizzare per analizzare questa particolare rete.

Il problema da affrontare è quello dello studio di una variabile funzione di due variabili casuali.

Gli approcci disponibili sono di due tipi:

- Determinazione del CDF della variabile dipendente (metodo diretto)
- Considerare la nozione di distribuzione condizionata dopo aver determinato la PDF della variabile casuale dipendente.

Entrambi i metodi partono dall'ipotesi che, conoscendo la funzione $Z = g(X, Y)$, bisogna determinare $f_z(z)$ e la $Fz(z)$ (cioè la PDF e la CDF rispettivamente), essendo note le funzioni di distribuzione marginali delle due variabili casuali X e Y (cioè la distribuzione di probabilità delle X e Y , indipendentemente le une dalle altre).

Il metodo diretto richiede la determinazione del CDF di Z (variabile dipendente), per ogni particolare valore di z_0 , trovando la probabilità che le variabili indipendenti X e Y assumano valori all'interno di una regione tale per cui $g(x,y) \leq z_0$.

L'equazione della $F_Z(z)$ è :

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = \iint f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.1)$$

Nel caso in cui le due variabili X, Y siano indipendenti e identicamente distribuite con uguale CDF $F_X(x)$ si ottiene che $F_Z(z) = F_{X,Y}(z, z) = F_X(z)F_Y(z) = F_X^2(z)$.

In questo caso è possibile determinare la PDF di Z esplicitamente dalla differenziazione :

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} [F_X^2(z)] = 2F_X(z)f_X(z) \quad (2.2)$$

Per il caso specifico sembra più rispondente al caso di maglia triangolare la teoria probabilistica quando la variabile dipendente è la somma delle due variabili casuali. Per determinare i risultati di questo caso, una possibilità, anche se meno generale, di approccio è quello di trovare direttamente la formula per la PDF di una funzione continua di variabili casuali continue (questo metodo impiega funzioni di densità di probabilità condizionate).

Data la funzione PDF di X e Y si vuole determinare la funzione di densità di

$$Z = X+Y \quad (2.3)$$

Considerando prima la funzione di densità condizionata di Z dato che Y è uguale a un qualsiasi valore y, cioè dato che $Y=y$, Z è :

$$Z = y+X$$

e la distribuzione condizionata di X è

$$f_{x|y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (2.4)$$

avendo dato come funzione di densità di una funzione lineare di una singola variabile casuale la seguente :

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Usando i risultati che si ottengono considerando questa ipotesi, si ottiene la funzione condizionata PDF di Z :

$$f_{z|y}(z, y) = f_{x|y}(z - y, y)$$

La funzione di densità congiunta di due variabili Z e Y può sempre essere trovata moltiplicando la condizionata di Z data Y e la marginale PDF di Y :

$$f_{Z,Y}(z, y) = f_{x|y}(z - y, y) f_Y(y) = f_{X,Y}(z - y, y)$$

E quindi, la funzione marginale di Z è data dall'integrazione della congiunta di Z e Y in tutto il campo della y e si ottiene :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,Y}(z, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z - y, y) dy$$

Nel caso in cui le due variabili X e Y sono indipendenti la funzione si semplifica nel modo seguente:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx \quad (2.5)$$

Questo sta a significare che la probabilità che Z sia in un intervallo intorno a Z è proporzionale alla probabilità che X sia in un intervallo compreso fra x e x+dx e il cui valore è proporzionale alla probabilità che Y sia in un piccolo intervallo vicino a z-x ed il valore di Y deve essere

tale per cui $X+Y=z$ (formula nota anche come integrale di convoluzione).

2.3 CASO DI STUDIO : MAGLIA TRIANGOLARE

La maglia triangolare è una tipica struttura, insieme a quella quadrata e rettangolare, utilizzata nelle reti acquedottistiche interne. Per poterla identificare in modo completo, si dovranno conoscere sia le caratteristiche idrauliche, sia le caratteristiche geometriche e fisiche. Per quanto riguarda queste ultime (scabrezza, diametro, ecc.), esse vengono assunte note a priori, in modo da ridurre i gradi di libertà del sistema (almeno all'inizio) così da poter studiare il funzionamento del sistema sotto varie ipotesi di richiesta ai nodi.

Per come è realizzata la maglia, un problema da affrontare, prima di iniziare lo studio del sistema, è quello di capire il flusso delle portate circolanti, in quanto non è possibile determinarlo a priori in modo univoco ma dipende sia dalle caratteristiche dei tratti che dalle richieste nei nodi.

Quindi, si studieranno le equazioni dell'idraulica nei casi seguenti :

- Flusso idrico che va dal nodo 1 al nodo 2
- Flusso idrico che va dal nodo 2 al nodo 1

Oltre a questa differenziazione, bisognerà farne un'altra che riguarda il sistema per come è strutturato, cioè se è un sistema sovradimensionato, sottodimensionato o dimensionato bene.

Il caso in cui il sistema è sovradimensionato è abbastanza semplice da analizzare in quanto si ipotizzano le portate richieste Q_1 e Q_2 indipendenti ed inoltre, proprio perché il sistema è tale per cui è ammissibile ogni richiesta nei due nodi, i carichi nei due nodi stessi sono compatibili con le varie richieste e si ottiene che, essendo $H_1=f_1(Q_1, Q_2)$ e $H_2=f_2(Q_1, Q_2)$, le distribuzioni cumulate sono :

$$F(H_1)=F_{Q_1}(f_1(Q_1, Q_2))$$

ed è lo stesso per H_2 . Da tale risultato si evince che, dando una qualsiasi distribuzione marginale alle due variabili casuali Q_1 e Q_2 (per semplicità si darà la stessa distribuzione alle due variabili) si ottiene facilmente quella delle variabili H_1 e H_2 che, nel caso specifico, coincidono.

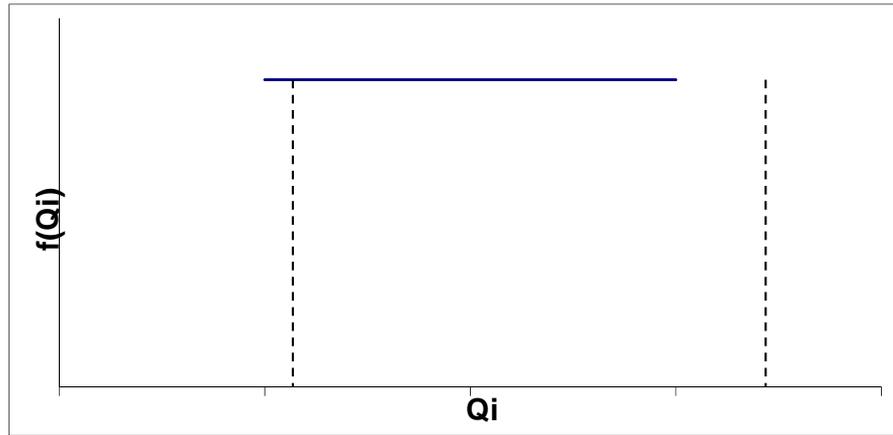


Figura 2.4 Funzione di densità di distribuzione delle portate richieste

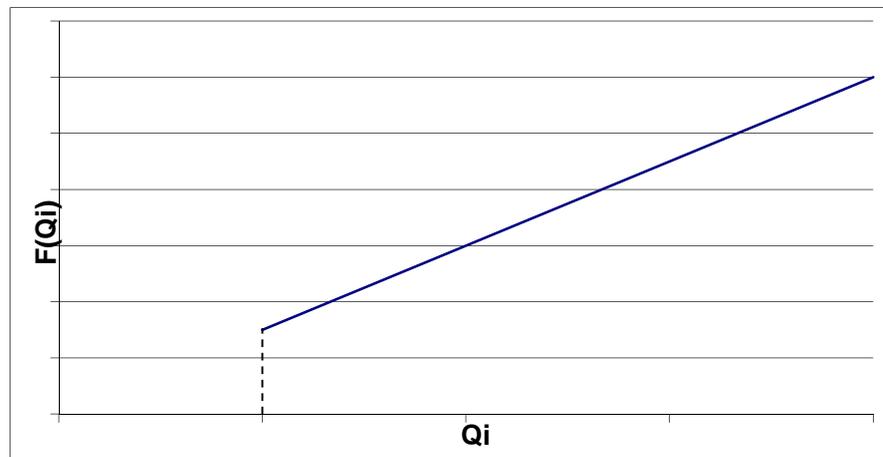


Figura 2.5 Funzione di distribuzione cumulata delle portate richieste

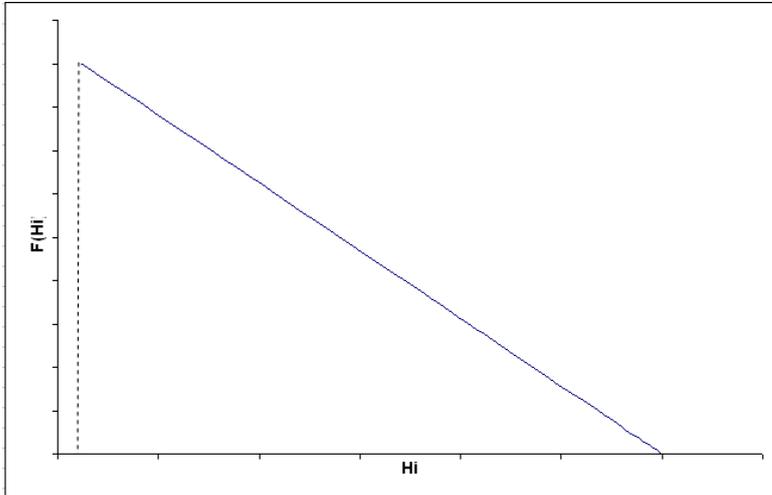


Figura 2.6 Funzione di distribuzione cumulata dei carichi nei nodi di domanda

2.3.1 Caso di portata defluente dal nodo 1 al 2

Il primo caso esaminato è quello riportato in figura 3.5 in cui sono rappresentati i versi di percorrenza delle portate circolanti Q_{ij} all'interno della rete a maglia chiusa.

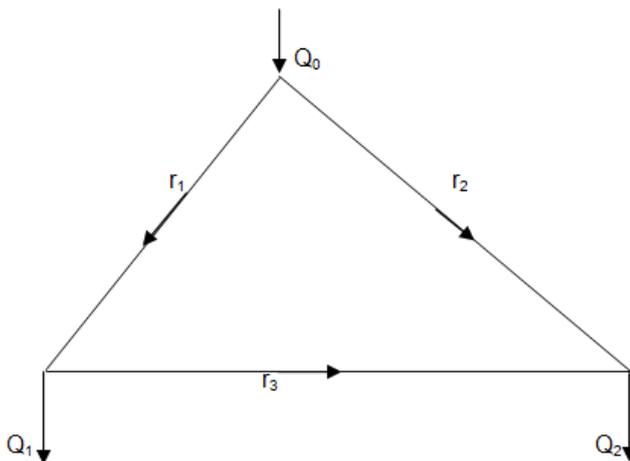


Figura 2.7 Grafico andamento delle portate nei tratti

Le equazioni che regolano il sistema sono le seguenti :

$$Q_{01} = Q_1 + Q_{12} \quad (2.7.1)$$

$$Q_{02} = Q_2 - Q_{12} \quad (2.7.2)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 \quad (2.7.3)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 Q_{02}^2 \quad (2.7.4)$$

$$H_1 - H_2 = r_3 Q_{12}^2 \quad (2.7.5)$$

$$Q_{01} + Q_{02} = Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (2.7.6)$$

Mettendo a sistema le equazioni di continuità e del moto (2.7.1-6) e sviluppandole in funzione della portata circolante nel tratto 0-1, si ottiene la seguente relazione :

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_1 \pm \sqrt{[r_2(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_1]^2 - (r_2 - r_1 - r_3)(r_2 Q_0^2 - r_3 Q_1^2)}}{r_2 - r_1 - r_3}$$

Il risultato che si ottiene dallo sviluppo delle equazioni (2.7.1-6) porta a una coppia di possibili valori per la portata circolante del tratto 0 – 1. In realtà, essendo impossibile per natura che ci siano due portate defluenti contemporaneamente per ogni coppia di portate richieste, è necessario che una delle due soluzioni sia inammissibile. Per poter capire quale delle due è l'unica esatta, bisogna analizzare le due equazioni, separatamente. Dalla loro analisi si osserva che non esistono entrambe le soluzioni in quanto la soluzione con il + porta a valori di portata negativi, il che è fisicamente impossibile. Quindi, l'unica soluzione ammissibile per il sistema è quella riportata nella (2.8).

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_1 - \sqrt{[r_2(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_1]^2 - (r_2 - r_1 - r_3)(r_2 Q_0^2 - r_3 Q_1^2)}}{r_2 - r_1 - r_3} \quad (2.8)$$

Poiché gli elementi della (2.8) sono tutti definiti a priori in modo preciso, come accade per le resistività r_i , oppure definite tramite distribuzione di probabilità, nel caso delle portate erogate nei nodi 1 e 2, è possibile calcolare la portata circolante nel tratto 0-1 e, di conseguenza, è possibile determinare il carico nel nodo 1 con l'equazione di continuità (2.7.3) con

$H_1 = f(Q_1, Q_2)$. Per determinare il carico nel nodo 2 si applica, allo stesso modo, il procedimento visto per il nodo precedente e si ottiene :

$$Q_{02} = \frac{-r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2 \pm \sqrt{[-r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2]^2 + (r_2 - r_1 - r_3)(r_3 Q_2^2 + r_1 Q_0^2)}}{r_2 - r_1 - r_3}$$

Anche qui, come per il caso precedente, sembrerebbe una doppia soluzione e, quindi, doppie portate per ogni coppia di portate richieste ai nodi. Facendo la stessa analisi fatta precedentemente per ottenere la (2.8), allo stesso modo, si ottiene che delle due soluzioni solo una è quella ammissibile, cioè quella che dà portate positive, ed è quella con il segno +. Per cui, l'equazione da considerare è quella riportata nella (2.9).

$$Q_{02} = \frac{-r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2 + \sqrt{[-r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2]^2 + (r_2 - r_1 - r_3)(r_3 Q_2^2 + r_1 Q_0^2)}}{r_2 - r_1 - r_3} \quad (2.9)$$

Il valore di Q_0 e la sua distribuzione di probabilità si può conoscere soltanto conoscendo i valori e le distribuzioni delle due portate richieste nei nodi. Detto $Q_0=Z$ e $Q_1=X$ e $Q_2=Y$ il caso da esaminare è quello esposto nel paragrafo precedente, cioè quello di variabile somma di due variabili casuali. Le funzioni di densità di distribuzione e la cumulata sono :

$$f_z(z) = \frac{z}{(b-a)(c-d)} \quad (2.10.1)$$

$$F_z(z) = \frac{z^2}{2(c-d)(b-a)} \quad (2.10.2)$$

con a, b, c, d i limiti di campo delle due portate richieste.

La funzione di distribuzione cumulata avrà, come è evidente dall'equazione (2.10.2), un andamento di tipo parabolico rispetto alla variabile z. Con queste distribuzioni di probabilità, si è ottenuto una relazione che lega la portata Q_0 alla $F_z(z)$. Grazie ad essa, ricordando che:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{H_0 - H_1}{r_{01}}} + \sqrt{\frac{H_0 - H_2}{r_{02}}} \quad (2.11)$$

si ottiene la relazione che lega i carichi nei due nodi alla cumulata di Q_0 e, quindi, poiché la cumulata può essere vista come un parametro, si ottiene la relazione che lega i carichi H_1 e H_2 .
 Prima di scrivere la relazione che lega i carichi in forma esplicita, conviene studiare l'altro caso possibile, cioè il caso in cui il flusso circola dal nodo 2 al nodo 1, così da poter ottenere tutto il campo di variabilità dei carichi.

2.3.2 Caso di portata defluente dal nodo 2 al nodo 1

Il successivo caso esaminato è il caso riportato in figura 2.6 in cui la portata circola, nel tratto orizzontale, dal nodo 2 al nodo 1.

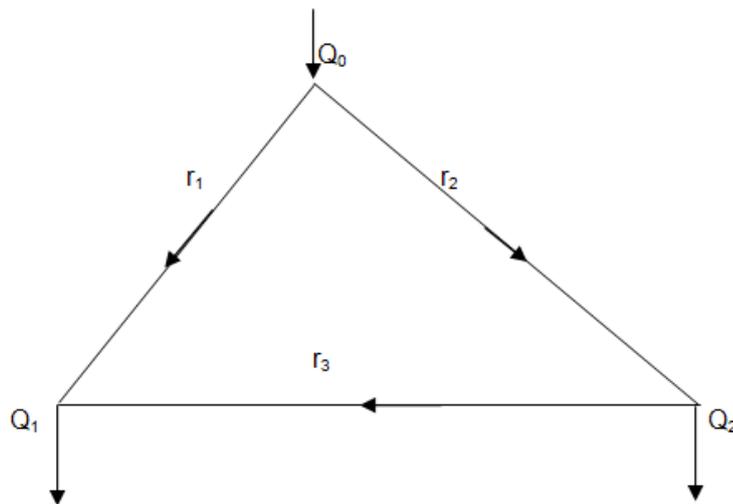


Figura 2.8 Grafico andamento delle portate nei tratti

Le equazioni che regolano il sistema sono le equazioni di continuità nel nodo e le equazioni del moto che vengono riportate nelle (2.12.1-6).

$$Q_{01} = Q_1 - Q_{12} \quad (2.12.1)$$

$$Q_{02} = Q_2 + Q_{12} \quad (2.12.2)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 \quad (2.12.3)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 Q_{02}^2 \quad (2.12.4)$$

$$H_2 - H_1 = r_3 Q_{12}^2 \quad (2.12.5)$$

$$Q_{01} + Q_{02} = Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (2.12.6)$$

Mettendo a sistema le equazioni di continuità e del moto si ottiene la seguente relazione :

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_1 + Q_2) + r_3 Q_1 \pm \sqrt{[r_2(Q_1 + Q_2) + r_3 Q_1]^2 - (r_2 - r_1 + r_3)(r_2 Q_0^2 + r_3 Q_1^2)}}{r_2 - r_1 + r_3}$$

Come per il caso in cui il flusso va nel verso opposto, anche qui si ottiene una doppia soluzione, cioè due portate contemporaneamente defluenti per ogni coppia di portate richieste. In questo caso non è possibile dire a priori quale delle due è da scartare, in quanto entrambe le soluzioni risultano positive. Per poter individuare quale delle due è la “vera” soluzione, è necessario considerare l’equazione (2.12.6) e, da essa, vedere a quali risultati portano le due soluzioni. L’analisi svolta su queste due equazioni, messe a sistema, hanno fatto escludere il caso con il segno + perché non verificava l’equazione (2.12.6). Quindi, la soluzione è la quella riportata nella (2.13).

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_1 + Q_2) + r_3 Q_1 - \sqrt{[r_2(Q_1 + Q_2) + r_3 Q_1]^2 - (r_2 - r_1 + r_3)(r_2 Q_0^2 + r_3 Q_1^2)}}{r_2 - r_1 + r_3} \quad (2.13)$$

Avendo determinato la portata circolante nel tratto 0-1 è possibile definire anche il carico nel nodo tramite l’equazione del moto (2.12.3) con $H_1 = f(Q_1, Q_2)$.

Per determinare il carico nel nodo 2 si applica, allo stesso modo, il procedimento visto per il nodo precedente e si ottiene :

$$Q_{02} = \frac{r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2 \pm \sqrt{[r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2]^2 - (r_1 - r_2 - r_3)[r_1(Q_1 + Q_2)^2 - r_3 Q_2^2]}}{-r_2 + r_1 - r_3}$$

Anche qui, come per il caso precedente, sembrerebbe una doppia soluzione e quindi doppie portate per ogni coppia di portate richieste ai nodi. In realtà, si ottiene che delle due soluzioni solo una è quella ammissibile, cioè quella che dà portate positive, ed è quella con il segno -. Per cui la formula finale è:

$$Q_{02} = \frac{r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2 - \sqrt{[r_1(Q_1 + Q_2) - r_3 Q_2]^2 - (r_1 - r_2 - r_3)[r_1(Q_1 + Q_2)^2 - r_3 Q_2^2]}}{-r_2 + r_1 - r_3} \quad (2.14)$$

Il valore di Q_0 e la sua distribuzione si può conoscere soltanto conoscendo i valori e le distribuzioni delle due portate richieste nei nodi. Detto $Q_0=Z$ e $Q_1=X$ e $Q_2=Y$, il caso da esaminare è quello esposto nel paragrafo precedente, cioè quello di variabile somma di due variabili casuali. Le funzioni di densità di distribuzione e la funzione cumulata sono riportate nella (2.15.1) e (2.15.2) rispettivamente.

$$f_z(z) = \frac{z}{(b-a)(c-d)} \quad (2.15.1)$$

$$F_z(z) = \frac{z^2}{2(c-d)(b-a)} \quad (2.15.2)$$

con a, b, c, d i limiti di campo delle due portate richieste.

La funzione di distribuzione cumulata avrà, quindi, un andamento di tipo parabolico rispetto alla variabile somma.

Da ciò si è ottenuto una relazione che lega la portata Q_0 alla $F_z(z)$. Con essa, ricordando che :

$$Q_0 = \sqrt{\frac{H_0 - H_1}{r_{01}}} + \sqrt{\frac{H_0 - H_2}{r_{02}}} \quad (2.16)$$

Si ottiene la relazione che lega i carichi nei due nodi alla cumulata di Q_0 e quindi, poiché la cumulata può essere vista come un parametro, si ottiene la relazione che lega i carichi H_1 e H_2 .

2.3.3 Punti limite del “campo di esistenza”

Per ottenere la relazione che intercorre tra i carichi, in forma esplicita, bisogna partire dalle equazioni (2.8), (2.9), (2.13), (2.14). Una volta definito il campo di variabilità delle portate adimensionalizzate rispetto al valore massimo, le equazioni (2.8), (2.9), (2.13), (2.14) permettono di determinare tutte le equazioni dei limiti del campo di esistenza dei carichi. Le portate ammissibili adimensionalizzate, cioè Q_1/Q_{1max} e Q_2/Q_{2max} , variano entrambe nel campo (0,1) dove con 0 è definita la portata minima e con 1 la portata massima richiesta. Di questo campo si studiano, inizialmente, i punti estremi, cioè i punti nel piano $(Q_1/Q_{1max}, Q_2/Q_{2max})$ che formano le seguenti coppie di coordinate: (0,0); (0,1); (1,0); (1,1).

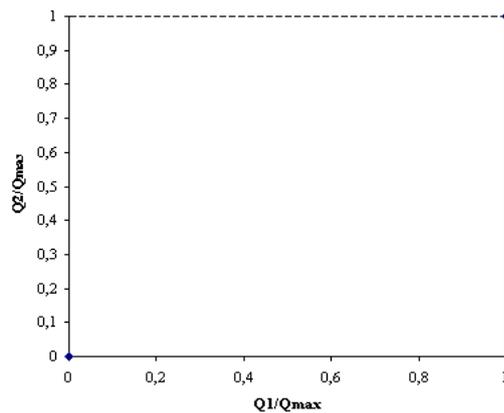


Figura 2.9 Campo di variazione delle portate richieste nei nodi 1 e 2

Punto A(1,1)

Il primo punto analizzato è quello in cui si hanno le portate massime, punto estremo superiore della figura 3.7 :

$$Q_1 = Q_2 = Q_{max} = 1$$

Per poter ottenere le coordinate del punto A nel piano (H_1, H_2) si deve sostituire nelle equazioni (2.8), (2.9), (2.13), (2.14) al posto delle portate

erogate Q_1 e Q_2 i valori delle portate assegnate ai due nodi, così da ottenere i seguenti valori dei carichi :

- nel caso in cui $r_1 > r_2$, si ottiene che le portate circolano dal nodo 2 al nodo 1 e il valore delle portate è

$$Q_{01} = \frac{2r_2 + r_3 - \sqrt{4r_1r_2 - r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 + r_3 - r_1}$$

$$Q_{02} = 2 - Q_{01}$$

mentre, il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\min} = H_0 - r_1 \left[\frac{2r_2 + r_3 - \sqrt{4r_1r_2 - r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.17)$$

$$H_{2,\min} = H_0 - r_2 \left[2 - \frac{2r_2 + r_3 - \sqrt{4r_1r_2 - r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.18)$$

- nel caso in cui $r_1 < r_2$ si ottiene circolazione di portate dal nodo 1 al nodo 2 e il valore delle portate è :

$$Q_{01} = 2 - Q_{02}$$

$$Q_{02} = \left[\frac{-2r_1 - r_3 + \sqrt{4r_1r_2 + r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\min} = H_0 - r_1 \left[2 - \frac{-2r_1 - r_3 + \sqrt{4r_1r_2 + r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.19)$$

$$H_{2,\min} = H_0 - r_2 \left[\frac{-2r_1 - r_3 + \sqrt{4r_1r_2 + r_2r_3 - r_1r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.20)$$

In questo modo, è possibile ottenere due coppie di valori che, però, sono fra di loro escludenti in quanto calcolate con due ipotesi diverse sulle resistenze r_1 ed r_2 .

Punto B (0,0)

Il punto opposto a quello analizzato nel paragrafo precedente è il punto B, punto di minimo del quadrato della figura 2.7, le cui coordinate corrispondono all'origine degli assi e, quindi, al caso in cui non vi è richiesta di portate ai nodi:

$$Q_1=Q_2=Q_{\min}=0$$

Allo stesso modo di quanto fatto per il punto massimo A, per poter ottenere le coordinate del punto B nel piano (H_1 , H_2) bisogna sostituire alle portate Q_1 e Q_2 i valori delle portate assegnate ai due nodi ed ottenere i seguenti valori dei carichi :

- nel caso che $r_1 > r_2$ ed utilizzando le equazioni inerenti il deflusso dal nodo 2 al nodo 1, si ottiene il seguente risultato :

$$\begin{aligned} Q_{01} &= 0 \\ Q_{02} &= 0 \end{aligned}$$

e, di conseguenza, il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\max} = H_0 \quad (2.21)$$

$$H_{2,\max} = H_0 \quad (2.22)$$

- nel caso in cui $r_1 < r_2$, quindi con deflusso dal nodo 1 al nodo 2, il valore delle portate è :

$$\begin{aligned} Q_{01} &= 0 \\ Q_{02} &= 0 \end{aligned}$$

e il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\max} = H_0 \quad (2.23)$$

$$H_{2,\max} = H_0 \quad (2.24)$$

Nel caso del punto B di richiesta nulla, come è facile aspettarsi, non essendoci, in nessuno dei due casi esaminati, portata erogata, il risultato finale dei carichi nei due nodi è lo stesso e pari al valore del carico nel nodo iniziale di immissione.

Punto C (1,0)

Il punto limite C è quel particolare punto del campo di esistenza in cui le portate sono :

$$Q_1 = Q_{1,\max} = 1$$

$$Q_2 = Q_{2,\min} = 0$$

Da tali valori di portate è possibile ottenere le coordinate del punto C nel piano (H_1, H_2) sostituendo a Q_1 e Q_2 i valori delle portate assegnate ai due nodi così da ottenere i seguenti valori dei carichi :

- nel caso che la circolazione delle portata è dal nodo 1 al nodo 2, il valore delle portate è :

$$Q_{01} = 1 - Q_{02}$$

$$Q_{02} = Q_{02} = \frac{-r_1 + \sqrt{r_1 r_2 - r_1 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1}$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[1 - \frac{-r_1 + \sqrt{r_1 r_2 - r_1 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.25)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-r_1 + \sqrt{r_1 r_2 - r_1 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.26)$$

- nel caso in cui la portata circola dal nodo 2 al nodo 1, il valore delle portate è :

$$Q_{01} = \left[\frac{r_2 + r_3 - \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]$$

$$Q_{02} = \left[1 - \frac{r_2 + r_3 - \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{r_2 + r_3 - \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.27)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[1 - \frac{r_2 + r_3 - \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.28)$$

Come per tutti gli altri punti analizzati, anche qui si ottengono due coppie di valori fra di loro escludenti in quanto calcolate con due ipotesi diverse sulle resistenze r_1 ed r_2 .

Punto D (0,1)

L'ultimo punto analizzato è il punto D, opposto al punto C nella figura 2.7, cioè quel punto in cui le portate sono :

$$Q_1 = Q_{1,\min} = 0$$

$$Q_2 = Q_{2,\max} = 1$$

Per poter ottenere le coordinate del punto D nel piano (H_1, H_2) , come è stato fatto in tutti gli altri punti esaminati, bisogna sostituire all'interno delle formule che definiscono le portate circolanti, definite nei paragrafi 2.2.1 e 2.2.2 per le diverse condizioni di circolazione, i valori noti delle portate erogate Q_1 e Q_2 ai due nodi così da poter ottenere i seguenti valori dei carichi :

- nel caso che la portata circoli dal nodo 1 al nodo 2, il valore delle portate è :

$$Q_{01} = 1 - Q_{02}$$

$$Q_{02} = \frac{-(r_1 + r_3) + \sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1}$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[1 - \frac{-(r_1 + r_3) + \sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.29)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-(r_1 + r_3) + \sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.30)$$

- nel caso in cui la circolazione va dal nodo 2 al nodo 1, il valore delle portate è :

$$Q_{01} = \left[\frac{r_2 - \sqrt{r_1 - r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]$$

$$Q_{02} = \left[1 - \frac{r_2 - \sqrt{r_1 - r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]$$

e, quindi, il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{r_2 - \sqrt{r_1 - r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.31)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[1 - \frac{r_2 - \sqrt{r_1 - r_3}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.32)$$

Le coppie che si ottengono dallo sviluppo delle equazioni del moto e di continuità sono fra di loro escludenti in quanto calcolate con le due ipotesi diverse sulla circolazione delle portate che è determinata tramite opportune ipotesi sulle resistenze r_1 ed r_2 .

2.3.4 Equazioni delle curve limite del “campo di esistenza”

Tutto quanto fatto nel paragrafo precedente è servito per definire i punti estremi del campo di esistenza dei carichi, una volta definito quello delle portate erogate. In realtà, per poter identificare in modo completo tutto il campo di possibili soluzioni per le coppie di carichi nei due nodi è necessario determinare, in modo esplicito le equazioni dei confini del “campo di esistenza” dei carichi. Per poter fare ciò, le equazioni che si utilizzano sono quelle stesse equazioni utilizzate in precedenza per il calcolo dei carichi nel nodo nelle due condizioni di deflusso di portata, sia quelle che hanno circolazione dal nodo 2 al nodo 1 che quelle inverse, che però devono essere puntualizzate e delimitate da opportuni vincoli. I vincoli da applicare alle equazioni generali (2.8), (2.9), (2.13), (2.14) sono :

1. $Q_{1,max}$ in ogni punto e Q_2 variabile nell'intervallo $[Q_{2min}; Q_{2max}]$
2. Q_1 nell'intervallo $[Q_{1max}; Q_{1min}]$ e $Q_2 = Q_{2min}$
3. Q_1 nell'intervallo $[Q_{1max}; Q_{1min}]$ e $Q_2 = Q_{2max}$
4. $Q_1 = Q_{1min}$ e Q_2 variabile nell'intervallo $[Q_{2max}; Q_{2min}]$

E' stato stabilito, per semplicità della trattazione ma senza perderne di generalità, di utilizzare il range di variabilità stabilito nel paragrafo precedente. Infatti, si considera come portata massima il valore 1 e come portata minima il valore 0 per entrambi i nodi.

Applicando tali vincoli alle equazioni generali (2.8), (2.9), (2.13), (2.14), si ottengono delle curve limiti in cui i punti A, B, C, D, definiti nel paragrafo precedente, saranno dei punti di discontinuità delle curve limiti del campo.

Le equazioni limiti che si ottengono, considerando quanto appena detto, sono:

- **limite 1**

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_{1\max} + Q_2) + r_3Q_{1\max} - \sqrt{r_3(r_1Q_{1\max}^2 - r_2Q_2^2) + r_1r_2(Q_1 + Q_2)^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \quad (2.33)$$

mentre i due valori dei carichi H_1 e H_2 sono :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{r_2(Q_{1\max} + Q_2) + r_3Q_{1\max} - \sqrt{r_3(r_1Q_{1\max}^2 - r_2Q_2^2) + r_1r_2(Q_1 + Q_2)^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.34)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[(Q_{1\max} + Q_2) - \frac{r_2(Q_{1\max} + Q_2) + r_3Q_{1\max} - \sqrt{r_3(r_1Q_{1\max}^2 - r_2Q_2^2) + r_1r_2(Q_1 + Q_2)^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2$$

- **limite 2**

$$Q_{01} = \frac{r_2(Q_1 + Q_{2\min}) + r_3Q_1 - \sqrt{r_3(r_1Q_1^2 - r_2Q_{2\min}^2) + r_1r_2(Q_1 + Q_{2\min})^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \quad (2.35)$$

e, quindi, i due valori dei carichi H_1 e H_2 :

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{r_2(Q_1 + Q_{2\min}) + r_3 Q_1 - \sqrt{r_3(r_1 Q_1^2 - r_2 Q_{2\min}^2) + r_1 r_2 (Q_1 + Q_{2\min})^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.36)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[(Q_1 + Q_{2\min}) - \frac{r_2(Q_1 + Q_{2\min}) + r_3 Q_1 - \sqrt{r_3(r_1 Q_1^2 - r_2 Q_{2\min}^2) + r_1 r_2 (Q_1 + Q_{2\min})^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2$$

- **limite 3**

$$Q_{02} = \frac{-r_3 Q_{2\max} - r_1(Q_1 + Q_{2\max}) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_1 + Q_{2\max})^2 - r_1 r_3 Q_1^2 + r_3 r_2 Q_{2\max}^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \quad (2.37)$$

e, quindi, i due valori dei carichi H_1 e H_2 :

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-r_3 Q_{2\max} - r_1(Q_1 + Q_{2\max}) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_1 + Q_{2\max})^2 - r_1 r_3 Q_1^2 + r_3 r_2 Q_{2\max}^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.38)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[(Q_1 + Q_{2\max}) - \frac{-r_3 Q_{2\max} - r_1(Q_1 + Q_{2\max}) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_1 + Q_{2\max})^2 - r_1 r_3 Q_1^2 + r_3 r_2 Q_{2\max}^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2$$

- **limite 4**

$$Q_{02} = \frac{-r_3 Q_2 - r_1(Q_{1\min} + Q_2) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_{1\min} + Q_2)^2 - r_1 r_3 Q_{1\min}^2 + r_3 r_2 Q_2^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \quad (2.39)$$

e, quindi, i due valori dei carichi H_1 e H_2 :

$$H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-r_3 Q_2 - r_1 (Q_{1\min} + Q_2) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_{1\min} + Q_2)^2 - r_1 r_3 Q_{1\min}^2 + r_3 r_2 Q_2^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \quad (2.40)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 \left[(Q_{1\min} + Q_2) - \frac{-r_3 Q_2 - r_1 (Q_{1\min} + Q_2) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_{1\min} + Q_2)^2 - r_1 r_3 Q_{1\min}^2 + r_3 r_2 Q_2^2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2$$

Nel caso in cui le portate massime siano poste pari a 1 e le portate minime pari a 0, si ottiene il seguente gruppo di equazioni che delimitano l'area di variabilità dei carichi :

- **limite 1**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{r_2(1+Q_2) + r_3 - \sqrt{r_3(r_1 - r_2 Q_2^2) + r_1 r_2(1+Q_2)^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 \left[(1+Q_2) - \frac{r_2(1+Q_2) + r_3 - \sqrt{r_3(r_1 - r_2 Q_2^2) + r_1 r_2(1+Q_2)^2}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 \end{array} \right. \quad (2.41)$$

- **limite 2**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 \left[\frac{(r_2 + r_3) - \sqrt{(r_3 + r_2)r_1}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 Q_1^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 \left[1 - \frac{(r_2 + r_3) - \sqrt{(r_3 + r_2)r_1}}{r_2 + r_3 - r_1} \right]^2 Q_1^2 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

- **limite 3**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-r_3 - r_1(Q_1 + 1) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_1 + 1)^2 - r_1 r_3 Q_1^2 + r_3 r_2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \\ H_1 = H_0 - r_1 \left[(Q_1 + 1) - \frac{-r_3 - r_1(Q_1 + 1) - \sqrt{r_2 r_1 (Q_1 + 1)^2 - r_1 r_3 Q_1^2 + r_3 r_2}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

- **limite 4**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2 = H_0 - r_2 \left[\frac{-(r_3 + r_1) - \sqrt{r_2(r_1 + r_3)}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 Q_2^2 \\ H_1 = H_0 - r_1 \left[1 - \frac{-(r_3 + r_1) - \sqrt{r_2(r_1 + r_3)}}{r_2 - r_3 - r_1} \right]^2 Q_2^2 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Le quattro equazioni ed i quattro punti definiti in questi ultimi due paragrafi, delimitano l'intero "campo di esistenza". Oltre ai risultati analitici, si è deciso di simulare il sistema maglia triangolare 50.000 volte, cioè dando alle portate erogate dei valori casuali ed ottenendo, di conseguenza, i valori dei carichi nei nodi. Tali risultati simulati sono stati riportati nelle figure 2.8, 2.9, 2.10 per varie ipotesi sulle scabrezze dei tratti. Nelle figure 2.11 e 2.12, invece, sono stati riportati i limiti del campo di esistenza determinati analiticamente per campi di scabrezza.

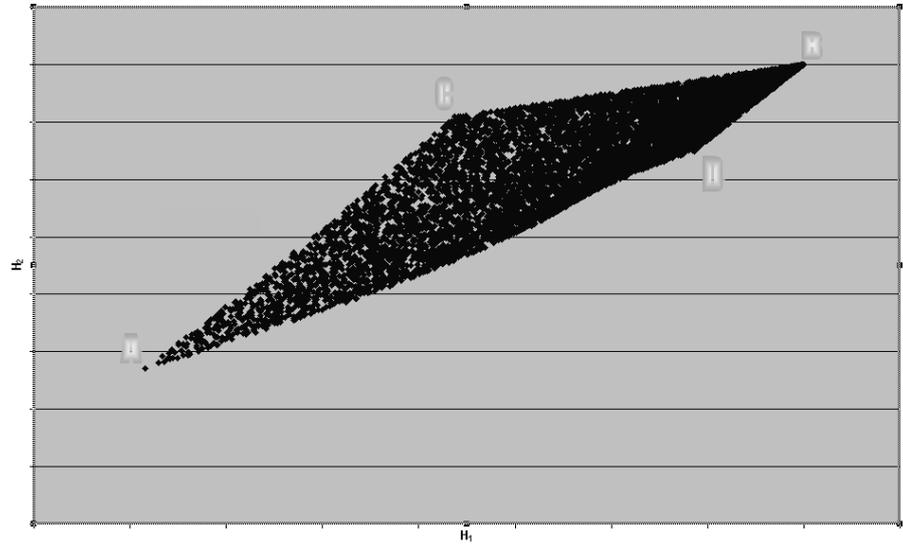


Figura 2.10 Campo di esistenza ottenuto da 50000 simulazioni imponendo $r_1 > r_2$

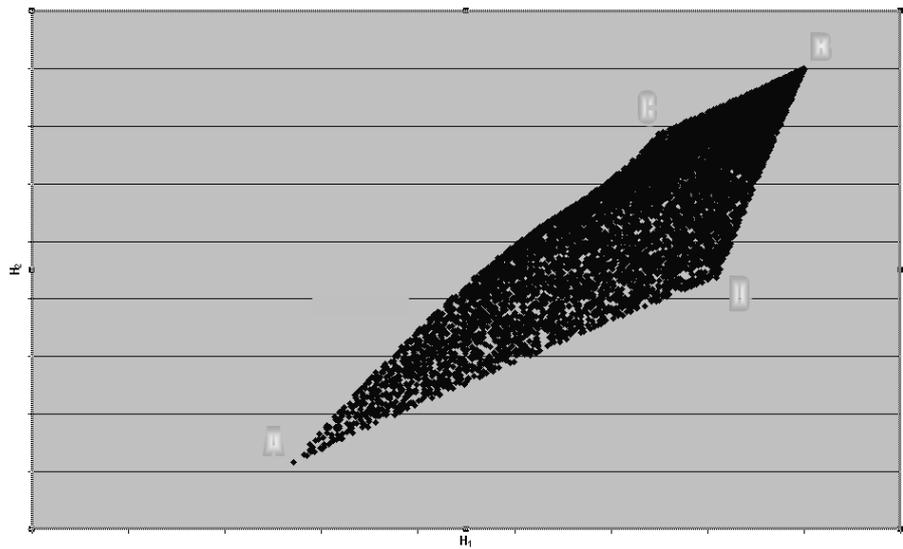


Figura 2.11 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 < r_2$

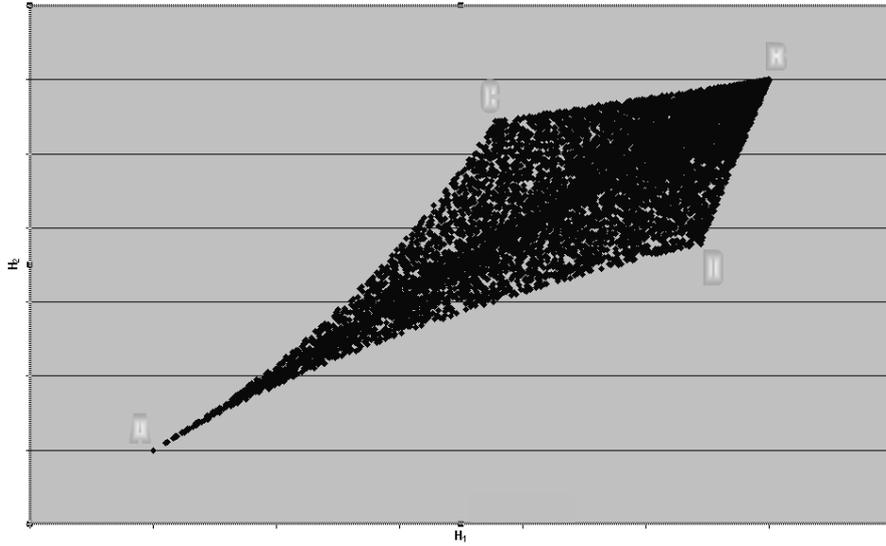


Figura 2.12 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 = r_2$

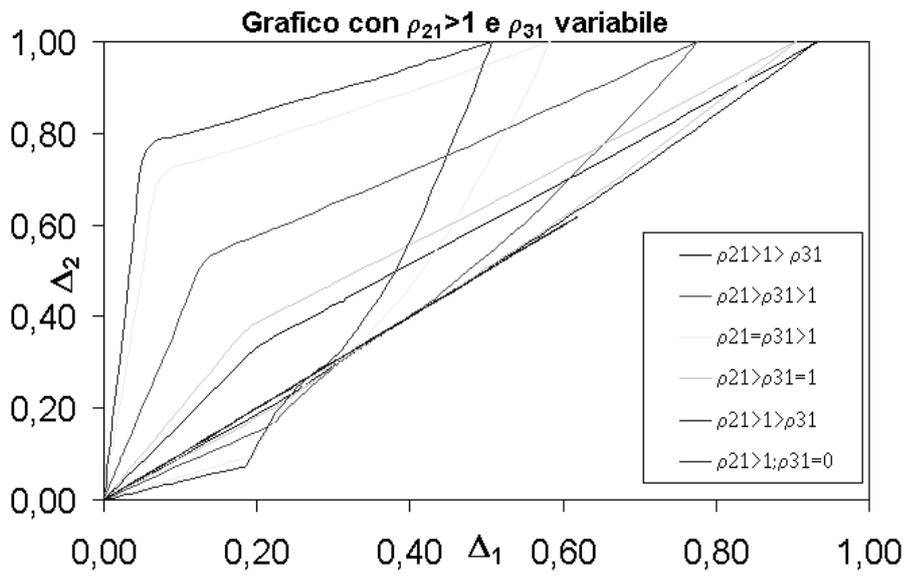


Figura 2.13 Campo di esistenza adimensionale determinato con $r_1 > r_{12} > r_2$

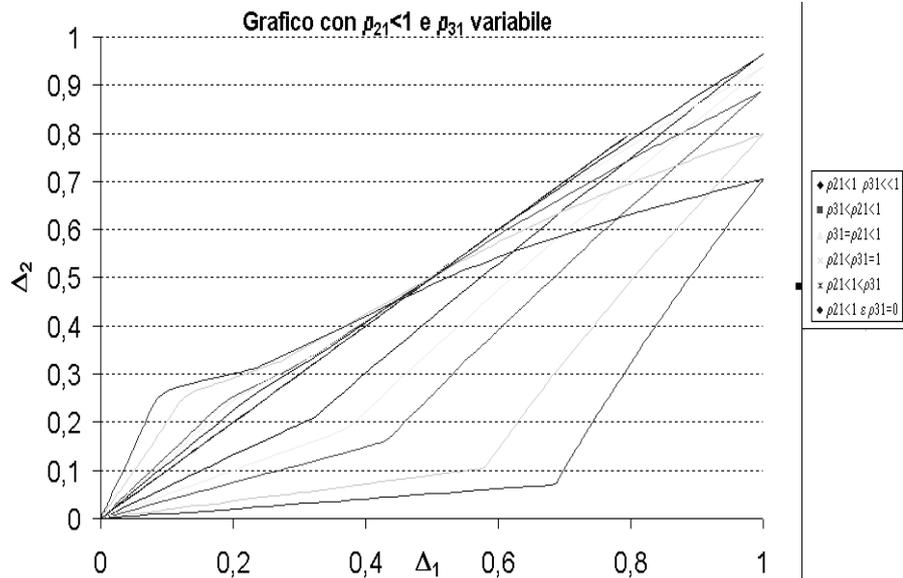


Figura 2.14 Campo di esistenza adimensionalizzato determinato con $r_{12} \ll r_1 = r_2$

Dai grafici, delle figure 2.11 e 2.12, si nota che le posizioni dei punti C e di D dipendono dal rapporto fra le resistività r_1 ed r_2 , nonché dal valore della resistività r_3 , che, come si evince particolarmente osservando la figura 2.10, ha come caratteristica quella di essere direttamente proporzionale al “grado di apertura” del range di variabilità nella zona centrale del campo. Infatti, nel caso di Figura 2.8, 2.9, 2.10 ha un valore superiore alle resistività r_1 ed r_2 . Se, invece, il valore di r_3 è tale da poter essere trascurato rispetto agli altri due, si otterrebbe un “campo di esistenza” strettissimo, cioè il campo di esistenza diventerebbe una “striscia” più o meno spessa a seconda del valore di r_3 fino a tendere ad una retta nel caso in cui r_3 tenda a 0. Perciò, facendo una simulazione sullo stesso campo di variabilità precedente si ottiene il risultato riportato in figura 2.13 che è rispondente a quanto appena detto sull’ampiezza del campo di variabilità dei carichi.

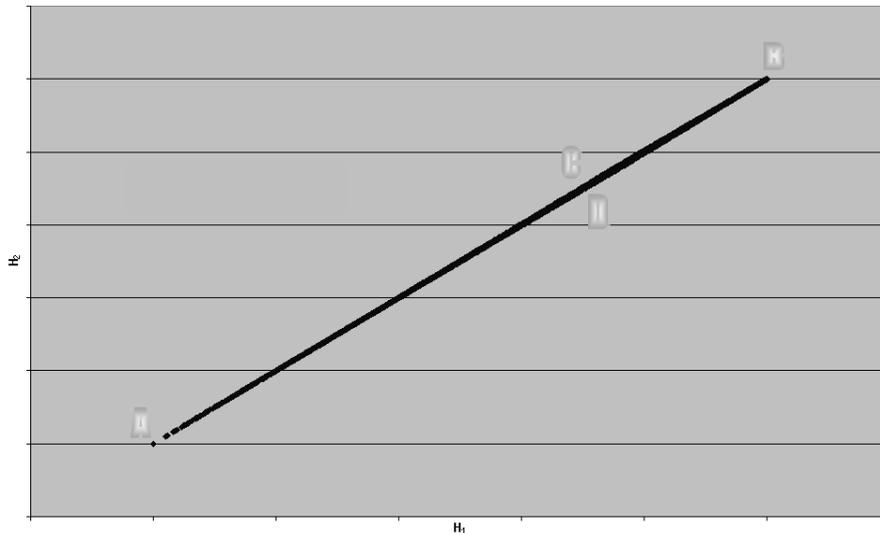


Figura 2.15 Campo di esistenza determinato con 50.000 simulazioni imponendo che $r_1 = r_2$ ed r_3 trascurabile

2.3.5 Analisi probabilistica campo di variabilità H_1 - H_2

Definito il campo di variabilità dei carichi, per assegnati valori delle portate erogate Q_1 e Q_2 , bisogna studiare le funzioni di distribuzione marginali dei carichi stessi, nonché la loro funzione di distribuzione cumulata della congiunta e della condizionata.

Inizialmente, le funzioni di distribuzioni note a priori sono solo quelle marginali delle portate erogate Q_1 e Q_2 , che, per semplicità, sono state assunte pari a quelle di una distribuzione uniforme. (Figura 2.2 e 2.3).

La determinazione delle funzioni marginali cumulate dei carichi H_1 e H_2 , conoscendo soltanto le marginali di Q_1 e Q_2 , è possibile ottenerle considerando il campo di variabilità sopra definito. Infatti, avendo H_{1min} , H_{2min} , H_{1max} , H_{2max} e le funzioni che legano le portate ai carichi (eq. dalla 2.17 - 2.32), si ottengono le distribuzioni cumulate riportate in figura 2.14 e 2.15, avendo imposto $r_1 > r_2$ e r_3 confrontabile con le altre due resistività.:

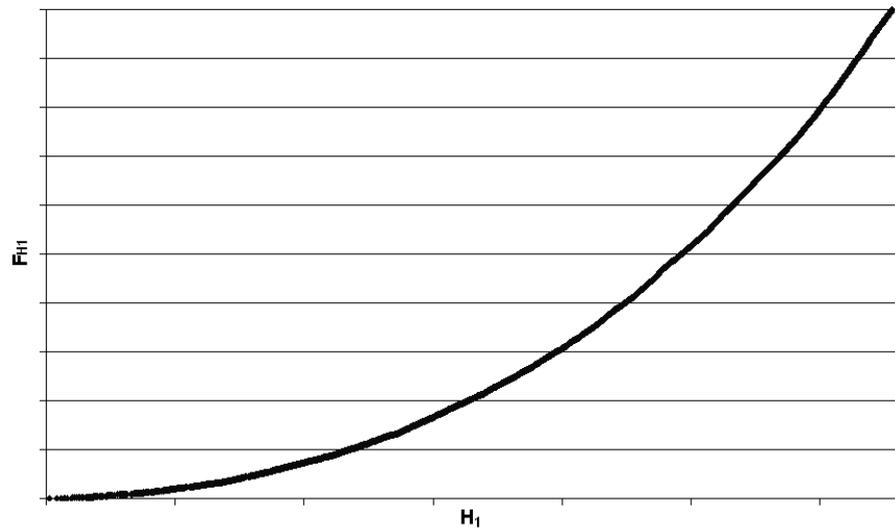


Figura 2.16 Distribuzione cumulata del carico H_1 (marginale)

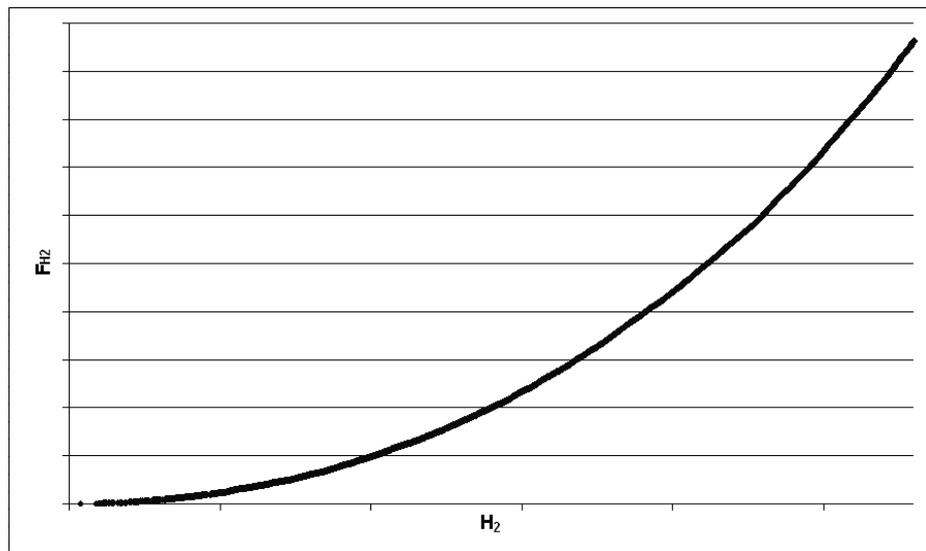


Figura 2.17 Distribuzione cumulata del carico H_2 (marginale)

Per studiare la correlazione, se esiste, tra i carichi H_1 e H_2 , è necessario studiare, tramite l'ausilio di un software come MatLab, la distribuzione cumulata della congiunta ed analizzare se questa distribuzione ha un andamento simile a quella delle marginali. Nel caso in cui si ottiene lo

stesso andamento per queste due distribuzioni, i carichi risultano tra di loro non correlati; ovvero se hanno distribuzioni diverse, i carichi sono tra di loro correlati.

Partendo dall'equazione che regola la funzione di distribuzione cumulata congiunta :

$$f_{x|y}(x, y) = \frac{f_{x,y}(x, y)}{f_y(y)} \quad (2.45)$$

con

$f_{x,y}(x, y)$ = funzione di densità di distribuzione congiunta delle due variabili H_1 e H_2

$f_y(y)$ = funzione di densità di distribuzione marginale della variabile H_2

$f_{x|y}(x, y)$ = funzione di densità della H_1 condizionata da H_2

Per passare dalla densità di distribuzione alla cumulata basta integrare su entrambi i campi delle variabili, cioè :

$$F_{x,y}(x, y) = \iint f_{x,y}(x, y) dx dy \quad (2.46)$$

I risultati che si ottengono sono riportati nelle figure dalla 2.16 a 2.21.

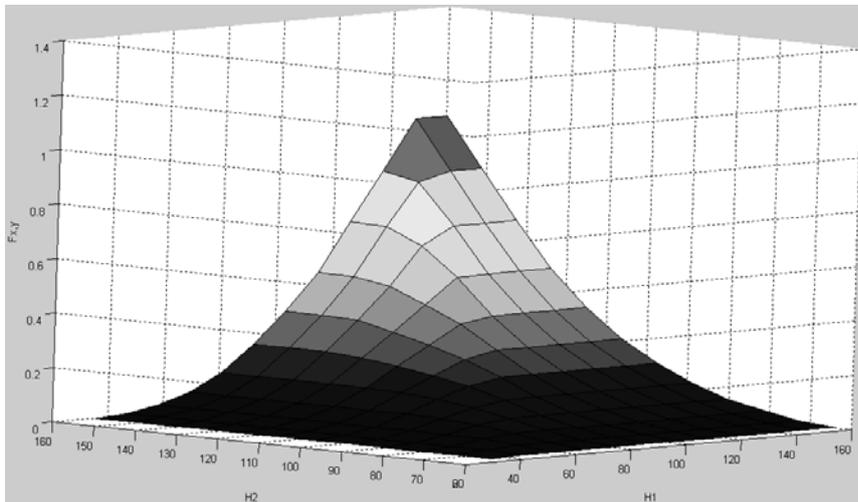


Figura 2.18 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (variabile tra il loro valore minimo ed un valore massimo pari a 160 m)

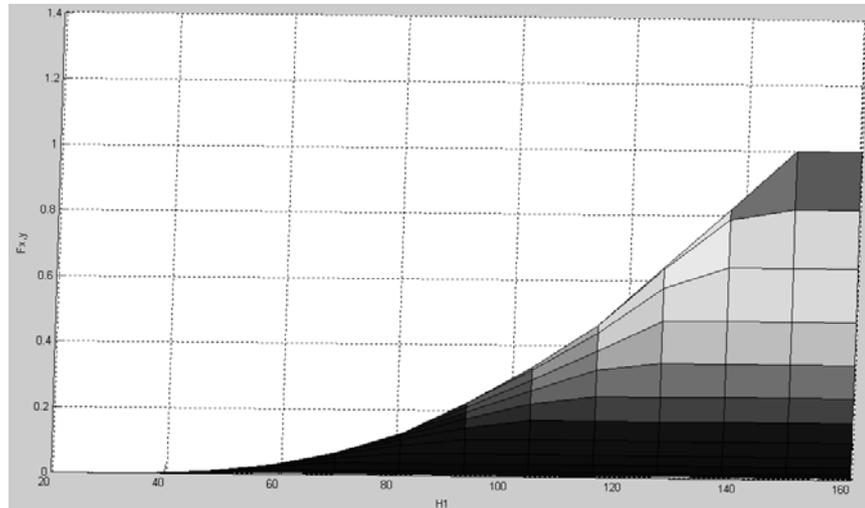


Figura 2.19 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_1 - $F_{x,y}$

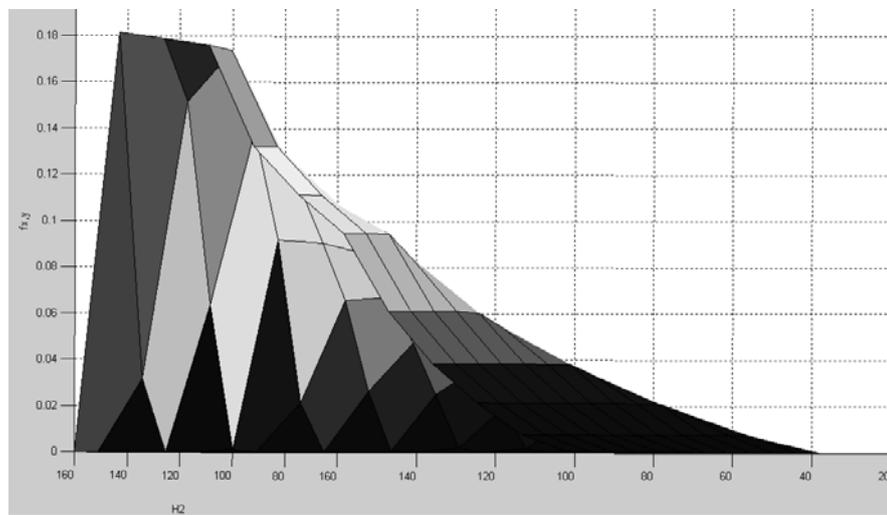


Figura 2.20 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_2 - $f_{x,y}$

2. STUDIO DI UNA MAGLIA CHIUSA TRIANGOLARE

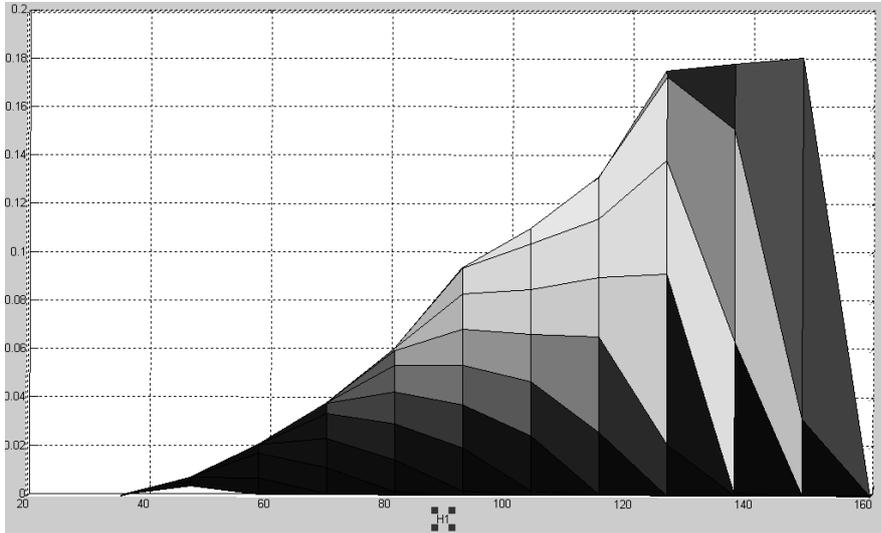


Figura 2.21 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 nel piano H_1 - $f_{x,y}$

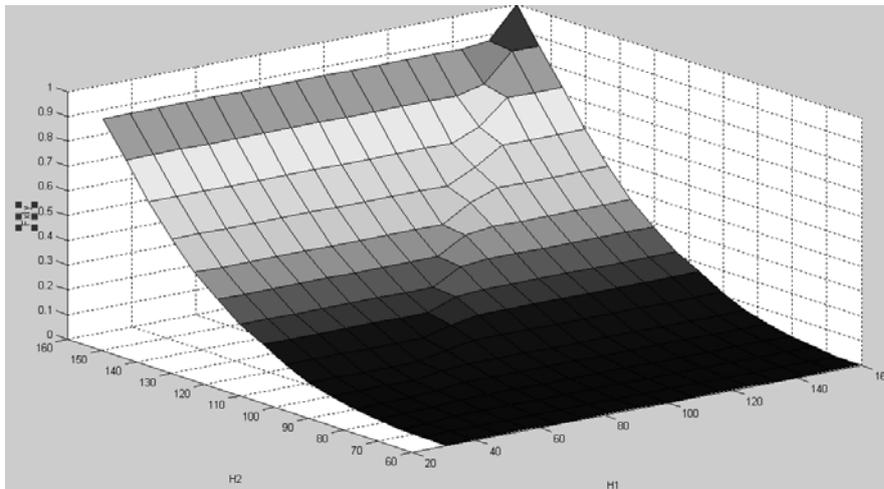


Figura 2.22 Distribuzione cumulata della condizionata di H_1 rispetto ad H_2

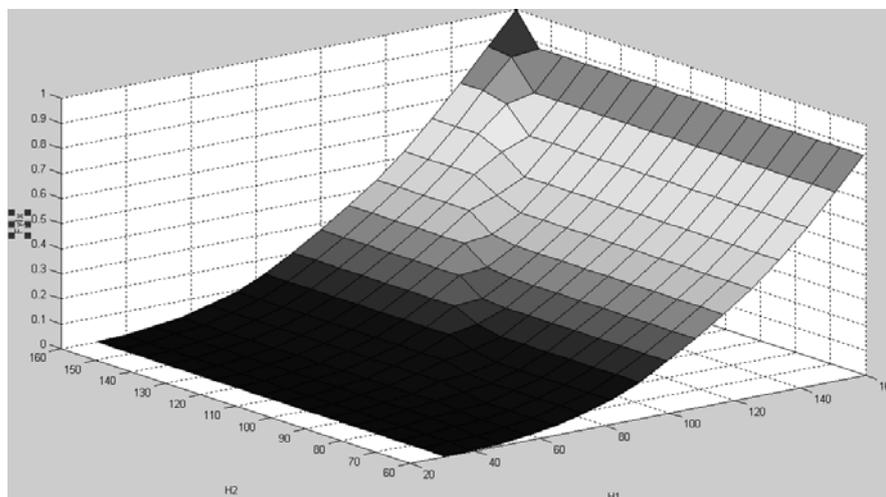


Figura 2.23 Distribuzione cumulata della condizionata di H_2 rispetto ad H_1

Dall'analisi delle figure 2.14- 2.21 si nota, in modo evidente, che le distribuzioni marginali delle variabili H_1 ed H_2 sono diverse rispetto alla distribuzione congiunta delle due variabili. Tale risultato comporta che le due variabili aleatorie (H_1 ed H_2) sono correlate fra di loro, per cui bisognerà andare a definire che tipo di correlazione si ottiene. Un risultato analogo è possibile ottenerlo considerando il campo di variabilità $H_1 - H_2$ ottenuto tramite simulazione Montecarlo, in cui si considerano le distribuzioni di probabilità condizionate delle due variabili l'una rispetto all'altra. Dall'analisi delle figure 2.22 e 2.23 è possibile ottenere le seguenti considerazioni: le distribuzioni di probabilità condizionate delle due variabili sono tra di loro diverse, per cui le stesse variabili sono tra di loro correlate; è possibile, tramite l'analisi delle distribuzioni di probabilità condizionate, stabilire quale delle due è la variabile da preferire nella fase di monitoraggio del sistema, avendo delle distribuzioni di probabilità condizionate differenti. La scelta, in fase di monitoraggio, del nodo da monitorare, come viene esplicitato nei capitoli successivi, è fatta considerando quella che ha la minore variabilità del campo delle distribuzione condizionate.

2. STUDIO DI UNA MAGLIA CHIUSA TRIANGOLARE

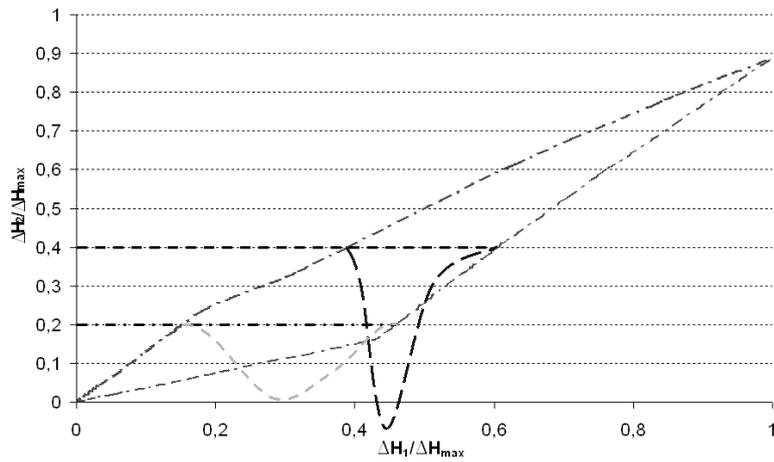


Figura 2.24 Distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 rispetto a ΔH_2 nel caso di maglia triangolare

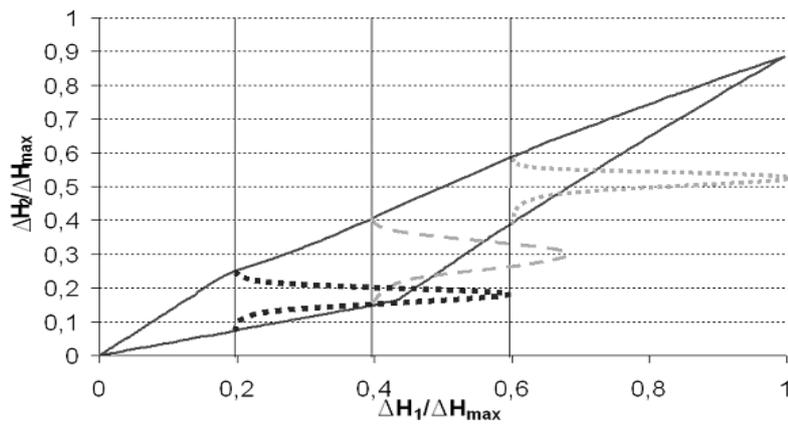


Figura 2.25 Distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_2 rispetto a ΔH_1 nel caso di maglia triangolare

Capitolo 2

3 STUDIO DI UN SISTEMA IN SERIE

3.1 PREMESSA

Un altro sistema semplice, ma di complessità minore rispetto al caso precedente, analizzato è il sistema a maglia aperta con due richieste in serie in due nodi distinti (Q_1 e Q_2), riportato in figura 3.1.

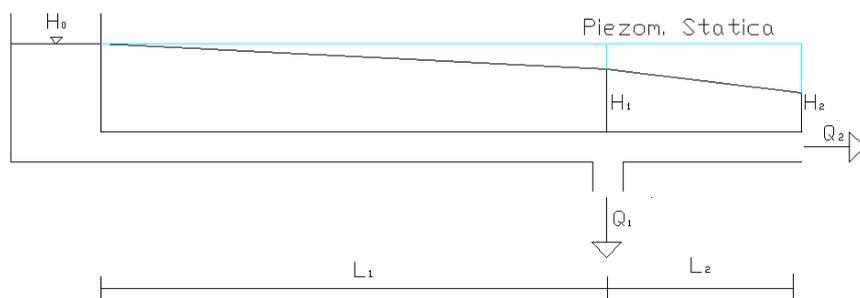


Figura 3.1 Sistema con doppia richiesta in serie dal serbatoio

La distribuzione di probabilità delle portate richieste nei due nodi viene ipotizzata pari ad una distribuzione uniforme e, per semplicità, ad entrambe le richieste vengono date la stessa media e la stessa varianza. Anche qui, come per il caso precedentemente affrontato, viene riproposto lo studio probabilistico del sistema e la ricerca, ove vi fosse, di una correlazione fra i carichi nei due nodi (H_1 e H_2).

Le equazioni a disposizione per affrontare il problema sono quelle del moto e di continuità riportate nelle 3.1 – 3.5.

$$Q_{01} = Q_1 + Q_2 \quad (3.1)$$

$$Q_{12} = Q_2 \quad (3.2)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 \quad (3.3)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 Q_{12}^2 - r_1 Q_{01}^2 \quad (3.4)$$

$$H_2 - H_1 = - r_2 Q_{12}^2 \quad (3.5)$$

Rispetto al caso precedente, per questa tipologia di sistema, il verso delle portate è noto a priori in quanto non ci si trova in presenza di una maglia chiusa, bensì di una maglia aperta, per cui, una volta definite le resistività r_1 e r_2 dei due tronchi, è immediato determinare i due carichi H_1 e H_2 .

3.2 PUNTI LIMITE DEL “CAMPO DI ESISTENZA”

Per studiare i punti limite del campo di esistenza dei carichi ai nodi, bisogna partire dalla conoscenza del campo di esistenza delle portate erogate negli stessi nodi. Quindi, considerando come “campo di esistenza” delle portate erogate, adimensionalizzate ($Q_1/Q_{1\max}$; $Q_2/Q_{2\max}$) rispetto al valore massimo, quello riportato in figura 3.2, è possibile ottenere da esso tutto il campo di “esistenza” dei carichi nei nodi. Il campo di esistenza delle portate adimensionalizzate varia tra 0 ed 1, in cui 0 corrisponde alla portata nulla ed 1, invece, alla portata massima ammissibile per il sistema.

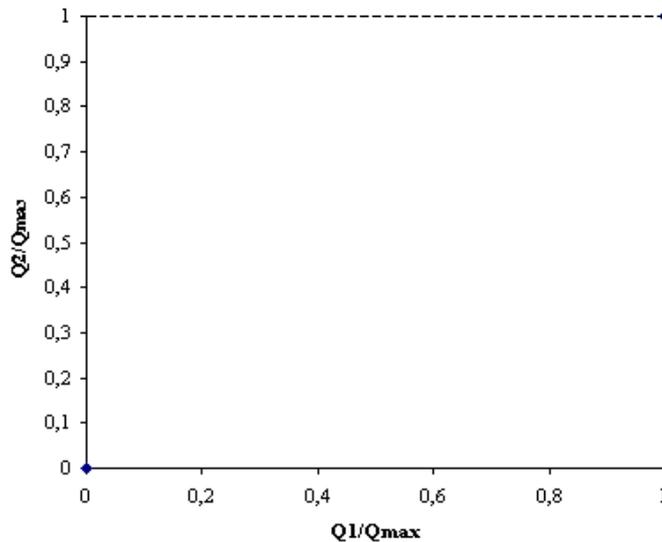


Figura 3.2 Campo di variazione delle portate richieste nei nodi 1 e 2

Tale campo di esistenza per le portate è un campo di tipo equiprobabile e di forma quadrata. Per questo motivo, come fatto per il caso precedente, vengono analizzati i punti estremi del quadrato di esistenza delle portate e successivamente vengono determinati i carichi ad essi associati. Dopo tale iniziale studio, vengono calcolate anche le equazioni dei carichi corrispondenti al contorno del campo di esistenza delle portate, cioè le equazioni delle curve limiti dei carichi che hanno come corrispondente i segmenti orizzontali e verticali che racchiudono il quadrato limite delle portate erogate. Di seguito, quindi, vengono riportati gli studi fatti considerando i punti estremi, cioè i punti nel piano $(Q_1/Q_{1max}; Q_2/Q_{2max})$ che sono $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$; $(1,1)$.

Punto A(1,1)

Il primo punto considerato è il punto di massima erogazione A, cioè quel punto in cui le portate sono :

$$Q_1 = Q_2 = Q_{max} = 1$$

Date le caratteristiche delle portate erogate nei due nodi, è possibile ottenere le coordinate del punto A', corrispondente del punto A nel

piano (H_1, H_2) , semplicemente sostituendo alle portate richieste Q_1 e Q_2 i valori sopra definiti e, quindi, si ottengono i seguenti valori dei carichi :

- nel caso che $r_1 > r_2$ il valore delle portate è :

$$Q_{01} = Q_{1\max} + Q_{2\max} = 2$$

$$Q_{12} = Q_{2\max} = 1$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\min} = H_0 - r_1 [Q_{0\max}]^2 = H_0 - 4r_1 \quad (3.6)$$

$$H_{2,\min} = H_0 - r_2 [Q_{2\max}]^2 - r_1 [Q_{0\max}]^2 = H_0 - r_2 - 4r_1 \quad (3.7)$$

- nel caso in cui $r_1 < r_2$ il valore delle portate è identico in formula ma diverso come valore.

Punto B (0,0)

Il punto B, invece, è quel punto in cui le portate sono minime e pari al valore nullo :

$$Q_1 = Q_2 = Q_{\min} = 0$$

Per ottenere le coordinate del punto B' nel piano (H_1, H_2) , si sostituiscono a Q_1 e Q_2 i valori delle portate assegnate ai due nodi e si ottiene che :

- nel caso con $r_1 > r_2$ il valore delle portate è :

$$Q_{01} = 0$$

$$Q_{02} = 0$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_{1,\max} = H_0 \quad (3.8)$$

$$H_{2,\max} = H_0 \quad (3.9)$$

- nel caso in cui $r_1 < r_2$ si ottengono i medesimi risultati.

Punto C (1,0)

Il punto C è quel punto in cui le portate sono :

$$Q_1 = Q_{1,\max} = 1$$

$$Q_2 = Q_{2,\min} = 0$$

Per poter ottenere le coordinate del punto C' nel piano (H_1, H_2) bisogna sostituire alle portate erogate Q_1 e Q_2 i valori delle portate assegnate ai due nodi e si ottiene che :

- nel caso in cui $r_1 < r_2$, il valore delle portate è :

$$Q_{01} = Q_{1,\max} + Q_{2,\min} = 1$$

$$Q_{12} = Q_{2,\min} = 0$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 = H_0 - r_1 \quad (3.10)$$

$$H_2 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 - r_2 Q_{12}^2 = H_0 - r_1 \quad (3.11)$$

- nel caso $r_1 > r_2$ il valore delle portate è lo stesso ed il valore dei carichi è uguale in forma ma diverso in valore.

Punto D (0,1)

L'ultimo punto del quadrato analizzato è il punto D le cui caratteristiche sono opposte a quelle del punto C :

$$Q_1 = Q_{1,\min} = 0$$

$$Q_2 = Q_{2,\max} = 1$$

Le coordinate del punto D' nel piano (H_1, H_2) sono:

- nel caso che $r_1 < r_2$ il valore delle portate è :

$$Q_{01} = Q_{1,\min} + Q_{2,\max} = 1$$

$$Q_{02} = Q_{2,\max} = 1$$

ed il valore dei carichi nei nodi è :

$$H_1 = H_0 - r_1 [Q_{01}]^2 = H_0 - r_1 \quad (3.12)$$

$$H_2 = H_0 - r_2 [Q_{02}]^2 - r_1 [Q_{01}]^2 = H_0 - r_2 - r_1 \quad (3.13)$$

- nel caso in cui $r_1 > r_2$ il valore delle portate è lo stesso precedentemente definito ed anche il valore dei carichi è lo stesso in forma ma diverso in valore.

3.3 EQUAZIONI DELLE CURVE LIMITE DEL “CAMPO DI ESISTENZA”

Avendo definiti i punti limiti più rappresentativi del campo quadrato delle portate ammissibili, si possono studiare le equazioni dei confini “del campo di esistenza” . Queste equazioni sono quelle stesse equazioni determinate in precedenza per il calcolo dei carichi nel nodo che, però devono essere puntualizzate e delimitate da opportuni vincoli.

I vincoli da applicare alle equazioni generali (3.1), (3.2), (3.3), (3.4),(3.5) sono :

1. $Q_{1,max}$ in ogni punto e Q_2 variabile nell'intervallo $[Q_{2min};Q_{2max}]$
2. Q_1 nell'intervallo $[Q_{1max};Q_{1min}]$ e $Q_2 = Q_{2max}$
3. Q_1 nell'intervallo $[Q_{1max};Q_{1min}]$ e $Q_2 = Q_{2min}$
4. $Q_1 = Q_{1min}$ e Q_2 variabile nell' intervallo $[Q_{2max};Q_{2min}]$

E' stato stabilito, per semplicità di trattazione, di utilizzare il range di variabilità stabilito nei paragrafi precedenti; cioè si considera come portata massima il valore 1 per entrambi i nodi e come portata minima il valore 0 per entrambi i nodi.

Applicando questi vincoli alle equazioni sopra dette, si otterranno delle curve in cui i punti A, B, C, D, sopra definiti, saranno dei punti di discontinuità delle curve limite.

Le equazioni che si ottengono, dai limiti appena definiti, sono :

- **limite 1**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 [Q_{01}]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 [Q_{12}]^2 - r_1 [Q_{01}]^2 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01} = Q_{1max} + Q_2 \\ Q_{12} = Q_2 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

- **limite 2**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 [Q_{01}]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 [Q_{12}]^2 - r_1 [Q_{01}]^2 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01} = Q_1 + Q_{2\max} \\ Q_{12} = Q_{2\max} \end{array} \right.$$

- **limite 3**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 [Q_{01}]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 [Q_{12}]^2 - r_1 [Q_{01}]^2 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01} = Q_1 + Q_{2\min} \\ Q_{12} = Q_{2\min} \end{array} \right.$$

- **limite 4**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 - r_1 [Q_{01}]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 [Q_{12}]^2 - r_1 [Q_{01}]^2 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01} = Q_{1\min} + Q_2 \\ Q_{12} = Q_2 \end{array} \right.$$

Le equazioni 3.14 - 3.21 sono soluzione delle equazioni 3.1 – 3.5 nel caso in cui si considerino le condizioni di vincolo generali riportate ad inizio

paragrafo. Invece, specializzando nel caso in cui le portate massime siano poste pari a 1 e le portate minime pari a 0, si ottiene il seguente gruppo di equazioni che delimitano l'area di variabilità dei carichi :

- **limite 1**

$$\begin{cases} H_1 = H_0 - r_1 [1 + Q_2]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 [Q_2]^2 - r_1 [1 + Q_2]^2 = H_0 - r_1 - [r_1 + r_2] Q_2^2 - 2r_1 Q_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

- **limite 2**

$$\begin{cases} H_1 = H_0 - r_1 [1 + Q_1]^2 \\ H_2 = H_0 - r_2 - r_1 [1 + Q_1]^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

- **limite 3**

$$\begin{cases} H_1 = H_0 - r_1 [Q_1]^2 \\ H_2 = H_0 - r_1 [Q_1]^2 \end{cases} \quad (3.24)$$

- **limite 4**

$$\begin{cases} H_1 = H_0 - r_1 [Q_2]^2 \\ H_2 = H_0 - (r_2 + r_1) [Q_2]^2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Le quattro equazioni e i quattro punti, sopra definiti, che delimitano il “campo di esistenza” del sistema a maglia aperta con due richieste in serie, possono essere determinati oltre che per via analitica, come è stato

fatto finora, anche tramite la metodologia di simulazione di tipo Montecarlo che permette di ottenere tutto il campo di variabilità in maniera diretta e più veloce, oltre che permette di ottenere la distribuzione di probabilità condizionata delle variabili in gioco. Tale analisi tramite la metodologia Montecarlo, al variare dei parametri scabrezza dei tratti, viene riportata nelle figure 3.3 – 3.5.

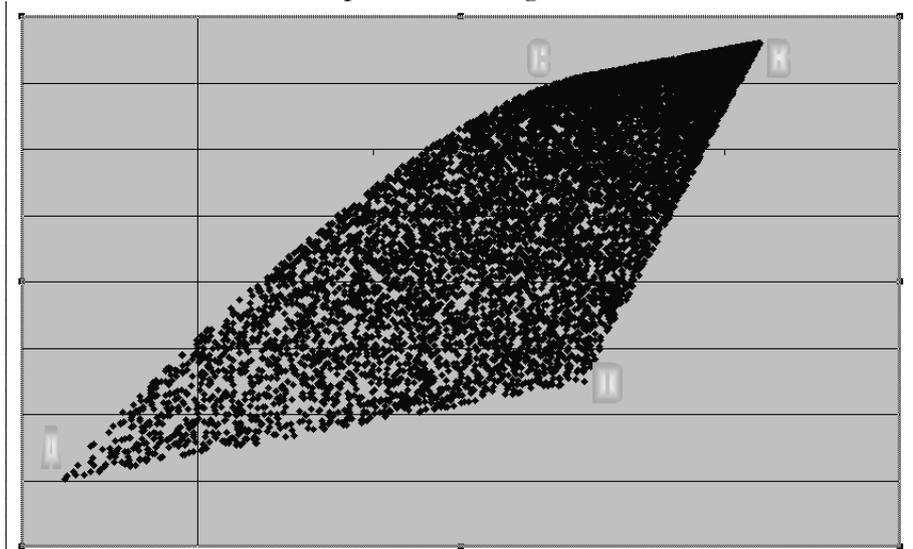


Figura 3.3 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 < r_2$

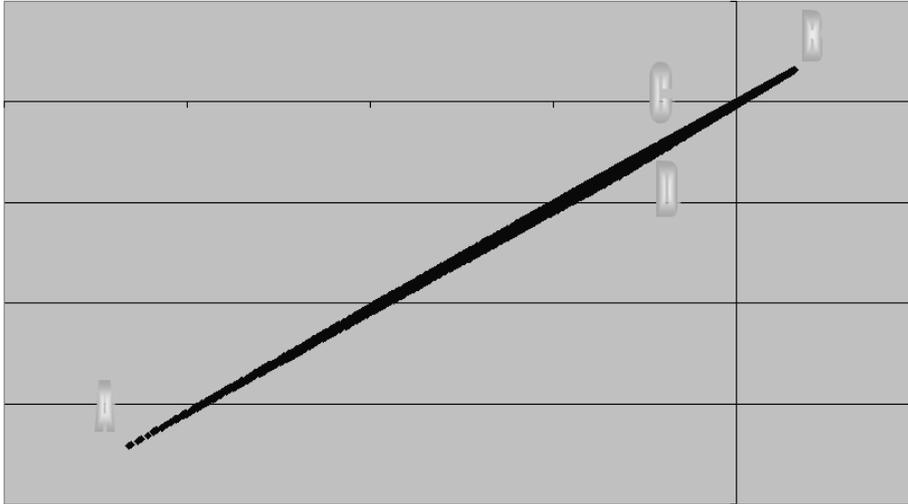


Figura 3.4 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 > r_2$

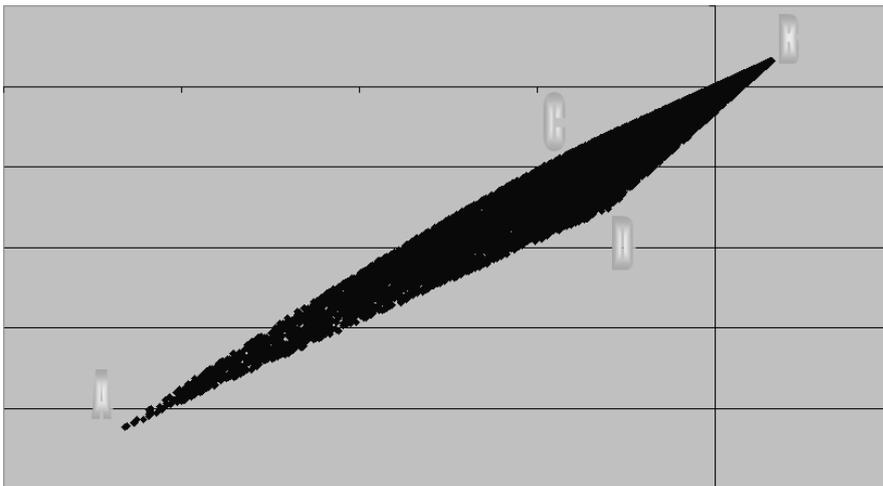


Figura 3.5 Campo di esistenza determinato con 50000 simulazioni con $r_1 = r_2$

Dai grafici ottenuti in figura 3.3, 3.4 e 3.5 si nota che la posizione di C e di D, specialmente quella di D, dipende dal rapporto fra le resistività r_1 ed r_2 . Infatti, aumentando il valore di r_2 rispetto ad r_1 , si ottiene un grafico del campo di esistenza che passa dall'essere quasi una retta, o meglio, dall'essere una striscia di valori molto ravvicinati quando $r_2 < r_1$

ad un grafico del campo ad aquilone simile a quello che si ottiene nel caso di maglia triangolare quando $r_2 > r_1$, in cui i punti C e D sono precisamente distinguibili fra di loro e i due “segmenti limiti”, che li uniscono, sono differenti fra di loro.

Tale risultato è spiegabile, analiticamente, in quanto le equazioni che regolano il sistema pongono una correlazione molto forte fra le portate richieste nei due nodi. Inoltre, proprio la tipologia di rete considerata è tale che il carico nel secondo nodo è influenzato in modo molto marcato dalla richiesta del primo nodo, in termini di perdita di carico del primo tratto $r_1 Q_1^2$. Per questo motivo, quando la resistività del primo tratto è molto più grande di quella del tratto successivo, per qualsiasi richiesta nel secondo nodo, la perdita di carico che si ottiene nel secondo tratto è praticamente trascurabile e, quindi, il carico nei due nodi è quasi lo stesso. Infatti, con tali ipotesi, si ottiene un campo che è quasi una retta nel piano H_1 - H_2 . Nel caso, invece, in cui la resistività è, di conseguenza, la perdita di carico del secondo tratto è significativa rispetto a quella del primo tratto, allora si ottiene un “piano di esistenza” di forma allungata e non equiprobabile, in netta opposizione al campo di esistenza delle portate che, come detto in precedenza, è quadrato ed equiprobabile. Questo risultato è dovuto al fatto che le curve delimitanti il campo divergono più rapidamente rispetto al caso precedente e la divergenza è ottenuta alla diversa imposizione delle condizioni ai nodi. Per comprendere questa condizione, si può considerare, per esempio, la stessa portata totale richiesta e studiare cosa accade nei casi in cui la portata richiesta nel nodo 2 è maggiore di quella del nodo 1 e viceversa. Per il primo caso, cioè quando $Q_2 > Q_1$, si ottiene una curva in cui H_1 è sempre maggiore di H_2 e la massima divergenza si ottiene nel punto D, in cui la richiesta del nodo 1 è nulla e quella del nodo 2 è massima. Nel caso opposto, cioè quando la portata maggiore è quella del nodo 1, si ottiene sempre che $H_1 > H_2$ ma lo scarto tra i due carichi nei nodi è molto meno ampio rispetto al precedente e tende a far coincidere i due valori. In questo caso, il punto C, è ottenuto considerando la richiesta del nodo 2 nulla, mentre il punto B si ottiene quando entrambe le richieste sono nulle.

3.4 ANALISI PROBABILISTICA DEL CAMPO DI VARIABILITÀ H_1-H_2

Definito il campo di variabilità dei carichi, per assegnati valori delle portate Q_1 e Q_2 , bisogna studiare le funzioni di distribuzione marginali dei carichi stessi, nonché la loro funzione di distribuzione cumulata della congiunta e della condizionata.

Partendo dal fatto che si ipotizzano note a priori le distribuzioni di probabilità marginali delle portate Q_1 e Q_2 , che, per semplicità, sono state assunte pari a quelle di una distribuzione uniforme. (Figura 2.2 e 2.3).

La determinazione delle funzioni marginali cumulate dei carichi H_1 e H_2 , conoscendo soltanto le marginali di Q_1 e Q_2 , è possibile ottenerle considerando il campo di variabilità sopra definito. Infatti, avendo $H_{1\min}$, $H_{2\min}$, $H_{1\max}$, $H_{2\max}$ e le funzioni che legano le portate ai carichi (eq. dalla 3.14- 3.25), si ottengono le seguenti distribuzioni cumulate, avendo imposto $r_1 > r_2$:

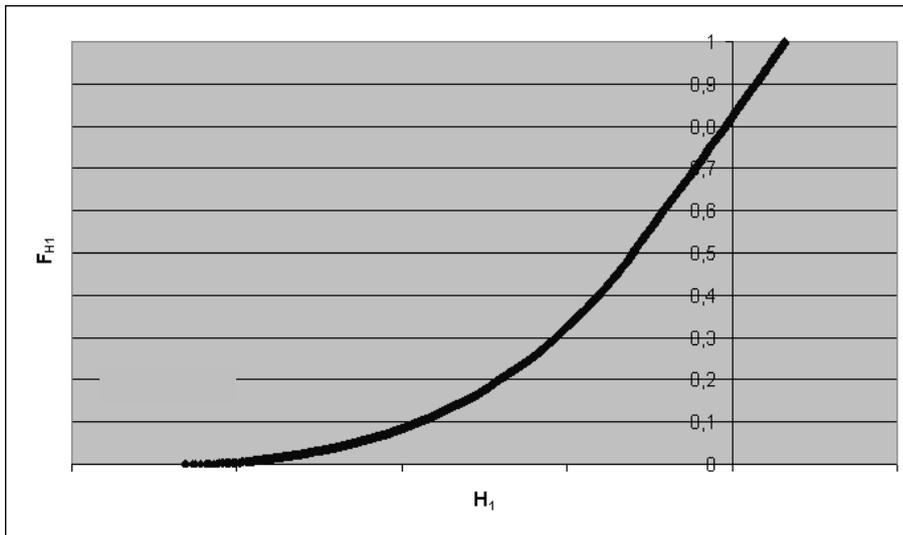


Figura 3.6 Distribuzione cumulata del carico H_1 (marginale)

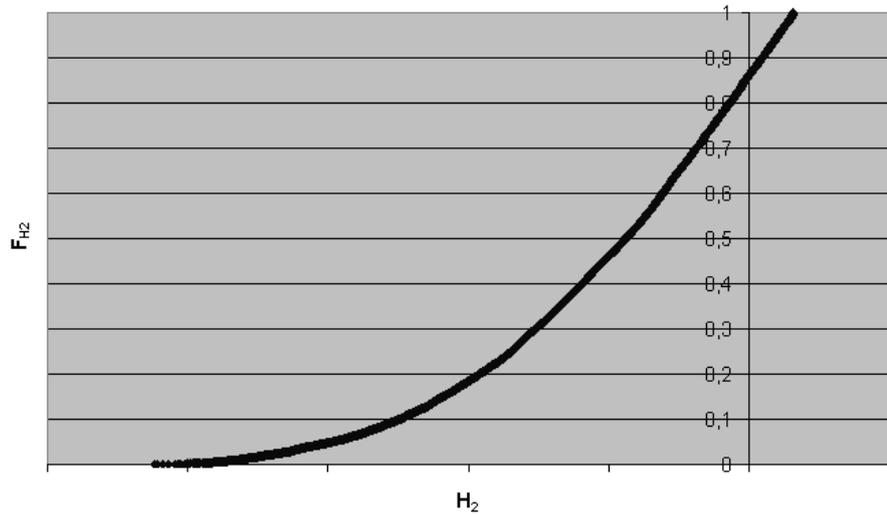


Figura 3.7 Distribuzione cumulata del carico H_2 (marginale)

Per studiare, se esiste, la correlazione tra i carichi H_1 e H_2 bisogna calcolare, tramite l'ausilio di un software come MatLab, la distribuzione cumulata della congiunta e analizzare se la sua distribuzione è simile a quella delle marginali. Nel caso in cui le due distribuzioni sono simili, allora, si ottiene che fra i carichi non vi è alcuna correlazione, nel caso contrario, le distribuzioni differiscono fra di loro e, quindi, si ottiene correlazione tra le due distribuzioni.

Per poter fare questa analisi, bisogna partire dall'equazione che regola la funzione di distribuzione cumulata congiunta:

$$f_{x|y}(x, y) = \frac{f_{x,y}(x, y)}{f_y(y)} \tag{3.26}$$

con

$f_{x,y}(x,y)$ = funzione di densità di distribuzione congiunta delle due variabili H_1 e H_2

$f_y(y)$ = funzione di densità di distribuzione marginale della variabile H_2

$f_{x|y}(x,y)$ = funzione di densità della H_1 condizionata da H_2

Per passare dalla densità di distribuzione alla cumulata basta integrare su entrambi i campi delle variabili, cioè :

$$F_{x,y}(x, y) = \iint f_{x,y}(x, y) dx dy \quad (3.27)$$

I risultati che si ottengono vengono proposti in via grafica per una migliore comprensione delle distribuzioni.

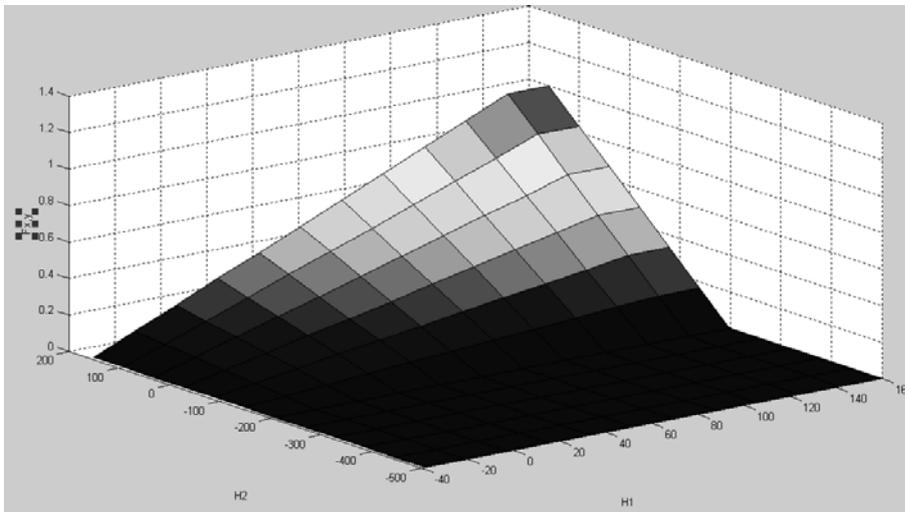


Figura 3.8 Funzione di distribuzione cumulata della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m)

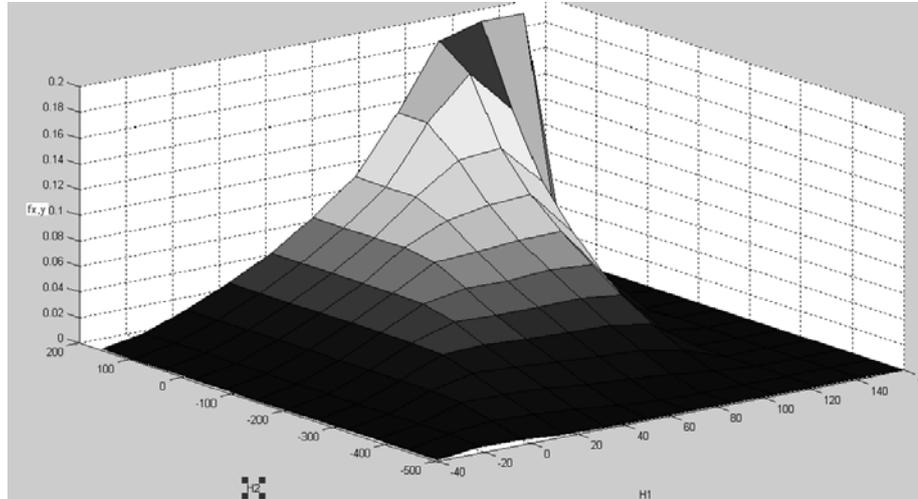


Figura 3.9 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m)

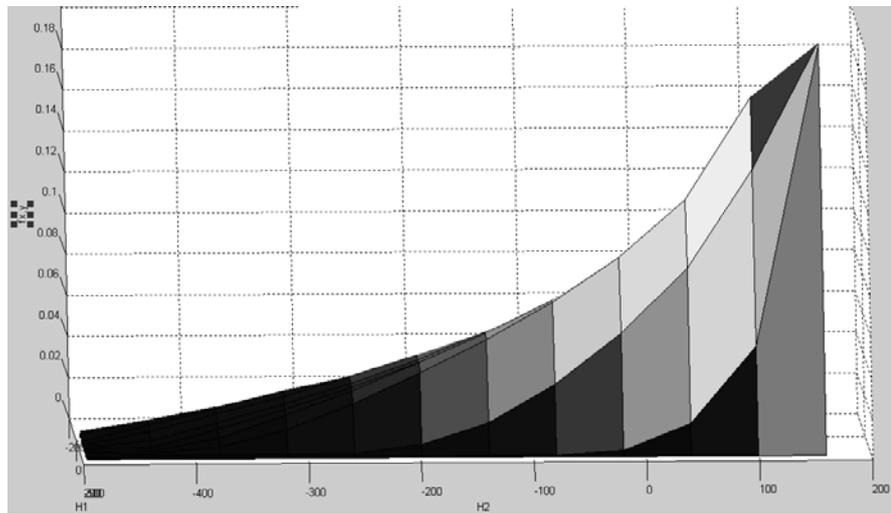


Figura 3.10 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m) nel piano H_2 - $f_{x,y}$

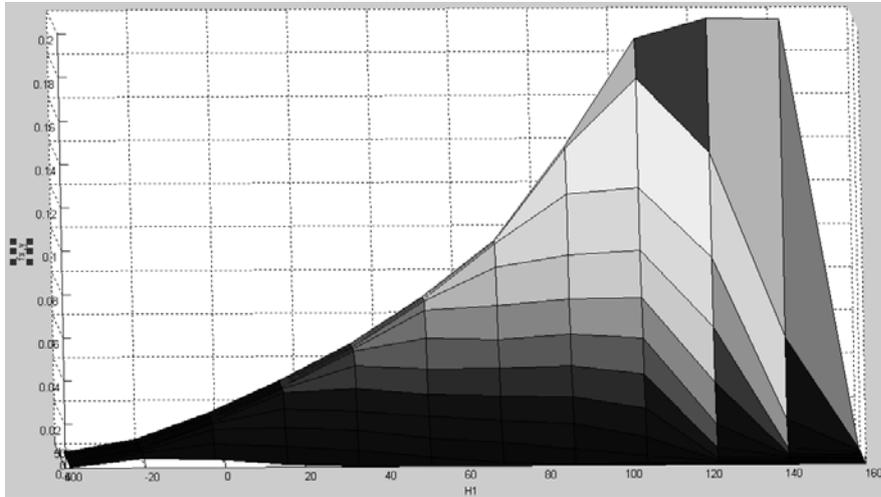


Figura 3.11 Funzione densità di distribuzione della congiunta delle variabili H_1 ed H_2 (considerando un campo in cui i carichi variano dal loro valore minimo a un valore massimo stabilito e pari a 160 m) nel piano H_1 - $f_{x,y}$

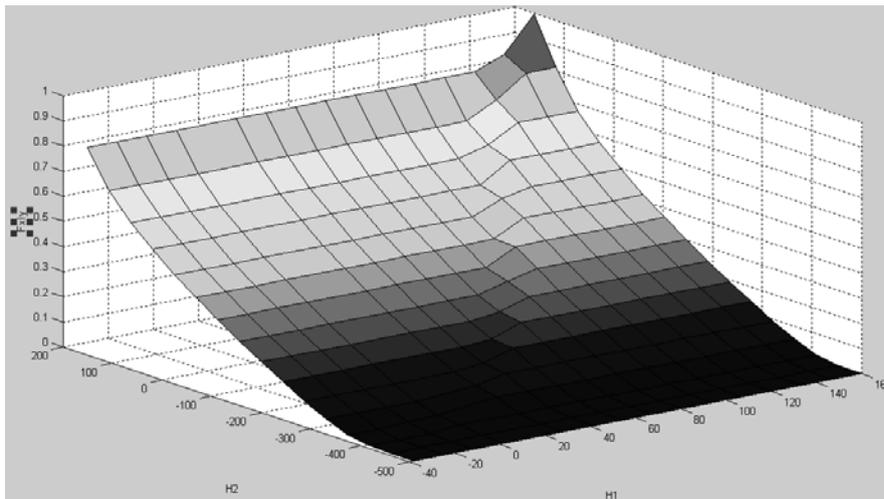


Figura 3.12 Distribuzione cumulata della condizionata di H_1 rispetto ad H_2 (avendo stabilito che il massimo carico in entrambi i nodi fosse di 160 m)

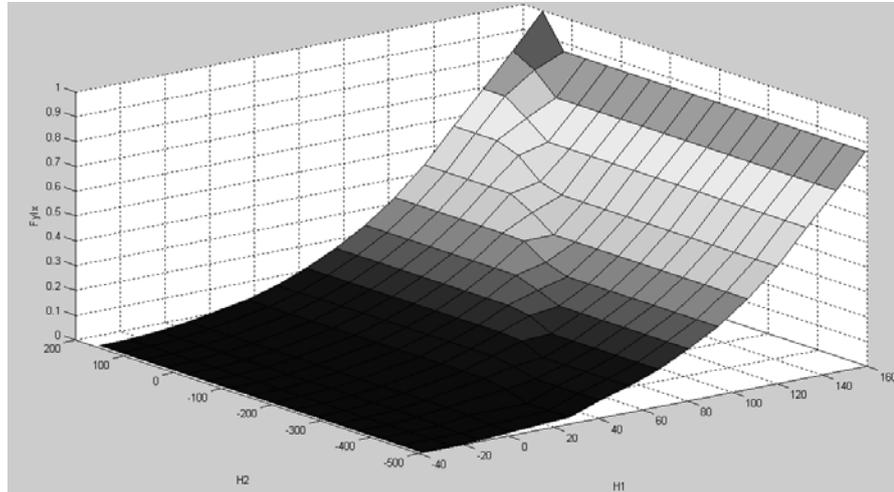


Figura 3.13 Distribuzione cumulata della condizionata di H_2 rispetto ad H_1 (avendo stabilito che il massimo carico in entrambi i nodi fosse di 160 m)

Dall'analisi delle figure (3.8 - 3.13) si nota, in modo palese, che le distribuzioni marginali delle variabili H_1 ed H_2 sono diverse rispetto alla distribuzione congiunta delle due variabili. Tale risultato comporta che le due variabili aleatorie (H_1 ed H_2) sono correlate fra di loro, per cui bisognerà andare a definire che tipo di correlazione si ottiene.

4 IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA

4.1 PREMESSA

Per i casi esaminati nei capitoli precedenti, sono stati condotti anche studi di tipo analitico che permettano di affermare in maniera più puntuale e precisa le conclusioni ottenute tramite la metodologia di tipo Montecarlo e, quindi, di ottenere tutte le distribuzioni di probabilità condizionate necessarie per definire in maniera completa i problemi analizzati.

La metodologia che si è utilizzata, per tutti i casi semplici analizzati, è:

- definizione delle caratteristiche delle portate richieste ai nodi, viste come variabili aleatorie indipendenti fra di loro; negli esempi grafici si è fatto sempre riferimento ad una distribuzione uniforme definita in $[0, Q_{\max}]$;
- modellazione deterministica delle caratteristiche della rete, tramite scrittura esplicita delle equazioni di continuità e del moto in forma diretta;
- derivazione delle distribuzioni condizionate delle variabili aleatorie $[H]$ (carichi nei nodi) di tutti i nodi rispetto a tutti i nodi, considerate condizionate uno ad uno;
- individuazione, tramite l'analisi delle distribuzioni condizionate, del nodo o dei nodi che minimizzano il grado di incertezza sui valori più probabili delle variabili aleatorie $[H]$ negli altri nodi della rete.

Nel seguito si riporta un tentativo di dare un'impostazione analitica generale al problema e, quindi, se ne derivano le conseguenze per gli stessi casi semplici esemplificati in precedenza.

4.2 IMPOSTAZIONE ANALITICA GENERALE

Una maniera generale per rappresentare le relazioni tra caratteristiche topologiche ed idrauliche di una rete idrica, sia che essa sia a maglia chiusa o aperta, fa riferimento ad una forma compatta delle equazioni del moto e di continuità del tipo [Todini, 1999]:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{p0}H_0 \\ Q_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

In cui :

$Q_{ij}^T = [Q_{12}, Q_{23}, \dots, Q_{np}]$	portate non note circolanti nei tratti
$H^T = [H_1, H_2, \dots, H_{n_n}]$	carichi nei nodi non monitorati
$H_0^T = [H_{01}, H_{02}, \dots, H_{0n_0}]$	carichi determinati nei nodi monitorati
$Q_i^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{nn}]$	portate erogate e monitorate nei nodi
$A_{pp}(i,j) = b_{ij} Q_{ij} ^{n_{ij}-1}$	coeff. di resistenza nel tratto (i,j)
$A_{pn} = A_{np}^T = (-1, 0, +1)$	se la portata dal nodo n al tratto p = (entrante, zero, uscente)

Tale formulazione, in un approccio di tipo DDA, può essere anche riscritta in forma più compatta come riportata nella (4.2).

$$Q_{ij} = \Psi \left[A_{pp}^{-1} (-A_{p0}H_0 - A_{pn}H) \right] \quad (4.2)$$

in cui Ψ è una funzione di tipo non lineare dipendente dai valori assunti dalle portate richieste ai nodi e tale che, se si assume un legame tra portate circolanti $[Q_{ij}]$ e differenze di carico $[H_i - H_j]$ di tipo strettamente monotono, come fatto per definire la matrice A_{pp} , permette di scrivere la funzione in forma inversa :

$$H = -A_{pn}^{-1} \left[A_{pp} \Psi^{-1}(Q_{ij}) + A_{p0} H_0 \right] \quad (4.3)$$

Le (4.2) - (4.3) vanno accoppiate con le equazioni di continuità:

$$Q_{i,j} = \left[A_{pn}^T \right]^{-1} Q_i \quad (4.4)$$

Se sono note tutti i valori delle portate erogate ai nodi, il sistema scritto in tal modo risulta determinato. Vedremo nel seguito, quando affronteremo i problemi di incertezze legate alla calibrazione della rete, come generalizzare questa nozione considerando le condizioni che rendono un sistema strutturalmente determinato (ovvero osservabile) o strutturalmente indeterminato (ovvero non osservabile) anche in caso di osservazioni multiple.

Per il momento, restando nel campo del monitoraggio, è chiaro come, nelle ipotesi precedenti, sia possibile ottenere tutte le relazioni che legano tra loro le variabili $[H]$ e $[Q_{ij}]$, una volta note tutte le portate richieste ai nodi $[Q_i]$. Se $[Q_i]$ è un insieme di variabili casuali legate fra di loro attraverso una distribuzione multivariata, allora anche $[H, Q_{ij}]$ è una variabile aleatoria con distribuzione multivariata le cui caratteristiche statistiche dipendono unicamente dalle caratteristiche delle $[Q_i]$.

Per determinare la forma del codominio di Ψ bisogna partire dal dominio di tutte le grandezze idrodinamiche della rete. Nel seguito si mostra come ottenere analiticamente tale codominio nei casi semplici e, per un caso più complesso, come ciò sia possibile almeno numericamente. Richiamando la forma 'ad aquilone' che tale codominio assume in un piano in cui si fanno variare due carichi ai nodi qualsiasi, si è formulato l'acronimo CHYTE (Codomain of Hydraulics and Topological Elements).

4.3 CASO DI DOPPIA RICHIESTA IN SERIE

Il sistema (figura 3.1), come visto nel capitolo precedente, è caratterizzato da due nodi di richiesta di portata, Q_1 e Q_2 , tra loro

indipendenti; la struttura idraulica del sistema, invece, introduce delle relazioni tra i carichi ai nodi H_1 e H_2 , le portate circolanti nei tratti, Q_{01} e Q_{12} e le portate erogate, sottoforma delle ben note equazioni di continuità (3.1) e (3.2) e del moto (3.3)-(3.5).

Nell'ipotesi che Q_1 e Q_2 possano assumere solo valori compresi nell'intervallo tra 0 ed un valore massimo, rispettivamente Q_{1max} e Q_{2max} , si può effettuare lo studio del sistema con riferimento ai valori adimensionalizzati rispetto al massimo, sicché il campo di variabilità delle portate richieste ai nodi è rappresentato da un quadrato i cui vertici hanno coordinate $\{Q\} = [(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)]$. Qualunque coppia di valori $(Q_1, Q_2) \in \{Q\}$ è possibile e $\{Q\}$ rappresenta il dominio di definizione della funzione Ψ definita al paragrafo precedente.

Per determinare la forma del codominio di Ψ bisogna partire dal dominio di tutte le grandezze idrodinamiche della rete: infatti, se è vero che, separatamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01} \in [0, Q_{1max} + Q_{2max}] \\ Q_{12} \in [0, Q_{2max}] \\ H_1 \in [H_0 - r_1 (Q_{1max} + Q_{2max})^2, H_0] \\ H_2 \in [H_0 - \Delta_{max}, H_0] \end{array} \right. \quad (4.5)$$

con

$$\Delta_{max} = r_1 (Q_{1max} + Q_{2max})^2 + r_2 Q_{2max}^2$$

e che, quindi, tali estremi identificano un campo rettangolare nel piano (H_1, H_2) , in realtà, il codominio di Ψ ha una forma del tipo mostrato nella figura 4.1, la cui frontiera è ottenibile dallo sviluppo delle (4.1) - (4.5) considerando, per $\{i, j = 1, 2\}$:

fissato $Q_i = 0$ e Q_j variabile nell'intervallo $[0; Q_{jmax}]$

fissato $Q_i = Q_{i,max}$ e Q_j variabile nell'intervallo $[0; Q_{jmax}]$

In particolare, la fig. 5.1 è ottenuta adimensionalizzando le perdite di carico nei tratti rispetto alla massima perdita di carico possibile Δ_{max} .

In questa maniera, la Ψ può essere anche vista come una funzione che deforma il campo $\{Q\}$ nel campo $\{Q'\}$, con una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti appartenenti ai due campi.

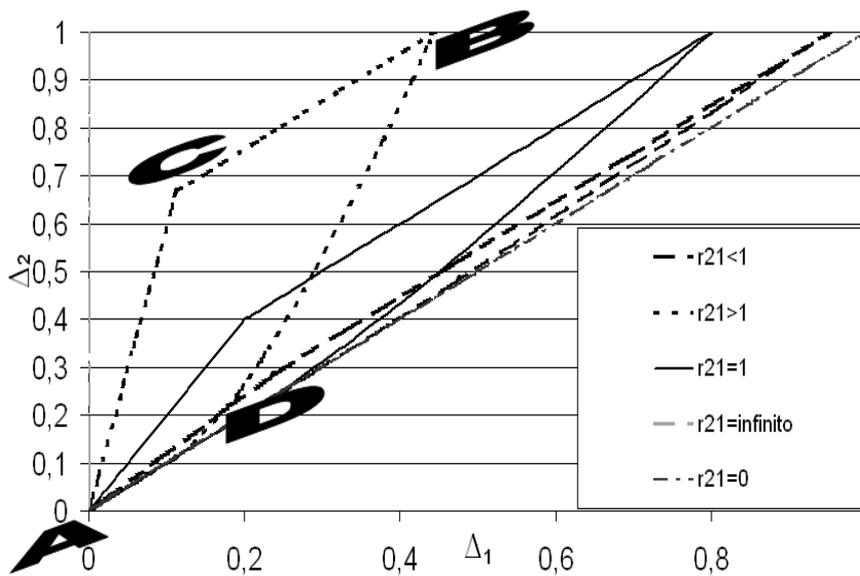


Figura 4.1 Campo di variabilità delle portate richieste e dei relativi carichi ai nodi

La maniera particolare con cui avviene tale deformazione può essere esaminata a partire dallo studio della posizione dei vertici di $\{Q'\}$: le posizioni relative dei vertici $A = (H_0; H_0)$ e $B = (H_0 - r_1 (Q_{1max} + Q_{2max})^2; H_0 - \Delta_{max})$, una volta adimensionalizzate rispetto alle massime perdite di carico, non cambiano, mentre le coordinate dei punti C, a cui corrisponde in $\{Q\}$ il punto $(Q_{1max}; 0)$ e di D, a cui corrisponde in $\{Q\}$ il punto $(0; Q_{2max})$ dipendono, anche in forma adimensionale, dal rapporto $\rho_{21} = r_2/r_1$. In effetti, con riferimento alla fig. 4.1 si nota come si passi da un campo che è quasi una linea, cioè una striscia di valori molto ravvicinati, quando $\rho_{21} \ll 1$ ad un grafico dalla caratteristica forma di *aquilone* nel caso $\rho_{21} > 1$. Il significato di tali grafici è chiaro: la struttura idraulica del sistema fa sì che, quando la resistenza del primo tratto è molto più grande di quella nel secondo, per qualsiasi valore di Q_2 ,

potendo praticamente trascurare le perdite nel secondo tratto, H_1 non differisce significativamente da H_2 e, quindi, si ottiene un campo $\{Q\}$ che degenera in una retta a 45° . Nel caso, invece, in cui la resistenza del secondo tratto è rilevante rispetto a quella del primo tratto, le curve delimitanti il campo $\{Q\}$ divergono: infatti, se si considerano due casi con lo stesso valore di $Q_1 + Q_2$ ma in cui, una volta è $Q_2 > Q_1$ e la seconda volta è $Q_1 > Q_2$, si ottengono, nel primo caso, valori di H_2 inferiori ad H_1 di una maggiore quantità che nel secondo caso. Questo spiega anche perché la massima divergenza si ottiene nel punto D, corrispondente al caso di richiesta nulla nel nodo 1 e richiesta massima nel nodo 2. Infine, si noti come, in ogni caso, applicando le (3.1) - (3.5), se si considera noto un valore di H_1 (o di H_2), ad es., attraverso l'effettuazione di una misura al nodo, risulta ridotto il campo di possibilità di esistenza dei valori di H_2 (o di H_1), che non è più dato dalle (4.5) ma è più ristretto. Per questo motivo, da ora in poi, ci si riferirà ai campi del tipo $\{Q\}$ come *campi di esistenza* delle caratteristiche del sistema.

Questa semplice analisi mostra che le equazioni che regolano il sistema, e che ne costituiscono la struttura idraulica, già correlano, in qualche modo, le grandezze caratteristiche del sistema perché permettono di ricavare informazioni sulle condizioni dei parametri in un nodo o in un tratto, una volta misurati altri parametri nell'altro nodo o tratto. In realtà, tutto questo è stato ottenuto senza considerare che ad ogni coppia di valori del campo $\{Q\}$ occorre associare una probabilità di occorrenza, per cui, i corrispondenti punti nel campo $\{Q\}$ non sono tutti equiprobabili. Per visualizzare questo concetto e metterne in evidenza la significatività ai fini del problema del monitoraggio, come in fig. 3.3, a titolo di esempio, sono riportati i punti di $\{Q\}$ corrispondenti alla simulazione del sistema (3.1) - (3.6), in cui Q_1 e Q_2 sono stati ottenuti con una tecnica di tipo Montecarlo a partire da distribuzioni indipendenti di probabilità uniformi: è evidente come la densità di punti simulati non sia la stessa per le diverse porzioni di area di $\{Q\}$ e, quindi, la probabilità congiunta, associata a tali aree, sia differente. In particolare, quello che è utile, in un problema di monitoraggio, è la conoscenza della distribuzione di probabilità condizionata di H_2 (o di H_1) su H_1 (o su H_2): nel caso semplice qui analizzato, tali distribuzioni possono essere ottenute analiticamente, come si vedrà nel paragrafo successivo, ed in fig. 4.1 viene riportato sinteticamente quanto appena esposto.

4.3.1 Analisi della distribuzione di probabilità condizionata dei carichi ai nodi

L'analisi della distribuzione di probabilità condizionata dei carichi nei nodi è stata studiata considerando le equazioni che legano i carichi tra di loro e alle altre caratteristiche idrauliche della rete (equazioni 3.1-3.5). Poiché le variabili aleatorie incognite sono i due carichi nei due nodi di richiesta, dando, per ipotesi, note a priori le distribuzioni di probabilità delle variabili portate erogate (Q_i), è facile notare come il caso da esaminare è quello di due funzioni di due variabili aleatorie, la cui trattazione teorica viene rimandata al testo di riferimento "Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici" al cap. 7 (Papoulis 1973). Grazie alle proprietà delle distribuzioni di funzioni di variabili aleatorie, è possibile mostrare come, ancora, il parametro r_{21} influenzi la distribuzione condizionata, ed, in particolare, le sue misure di dispersione, quali la varianza condizionata. Applicando, quindi, la metodologia di due funzioni di due variabili aleatorie, si ottiene, in termini analitici, il seguente risultato :

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta H_1} = & \int \frac{2r_1^2(Q_1+Q_2)^3}{2r_2Q_2} f_{Q_2} dQ_1 + \int \frac{2r_1^2(Q_1+Q_2)^3}{2r_2Q_2} f_{Q_2} dQ_2 + \\ & \int r_1(Q_1+Q_2)^2 f_{Q_2} dQ_2 + \int r_1Q_2(Q_1+Q_2) f_{Q_2} dQ_1 + \int r_2Q_2^2 f_{Q_2} dQ_2 + \\ & \int \frac{r_1^2}{r_2}(Q_1+Q_2)^3 f_{Q_1} \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_1 + \int f_{Q_1} r_1(Q_1+Q_2)^3 \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_1+Q_2} dQ_2 \right) dQ_1 + \\ & \int r_1 f_{Q_2} Q_2(Q_1+Q_2) dQ_2 + \int f_{Q_1} r_1 Q_2(Q_1+Q_2)^2 \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_2 + \\ & \int f_{Q_1} r_1(Q_1+Q_2)^3 \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_1+Q_2} dQ_2 \right) dQ_2 + \\ & \int \frac{r_1^2}{r_2}(Q_1+Q_2)^3 f_{Q_1} \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_2 + \int f_{Q_1} r_1 Q_2^2(Q_1+Q_2) \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_1 + \end{aligned}$$

$$\int f_{Q_1} r_1 Q_2^2 (Q_1 + Q_2) \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_2 + \int f_{Q_1} r_1 Q_2^3 \left(\int \frac{f_{Q_2}}{Q_2} dQ_2 \right) dQ_2$$

Questo valore medio della distribuzione marginale della perdita di carico del primo tronco è stata ottenuta considerando trascurabili i termini di grado superiore al secondo. Dalla media della distribuzione marginale della perdita di carico è possibile determinare i momenti delle distribuzioni condizionate :

— nel caso in cui si monitora il carico nel nodo 2, essendo noto il valore di ΔH_2 , risulta :

$$\frac{\mu_{\Delta H_1|\Delta H_2}}{\Delta_{\max}} = \frac{\Delta H_2}{\Delta_{\max}} - \varepsilon_{21} (1 + Cv_{Q_2}^2) \quad (4.6)$$

$$\frac{\sigma_{\Delta H_1|\Delta H_2}^2}{\Delta_{\max}^2} = \varepsilon_{21} Cv_{Q_2}^2 \left[K_{Q_2} Cv_{Q_2}^2 + 4\gamma_{Q_2} Cv_{Q_2} + 4 - \frac{Cv_{Q_2}^2}{\mu_{Q_2}^3} \right] \quad (4.7)$$

in cui :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ij} \left(\frac{Q_{j\max}}{\mu_{Q_j}} \right)^2 + \left(\frac{Q_{i\max} + Q_{j\max}}{\mu_{Q_j}} \right)^2} \quad (4.8)$$

$\mu_{\Delta H_1|\Delta H_2}$ = media della distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 dato ΔH_2

$\sigma_{\Delta H_1|\Delta H_2}^2$ = varianza della distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 dato ΔH_2

Cv = coefficiente di variazione della variabile aleatoria Q_2 portata erogata al nodo 2

γ = coefficiente di asimmetria della variabile aleatoria Q_2 portata erogata al nodo 2

K = coefficiente di curtosi della variabile aleatoria Q_2 portata erogata al nodo 2

- nel caso in cui si fa il monitoraggio della portata nel nodo 2, per valori non troppo piccoli di Q_2 , risulta:

$$\frac{\mu_{\Delta H_1|Q_2}}{\Delta_{\max}} = \frac{\varepsilon_{21}}{\rho_{21}} \left[\left(\frac{\mu_{Q_1}}{\mu_{Q_2}} \right)^2 (1 + Cv_{Q_1}^2) + 2 \left(\frac{\mu_{Q_1}}{\mu_{Q_2}} \right) \frac{Q_2}{\mu_{Q_2}} + \left(\frac{Q_2}{\mu_{Q_2}} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{\sigma_{\Delta H_1|Q_2}^2}{\Delta_{\max}^2} = \left(\frac{\varepsilon_{21}}{\rho_{21}} \right)^2 \left(\frac{\mu_{Q_1}}{\mu_{Q_2}} \right)^4 * \left\{ Cv_{Q_1}^2 \left[K_{Q_1} Cv_{Q_1}^2 + 4\gamma_{Q_1} Cv_{Q_1} + 4 - \frac{Cv_{Q_1}^2}{\mu_{Q_1}^3} \right] + 4Cv_{Q_1}^2 \left[\left(\frac{Q_2}{\mu_{Q_1}} \right)^2 + (\gamma_{Q_1} Cv_{Q_1} + 2) \frac{Q_2}{\mu_{Q_1}} \right] \right\}$$

In cui :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho_{ij} \left(\frac{Q_{j\max}}{\mu_{Q_j}} \right)^2 + \left(\frac{Q_{i\max} + Q_{j\max}}{\mu_{Q_j}} \right)^2}$$

$\mu_{\Delta H_1|Q_2}$ = media della distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 dato Q_2

$\sigma_{\Delta H_1|Q_2}^2$ = varianza della distribuzione di probabilità condizionata di ΔH_1 dato Q_2

C_v = coefficiente di variazione della variabile aleatoria Q_1 portata erogata al nodo 1

γ = coefficiente di asimmetria della variabile aleatoria Q_1 portata erogata al nodo 1

K = coefficiente di curtosi della variabile aleatoria Q_1 portata erogata al nodo 1

Dal confronto delle precedenti espressioni, appare evidente che, a parità di valori dei parametri r_i e considerando la stessa distribuzione delle portate $[Q_i]$, il valore assunto dalla varianza nella (4.9) risulta sempre maggiore di quello che si ottiene nella (4.7). Per questo motivo, in questo caso semplice, è **analiticamente dimostrato che il parametro che è più utile da monitorare è la perdita di carico nel nodo**. Tale risultato ha una duplice importanza: la prima è dovuta al fatto che permette di rendere più efficienti le stime statistiche delle altre grandezze, attraverso il contenimento della varianza dello stimatore ottenuto attraverso la media condizionata; la seconda è che la scelta di monitorare i carichi nei nodi, invece che la portata, dà un risparmio economico notevole in quanto è più conveniente e più facile monitorare i carichi piuttosto che le portate.

4.4 CASO CON TRIPLA RICHIESTA IN SERIE

Il successivo caso esaminato è quello di figura 4.2 in cui si ha una maglia aperta con tre richieste in serie, di cui si vuole conoscere la distribuzione di probabilità condizionata, condizionata una a una, della variabile perdita di carico. Per tale schema, è altresì ricercata la possibilità di individuare quale tra i tre nodi è quello che è più “conveniente” da monitorare, cioè quello in cui la varianza è la minima possibile.

Il sistema schematizzato è quello riportato in figura 4.2.

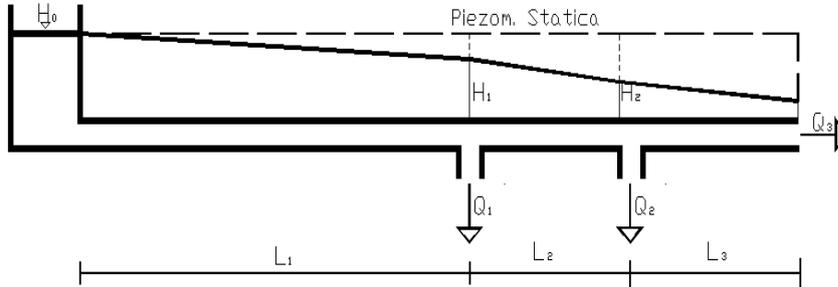


Figura 4.2 Sistema a maglia aperta con tre richieste in serie

Le variabili stocastiche indipendenti del sistema sono le portate $[Q_i]$ richieste ai nodi di domanda, mentre le variabili stocastiche derivate sono i relativi carichi H_i ($i = 1, 2, 3$) e le portate circolanti nei tratti tra i nodi $Q_{i,i+1}$ ($i = 0, 1, 2$). Come per il caso precedente, essendo questo una sua estensione, si riportano innanzitutto le equazioni idrauliche del sistema e poi, tramite la metodologia esposta nel primo paragrafo, si andranno ad analizzare le distribuzioni derivate condizionate.

Le equazioni che reggono il sistema sono :

$$Q_{01} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (4.10)$$

$$Q_{12} = Q_2 + Q_3 \quad (4.11)$$

$$Q_{23} = Q_3 \quad (4.12)$$

$$H_1 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 \quad (4.13)$$

$$H_2 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 - r_2 Q_{12}^2 \quad (4.14)$$

$$H_3 = H_0 - r_1 Q_{01}^2 - r_2 Q_{12}^2 - r_3 Q_{23}^2 \quad (4.15)$$

Quindi, avendo già acquisito che, ai fini dell'efficienza delle stime, è da preferirsi il monitoraggio dei carichi ai nodi, con la stessa procedura vista nel paragrafo precedente, si può determinare quale nodo vada monitorato per ottenere una stima efficiente delle perdite di carico negli altri due nodi non monitorati, attraverso la derivazione della varianza della media condizionata delle stime.

4.4.1 Analisi della distribuzione di probabilità condizionata dei carichi ai nodi

Applicando le formule della media e varianza condizionata di una funzione di due variabili aleatorie si ottengono la media e la varianza condizionata per ogni nodo del sistema. Per fare ciò, si è partiti conoscendo la perdita di carico ΔH_i nel nodo i -esimo e si è derivata la media e la varianza di ΔH_j ($j \neq i$). Poiché nel sistema a tre richieste in serie il nodo 1 e il nodo 3 sono speculari, si è preferito evitare di riportare i risultati ottenuti per il nodo 3 in quanto sono in forma del tutto simili a quelli del nodo 1, quando è nota la perdita di carico ΔH_1 . I risultati che si ottengono sono:

- nel caso in cui è nota la perdita di carico nel nodo 1

Nel nodo 2:

$$\frac{\mu_{\Delta H_2|\Delta H_1}}{r_2(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} = \left[\frac{\Delta H_1}{r_2(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} + 1 + \frac{\sigma_{Q_2}^2 + \sigma_{Q_3}^2}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} \right] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\Delta H_2|\Delta H_1}^2}{r_2^2(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^4} &= (K_{Q_2} + K_{Q_3}) \left[\frac{(\sigma_{Q_2} + \sigma_{Q_3})}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})} \right]^4 + 4(\gamma_{Q_2} + \gamma_{Q_3}) \left[\frac{(\sigma_{Q_2} + \sigma_{Q_3})}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} \right]^{3/2} + \\ &4 \frac{\sigma_{Q_2}^2 + \sigma_{Q_3}^2}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} - \frac{(\sigma_{Q_2} + \sigma_{Q_3})^4}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^7} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nel nodo 3:

$$\frac{\mu_{\Delta H_3|\Delta H_1}}{r_3 \mu_{Q_3}^2} = \frac{\mu_{\Delta H_2|\Delta H_1}}{r_3 \mu_{Q_3}^2} + (1 + Cv_{Q_3}^2) \quad (4.18)$$

$$\frac{\sigma_{\Delta H_3|\Delta H_1}^2}{r_3^2 \mu_{Q_3}^4} = \frac{\sigma_{\Delta H_2|\Delta H_1}^2}{r_3^2 \mu_{Q_3}^4} + \left[K_{Q_3} Cv_{Q_3}^4 + 4\gamma_{Q_3} Cv_{Q_3}^3 + 4Cv_{Q_3}^2 - \frac{Cv_{Q_3}^4}{\mu_{Q_3}^3} \right] \quad (4.19)$$

- nel caso in cui è nota la perdita di carico nel nodo 2

Nel nodo 1:

$$\frac{\mu_{\Delta H_1|\Delta H_2}}{r_2 (\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} = \left[\frac{\Delta H_2}{r_2 (\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} - \frac{(\sigma_{Q_2}^2 + \sigma_{Q_3}^2)}{(\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^2} - 1 \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{\sigma_{\Delta H_2|\Delta H_1}^2}{r_2^2 (\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^4} = \frac{\sigma_{\Delta H_1|\Delta H_2}^2}{r_2^2 (\mu_{Q_2} + \mu_{Q_3})^4} \quad (4.21)$$

Nel nodo 3:

$$\frac{\mu_{\Delta H_3|\Delta H_2}}{r_3 \mu_{Q_3}^2} = \frac{\Delta H_2}{r_3 \mu_{Q_3}^2} + (1 + Cv_{Q_3}^2) \quad (4.22)$$

$$\frac{\sigma_{\Delta H_3|\Delta H_2}^2}{r_3^2 \mu_{Q_3}^4} = K_{Q_3} C v_{Q_3}^4 + 4\gamma_{Q_3} C v_{Q_3}^3 + 4C v_{Q_3}^2 - \frac{C v_{Q_3}^4}{\mu_{Q_3}^3} \quad (4.23)$$

E' facile rendersi conto che il monitoraggio del carico nel nodo 1 dà bassi valori della varianza della stima del carico nel nodo 2, ma valori più elevati per le stime del carico sul nodo 3 (e lo stesso vale per il monitoraggio nel nodo 3), mentre il monitoraggio nel nodo 2 permette di ridurre la stima dell'incertezza per entrambi i nodi incogniti 1 e 3. Poiché le stime, appena espote, dipendono sia dalle caratteristiche fisiche del sistema che dalle distribuzioni delle portate richieste ai nodi, le conclusioni sopra riportate non sono valide in assoluto; però, se tali parametri sono confrontabili per i vari nodi e tratti, allora la scelta consigliabile è senz'altro quella di monitorare il nodo 2 perché così si minimizza l'incertezza di stima dei carichi incogniti negli altri due nodi.

4.4.2 Analisi dei risultati ottenuti

Si possono, quindi, confrontare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente con il criterio proposto da Bovolín e Villani (2004), che, per definire il nodo maggiormente significativo di una rete, ai fini del monitoraggio, ricorrevano all'analisi dei coefficienti di correlazione tra le grandezze ai nodi, identificando il nodo ottimale come quello meglio correlato mediamente con il resto della rete. Nel caso del sistema in fig. 4.2, per conoscere la correlazione che intercorre tra i vari nodi del sistema, si deriva analiticamente il coefficiente di correlazione tra nodi:

- correlazione nodi 1 e 2

$$\rho_{\Delta H_1, \Delta H_2} = \frac{\sigma_{\Delta H_1, \Delta H_2}}{\sigma_{\Delta H_1} \sigma_{\Delta H_2}} = \frac{f_{Q_{12}}}{2r_2 Q_{12}} \frac{\int \sigma_{\Delta H_1}^2 d(\Delta H_1) + \sigma_{\Delta H_1}^2}{\sigma_{\Delta H_1} \sigma_{\Delta H_2}} \approx 1 \quad (4.24)$$

- correlazione nodi 1 e 3

$$\rho_{\Delta H_1, \Delta H_3} = \frac{\sigma_{\Delta H_1, \Delta H_3}}{\sigma_{\Delta H_1} \sigma_{\Delta H_3}} = \frac{\frac{f_{Q_{12}}}{2r_2 Q_{12}} \int \sigma_{\Delta H_1}^2 d(\Delta H_1) + \sigma_{\Delta H_1}^2 + \sigma_{\Delta H_1}^2 \frac{r_3}{r_2} \int \frac{f_{Q_{12}}}{Q_{12}} \frac{Q_3}{2} dQ_3}{\sigma_{\Delta H_1} \sigma_{\Delta H_3}} \approx 1 \quad (4.25)$$

- correlazione 2 e 3

$$\rho_{\Delta H_2, \Delta H_3} = \frac{\sigma_{\Delta H_2, \Delta H_3}}{\sigma_{\Delta H_3} \sigma_{\Delta H_2}} = \frac{\frac{f_{Q_3}}{2r_3 Q_3} \int \sigma_{\Delta H_2}^2 d(\Delta H_2) + \sigma_{\Delta H_2}^2}{\sigma_{\Delta H_3} \sigma_{\Delta H_2}} \approx 1 \quad (4.26)$$

Come si può verificare, a parte casi speciali, tutti i coefficienti di correlazione assumono valori molto vicini tra di loro ma l'ultimo termine a numeratore della (4.25), che è generalmente trascurabile quando la portata Q_{12} assume valori piccoli, risulta negativo e, quindi, diminuisce il valore della (4.25). Il criterio di Bovolín e Villani (2004), che identifica nel nodo 2 quello che massimizza la correlazione con gli altri nodi, identifica, quindi, correttamente il nodo in cui è preferibile effettuare il monitoraggio. A differenza dell'approccio analitico qui proposto, però, non avrebbe la stessa generalità e non sarebbe così chiaramente discriminante, essendo generalmente i valori di correlazione ottenibili empiricamente, molto vicini tra di loro.

Infine, viene riportata graficamente la differenza tra la correlazione che si ottiene nel caso di sistema in linea rispetto al sistema a maglie chiuse di tipo triangolare.

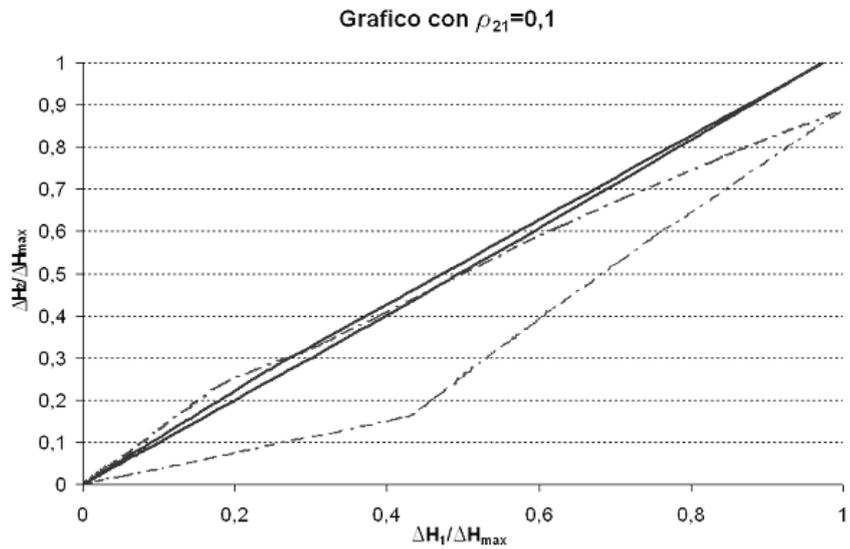


Figura 4.3 Confronto fra sistema in linea (rosso) e maglia triangolare (rosa)

Dall'analisi effettuata, in fig. 4.3, si vede come il sistema in linea abbia una maggiore correlazione tra i carichi nei due nodi di domanda rispetto al caso a maglia chiusa, essendo maggiore l'ampiezza di quest'ultimo campo di esistenza.

5 APPLICAZIONE DEL FILTRO DI KALMAN ALLE RETI IN PRESSIONE IN FASE DI CALIBRAZIONE

5.1 PREMESSA

Riprendendo quanto già detto, una maniera generale per rappresentare le relazioni tra caratteristiche topologiche ed idrauliche di una rete idrica, sia che essa sia a maglia chiusa o aperta, fa riferimento ad una forma compatta delle equazioni del moto e di continuità del tipo:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{p0}H_0 \\ Q_i \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

In cui :

$Q_{ij}^T = [Q_{12}, Q_{23}, \dots, Q_{np}]$	portate non note circolanti nei tratti
$H^T = [H_1, H_2, \dots, H_{n_n}]$	carichi nei nodi non monitorati
$H_0^T = [H_{01}, H_{02}, \dots, H_{0n_0}]$	carichi determinati nei nodi monitorati
$Q_i^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{nn}]$	portate erogate e monitorate nei nodi
$A_{pp}(i,i) = b_{ij} Q_{ij} ^{n_{ij}-1}$	coeff. di resistenza nel tratto (i,j)
$A_{pn} = A_{np}^T = (-1, 0, +1)$	se la portata dal nodo n al tratto p = (entrante, zero, uscente)

Nella fase di calibrazione del sistema, essendo note le portate erogate ai nodi (Q_i) e i carichi in tutti i nodi della rete (H), l'unica incognita presente nel problema è il coefficiente di scabrezza (c) dei tratti della rete che nella formula (6.1) ed è racchiusa nel parametro β_{ij} .

In realtà, il coefficiente di scabrezza non influenza solo il parametro β_{ij} ma è strettamente correlato anche alla stima delle portate circolanti (Q_{ij}) nei tratti. Tale influenza porta ad avere un sistema di tipo non lineare, la cui risoluzione permette di ottenere il valore della scabrezza per ogni tratto, avendo imposto note tutte le altre caratteristiche idrauliche e topologiche della rete.

Per risolvere tale problema si è utilizzato un metodo basato sul filtro di Kalman (Todini 1999). Tale metodo ha la peculiarità di studiare il sistema non lineare appena esposto, dopo aver caratterizzato sia le condizioni al contorno che le equazioni di input, come se fosse di tipo lineare, così da ridurre notevolmente il tempo di risoluzione dello stesso sistema per via indiretta.

5.2 FILTRO DI KALMAN PER RETI IN PRESSIONE IN FASE DI CALIBRAZIONE

Quando ci si trova in calibrazione pura, bisogna specializzare la (5.1) in funzione dei parametri noti e di quelli incogniti così da poter rendere il sistema matriciale risolvibile in modo lineare. Nella fase di calibrazione pure i parametri noti del sistema sono le portate erogate (Q_i), tutte le perdite di carico dei tratti (ΔH), alcune caratteristiche topologiche della rete come la lunghezza, i diametri, ecc.; mentre sono incognite del problema le portate circolanti (Q_{ij}) e le scabrezze dei tratti (k_j). Con tali condizioni, la (6.1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H_{ij} \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Dalla (5.2) è possibile ottenere, tramite alcuni passaggi matematici come il prodotto matriciale e l'inversione delle matrici, le due equazioni di base necessarie per inizializzare il filtro di Kalman. Infatti, andando a scrivere

le equazioni della (5.2) in funzione delle portate circolanti (Q_{ij}) e delle portate erogate (Q_i), si ottiene:

$$\begin{cases} Q_{ij} = D k_i \\ Q_i = A_{np} Q_{ij} \end{cases} \quad (5.3)$$

In cui D è una matrice di tipo diagonale quadrata i cui elementi sulla diagonale principale sono le perdite di carico in ogni tratto (ΔH) note a priori. Il parametro k , invece, è un parametro funzione anche esso delle perdite di carico in ogni tratto, ma anche delle caratteristiche topologiche della rete e più esplicitamente, nel caso si usi la formula di resistenza di Hazen, come proposto originariamente da Todini [1999] è :

$$k_i = (\alpha d_i^{8/3} c_i) / (l_i^{1/2} |\Delta H_i|^{1/2}) \quad (5.4)$$

In cui α è pari a $1000 \cdot \pi / 4^{5/3}$, d è il diametro della tubazione diverso per ogni tratto, l è la lunghezza di ogni tratto della rete, c è il coefficiente di scabrezza per ogni tratto e ΔH è la perdita di carico per ogni tratto. Dall' equazione (5.3) è possibile scrivere le equazioni del sistema e le equazioni delle misure alla base del filtro di Kalman nel modo seguente:

$$\begin{cases} k_t = k_{t-1} \\ q_t = A_{np} D k_t + e_t \end{cases} \quad (5.5)$$

Con e_t viene indicata la misura dell'errore che si ottiene fra la richiesta reale delle portate nei nodi e la stessa portata, invece, ottenuta tramite la simulazione. Di tale errore, che ha una distribuzione di tipo normale, verranno considerati il bias μ_t e la matrice di covarianza degli errori R_t . Avendo a disposizione le equazioni di partenza del filtro di Kalman, è possibile definire il filtro stesso considerando le equazioni (5.5). Le equazioni che si ottengono sono quelle riportate nella (5.6).

$$\begin{cases} K_t = K_{t-1} + P_{t-1|t-1} D A_{pn} (A_{np} D P_{t-1|t-1} D A_{pn} + R)^{-1} (q - \mu_t - A_{np} D K_{t-1}) \\ P_{t|t} = P_{t-1|t-1} + P_{t-1|t-1} D A_{pn} (A_{np} D P_{t-1|t-1} D A_{pn} + R)^{-1} A_{np} D P_{t-1|t-1} \end{cases} \quad (5.6)$$

Ricordando che ci si trova in fase di calibrazione, cioè in uno stato in cui le condizioni non sono variabili nel tempo, di queste due equazioni quella che viene utilizzata è soltanto la prima delle (5.6). Con tale semplificazione, proprio perché le condizioni non sono variabili nel tempo, la seconda della (5.6) rimane sempre costante e viene posta, per semplicità ma senza perdere di generalità, pari alla matrice identità (I). L'equazione, quindi, che è utilizzata, semplificata del termine identità, è riportata nella (5.7).

$$K_t = K_{t-1} + D A_{pn} (A_{np} D D A_{pn} + R)^{-1} (q - m_t - A_{np} D K_{t-1}) \quad (5.7)$$

In questa equazione sono stati riportati i pedici solo ai parametri che variano in ogni step di simulazione.

Per poter risolvere il sistema ed applicare il filtro di Kalman, bisogna, prima di tutto, dare un input a tutti i parametri presenti nell'equazione (fase di inizializzazione). Dopo tale inizializzazione, applicato il filtro di Kalman, si può ottenere il risultato a cui converge il sistema ed, infine, ottenere il risultato "esatto" del parametro ricercato.

Come strumento di "bontà" del filtro e della metodologia verrà utilizzato l'indice GAIN che indica il "guadagno" che si è ottenuto applicando il filtro sulla variabilità dei parametri incogniti. Il GAIN è, più specificamente, definito nel modo seguente:

$$GAIN = 1 - (VAR_{fin} / VAR_{iniz}) \quad (5.8)$$

Dove si è indicato con VAR la varianza della distribuzione del coefficiente di scabrezza c.

5.3 APPLICAZIONE DEL FILTRO DI KALMAN AD ALCUNI CASI SEMPLICI

5.3.1 Sistema semplice ad una richiesta

Il primo sistema analizzato è quello riportato in figura 5.1.



Figura 5.1 Sistema ad un'unica richiesta

Per il sistema di Figura 5.1 sono note le caratteristiche geometriche della condotta (diametro $d = 400$ mm e lunghezza $l=1000$ m), nonché la richiesta al nodo 1 ($q = 538,7$ l/s) e la perdita di carico tra il nodo 0 e 1 ($\Delta H = 39,59$ m). Tali valori sono stati ottenuti, in fase di progetto, considerando il coefficiente di scabrezza $c = 100$.

Nella fase di calibrazione, cioè quando l'unico parametro incognito del sistema di Figura 5.1 è la scabrezza nella condotta, è necessario inizializzare il sistema implementando il filtro di Kalman, sopra definito, facendo una ipotesi iniziale sulla distribuzione di probabilità della variabile coefficiente di scabrezza. In questo caso, è stata fatta un'ipotesi iniziale di distribuzione di tipo uniforme tra 80 e 120, così da avere una varianza iniziale di 133,33 e una media pari al valore ricercato, ed una numerosità del campo pari a 100 simulazioni. Questo tipo di ipotesi per l'inizializzazione del filtro è posta uguale per tutti i casi successivamente analizzati a meno di quelli nei quali è esplicitamente fornita la distribuzione per il coefficiente di scabrezza.

Applicando l'equazione (5.7), dopo averla inizializzata con i parametri appena esposti, si ottiene che, dopo soli 3 step del filtro, il sistema

converge rapidamente al valore 100 e la sua variabilità si è ridotta a 0,08. In realtà, anche se qui non è molto significativo perché è un caso molto semplice, dovrà essere analizzata anche la variabilità delle portate erogate simulate. Infatti, il parametro scabrezza, ha una “sensibilità” molto più bassa rispetto a quello delle portate erogate, per cui una bassa variabilità del coefficiente c non implica necessariamente una bassa variabilità della portata erogata Q_i . Nel caso esaminato, però, dopo 3 step, il valore della portata ha media pari a 538,7 e varianza 2,37. Tale risultato è accettabile anche per le portate anche se, comunque, presenta le caratteristiche di variabilità appena esposte.

Il GAIN per questo primo esempio è pari proprio a 1, cioè al 100%, il cui andamento a seconda del numero di step considerati verrà riportata alla fine di tutti i casi esaminati in una figura riassuntiva (Figura 5.6).

5.3.2 Sistema a maglia aperta con tre richieste

Il secondo schema analizzato prevede lo studio di un sistema ad albero in cui sono presenti tre richieste, come riportato nella figura 5.2.

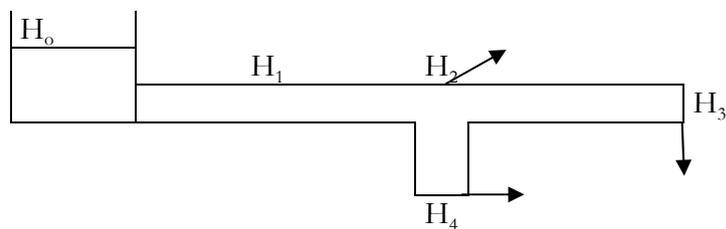


Figura 5.2 Sistema ad albero con quattro richieste in serie

Rispetto al caso precedente, la complessità idraulica della rete è più elevata in quanto sono presenti più tratti in serie disposti in modo spaziale con richieste differenti. Per poter applicare la metodologia del filtro di Kalman anche in questo caso, bisogna partire dalla conoscenza delle caratteristiche topologiche ed idrauliche del sistema a maglia aperta, che sono riportate nella tabella 5.1.

Tabella 5.1 Dati iniziali (di progetto) sistema ad albero con quattro richieste

Nodi	Q_i (l/s)	tratti	d_{ij} (mm)	l_{ij} (m)	c_{ij}	ΔH_{ij} (m)
0	-383	0-1	400	500	100	10,00
1	220,58	1-2	300	300	100	5,00
2	135,78	2-3	100	200	100	2,00
3	6,72	2-4	150	100	100	1,00
4	19,80					

Anche qui, come per il caso precedente, si è ipotizzato, in fase di progetto, che il coefficiente di scabrezza (c) abbia valore pari a 100.

Il procedimento di utilizzo del filtro di Kalman parte subito dopo la prima fase (fase di inizializzazione) in cui si fanno alcune simulazioni ad hoc ipotizzando una distribuzione di probabilità per il coefficiente di scabrezza a piacere. In questo caso, si ipotizza la stessa distribuzione utilizzata nel caso precedente. Una volta conclusa la fase di inizializzazione, è possibile far partire il filtro di Kalman ed ottenere i risultati per ogni step di simulazione. Con tale procedimento, si ottiene un miglioramento, in termini di GAIN, della varianza del coefficiente di scabrezza ad ogni step di simulazione. I risultati che si ottengono applicando il filtro di Kalman vengono riportati in tabella 5.2.

Tabella 5.2 Riassunto risultati ottenuti dopo 5 step

q	media	var	GAIN c	c_i	media	var
0	-384	51	0,999	0-1	100,33	3,48
1	222	52	0,999	1-2	97,14	0,31
2	135	1	0,998	2-3	98,76	2,90
3	7	0	0,999	2-4	100,13	0,17
4	20	0				

Come è evidente in tabella 5.2, anche se il GAIN medio del coefficiente di scabrezza è pari a circa 1, cioè il 100%, la varianza della portata erogata è ancora alta. Per poter ridurre la varianza della portata erogata è necessario continuare l'iterazione del filtro fino ad ottenere risultati "accettabili". Si definiscono risultati "accettabili" quei risultati che sono

inferiori alla soglia massima di variabilità consentita, la quale viene definita a priori dall'operatore. Facendo un ulteriore step si ottiene una riduzione notevole della variabilità della portata erogata nei nodi ed i risultati vengono riportati in tabella 5.3.

Tabella 5.3 Riassunto risultati ottenuti dopo 6 step

q	media	var	GAIN c	ci	media	Var
0	-383	29	0,999	0-1	100,25	1,99
1	221	30	0,999	1-2	97,89	0,17
2	136	0	0,999	2-3	99,08	1,57
3	7	0	0,999	2-4	100,10	0,09
4	20	0				

5.3.3 Sistema triangolare

Il successivo sistema analizzato è un sistema a maglia chiusa di tipo triangolare con doppia richiesta. Questo tipo di sistema è già stato studiato nei capitoli iniziali dal punto di vista del monitoraggio, mentre, in questo paragrafo, viene studiato dal punto di vista della calibrazione.

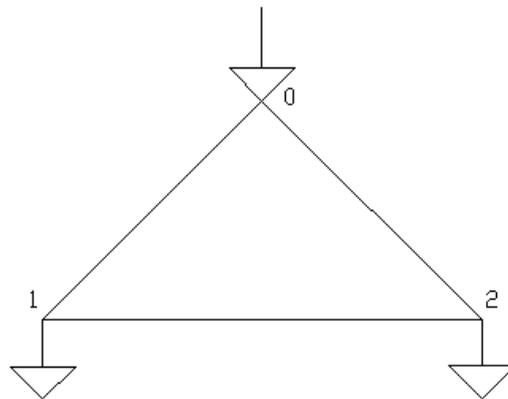


Figura 5.3 Sistema a maglia chiusa triangolare

Come è stato fatto nel paragrafo precedente, vengono riportate tutte le caratteristiche idrauliche e topologiche del sistema in tabella 5.4. I parametri riportati in tabella 5.4 sono tutti i parametri del sistema, sia quelli noti che quelli incogniti, che permettono di avere una conoscenza totale del sistema in quanto si sta applicando il filtro di Kalman a casi semplici solo per testarne la vera efficacia e robustezza dello stesso.

Delle informazioni della tabella 5.4 i parametri coefficiente di scabrezza dei tratti (c_i) vengono considerati incogniti ed il cui valore si vuole ottenere applicando il filtro di Kalman.

Tabella 5.4 Caratteristiche topologiche ed idrauliche del sistema

tratti	d_i (mm)	l_i (m)	c_i	ΔH (m)	Q_i (l/s)
0-1	400	1000	100	30,00	-554
0-2	200	1000	100	40,00	343
1-2	300	1000	100	10,00	211

Applicando la stessa metodologia utilizzata nei casi precedenti, si ottiene che il sistema è oscillante in modo periodico intorno al suo valore finale con uno smorzamento via via sempre crescente. Tale risultato oscillante è dovuto sia al modo in cui è stata costruita la rete, ma anche al fatto che si è ipotizzato un solo set di osservazioni. Poiché in questa prima fase ci interessa soltanto capire se con un singolo set di osservazioni è possibile, comunque, fare calibrazione, si è deciso di sostituire i parametri del tratto centrale, andandolo a considerare come un tratto poco “incidente” sulla circolazione delle portate. Per fare ciò si sostituisce al posto del valore del coefficiente di scabrezza del tratto orizzontale 1 – 2 un valore inferiore così da ottenere una perdita di carico lungo il suo percorso molto bassa che può far ipotizzare il sistema come se fosse a maglia aperta con due tratti separati. Con tale ipotesi si ottengono i risultati riportati in tabella 5.6.

Tabella 5.5 Caratteristiche topologiche ed idrauliche del sistema

tratti	d_i (mm)	l_i (m)	c_i	ΔH (m)	Q_i (l/s)
0-1	400	1000	100	30,00	-554
0-2	200	1000	100	30,01	343
1-2	100	1000	2	0,01	211

La distribuzione di probabilità che viene data al coefficiente di scabrezza per il tratto centrale è sempre di tipo uniforme ma variabile tra 0 e 4, così da avere anche per questo tratto il valore ricercato pari alla media della distribuzione. Dopo aver inizializzato il sistema con una distribuzione di numerosità pari a 100, tramite il filtro di Kalman, si ottiene un GAIN accettabile già al 4 step.

Tabella 5.6 Risultati del filtro di Kalman dopo 4 step

q	media	Var	GAIN	c_i	media	var
0	-554	22,60	0,993	0-1	99,97	1,07
1	469	23,44	0,995	0-2	100,27	0,71
2	85	0,52	-0,048	1-2	1,97	1,45

Per quanto detto in precedenza in riferimento all' assimilazione del sistema a maglia chiusa ad un sistema a maglia aperta per la definizione di piccolissima scabrezza del tratto di collegamento, il GAIN medio massimo possibile per il sistema è 0,66.

Osservando i risultati ottenuti in Tabella 5.6 è possibile notare come la varianza della portata allo step 4 è ancora rilevante, per cui il risultato finale non è ancora del tutto esauriente dal punto di vista delle portate, perché si è deciso di avere una soglia di accettabilità delle portate più bassa. Per tale motivo, facendo altri 2 step di simulazione, si ottengono i risultati riportati in tabella 5.7.

Tabella 5.7 Risultati del filtro di Kalman dopo 6 step

q	media	Var	GAIN	ci	media	var
0	-554	7,46	0,998	0-1	100	0,35
1	469	7,78	0,999	0-2	100	0,17
2	85	0,13	-0,048	1-2	1,97	1,45

5.3.4 Sistema triangolare con scabrezza casuale

In questa parte del lavoro si è voluta testare la robustezza del filtro di Kalman per le reti in pressione tramite la risposta del sistema a “stimoli” iniziali differenti da quelli ipotizzati. Poiché le ipotesi generali non prevedono particolari condizioni di inizializzazione del filtro di Kalman, si è deciso di fare ipotesi differenti sulla distribuzione di probabilità del coefficiente di scabrezza c da utilizzare durante la fase di inizializzazione del filtro. Il risultato di tali ipotesi meno restrittive, rispetto alle precedenti, permette di validare la bontà della soluzione e della rapida convergenza al valore esatto del filtro di Kalman anche in tali condizioni. Considerando lo schema di Figura 5.3, si è deciso di non ipotizzare più il valore medio delle simulazioni come il valore “esatto” da ricercare, ma di ampliare il raggio di variabilità dando una varianza maggiore ai coefficienti di scabrezza (c) dei vari tratti ed il valore medio della distribuzione diverso dal valore da ricercare (tabella 5.8).

Tabella 5.8 Media e varianza della scabrezza data dalle simulazioni

c	media	varianza
0-1	211	12966
0-2	155	6561
1-2	2	1

Applicando il metodo del filtro di Kalman pedissequamente al caso precedente, si ottiene che il numero degli step necessari per ottenere la soluzione “esatta” del problema è aumentato di pochi step di calcolo, 1 - 2 step, per quanto riguarda l’ esattezza dei risultati rispetto alle scabrezze (Tabella 5.9), mentre si ha un incremento di altri 4-5 step per poter ottenere un buon risultato anche sulle portate erogate (Tabella 5.10). Tale risultato permette di asserire che è possibile inizializzare il sistema in modo casuale senza provocare risultati che si discostino molto dal risultato esatto, con un incremento del numero di set di osservazioni del tutto trascurabile, almeno nei casi semplici fino ad ora analizzati. Tale risultato è importante in quanto permette di svincolare il sistema di inizializzazione e, quindi, fornisce maggiore libertà nella scelta dell’input da inserire per i parametri incogniti. Nelle tabelle 5.9 e 5.10 vengono proposti, per brevità ma senza perdere di generalità, solo i risultati del caso di maglia triangolare.

Tabella 5.9 Risultati del filtro di Kalman dopo 6 step

q	media	var	GAIN	ci	media	var
0	-558,21	293,48	0,998	0-1	103,02	13,13
1	483,09	288,66	0,998	0-2	101,70	6,18
2	75,12	3,37	0,008	1-2	2,18	1,48

Tabella 5.10 Risultati del filtro di Kalman dopo 11 step

q	media	var	GAIN	ci	media	var
0	-549,09	37,80	1,000	0-1	101,25	1,68
1	474,79	37,02	1,000	0-2	100,59	0,99
2	74,30	0,54	0,010	1-2	2,07	1,28

5.3.5 Sistema complesso a più maglie chiuse e più richieste

Ultimo sistema considerato è il sistema riportato in Figura 5.4. Questo sistema è composto da quattro maglie chiuse di cui tre rettangolari ed una triangolare (esempio Todini 1999) con otto richieste diversificate nei nodi dall' 1 all' 8.

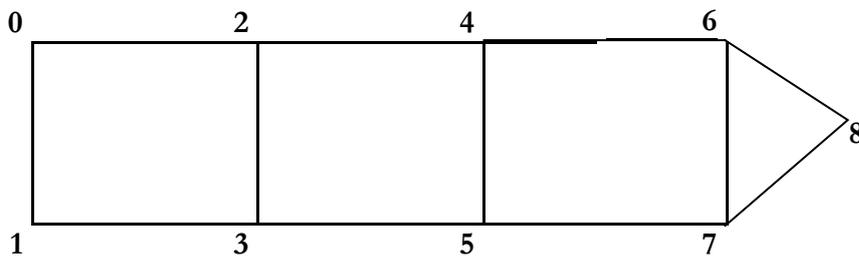


Figura 5.4 Sistema complesso a 4 maglie chiuse con 8 richieste

Tutte le caratteristiche idrauliche e topologiche del sistema sono riportate in tabella 5.11.

Tabella 5.11 Riassunto dati iniziali sistema complesso a 4 maglie chiuse con 8 richieste

Tratti	d_i (mm)	l_i (m)	c_i	Nodi	H (m)	q (l/s)
0-1	400	603,876	100	0	115	-680
0-2	400	373,398	100	1	107,637	181
1-3	400	812,08	100	2	107,603	64
2-3	300	466,556	100	3	106,096	63
2-4	400	400,788	100	4	104,304	95
3-5	400	845,086	100	5	104,254	67
4-5	300	315,987	100	6	102,394	75
4-6	400	769,652	100	7	102,434	25
5-7	300	509,562	100	8	101,964	110
6-7	100	269,182	100			
6-8	400	855,814	100			
7-8	300	305,436	100			

Di queste caratteristiche, essendo in fase di calibrazione, si ipotizzano incogniti i coefficienti di scabrezza (c) dei tratti. Per quanto riguarda la

fase di inizializzazione, si considera una distribuzione di probabilità per tutti i coefficienti di scabrezza variabile tra 80 e 120 , con una media pari a 100 e una varianza pari a 133,33. Applicando il filtro di Kalman per le reti in pressione, dopo soli 6 step di calcolo, è possibile ottenere un risultato “accettabile”, riportato in tabella 5.12. Nella stessa tabella vengono riportati i valori delle portate erogate “filtrate”, cioè quei valori delle portate erogate ottenute con il filtro di Kalman tramite la seconda del sistema (5.5). Tale scelta, come è stata fatta anche per i casi precedenti e che verrà mantenuta anche per i successivi, è a vantaggio di sicurezza in quanto aggiunge un ulteriore controllo sulla bontà dei risultati ottenuti tramite il filtro di Kalman.

Tabella 5.12 Risultati ottenuti sistema complesso al 6 step

q	media	var	ci	media	var		GAIN
0	-679,99	9,54	0-1	99,76	7,65	0-1	0,942
1	180,96	4,73	0-2	100,20	4,34	0-2	0,968
2	64,06	6,83	1-3	99,35	45,18	1-3	0,643
3	62,99	0,86	2-3	98,89	139,88	2-3	0,014
4	94,99	1,57	2-4	100,63	3,77	2-4	0,972
5	67,01	0,60	3-5	98,76	13,15	3-5	0,895
6	76,68	0,40	4-5	99,99	147,89	4-5	0,002
7	23,30	0,32	4-6	101,12	10,20	4-6	0,941
8	110,00	0,03	5-7	98,04	31,13	5-7	0,780
			6-7	99,65	144,94	6-7	-0,008
			6-8	99,70	44,17	6-8	0,686
			7-8	100,37	68,26	7-8	0,557

Il GAIN medio, determinato come il valore medio dei GAIN dei vari tratti considerati con lo stesso peso, che si ottiene è pari a 0,62. Tale risultato permette di affermare che tale metodologia, con un solo set di osservazioni, permette di ridurre, per il caso specifico l'incertezza e, quindi, la variabilità dei parametri incogniti, in media, del 62% rispetto al valore iniziale ipotizzato.

5.3.6 Sistema a maglia quadrata chiusa con due set di osservazioni

Dal caso complesso esposto nel paragrafo precedente si nota come il risultato finale della simulazione del filtro di Kalman non dia un risultato preciso nella valutazione del coefficiente di scabrezza c , ma soltanto un miglioramento della variabilità di tale parametro rispetto al campo iniziale (riduzione della variabilità del 62%). Anche se tale miglioramento è notevole, di certo non è tale da poter permettere di definire in maniera “esatta” tutti i valori delle scabrezze dei singoli tratti. Infatti, osservando attentamente i GAIN dei vari tratti si nota come alcuni tratti, per esempio il 4-5 o il 2-3 in Tabella 5.12, hanno una riduzione della variabilità del parametro del tutto nulla, anzi alcuni di essi, come per esempio il tratto 6-7 in Tabella 5.12, ha un peggioramento della variabilità del parametro.

Per comprendere meglio il motivo di tale risultato, bisogna considerare che per una corretta applicazione del filtro di Kalman per reti idriche in pressione è necessario che il sistema analizzato sia osservabile. Un sistema si dice osservabile quando la matrice U , definita nella (5.9), ha rango massimo pari al numero di maglie del sistema considerato.

$$U = [D_1 A_{pn}, D_2 A_{pn}, \dots, D_n A_{pn}] \quad (5.9)$$

Quindi, per poter ottenere un risultato con un GAIN prossimo a 1, bisognerà fare tanti set di osservazioni quante sono le maglie presenti nella rete analizzata.

Per semplicità di risoluzione, si è deciso di analizzare soltanto una maglia rettangolare ed una maglia triangolare, separatamente, in quanto tutto ciò che vale per una singola maglia può essere riportato ad n maglie. La maglia analizzata è quella riportata in figura 5.5 e le cui caratteristiche topologiche sono riportate in tabella 5.13.

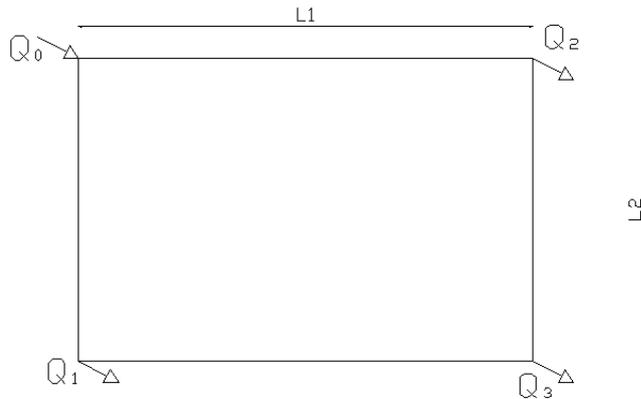


Figura 5.5 Sistema a maglia rettangolare con 3 richieste

Tabella 5.13 Riassunto dati iniziali sistema ad una rettangolare

Tratti	d_i (mm)	l_i (m)	c_i
0-1	100	1000	325
0-2	150	1500	200
1-3	150	1500	100
2-3	150	1000	150

Mentre per le caratteristiche idrauliche del sistema si sono ipotizzati due set di osservazioni diversi in tutti i nodi sia per le portate erogate e per i carichi. (Tabella 5.14 e 5.15).

Tabella 5.14 Riassunto dati misurati al primo istante per la maglia rettangolare

Nodi	H (m)	q (l/s)
0	200	-30
1	194,54	10
2	195,08	10
3	193,96	10

Tabella 5.15 Riassunto dei dati idraulici al secondo istante di misura per maglia rettangolare

Nodi	H (m)	q (l/s)
0	200	-90
1	158,24	30
2	162,40	30
3	153,80	30

Avendo a disposizione due set di informazioni della stessa rete, il sistema dovrebbe essere definibile in tutte le caratteristiche. Per poter utilizzare lo stesso procedimento utilizzato per il caso precedente, si deve inizializzare per due volte, separatamente, il sistema allo stesso modo con cui è stato fatto nel caso di un solo set di informazioni. Una volta inizializzati questi due sistemi, poiché l'unico parametro incognito e costante per tutti e due i set di informazioni è il coefficiente di scabrezza (c), è necessario definire il legame tra i due coefficienti ottenuti nei vari step di simulazione del filtro.

Poiché le due misurazioni sono fatte allo stesso modo e danno informazioni sulle stesse caratteristiche idrauliche del sistema diverse solo perché considerate in due istanti diversi di misurazione, si è ipotizzato di considerare come valore "da filtrare" del coefficiente di scabrezza (c) il valore medio che si ottiene dai due sistemi.

Con tale ipotesi è stato possibile implementare il filtro di Kalman ed ottenere i risultati riportati in tabella 5.16 e 5.17.

Tabella 5.16 Riassunto risultati ottenuti al 4 step

q	media	GAIN	ci	media	var
0	-30.03	0.90	0-1	327.4	12.92
1	10.01	0.98	0-2	195.9	2.66
2	10.00	0.93	1-3	103.3	8.42
3	10.02	0.76	2-3	148.4	26.60

Tabella 5.17 Riassunto risultati ottenuti al 4 step

q	media	GAIN	ci	media	var
0	-90.09	0.90	0-1	327.4	12.92
1	30.04	0.98	0-2	195.9	2.66
2	30.02	0.93	1-3	103.3	8.42
3	30.03	0.76	2-3	148.4	26.60

I risultati che si ottengono, applicando il filtro di Kalman ad un sistema osservabile, sono molto buoni, in termini di GAIN medio (quasi 90%). Il risultato finale non è a GAIN 1 in quanto si sono fatti pochi step di calcolo per far notare la veloce convergenza del filtro ai risultati ricercati.

5.3.7 Sistema a maglia triangolare con due set di osservazioni

Dopo aver analizzato il comportamento della maglia quadrata all'interno del sistema complesso di figura 5.5, è necessario analizzare il comportamento della maglia triangolare (figura 5.3). Per tale maglia, come si è visto nei risultati ottenuti per un singolo set di osservazione, sia nel caso del sistema complesso che nel caso di maglia triangolare del paragrafo 5.3.3, bisogna studiare il suo comportamento quando viene applicata la metodologia del filtro di Kalman nel caso in cui il numero di set di osservazioni aumenta e risulta tale che il sistema sia osservabile. Essendo una singola maglia di tipo triangolare, per poter rendere il sistema osservabile sono necessari due set di osservazioni. Per i due set di osservazioni, riportati in tabella 5.18 e 5.19, si sono ipotizzate distribuzioni di probabilità di tipo uniforme per i tre tratti, i cui valori medi e le rispettive varianze sono diverse per ogni tratto così da rendere il sistema più generico possibile. Applicando la metodologia allo stesso modo con cui è stata applicata nel caso precedente, dopo pochi set di osservazione, è possibile ottenere un risultato finale dei parametri incogniti con una precisione molto alta. In tabella 5.20 e 5.21 vengono riportati i risultati ottenuti facendo un numero contenuto di simulazioni.

Tabella 5.18 Primo set di osservazioni per sistema triangolare

Nodo	Q_i (l/s)	tratto	c_i	Nodo	H_i (m)
0	-220	0-1	100	0	115
1	90	0-2	200	1	107.13
2	130	1-2	150	2	110.01

Tabella 5.19 Secondo set di osservazioni per sistema triangolare

Nodo	Q_i (l/s)	tratto	c_i	Nodo	H_i (m)
0	-320	0-1	100	0	115
1	120	0-2	200	1	101.28
2	200	1-2	150	2	104.15

Tabella 5.20 Riassunto risultati ottenuti all' 8 step

q	media	var	GAIN	ci	media	var
0	-220,11	0,00	1,00	0-1	100	0,00
1	90,00	0,02	1,00	0-2	200,59	0,01
2	130,11	0,04	0,97	1-2	151,4	6,22

Tabella 5.21 Riassunto risultati ottenuti all' 8 step

q	media	var	GAIN	ci	media	var
0	-320,03	0,00	1,00	0-1	100	0,00
1	120,03	0,00	1,00	0-2	200,59	0,01
2	200	0,00	0,82	1-2	151,4	6,22

Dall' analisi dei risultati ottenuti in Tabella 5.20 e 5.21 è possibile ottenere un GAIN medio molto alto, superiore al 90%. Ovviamente, aumentando il numero di step di simulazione, il risultato tende sempre più al valore esatto con un GAIN tendente ad uno. Nel caso specifico,

però, il GAIN medio per il primo set è pari a 0,99, mentre per il secondo è pari a 0,94. Questa differenza è dovuta soltanto al fatto che il valore della varianza iniziale tra i due set di osservazioni è diversa in modo tale da rendere il sistema ancora più generico.

5.3.8 Sistema ad anello con due set di osservazioni

Altro possibile sistema semplice analizzabile tramite le equazioni matriciali e poi, se il sistema è osservabile, tramite il filtro di Kalman è un sistema formato da un nodo di ingresso ed un nodo di domanda con due tratti in parallelo (figura 5.6) le cui caratteristiche topologiche vengono ipotizzate differenti (tabella 5.22).

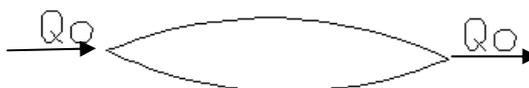


Figura 5.6 Sistema ad anello

Tabella 5.22 Riassunto dati per sistema ad anello

tratti	$d_i(\text{mm})$	$l_i(\text{m})$	c_i	$\Delta H (\text{m})$	Nodi	Q
1	300	1000	200	2.22	0	- 130
2	300	1000	100	2.22	1	130

Il sistema matriciale (5.2) è possibile applicarlo soltanto in due modi :

- Il nodo di richiesta è possibile considerarlo come un duplice nodo di domanda
- Bisogna fare una misura delle caratteristiche idrauliche della rete (perdite di carico o portata circolante) in un punto molto

prossimo al nodo di domanda o , comunque, in un punto qualsiasi di un tratto della rete.

Come per tutti i casi esaminati finora, le informazioni in tabella 5.22 non sono tutte note a priori ma si considerano incogniti i coefficienti di scabrezza dei tratti (c). Con tale condizione, applicando il primo metodo, il sistema risulterebbe a maglia aperta e, quindi, le portate si dividerebbero nei due tratti in egual maniera dando, così, una scabrezza del tratto costante ed uguale per i due tratti. Tale risultato, ovviamente, a meno del caso in cui i due tratti hanno la stessa scabrezza, può portare a risultati del tutto errati per cui è da scartare.

Il secondo caso, invece, è quello che dovrebbe permettere di risolvere il problema in modo più preciso e prossimo al valore ricercato, riportato in tabella 5.23, perché non è niente altro che lo sviluppo matriciale della maglia triangolare con un nodo di domanda nullo, un tratto centrale di lunghezza molto piccola ed una perdita di carico dell'ordine del millimetro.

Allo stesso risultato è possibile pervenire anche tramite le sole equazioni del moto e di continuità facenti parte della matrice (5.2). Infatti, andando a riscrivere il sistema matriciale in forma di equazioni, è possibile ottenere il seguente sistema di equazioni :

$$\begin{cases} r_1 Q_1^2 = r_2 Q_2^2 = \Delta H \\ Q_1 + Q_2 = q \end{cases} \quad (5.10)$$

in cui le Q_i sono le portate circolanti nei tratti; q è la portata richiesta nel nodo 1; il ΔH è la perdita di carico uguale per i due tratti e le r_i sono le scabrezze dei tratti. Sviluppando le equazioni (5.10), si ottiene :

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = -1 + \frac{q}{Q_1} \quad (5.11)$$

Questa equazione è definita sempre positiva ma risulta indeterminata in quanto il numero di incognite è superiore al numero di equazioni a disposizione.

Tale indeterminazione resta invariata anche al variare del numero di set di osservazioni perché ad ogni incremento di set di osservazioni il numero delle incognite risulta sempre maggiore al numero di equazioni a disposizione.

Quindi, l'unica soluzione possibile per il sistema ad anello è quella di considerare l'anello come un triangolo con un solo nodo di richiesta. Come è stato fatto per il caso di maglia triangolare, anche qui, bisogna considerare due set di osservazioni per rendere il sistema osservabile. (Tabella 5.23 e Tabella 5.24).

Tabella 5.23 Riassunto dati per sistema ad anello-triangolare (1 set)

tratti	$d_i(\text{mm})$	$l_i(\text{m})$	c_i	$\Delta H(\text{m})$	Nodi	Q
0-1	300	1000	200	2.22	0	- 130
0-2	300	500	100	1.11	1	130
1-2	300	500	100	0.00	2	0

Tabella 5.24 Riassunto dati per sistema ad anello-triangolare (2-set)

tratti	$d_i(\text{mm})$	$l_i(\text{m})$	c_i	$\Delta H(\text{m})$	Nodi	Q
0-1	300	1000	200	2.89	0	-150
0-2	300	500	100	1.45	1	150
1-2	300	500	100	0.00	2	0

Per questo sistema anello-triangolare, il filtro di Kalman viene applicato dopo aver inizializzato lo stesso con una distribuzione di probabilità dei coefficienti di scabrezza di tutti e tre i tratti uguale a quella che è stata utilizzata per il caso di maglia triangolare con due set di osservazioni (paragrafo 5.3.7). I valori ottenuti dall'applicazione del filtro di Kalman vengono riportati in Tabella 5.25 e 5.26.

Tabella 5.25 Riassunto risultati ottenuti al 3 step

q	media	var	GAIN	c_i	media	var
0	-130,00	0,00	0,86	0-1	199,7	4,72
1	130,00	0,00	0,88	0-2	99,33	4,69
2	0	0,00	0,71	1-2	100,3	9,98

Tabella 5.26 Riassunto risultati ottenuti al 3 step

q	media	var	GAIN	ci	media	var
0	-150	0,00	0,86	0-1	199,7	4,72
1	150	0,00	0,88	0-2	99,33	4,69
2	0	0,00	0,71	1-2	100,3	9,98

I risultati che si ottengono sono, espressi in funzione di GAIN, molto prossimi al valore realistico dei coefficienti di scabrezza dei tratti (c). Quindi, l'unica metodologia utilizzabile per la risoluzione di uno schema ad anello è quella di considerarlo triangolare, o meglio, avere all'interno dei set di osservazioni un'informazione lungo uno dei due tronchi del carico.

5.4 DISCUSSIONE RISULTATI OTTENUTI

Oltre ai casi esaminati in dettaglio nei paragrafi precedenti, sono stati studiati altri casi con topologia semplice ma numerosità dei nodi sempre più elevata (fino al caso in cui si ha una rete formata da molte maglie quadrate (11x11) topologicamente simmetrica con portate richieste uguali in tutti i 121 nodi), i cui risultati non vengono riportati per non rendere ridondante la trattazione in quanto non aggiungono ulteriori informazioni rispetto ai casi esposti.

Dall'analisi dei risultati ottenuti, nei paragrafi precedenti, è possibile riassumere quanto esposto con le seguenti considerazioni :

- Nella fase di calibrazione, avendo la piena conoscenza di tutti i carichi nella rete (H_i), di tutte le portate erogate nei nodi (Q_i), delle lunghezze dei tratti (l_i) e dei diametri delle tubazioni (D_i), le uniche incognite da dover determinare sono le portate circolanti (Q_{ij}) e la scabrezza dei tratti (c_{ij}). Per poter determinare tali incognite, si ha bisogno di un numero di equazioni pari al numero delle incognite (2l), in modo tale da poter rendere il sistema determinato. Le equazioni da considerare per risolvere il

problema sono: l equazioni del moto, $n-1$ equazioni di continuità nei nodi, m equazioni alle maglie (ricordando che $m+n-1 = l$).

- Considerando tutte le equazioni appena esposte, il problema risulterebbe determinato in quanto il numero di incognite coincidono con il numero di equazioni disponibili, ma a ben guardare, delle equazioni che si hanno a disposizione, le m equazioni di equilibrio alle maglie sono “non informative” in quanto non permettono di ottenere informazioni “utili” per la risoluzione univoca del problema. Considerando le equazioni in forma matriciale è possibile dire che sono combinazione lineari delle altre equazioni, per cui, il rango della matrice delle equazioni a disposizione è pari a $2l-m$.
- Poiché il problema risulta “indeterminato”, in quanto il numero delle equazioni è inferiore al numero delle incognite, per poterlo risolvere si ha la necessità di individuare altre m “condizioni” che permettano di avere un numero “necessario e sufficiente” di informazioni che rendano il problema determinato.
- La risoluzione del problema della “mancanza” di m equazioni è possibile ottenerla partendo dal concetto di osservabilità che permette di ottenere, tramite proprio l’incremento del numero di osservazioni del sistema in condizioni differenti, le m equazioni/relazioni mancanti tali da rendere il sistema determinato.
- Nei casi studiati, però, si è fatto riferimento, inizialmente, ad una sola osservazione del sistema in un preciso istante t , che non permette, se non per i casi a singola maglia o a maglia aperta, di ottenere un risultato prossimo a quello ricercato delle incognite Q_{ij} e c_{ij} . Successivamente, invece, si è fatto vedere come, per casi semplici come sono la maglia rettangolare e quella triangolare, è possibile ottenere un sistema osservabile e per il quale l’applicazione del filtro di Kalman ha permesso di ottenere risultati molto vicini al valore reale dei parametri incogniti.

- La scelta di considerare un singolo set di osservazioni, però, non è del tutto priva di informazioni perché se da un lato non si riesce ad ottenere un risultato “esatto” e preciso per tutte le variabili incognite, dall’ altro è possibile ottenere, e per tale motivo è stato scelto di considerarlo, una “oscillazione” intorno al valore reale dei parametri incogniti con un valore medio prossimo al valore esatto e una varianza ridotta rispetto all’intero campo di variabilità considerato.
- Ultima considerazione che è opportuno fare, per completezza, è che anche se per i casi esaminati il GAIN medio risulta basso, come ad esempio nel caso a 121 nodi può risultare anche negativo, quindi con un peggioramento medio della stima, il metodo risulta particolarmente vantaggioso per una prima “stima” dei parametri incogniti. Infatti, il GAIN medio non è un parametro “efficace” a riassumere il “miglioramento” ottenuto con questo metodo, perché esso è particolarmente influenzato dal rapporto fra le scabrezze dei tratti (dove per scabrezza non si intende, in questo caso, il coefficiente di scabrezza c , ma del coefficiente β , secondo la definizione di Darcy, che porta in conto anche l’influenza dei diametri).

5.5 ANDAMENTO DELLA FUNZIONE DI GAIN

Nella Figura 5.7 viene riportato l’andamento della funzione di GAIN per tutti i casi esaminati in funzione del numero di step effettuati del filtro di Kalman. L’andamento del GAIN ottenuto in figura 5.7 mostra come esso sia estremamente pendente nei primi step del filtro e che poi tenda, con l’aumentare del numero di iterazioni, a rimanere pressoché costante. Tale risultato mette in evidenza la peculiarità del filtro di Kalman e cioè che il filtro permette la rapida convergenza verso il risultato finale.

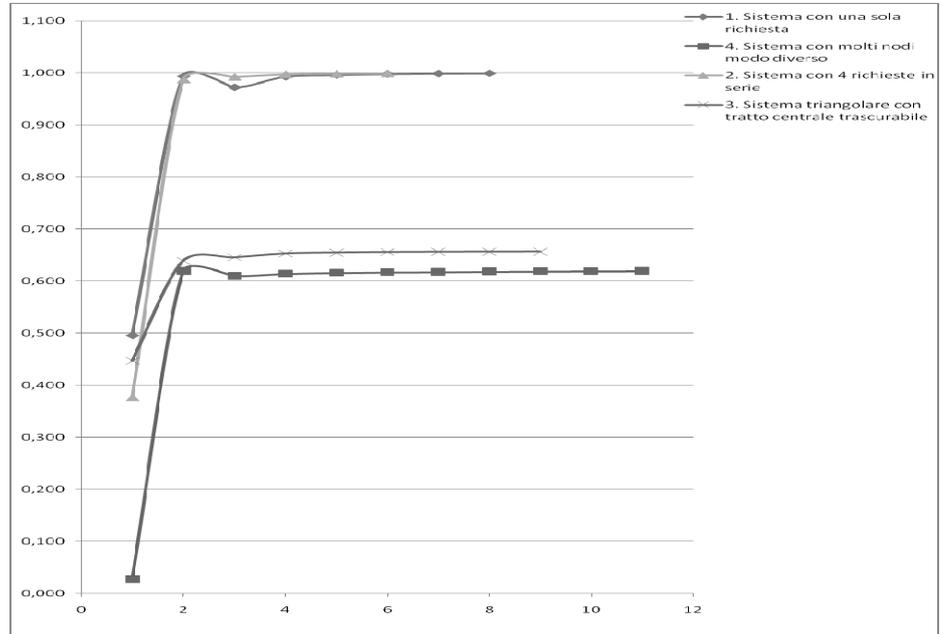


Figura 5.7 Andamento del GAIN in funzione degli step per tutti i casi esaminati

6 DEFINIZIONE ANALITICA DI SISTEMI OSSERVABILI E NON OSSERVABILI

6.1 PREMESSA

Tutto quanto finora studiato è stato fatto partendo dall'ipotesi che i sistemi analizzati fossero tutti osservabili. Ovviamente non tutti gli schemi idraulici hanno le stesse peculiarità, per cui per poter ottenere un risultato del tutto generale e, anche, per classificare tutti i possibili scenari che si possono ottenere, bisogna partire dalle caratteristiche delle reti, dal numero di incognite per ogni problema affrontato e dal numero di equazioni a disposizione per ottenere tutte le informazioni incognite del problema.

Partendo dalle definizioni generali delle caratteristiche della rete, bisogna ricordare che le reti idriche sono costituite da l tratti, n nodi e m maglie chiuse. Tali elementi sono confrontabili tra di loro per mezzo dell'equazione fondamentale per le reti a maglie chiuse :

$$l - m = n - 1 \quad (6.1)$$

Oltre alle caratteristiche topologiche delle reti, di cui non si dimenticano le l scabrezze dei tratti, esistono anche le caratteristiche idrauliche della rete che sono gli n carichi nei nodi (H_i), le n portate erogate ai nodi (Q_i) e le l portate circolanti nei tratti (Q_j).

Tutti questi elementi, appena descritti, permettono di avere piena conoscenza delle reti idriche. Ovviamente, a seconda del problema affrontato, alcune di esse saranno note a priori ed altre invece incognite, per cui, bisognerà individuare, per ogni problema, un numero di equazioni necessarie per poter ottenere l'informazione completa della rete.

Nel caso della calibrazione pura, per esempio, le incognite del sistema sono le l scabrezze e le l portate circolanti, mentre sono note tutte le altre caratteristiche del sistema.

Quindi, per poter ottenere tutte le caratteristiche della rete, bisognerà pareggiare il numero di incognite del problema con equazioni linearmente indipendenti che correlino le caratteristiche note con quelle incognite della rete. In questo tipo di problema, il numero delle incognite è pari a $2l$, per cui, è necessario determinare $2l$ equazioni.

Le uniche equazioni a disposizione, per risolvere il problema, sono quelle dell'idraulica e più precisamente le $n-1$ equazioni di continuità ai nodi e le l equazioni del moto nei tratti. Dalla relazione (6.1) si ottiene che il numero di equazioni a disposizione per risolvere il problema è minore rispetto al numero di incognite; infatti, andando a sottrarre le equazioni a disposizione dal numero delle incognite del sistema, si ottiene che il sistema ha m incognite in più rispetto alle equazioni. Per tale motivo il sistema risulta non determinabile.

Per poter rendere il sistema osservabile, quando cioè il numero delle equazioni è almeno pari al numero delle incognite, l'unica possibilità che si ha, in quanto non esistono altre equazioni disponibili, è incrementare il numero di set di osservazioni. Se si indica con k il numero di osservazioni necessarie per pareggiare il numero di incognite, si ottiene un'uguaglianza equazioni-incognite nel modo seguente:

$$(k+1) l \leq k (l+n-1)$$

E dopo alcuni semplici passaggi, ricordando l'equazione fondamentale si ottiene:

$$k \geq l/(n-1) = 1 + m/(n-1) \quad (6.2)$$

Ovviamente le condizioni minime che si hanno sono : $n \geq 2$,cioè almeno un nodo di ingresso ed uno di uscita.

Per una comprensione più ampia della (6.2), bisogna fare alcune considerazioni inerenti gli elementi che la compongono, nonché definire se la (6.2) è una equazione o una disequazione e, nel secondo caso, il verso di essa. Per dare una schematizzazione migliore, è possibile definire il campo dei possibili scenari nei seguenti gruppi:

- Equazione con $n = m+1$
- Equazione con $n > m+1$

- Disequazione “positiva” ed $n = m+1$
- Disequazione “negativa” ed $n = m+1$
- Disequazione “positiva” ed $n > m+1$
- Disequazione “negativa” ed $n > m+1$

6.2 POSSIBILI SCENARI DI SISTEMI IDRICI IN PRESSIONE

6.2.1 Equazione con $n = m+1$

Considerando la (6.2) come una equazione ed al posto di n si sostituisce $m+1$, si ottiene che la (6.2) diventa :

$$k = 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) = 1+1 = 2 \quad (6.2.1)$$

Dalla relazione (6.2.1) è facile dimostrare come il numero di osservazioni minime necessarie è pari a 2. Il problema fondamentale, però, è capire se il sistema è osservabile oppure non determinabile e nel caso di non determinabilità che tipo di non determinabilità si tratta.

Un possibile esempio semplice può essere: $n = 3$; $m = 2$ il cui schema esemplificativo è riportato in figura 6.1.

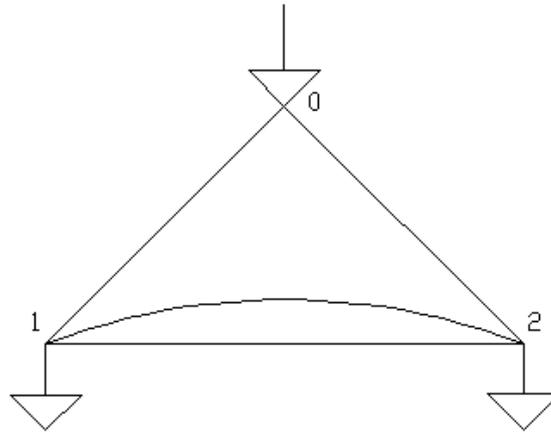


Figura 6.1 Maglia triangolare con raddoppio su un lato

Questa rete, per esempio, ha un numero di incognite, ad un singolo set di osservazioni, pari a 8 ed un numero di equazioni pari a 7. Poiché il k determinato è pari a 2, bisognerà considerare due set di osservazioni e, quindi, 14 equazioni e le rispettive 12 incognite.

Contando soltanto il numero di equazioni e di incognite, il sistema sembrerebbe determinato, ma, in realtà, è un “falso” risultato in quanto, andando ad analizzare le equazioni a disposizione, del moto e di continuità nel nodo, si ottiene che il numero di equazioni linearmente indipendenti è sempre minore al numero di incognite del problema. Infatti, considerando per semplicità di esposizione, la “matrice dei coefficienti”

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che:

- La matrice A_{pp} è una matrice quadrata diagonale sulla cui diagonale principale ci sono i termini $\beta|Q_{ij}|$ (per ogni simulazione)

- Le matrici A_{pn} e A_{np} sono matrici rettangolari 4×3 e 3×4 , essendo l'una la trasposta dell'altra, rispettivamente con termini 1, -1, 0 a seconda se la portata circolante entra, esce oppure il nodo non fa parte del tratto. (per ogni simulazione)

Più precisamente la matrice A_{np} è :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, la matrice dei coefficienti risulta essere, per ogni set di osservazione :

$$\begin{pmatrix} \beta|Q_{01}| & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta|Q_{02}| & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta|Q_{12'}| & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta|Q_{12''}| & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

Anche se è possibile scrivere la matrice dei coefficienti, per il sistema analizzato, dallo studio di tale matrice è possibile, immediatamente, definire se il sistema è osservabile oppure non determinabile. Per la proprietà delle matrici quadrate, tale matrice, avendo il determinante uguale a 0, risulta non avere rango massimo. Poiché la matrice non ha rango massimo, le equazioni all'interno della matrice non sono tutte linearmente indipendenti. Poiché il numero di equazioni è minore del

numero delle incognite, bisognerà considerare il sistema (6.2.2) esteso a due simulazioni, così da avere 12 equazioni e 12 incognite.

$$\begin{pmatrix}
 \beta|Q_{01}| & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & \beta|Q_{02}| & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \beta|Q_{12'}| & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \beta|Q_{12''}| & 0 & -1 & 1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \beta|Q_{01}'| & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & \beta|Q_{02}'| & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \beta|Q_{12'}'| & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \beta|Q_{12''}'| & 0 & -1 & 1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

Dall'analisi del sistema riportato nella (6.2.3), in cui con gli apici “'” si è definito il secondo set di osservazioni, si ottiene un sistema completo in cui si hanno 14 equazioni e 12 incognite. Per poter conoscere se il sistema è osservabile oppure no, bisogna ricordare la definizione di osservabilità. Il sistema si dice osservabile se il numero di equazioni linearmente indipendenti è maggiore o uguale al numero delle incognite. Poiché la (6.2.3) ha un numero di equazioni indipendenti pari a 11, in

quanto le righe 5- 6- 7 sono identiche alle righe 12- 13- 14, il sistema analizzato risulta non determinabile.

La non determinabilità può essere divisa in due categorie :

- Non determinabilità per indeterminatezza del sistema (non osservabilità)
- Non osservabilità per mancanza di osservazioni

La non determinabilità per mancanza di osservazioni si ottiene ogni volta che il numero di set di osservazioni è insufficiente per la determinazione del sistema; questo tipo di non determinabilità è possibile eliminarla sovrastimando il sistema, cioè tramite più set di osservazioni, in modo tale, tramite l'applicazione del Filtro di Kalman, da poter ottenere un risultato prossimo al valore reale dei parametri.

La non determinabilità per indeterminatezza del sistema e, di conseguenza, la non osservabilità, invece, si ottiene quando, a prescindere dal numero di set di osservazioni, non è possibile stimare tutte le variabili del sistema.

Per il sistema considerato, stante le considerazioni precedentemente esposte, si ottiene una non determinabilità per indeterminatezza del sistema per cui il sistema risulta non osservabile.

6.2.2 Equazione con $n > m+1$

Considerando la (6.2.1) come una equazione ed al posto di n si sostituisce, per esempio $m + 2$, si ottiene che la (6.2.1) diventa :

$$1 < k = 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) < 1+1 < 2 \quad (6.2.4)$$

Analiticamente si ottiene che il numero minimo di set di osservazioni necessari sono un numero compreso tra 1 e 2. Poiché le osservazioni sono interi, si otterrà che con un solo set di osservazioni si ottiene un sistema non determinabile per mancanza di informazioni; mentre con due set di osservazioni, si ottiene che il sistema è osservabile e quindi applicabile il filtro di Kalman per ridurre l'incertezza dei parametri

incogniti. Quindi, a rigore, il presente caso non è realizzabile in quanto i set di osservazioni sono numeri interi.

6.2.3 Disequazione “positiva” con $n = m+1$

Considerando la (6.2.1) come una disequazione positiva e sostituendo l'uguaglianza $n = m + 1$, si ottiene :

$$k = 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) > 1+1 > 2 \quad (6.2.5)$$

Quindi, il numero di set di osservazioni è maggiore di due. Tale sistema, per come è stato ipotizzato, risulta ricadente nel caso del paragrafo 7.2.1. Con tali condizioni, questa tipologia di reti è non osservabile per indeterminatezza del sistema.

6.2.4 Disequazione “negativa” con $n = m+1$

Considerando la (6.2.1) come una disequazione negativa e sostituendo al posto di $n = m + 1$, si ottiene :

$$1 < k = 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) < 1+1 < 2 \quad (6.2.6)$$

Quindi, essendo il numero di set di osservazioni minore di due, l'unico possibile risultato è uno. Tale sistema, per come è stato ipotizzato, risulta coincidente al caso del paragrafo 6.2.1 e, quindi, qualsiasi sistema di questa tipologia è non osservabile per indeterminatezza del sistema.

6.2.5 Disequazione “positiva” con $n > m+1$

Considerando la (6.2.1) come una disequazione negativa e sostituendo ad $n > m + 1$, si ottiene :

$$k > 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) \geq 2 \quad (6.2.7)$$

Quindi, il numero di set di osservazioni è maggiore o uguale a due. Un esempio, può essere: $n=3$ ed $m=1$. Con tali ipotesi, si ottiene uno schema del tipo di figura 7.2.

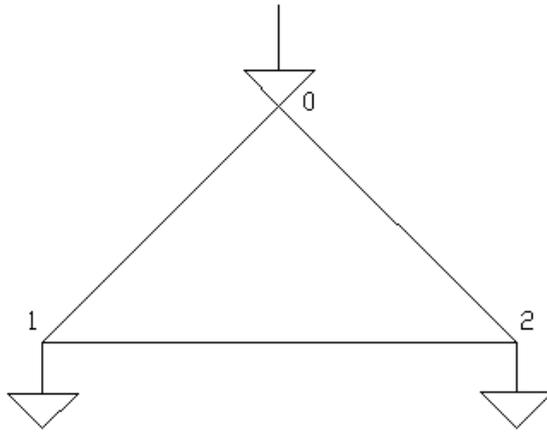


Figura 6.2 Maglia triangolare

Questa rete, per esempio, ha un numero di incognite, ad un singolo set di osservazioni, pari a 6 ed un numero di equazioni pari a 6 (equazioni di continuità e del moto). Poiché il k determinato è maggiore o uguale a 2, bisognerà considerare due set di osservazioni che porta ad avere 12 equazioni e 9 incognite.

Osservando soltanto il numero di equazioni e di incognite, il sistema sembrerebbe sovra determinato. Per poter vedere se il sistema è osservabile oppure no bisogna analizzare la matrice dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che:

- La matrice A_{pp} è una matrice quadrata diagonale sulla cui diagonale principale ci sono i termini $\beta|Q_{ij}|$ (per ogni simulazione)

- La matrice A_{pn} e A_{np} sono matrici rettangolari 3×3 , essendo l'una la trasposta dell'altra, rispettivamente con termini 1, -1, 0 a seconda se la portata circolante entra, esce oppure il nodo non fa parte del tratto. (per ogni simulazione)

Più precisamente la matrice A_{np} è :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti risulta, per ogni set di osservazione, essere :

$$\begin{pmatrix} \beta|Q_{01}| & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta|Q_{02}| & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta|Q_{12}| & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

Anche se è possibile scrivere la matrice dei coefficienti, per il sistema analizzato, dallo studio di tale matrice è possibile, immediatamente, definire se il sistema analizzato è osservabile oppure non determinabile. Per la proprietà delle matrici quadrate, tale matrice, avendo il determinante uguale a 0, risulta non avere rango massimo. Poiché la matrice non ha rango massimo, le equazioni all'interno della matrice non sono tutte linearmente indipendenti. Poiché il numero di equazioni è minore del numero delle incognite, bisognerà considerare il sistema (6.2.2) esteso a due simulazioni, così da avere 12 equazioni e 9 incognite.

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 \beta|Q_{01}|_1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & \beta|Q_{02}|_1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \beta|Q_{12}|_1 & 0 & -1 & -1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \beta|Q_{01}|_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & \beta|Q_{02}|_2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \beta|Q_{12}|_2 & 0 & -1 & -1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \quad (6.2.9)$$

Dall'analisi del sistema completo riportato nella (6.2.9) si ottiene un sistema in cui si hanno 12 equazioni e 9 incognite. Per poter conoscere se il sistema è osservabile oppure no, bisogna ricordare la definizione di osservabilità. Il sistema si dice osservabile se il numero di equazioni linearmente indipendenti è maggiore o uguale al numero delle incognite. Poiché la (6.2.8) ha 9 equazioni linearmente indipendenti, in quanto le righe 4 – 5 – 6 sono identiche alle righe 10 – 11 – 12 tra di loro linearmente dipendenti. Per tale motivo il sistema analizzato risulta osservabile.

In definitiva, per il sistema considerato, si ottiene una osservabilità quando il numero dei set di informazioni è maggiore o uguale a 2.

6.2.6 Disequazione “negativa” con $n > m+1$

Considerando la (6.2.1) come una disequazione negativa e sostituendo al posto di $n > m + 1$, si ottiene :

$$k < 1/(n-1) = 1 + m/(n-1) < 2 \quad (6.2.10)$$

Quindi, il numero di set di osservazioni è minore di due. Poiché è minore di due, l'unico possibile è uno. Con un singolo set di osservazioni è possibile ottenere lo stesso “campo” di esistenza del sistema che si ottiene nel caso del paragrafo 6.2.4. Però, rispetto al risultato ottenuto nel paragrafo 6.2.4, il sistema risulta non determinabile in quanto il numero delle incognite resta maggiore del numero delle equazioni. Il sistema ha, quindi, una non determinabilità per mancanza di set di osservazioni.

6.2.7 Riassunto risultati ottenuti

L'equazione (6.2.1) ci permette di sapere, per ogni tipo di rete, il numero minimo di osservazioni necessarie per ottenere un sistema osservabile. Infatti, nel caso in cui la rete sia ad albero, cioè per una rete con il numero di maglie pari a 0 il numero minimo di osservazioni necessarie per rendere il sistema osservabile è $k=1$, come è stato dimostrato nei paragrafi precedenti. Riassumendo, quanto esposto nel capitolo 6, si ottiene:

- Maglia triangolare : una sola maglia con tre nodi e tre tratti che per essere risolta ha bisogno di $k \geq 1,5$ e quindi $k = 2$.
- Sistema a maglia rettangolare : una sola maglia, con quattro nodi e quattro tratti che per essere risolta ha bisogno di $k \geq 1,33$ e quindi $k = 2$.
- Sistema complesso: quattro maglie, dodici tratti e nove nodi. Il sistema per essere risolto ha bisogno di $k \geq 1,5$ e quindi $k = 2$.

Tabella 6.1 Riassunto “campo di esistenza” delle reti idriche

	$n = m + 1$	$n > m + 1$
Equazione	Non Osservabile per Indeterminatezza del Sistema	$1 < k < 2$ Impossibile
Disequazione “positiva”	Sistema Non Osservabile per Indeterminatezza del Sistema	Osservabile
Disequazione “negativa”	Sistema Non Osservabile per Indeterminatezza del Sistema	Non Determinabile per mancanza di Osservazioni

Dalla tabella 6.1 è possibile ottenere le seguenti informazioni: nel caso in cui si ha che il numero dei nodi è pari al numero delle maglie aumentata di una unità, il sistema risulta sempre non determinabile per indeterminatezza del sistema e, quindi, non osservabile; nel caso, invece, che il numero dei nodi è maggiore del numero delle maglie aumentata di una unità, il sistema risulta o non determinabile per mancanza di osservazioni oppure osservabile. Quindi, per poter rendere il sistema osservabile anche nei casi di disequazione negativa e di equazioni basta aumentare il numero di set di osservazioni.

7 FILTRO DI KALMAN PER INCOGNITE DI TIPO MISTO

7.1 PREMESSA

Tutto quanto finora esposto è stato fatto considerando delle precise e restrittive ipotesi sui dati da monitorare. Infatti, l'applicazione del filtro di Kalman, considerata nei capitoli precedenti, è basata sull'ipotesi di avere la perfetta conoscenza di tutti i carichi della rete, di tutte le portate erogate ai nodi e di conoscere la topologia della rete a meno della scabrezza dei tratti. Questo tipo di ipotesi hanno permesso di ottenere i risultati dei soli coefficienti di scabrezza (c_i) dei tratti e delle portate circolanti (Q_{ij}) con un certo grado di accuratezza. In realtà, il filtro di Kalman è possibile ampliarlo anche a casi diversi da quelli esposti nei capitoli precedenti. Infatti, in questo capitolo, si realizza un filtro di "Kalman esteso" che è possibile utilizzarlo anche nei casi in cui non sono note tutte le perdite di carico e/o non sono note tutte le portate circolanti, ovvero una combinazione di esse.

Tale modifica al filtro di Kalman è stata apportata in quanto non sempre è possibile avere la perfetta conoscenza di tutte le perdite di carico e delle portate erogate, ma è più realistico pensare di avere delle informazioni "sparse" lungo la rete di portate erogate e carichi ai nodi.

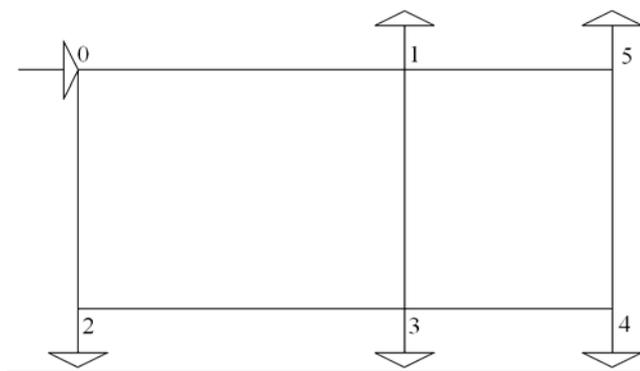


Figura 7.1 Sistema complesso a maglia chiusa

Il sistema su cui viene testato il filtro di Kalman esteso, per verificare le ipotesi alla base del filtro di Kalman esteso, è riportato in figura 7.1. Il sistema considerato è formato da due maglie chiuse rettangolari, con un nodo di ingresso e cinque nodi di uscita. Si ipotizza che, per il sistema di Figura 7.1, si sia fatto il monitoraggio di alcune portate erogate nei nodi e specificamente di tutti i nodi tranne del nodo più distante dal punto di immissione della portata e dell'immissione stessa, nonché di tutti i carichi nei nodi e di una sola portata circolante. Si è ipotizzato, inoltre, di conoscere la portata circolante nel tratto orizzontale che collega la rete al nodo più distante rispetto al punto di ingresso della portata. Tale scelta della portata circolante è stata fatta in modo da considerare la condizione peggiore tra quelle possibili perché le equazioni di continuità al nodo non permettono, tramite la conoscenza di questa portata circolante, di ridurre il numero delle incognite del problema, mentre, nel caso in cui si considera nota la portata circolante nel tratto verticale che collega la rete al nodo più lontano, si riescono ad ottenere maggiori informazioni sulle portate circolanti nei tratti attigui e, quindi, delle scabrezze, riducendo notevolmente il numero delle incognite.

Per poter ampliare il concetto del filtro di Kalman anche a casi diversi da quelli finora esposti, bisogna partire dalle equazioni dell'idraulica scritte in forma matriciale.

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{p0}H_0 \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

in cui :

$Q_{ij}^T = [Q_{12}, Q_{23}, \dots, Q_{np}]$	portate non note circolanti nei tratti
$H^T = [H_1, H_2, \dots, H_{n_n}]$	carichi nei nodi non monitorati
$H_0^T = [H_{01}, H_{02}, \dots, H_{0n_0}]$	carichi determinati nei nodi monitorati
$Q_i^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{nn}]$	portate erogate e monitorate nei nodi
$A_{pp}(i,i) = \beta_{ij} Q_{ij} _{ij}^{n-1}$	coeff. di resistenza nel tratto (i,j)
$A_{pn} = A_{np}^T = (-1, 0, +1)$	se la portata dal nodo n al tratto p = (entrante, zero, uscente)

Da queste equazioni che racchiudono in sé tutti i parametri del problema, sia quelli noti che quelli incogniti, è possibile ottenere il filtro

ricercato dopo alcuni passaggi matematici. Infatti, essendo note tutte le perdite di carico in tutti i nodi della rete, il vettore dei carichi incogniti H^T è un vettore nullo, mentre il vettore dei carichi noti H_0^T è un vettore dei carichi monitorati "completo". Il vettore dei carichi H_0^T è un vettore in cui non vi sono 0 al suo interno e sta ad indicare le perdite di carico di tutti i tratti della rete. Per quanto riguarda il vettore Q_{ij} , tale vettore sarà un vettore non completo in quanto le portate circolanti note devono essere immesse nella matrice dei termini noti. Allo stesso modo bisogna "spostare" le portate erogate ai nodi incognite nella matrice di sinistra, così da ottenere la nuova formulazione matriciale riportata nella (7.2).

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & 0 \\ A_{np} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij}' \\ Q_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H \\ Q_i'' \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

In cui:

- $Q_{ij}'^T = [Q'_{12}, Q'_{23}, \dots, Q'_{np}]$ portate sia note che non note circolanti nei tratti
- $\Delta H^T = [\Delta H_1, \Delta H_2, \dots, \Delta H_{np}]$ perdite di carico nei tratti monitorati
- $Q_i''^T = [Q_1'', Q_2'', \dots, Q_{nn}'']$ portate erogate nei nodi monitorati (per i nodi non monitorati 0)
- $Q_i'^T = [Q_1', Q_2', \dots, Q_{nn}']$ portate erogate nei nodi non monitorati
- $A_{pp}(i,i) = \beta_{ij} |Q_{ij}|^{n_{ij}-1}$ coeff. di resistenza nel tratto (i,j)
- $A_{np} = (-1, 0, +1)$ se la portata dal nodo n al tratto p = (entrante, zero, uscente)
- $A_{nn} = (-1, 0)$ con -1 per il nodo in cui è incognita la portata erogata e 0 per i restanti

Per ottenere la (7.2) è necessario passare per alcuni step intermedi di calcolo matriciale, partendo dalla (7.1). Prima di iniziare i passaggi per ottenere il sistema matriciale risolutivo del problema, è necessario ricordare quali sono i termini noti e quali quelli incogniti. Le ipotesi che sono state fatte, come già detto ad inizio capitolo, sono della piena conoscenza a priori dei carichi in tutti i nodi, di tutte le caratteristiche topologiche della rete a meno della scabrezza, di alcune portate erogate

nei nodi e, infine, di una portata circolante ovvero di una scabrezza in un tratto in cui un estremo è il nodo la cui portata erogata è incognita. Con queste ipotesi, è necessario portare a sinistra i carichi nei nodi ed è conveniente farlo considerando le perdite di carico lungo i tratti. Per fare ciò basta sottrarre alla (7.1) il prodotto matriciale riportato nella (7.3).

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Tramite questa operazione, si ottiene un nuovo sistema matriciale in cui le perdite di carico, essendo tutte note a priori, si trovano nella matrice dei termini noti.

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H_{ij} \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

La matrice (7.4) è la matrice di partenza per l'implementazione del filtro di Kalman nel caso in cui si hanno tutte le perdite di carico note e tutte le portate erogate (Todini 1999).

Poiché, però, si vuole ottenere una matrice in cui sono incognite alcune portate erogate ed alcune portate circolanti, bisogna continuare con le operazioni sulle matrici. Per procedere con le operazioni di modifica delle matrici, bisogna fare la seguente considerazione semplificativa: il termine A_{pn} è influente ai fini dello sviluppo della matrice perché è moltiplicato per una matrice nulla. Grazie a tale semplificazione, è possibile sostituire nella (7.4) alla matrice A_{pn} una matrice nulla, così da poter scrivere la (7.5) con una dimensione minore rispetto a quella datale. In realtà, però, è conveniente mantenere la dimensione iniziale, uguale a quella della (7.1), per continuare ad operare con matrici quadrate.

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & 0 \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij}' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H_{ij} \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

La (7.5) è un sistema matriciale adatto ai casi in cui siano note tutte le portate erogate, oltre alle perdite di carico lungo tutti i tratti. In realtà, il caso che si sta esaminando è un caso in cui non tutte le portate erogate sono note, quindi, è necessario continuare il processo di modifica dell'equazione matriciale (7.5) sottraendo ad essa la matrice dei termini incogniti delle portate circolanti espresse nella (7.6).

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & 0 \\ A_{np} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_i' \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

La (7.6) ha al suo interno termini uguali a quelli espressi nella (7.2). Dalla sottrazione matriciale della (7.6) alla (7.5) si riesce ad ottenere la (7.7) che è uguale alle (7.2).

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & 0 \\ A_{np} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij}' \\ Q_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H_{ij} \\ Q_i'' \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Dalla (7.7) è possibile ottenere le due equazioni che inizializzano il filtro di Kalman esteso, semplicemente esplicitando le equazioni della (7.7) in forma non matriciale.

$$\begin{cases} A_{pp} Q_{ij}' = \Delta H \\ A_{np} Q_{ij}' + A_{nn} Q_i' = Q_i'' \end{cases} \quad (7.8)$$

Dalla (7.8) è possibile, tramite la sostituzione della seconda equazione della (7.8) nella prima della stessa, ottenere le due equazioni di partenza del filtro di Kalman esteso, racchiuse nella (7.9).

$$\begin{cases} Q_{ij}' = A_{pp}^{-1} \Delta H = D k \\ A_{np} D k + A_{nn} Q_i' + \varepsilon_t = Q_i'' \end{cases} \quad (7.9)$$

Nella (7.9) si hanno dei termini diversi da quelli finora riportati e le cui caratteristiche sono :

- D è una matrice diagonale quadrata di dimensione pari ai tratti e sulla cui diagonale principale sono presenti le perdite di carico per ogni tratto.

- k è un parametro funzione delle caratteristiche topologiche della rete e delle perdite di carico elevate a n , la cui formulazione è diversa a seconda se si considera la formula di Hazen-Williams oppure no. Infatti, nel caso in cui si considera la formula di Hazen-Williams l'equazione del k è data dalla (7.10), altrimenti dalla (5.4).

- ε_t è la funzione di errore di cui si considera il bias μ_t e la matrice di covarianza degli errore R_t

$$k_i = (\alpha' d_i^{2.63} c_i) / (l_i^{0.54} |\Delta H_i|^{0.46}) \quad (7.10)$$

Nella (7.10) ci sono alcuni termini simili a quelli che si avevano nella (5.4), per cui, per tali elementi, si evita di riportare il loro significato, mentre l'unico termine diverso dalla formulazione precedente è l' α' che risulta pari a 278.

Le due equazioni riportate nella (7.9) sono l'equazioni di stato e di misura del sistema che permettono di scrivere il filtro di Kalman esteso. Tale filtro di Kalman esteso è stato ottenuto con lo stesso procedimento logico del filtro di Kalman di Todini (1999) e della cui trattazione si rimanda all'articolo dello stesso Todini (1999).

Per esplicitare il filtro di Kalman esteso bisogna considerare le ipotesi in cui si lavora:

- essendo in fase di calibrazione, l'equazione della $P_{t|t}$ è costante e, quindi, la si può porre, come per il caso di sistema in cui erano note tutte le portate erogate e i carichi (Todini 1999), pari alla matrice identità I .

Con tale ipotesi fatta, l'equazione del $K_{t|t}$ del filtro di Kalman esteso ha la forma riportata nella (7.11).

$$K_{t|t} = K_{t-1|t-1} + D A_{np}^T (A_{np} D D A_{np}^T + R_t)^{-1} (Q_i - \mu_t - A_{np} D K_{t-1|t-1}) \quad (7.11)$$

Con $Q_i = Q_i'' + A_{nn} Q_i'$.

Nell'implementazione del filtro il termine Q_i' viene ipotizzato pari a 0 inizialmente, mentre durante gli step del filtro viene ipotizzato pari alla media dei valori ottenuti nelle k simulazioni. Con tale filtro di Kalman esteso, è possibile ottenere, con un certo grado di affidabilità (GAIN – rmse), sia le portate erogate nei nodi incogniti che le scabrezze dei tratti della rete. Il GAIN e l' rmse sono definiti nel modo seguente :

$$\text{GAIN} = 1 - \sigma_{\text{fin}}^2 / \sigma_{\text{iniz}}^2 \quad (7.12)$$

$$\text{rmse} = \text{RMSE} / X \quad (7.13)$$

con

σ_i^2 = varianza della distribuzione;

RMSE= MSE^{0.5} (con MSE = scarto quadratico medio);

In realtà l'applicazione del filtro di Kalman a una tipologia di reti del tipo di quelle utilizzate nei capitoli precedenti, è efficace quando si hanno a disposizione più set di osservazioni. Infatti, questo tipo di filtro di Kalman esteso ha le stesse peculiarità di applicazione del filtro di Kalman di Todini (1999), per cui il suo utilizzo è subordinato alla catalogazione del problema come visto in tabella 6.1. Quindi, dall'analisi della tabella 6.1, per il caso esaminato, sono necessari più set di osservazioni per rendere il sistema osservabile ed ottenere un GAIN molto prossimo all'unità.

7.2 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: INCOGNITA UNA PORTATA EROGATA

Considerando la rete a maglie chiuse della figura 7.1 si ipotizzano note le misure delle perdite dei carichi in tutti i tratti, delle portate erogate in quattro nodi su sei, di cui cinque di erogazione e uno di immissione, e di una portata circolante in un tratto. Si può considerare, a vantaggio di complessità, il caso meno informativo, in cui la portata circolante è quella del tratto orizzontale più lontano dall'ingresso della portata in rete e collegato al nodo di cui non si conosce la portata erogata. In tale

situazione, considerando una distribuzione di probabilità per le scabrezze di tipo uniforme, il sistema misto può essere riscritto sottoforma dell'equazione matriciale (7.7) e, quindi, può essere risolto con l'equazione del filtro di Kalman modificato (7.11). Per verificare la validità del modello del filtro di Kalman esteso è possibile ipotizzare un sistema "reale", come nelle tabelle 7.1 e 7.2, di cui si ha piena conoscenza dei parametri e da esso andare a trascurare alcuni parametri posti incogniti. Con questa ipotesi sul sistema "controllato - reale" è possibile applicare il filtro di Kalman esteso e vedere le sue performance. La scelta che è stata fatta è quella di ipotizzare di conoscere la portata circolante e/o il coefficiente di scabrezza (c) del tratto orizzontale 3-4 e, nel contempo, di avere come valori incogniti le portate erogate nei nodi 0 e 4.

Tabella 7.1 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa

Set di osservazione n.1		
Nodo	H (m)	Q _i (l/s)
0	200	-145
1	97.52	40
2	110.06	50
3	91.56	30
4	90.79	15
5	91.10	10

Tabella 7.2 Caratteristiche topologiche di un sistema complesso a maglia chiusa

Caratteristiche topologiche della rete			
Tratto	L (m)	D (mm)	c
0-1	1000	100	325
0-2	1500	150	200
2-3	1000	150	150
1-3	1500	150	100
1-5	1000	150	100
3-4	1000	200	150
5-4	1500	150	150

Applicando il filtro di Kalman esteso ad un solo set di osservazioni, si ottengono i risultati riportati in tabella 7.3.

Tabella 7.3 Risultati sistema complesso a maglia chiusa con una simulazione

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media finale	Q _i media (l/s)
1246.91	375.23	0.70	352.7	-145.62
1999.92	79.45	0.96	189.4	40.03
1815.44	282.00	0.84	129.3	50.06
1816.23	1179.05	0.19	148.5	29.99
1732.46	0.02	1.00	104.4	15.56
-	-	-	150.0	9.98
1780.69	0.23	1.00	152.5	
		0.7816	GAIN medio	

Con un solo set di osservazioni, come si evince dai valori ottenuti in tabella 7.3, si ottengono dei risultati che permettono di avere una conoscenza più che discreta dei parametri incogniti della rete con un GAIN medio pari a circa a 0,78, cioè con una riduzione dell'incertezza maggiore del 78%. Ovviamente tale risultato se da un lato è confortante perché avvalorava l'utilizzo del filtro di Kalman esteso anche al caso, sopra realizzato, di un solo set di osservazioni, dall' altro, poiché il sistema è un sistema non determinabile per mancanza di osservazioni, avrà un valore del GAIN molto basso per alcuni tratti. Osservando, infatti, il GAIN ottenuto per il tratto 1-3, si nota che il miglioramento è pari a 0,19, cioè si ha una riduzione della varianza di circa il 19%, che, di certo, non permette di definire alte performance di conoscenza della scabrezza del tratto stesso.

Invece, volendo ottenere un sistema osservabile, e, quindi, rientrando nel caso di disequazione positiva della tabella 6.1 con $n > m+1$, bisogna considerare un secondo set di osservazioni sullo stesso schema precedente. Il secondo set di osservazioni "controllato" è riportato in tabella 7.4. Di tale set di osservazione, per poter validare il filtro di

Kalman esteso per sistema osservabile, è conveniente, dal punto di vista della non riduzione delle incognite del problema, ipotizzare incognito il valore delle portate richieste nel nodo di immissione 0, del nodo 4 che è quello più distante dall'immissione e nota la portata circolante e/o il coefficiente di scabrezza (c) del tratto orizzontale che collega il nodo non monitorato 3-4.

Tabella 7.4 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa

Set di osservazione n.2		
Nodo	H (m)	Q_i (l/s)
0	200	-135
1	102.80	20
2	125.93	25
3	86.35	30
4	80.91	40
5	81.58	20

Con tale secondo sistema, considerato unitamente al primo set di osservazioni, è possibile inizializzare il filtro di Kalman esteso, così da ottenere i risultati riportati in tabella 7.5.

Tabella 7.5 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, due set di osservazioni

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media fin	rmse	Q_i (l/s)
1508.35	24.08	0.98	334.3	0.03	-145.61
1923.40	5.58	1.00	197.9	0.02	40.03
1553.66	10.77	0.99	146.7	0.03	50.05
1901.62	48.97	0.97	107.6	0.10	29.99
1264.37	0.01	1.00	103.9	0.04	15.55
-	-	-	150.0	-	9.99
1467.30	0.19	1.00	152.1	0.01	
		0.99	GAIN medio		1° set

Tabella 7.6 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, due set di osservazioni

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media fin	Q_i (l/s)
1675.55	24.08	0.99	334.3	-135.75
1637.79	5.58	1.00	197.9	20.05
1600.05	10.77	0.99	146.7	25.05
1293.16	48.97	0.96	107.6	29.98
1514.34	0.01	1.00	103.9	40.70
-	-	-	150.0	19.97
1567.67	0.19	1.00	152.1	
		0.99	GAIN medio	2° set

Con due set di osservazioni, come si evince dalle tabelle 7.5 e 7.6, si ottiene una riduzione della variabilità del parametro coefficiente di scabrezza (c) molto alta rispetto al valore iniziale ed, anche, un valore delle portate erogate ed immesse molto prossime al valore reale. Con due set di osservazioni si ottiene una buona precisione nei risultati, dimostrato dal fatto che il GAIN è quasi pari all'unità (0,99), mentre il rmse è, per quasi tutti i tratti, molto prossimo a 0.

Per comprendere le potenzialità del filtro di Kalman esteso e la sua facile applicabilità, si è ipotizzato di avere la necessità di spingere la ricerca del parametro ad un valore sempre più preciso così da far tendere il risultato ad un valore sempre più preciso. Per poter fare ciò, si è ipotizzato di incrementare il numero dei set di osservazioni a disposizione per avere un sistema osservabile di grado superiore a quello precedente in quanto la differenza tra il numero di equazioni a disposizione e le incognite del problema è maggiore rispetto a quello che si è ottenuto con soli due set di osservazioni.

Applicando tali ipotesi, si è proceduto con l'inizializzare il filtro di Kalman esteso con tre set di osservazioni, le cui caratteristiche sono date in tabella 7.1 - 7.2 - 7.4 - 7.7.

Tabella 7.7 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa

Set di osservazione n.3		
Nodo	H (m)	Q _i (l/s)
0	200	-145
1	94.99	20
2	111.71	35
3	75.84	30
4	70.71	40
5	71.82	20

Con i valori riportati in tabella 7.7, dopo lo stesso numero di step del filtro utilizzati per il caso con soli due set di osservazioni, si sono ottenuti i risultati riportati in tabella 7.8, 7.9, 7.10.

Tabella 7.8 Risultati sistema complesso maglia chiusa, tre set di osservazioni

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media fin	Q _i (l/s)
1585.13	9.17	0.99	333.7	-145.60
1661.01	2.09	1.00	198.4	40.03
1826.09	3.80	1.00	147.5	50.05
1353.03	14.96	0.99	105.3	29.99
1672.38	0.01	1.00	103.9	15.54
-	-	-	150.0	9.99
1586.08	0.13	1.00	151.6	
		0.9967	GAIN medio	1° set

Tabella 7.9 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, tre set di osservazioni

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media fin	Q_i (l/s)
1929.20	9.17	1.00	333.7	-135.73
1759.75	2.09	1.00	198.4	20.05
1551.84	3.80	1.00	147.5	25.05
1433.86	14.96	0.99	105.3	29.97
1427.51	0.01	1.00	103.9	40.69
-	-	-	150.0	19.97
1557.98	0.13	1.00	151.6	
		0.9973	GAIN medio	2°set

Tabella 7.10 Risultati sistema complesso a maglia chiusa, tre set di osservazioni

Var. c iniz.	Var. c finale	GAIN	c media fin	Q_i (l/s)
1633.22	9.17	0.99	333.7	-146.01
1499.73	2.09	1.00	198.4	20.05
1730.65	3.80	1.00	147.5	35.06
1545.35	14.96	0.99	105.3	29.97
1607.43	0.01	1.00	103.9	40.95
-	-	-	150.0	19.98
1850.85	0.13	1.00	151.6	
		0.9967	GAIN medio	3°set

Con tre set di osservazioni si ottiene un miglioramento del GAIN, rispetto a quello ottenuto nel caso di soli due set di osservazioni, di poco

più dello 0,5% ma con un incremento computazionale notevole rispetto al vantaggio ottenuto.

Riassumendo quanto finora fatto in questo paragrafo, è facile osservare che con un singolo set di osservazioni è possibile ottenere un risultato vicino al risultato reale (GAIN 81%), mentre con due set di osservazioni si ottiene un forte miglioramento dell'accuratezza del risultato ottenuto con un solo set di osservazioni con un miglioramento di circa il 18%, rispetto a quello ad un unico set, portando il GAIN al 99%. Infine, aumentando il numero di set di osservazioni, per semplicità è stato esposto solo il caso in cui si incrementa di un solo set, è facile notare come il risultato che si ottiene, con il numero di step del filtro fissato uguale per i vari casi, si approssima sempre meglio al risultato "esatto", ma il cui miglioramento è talmente non significativo che permette di affermare che il numero di set di osservazioni necessari, per sistemi ricadenti nel caso appena esposto, è pari a due.

7.2.1 Sistema a maglia chiusa: campo variabilità ridotto

Tutto quanto fatto nel paragrafo precedente prevedeva un campo di variabilità della scabrezza dei tratti molto ampio in quanto non si facevano ipotesi restrittive sul suo possibile valore. In realtà, questo tipo di ipotesi risulta essere, da un lato, ottimale perché permette di non avere dei vincoli di conoscenza a priori sui possibili valori che il coefficiente di scabrezza (c) può avere, ma dall'altro dà risultati di performance del filtro di Kalman esteso, espressi tramite il GAIN, molto elevati ma privi di significato conoscitivo proprio per la definizione del GAIN stesso.

Per evitare questo tipo di problemi e mettere in luce le potenzialità del filtro di Kalman esteso anche con dei vincoli a priori sui possibili coefficienti di scabrezza (c), si è ipotizzato di dare una inizializzazione al parametro c del filtro vincolandolo tra un valore massimo e un valore minimo tratto per tratto. Il vincolo che è stato scelto è quello di dare a tutti i tratti una distribuzione di tipo uniforme del coefficiente di scabrezza con estremo superiore pari al valore reale incrementato di circa il 10% e, come estremo inferiore, il valore reale diminuito di circa il 10%. Con tali ipotesi, il campo di variabilità considerato è molto più ridotto rispetto al caso precedente, i cui risultati vengono riportati nei paragrafi

successivi per tutti e tre le tipologie di situazioni affrontate nel paragrafo precedente.

7.2.2 Un solo set di osservazioni: sistema non determinabile

Come esposto nel paragrafo 7.1, anche qui viene riproposta la stessa metodologia del filtro di Kalman esteso nel caso in cui si ha un solo set di osservazioni. Per semplicità di trattazione, viene considerato il set di osservazioni considerato già precedentemente e riportato in tabella 7.1. Per quanto riguarda le caratteristiche topologiche della rete, anche esse sono le stesse di quelle riportate in tabella 7.2 del paragrafo 7.1. L'unica differenza con il caso precedente è la variabilità dei coefficienti di scabrezza dei tratti (c) che viene posta pari ai valori riportati in tabella 7.11.

Tabella 7.11 Dati inizializzazione filtro di Kalman esteso, un set di osservazioni

Tratto	c reale	Minimo c	Max c	c medio	Var c
0-1	325	280	360	320	534
0-2	200	180	220	200	133
2-3	150	130	170	150	133
1-3	100	90	110	100	33
1-5	100	90	110	100	33
3-4	150	-	-	150	-
5-4	150	130	170	150	133

Applicando il filtro di Kalman esteso, si ottengono i risultati riportati in tabella 7.12.

Tabella 7.12 Risultati coefficiente di scabrezza con un set di osservazioni

l	Var c iniz	Var c finale	GAIN	c med	n	Q_i (l/s)
0-1	611.3	7.61	0.99	328.0	0	-145.49
0-2	121.65	1.6	0.99	200.4	1	40.00
2-3	130.03	5.67	0.96	150.4	2	50.00
1-3	29.3	30.05	- 0.03	100.2	3	30.00
1-5	36.61	0.0	1.00	103.9	4	15.49
3-4	-	-	-	150	5	10.00
5-4	130.89	0.01	1.00	148.5	0.82	GAINm

I risultati che si ottengono in tabella 7.12 sono stati determinati con l'utilizzo della metodologia del filtro di Kalman esteso con un singolo set di osservazioni. Con tale applicazione, si è riusciti ad ottenere un miglioramento dell'incertezza e, quindi, una sua riduzione dell'ordine dell' 82% circa. Questo risultato, come è accaduto per l'altro caso esaminato da Todini (1999) con un singolo set di osservazioni, ha un GAIN medio molto elevato ma un GAIN per tratto molto non sempre ottimo. Infatti, per il tratto 1-3 si ottiene un GAIN negativo, cioè l'applicazione del filtro di Kalman esteso provoca un incremento del 3% dell'incertezza rispetto a quella che si aveva a priori. Tale risultato può essere giustificato dal fatto che le ipotesi in cui lavora, in questo caso, il filtro di Kalman esteso sono delle ipotesi di non determinabilità per mancanza di set di osservazioni.

Il sistema analizzato con un solo set di osservazioni dà dei risultati, espressi sottoforma di GAIN, molto buoni in media ma non permette di avere una precisa informazione su tutti i parametri di tutti i tratti, per cui è conveniente fare un ulteriore set di osservazioni così da passare da sistema non determinabile per mancanza di set di osservazioni ad un sistema osservabile.

7.2.3 Due set di osservazioni: sistema osservabile

Passando ad un sistema osservabile, in cui il numero di equazioni è superiore al numero delle incognite, ed applicando le stesse ipotesi fatte per il caso precedente per quanto riguarda le caratteristiche idrauliche e topologiche, mentre si è considerato lo stesso range di variabilità del coefficiente di scabrezza (c) del caso ad un unico set di osservazioni.

Con tali dati è possibile inizializzare il filtro di Kalman esteso e si ottengono i risultati riportati in tabella 7.13.

Dalla tabella 7.13 si può facilmente notare come passare da un sistema non determinabile per mancanza di osservazioni ad un sistema osservabile porti un incremento notevole del GAIN medio ma anche di quello parziale. Infatti, a livello di GAIN medio si ha un incremento del 18% circa, mentre per il GAIN del tratto 1-3, che nel caso precedente era negativo, si ha un incremento del 98% e, quindi, una riduzione della variabilità del coefficiente di scabrezza (c) del tratto confrontabile con quella degli altri tratti.

Tabella 7.13 Risultati coefficiente di scabrezza con due set di osservazioni

l	Var c iniz	Var c finale	GAIN	c med	Nodo	Q_i (l/s)
0-1	623.06	0.87	1.00	327.2	0	-135.59
0-2	150.49	0.20	1.00	201.0	1	20.00
2-3	119.80	0.38	1.00	151.1	2	25.00
1-3	34.44	1.77	0.95	98.3	3	30.01
1-5	31.84	0.0	1.00	103.4	4	40.58
3-4	-	-	-	150	5	20.00
5-4	121.19	0.01	1.00	147.9	0.9916	GAIN m

7.2.4 Tre set di osservazioni: sistema osservabile

Incrementando il numero di set di osservazioni il sistema, già osservabile con soli due set di osservazioni, aumenta la differenza tra il numero di equazioni a disposizione e il numero delle incognite del problema. Questo incremento fa sì che si abbia un ulteriore miglioramento del GAIN sia dei tratti che di quello medio. Se si considerasse solo il miglioramento è lecito ipotizzare che il risultato migliora sempre di più aumentando il numero di set di osservazioni, ma, di certo non è pensabile di portare il numero di set di osservazioni all'infinito anche perché per ogni set di osservazioni in più si ha un incremento di costi economici e computazionali notevole. Per tale motivo è ragionevole pensare che il limite di set di osservazioni necessari per ottenere un ottimo risultato, per un sistema osservabile, è dato quando un ulteriore set di osservazioni aggiunto al sistema non fornisce un sostanziale incremento di conoscenza sui parametri incogniti.

Applicando, quindi, questo concetto, al caso in esame, è evidente come incrementare da due a tre set di osservazioni, l'incremento del GAIN e, quindi, il miglioramento sui parametri incogniti è dell'ordine dello 0,5%. Tale risultato, riportato in tabella 7.14, permette, di ottenere il numero necessario e sufficiente per avere un sistema osservabile con un GAIN molto elevato.

Tabella 7.14 Risultati coefficiente di scabrezza con tre set di osservazioni

l	Var c iniz	Var c finale	GAIN	c med	Nodo	Q_i (l/s)
0-1	566.83	0.66	1.00	327.7	0	-135.64
0-2	119.15	0.15	1.00	201.1	1	20.00
2-3	138.38	0.26	1.00	151.3	2	25.00
1-3	37.43	1.09	0.97	98.0	3	30.01
1-5	29.77	0.0	1.00	103.8	4	40.63
3-4	-	-	-	150	5	20.00
5-4	147.33	0.01	1.00	149.9	0.995	GAIN m

7.2.5 Confronto tra sistema vincolato e sistema libero

Tutto quanto fatto nel paragrafo 7.2.2 è stato già ottenuto per il medesimo caso esaminato nel paragrafo 7.2.1 con diverse ipotesi sui vincoli, mentre in questo paragrafo, oltre a voler verificare di nuovo l'applicabilità e l'affidabilità del filtro di Kalman esteso in condizioni di vincoli iniziali differenti, si vogliono confrontare i risultati ottenuti in entrambi i casi di conoscenza o non conoscenza di vincoli sui parametri incogniti.

In tabella 7.15 vengono riportati i risultati in termini di GAIN per le due tipologie di vincolo. Dall'analisi di tale tabella è facile capire come il vincolare il coefficiente di scabrezza (c) oppure non vincolarlo non dà dei risultati molto differenti. Il problema della scelta tra le due metodologie, però, non può essere fatta osservando solo i GAIN perché sono dei parametri tra di loro poco confrontabili in quanto partono da valori di campo di variabilità molto diversi. Per tale motivo si è scelto di confrontare, come riportato in tabella 7.16, le varianze dei coefficienti di scabrezza (c) nei due casi per comprendere le differenze che possono esistere. Dall'analisi di tali varianze finali, dopo aver applicato il filtro di Kalman esteso, si è ottenuto che le due tipologie hanno dei comportamenti simili, in termini di prestazione, in quanto raggiungono quasi lo stesso GAIN alla fine della simulazione, ma hanno delle varianze tra di loro molto diverse. Infatti, nel caso non vincolato si ottiene una varianza media 40 volte più grande di quello vincolato quando si ha a disposizione un singolo set di osservazioni, mentre scende a circa 30 volte nel caso osservabile con due set di osservazione ed, infine, a circa 14 volte nel caso con tre set di osservazioni. Questi risultati sono importanti perché permettono di comprendere l'importanza di avere informazioni aggiuntive di vincolo sui parametri incogniti, così da ridurre notevolmente l'incertezza del sistema. Infatti se si osservano i risultati vincolati con un singolo set di osservazioni, cioè quando il sistema è di tipo non determinabile per mancanza di osservazioni, tali risultati sono simili a quelli che si hanno con tre set di osservazioni e sistema osservabile nel caso in cui non si hanno applicazioni di vincoli sui parametri incogniti. Per tale motivo, sono da preferirsi sistemi in cui è possibile avere dei vincoli sui parametri, a prescindere dal numero di set di osservazioni, rispetto a sistemi in cui non si hanno vincoli così da

evitare costi eccessivi derivanti dalla necessità di avere maggiori set di osservazioni.

Tabella 7.15 Confronto tra i risultati con e senza vincoli sui parametri incogniti

l	Senza Vincolo	Con Vin.	Senza Vin.	Con Vin.	Senza Vin.	Con Vin.
	1 set		2 set		3 set	
	GAIN	GAIN	GAIN	GAIN	GAIN	GAIN
0-1	0.70	0.99	0.99	1.00	0.99	1.00
0-2	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
2-3	0.84	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00
1-3	0.19	- 0.03	0.96	0.95	0.99	0.97
1-5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3-4	-	-	-	-	-	-
5-4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Gain m	0.7816	0.8183	0.99	0.9916	0.9966	0.995

Tabella 7.16 Confronto tra i risultati con e senza vincoli sui parametri incogniti

l	Senza Vin	Con Vin	Senza Vin	Con Vin	Senza Vin	Con Vin
	1 set		2 set		3 set	
	Var c	Var c	Var c	Var c	Var c	Var c
0-1	375.23	7.61	24.08	0.87	9.17	0.66
0-2	79.45	1.6	5.58	0.20	2.09	0.15
2-3	282.00	5.67	10.77	0.38	3.80	0.26
1-3	1179.05	30.05	48.97	1.77	14.96	1.09
1-5	0.02	0.0	0.01	0.0	0.01	0.0
3-4	-	-	-	-	-	-
5-4	0.23	0.01	0.19	0.01	0.13	0.01
Var m	319.33	7.49	14.93	0.54	5.03	0.36

7.3 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: DUE PORTATE EROGATE INCOGNITE

Per la rete a maglie chiuse della figura 7.1 viene ipotizzato un campo di osservazioni differente rispetto a quello considerato nei paragrafi precedenti. Infatti, in questo caso, vengono ipotizzate note tutte le perdite di carico dei tratti, tre portate erogate su sei di cui cinque di erogazione e uno di immissione e di due portate circolanti in due tratti che sono collegati ai nodi di cui non si conoscono le portate erogate. Si ipotizzano note le portate erogate nei nodi 1 - 3 - 5 e le portate circolanti o le scabrezze dei tratti 0 - 2 e 3 - 4. Come per il caso precedente, si sono considerati, a vantaggio di complessità, i casi meno informativi nella scelta dei tratti di cui si ha conoscenza dei coefficienti di scabrezza (c) o delle portate circolanti. I due tratti scelti sono il tratto verticale della prima maglia collegato al nodo di immissione in rete ed il secondo è il tratto orizzontale più lontano dall'ingresso della portata in rete e collegato al nodo di cui non si conosce la portata erogata. In tale situazione, considerando una distribuzione di probabilità per le scabrezze di tipo uniforme, con campo di variabilità generico così da incrementare la variabilità dei parametri incogniti, il sistema misto può essere riscritto sottoforma dell'equazione matriciale (7.7) e, quindi, può essere risolto con l'equazione del filtro di Kalman modificato (7.11). Come per i casi esaminati in precedenza, per verificare ulteriormente la validità del modello del filtro di Kalman esteso ed avere sotto controllo questi sistemi semplici, è possibile ipotizzare un sistema "reale", come nelle tabelle 7.1 e 7.2, di cui si ha piena conoscenza dei parametri e da esso andare a trascurare alcuni parametri e, quindi, porli come valori incogniti. Con questa ipotesi sul sistema "controllato - reale" è possibile applicare il filtro di Kalman esteso e vedere le sue performance. In tabella 7.17, 7.18 e 7.19 vengono riportati i risultati ottenuti considerando per tutti le ipotesi dette in precedenza ed, inoltre, considerando un solo set di osservazioni, tabella 7.17, oppure due set di osservazione, tabella 7.18, oppure tre set di osservazioni, tabella 7.19. I sistemi considerati sono, come visto in precedenza, diversi tra di loro in quanto il primo è un sistema non determinabile per mancanza di osservazioni, mentre gli altri due sono dei sistemi osservabili con un grado di precisione differente dovuto al numero di set di osservazioni a disposizione.

Tabella 7.17 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 1 set oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN	c media	Q _i (l/s)
1081.36	64.65	0.94	350.2	-149.53
-	-	-	200.0	40.03
1168.43	48.30	0.96	134.7	53.28
1348.05	253.58	0.81	136.1	29.98
1287.77	0.01	1.00	106.1	16.26
-	-	-	150.0	9.99
1285.77	0.16	1.00	163.3	

		0.942	GAIN m	

Tabella 7.18 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 2 set oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN	c media	Q _i (l/s)
1089.83	0.04	1.00	326.6	-145.83
-	-	-	200.0	40.02
1013.72	0.02	1.00	147.5	50.35
1041.72	0.09	1.00	104.6	29.99
977.91	0.01	1.00	103.3	15.47
-	-	-	150.0	9.99
1229.80	0.11	1.00	148.9	

		1.00	GAIN m	

Tabella 7.19 Risultati per filtro modificato : 2 coeff. di scabrezza noti e 3 set oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN	c media	Q _i (l/s)
1749.74	0.00	1.00	325.7	- 145.26
-	-	-	200.0	40.05
1762.00	0.01	1.00	149.5	50.16
1532.75	0.06	1.00	100.1	29.98
1312.14	0.01	1.00	100.7	15.10
-	-	-	150.0	9.97
1518.63	0.07	1.00	150.3	

		1.00	GAIN m	

Tabella 7.20 Risultati sistema vincolato : 2 coeff. di scabrezza noti e 1 set oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN	c media	Q_i (l/s)
615.62	1.69	1.00	328.3	- 145.36
-	-	-	200.0	40.00
150.08	1.24	0.99	150.3	49.85
33.34	6.62	0.80	100.6	30.00
39.38	0.00	1.00	100.1	15.51
-	-	-	150.0	10.00
119.72	0.00	1.00	149.8	

		0.958	GAIN m	

Come per il caso del paragrafo precedente, anche qui è facile osservare come i risultati ottenuti nel caso in cui si hanno vincoli sul sistema delle incognite permette di ottenere un risultato molto accurato anche con un solo set di osservazioni. I GAIN in tutti i casi riportati nelle tabelle 7.17-7.20 sono altissimi ma, al contempo, in alcuni casi come quello di tabella 7.17, con poco significato in quanto un GAIN del 90% con una varianza iniziale molto alta permette sì di ridurre la variabilità ma resta, comunque, molto alta in termini assoluti. Per tale motivo, quando si ha a disposizione un solo set di osservazioni, è conveniente fare un doppio filtro di Kalman esteso applicato al sistema con le variabili coefficienti di scabrezza e portate erogate variabili diversamente tra il primo ed il secondo filtro. Tale nuovo filtro sarà dato, nella prima parte, dallo stesso filtro di Kalman esteso utilizzato fino ad ora per i casi esaminati, mentre, nel secondo filtro, che inizia quando finisce il primo, si andranno a porre i coefficienti di scabrezza con una distribuzione di probabilità ancora uniforme ma specializzata per ogni tratto con una variabilità imposta ridotta il cui valore medio corrisponda al valore trovato nel primo filtro. I risultati di tale doppio filtro sono gli stessi che si ottengono per il caso di filtro di Kalman esteso ma con vincoli sui parametri incogniti di tabella 7.20.

7.4 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: TRE PORTATE EROGATE INCOGNITE

La rete a maglie chiuse analizzata in questo caso è la stessa di quella considerata per i casi precedenti e riportata in figura 7.1. Infatti, la rete è formata da due maglie quadrate con cinque nodi di erogazione, uno di immissione e sette tratti.

Tale sistema ha come parametri noti tutti i carichi nei nodi, tre portate circolanti oppure la scabrezza di tre tratti, essendo il legame tra portata circolante e scabrezza determinato una volta nota la perdita di carico nel tratto e , soltanto, due portate erogate. Si ipotizzano, quindi, note le portate erogate nei nodi 3 – 5 e le portate circolanti o le scabrezze dei tratti 0 – 1, 0 - 2 e 3 – 4. Come per il caso precedente, si sono considerati, a vantaggio di complessità, i casi meno informativi nella scelta dei tratti di cui si ha conoscenza dei coefficienti di scabrezza (c) o delle portate circolanti. I tre tratti scelti sono i due tratti collegati al nodo di immissione in rete ed il terzo tratto, invece, è il tratto orizzontale più lontano dall'ingresso della portata in rete e collegato al nodo di cui non si conosce la portata erogata. In tale situazione, considerando una distribuzione di probabilità per le scabrezze di tipo uniforme, con campo di variabilità generico così da incrementare la variabilità dei parametri incogniti, il sistema misto può essere riscritto sottoforma dell'equazione matriciale (7.7) e, quindi, può essere risolto con l'equazione del filtro di Kalman modificato (7.11). Come per i casi esaminati in precedenza, per verificare ulteriormente la validità del modello del filtro di Kalman esteso ed avere sotto controllo questi sistemi semplici, è possibile ipotizzare un sistema "reale", come nelle tabelle 7.1 e 7.2, di cui si ha piena conoscenza dei parametri a priori sia di quelli noti che di quelli incogniti. Con questa ipotesi sul sistema "controllato - reale" è possibile applicare il filtro di Kalman esteso e determinare le sue performance. In tabella 7.21, 7.22, 7.23 e 7.24 vengono riportati i risultati ottenuti considerando per tutti le ipotesi dette in precedenza ed, inoltre, considerando un solo set di osservazioni, tabella 7.21, oppure due set di osservazione, tabella 7.22, oppure tre set di osservazioni, tabella 7.23. Infine viene riportato il caso in cui si hanno informazioni più restrittive sui vincoli scabrezza dei tratti, tabella 7.24. I sistemi considerati sono, come visto in precedenza, diversi tra di loro in quanto il primo è un sistema non determinabile per mancanza di osservazioni, mentre il secondo ed il terzo sono dei sistemi

7. APPLICAZIONE DEL FILTRO DI KALMAN PER SISTEMA MISTO

osservabili con un grado di precisione differente dovuto al numero di set di osservazioni a disposizione e l'ultimo, invece, è ottenuto con un singolo set di osservazioni ma sul quale viene fatto il doppio filtro di Kalman esteso.

Tabella 7.21 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note ed un set di osservazioni

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (l/s)
-	-	-	325.0	- 144.74
-	-	-	200.0	34.97
1397.86	15.39	0.99	145.2	54.14
1572.47	80.22	0.95	100.1	29.99
1897.90	0.02	1.00	105.2	15.66
-	-	-	150.0	9.99
1580.60	0.22	1.00	157.7	

		0.985	GAIN medio	

Tabella 7.22 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note e due set di osservazioni

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (l/s)
-	-	-	325.0	- 145.05
-	-	-	200.0	39.61
1740.53	0.01	1.00	147.1	50.03
1655.32	0.06	1.00	100.7	29.99
1589.35	0.01	1.00	103.1	15.44
-	-	-	150.0	9.99
1633.65	0.22	1.00	149.6	

		1.00	GAIN medio	

Tabella 7.23 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note e tre set di osservazioni

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (1/s)
-	-	-	325.0	- 145.04
-	-	-	200.0	39.15
1800.02	0.01	1.00	149.8	50.40
1574.15	0.04	1.00	100.1	29.99
1512.14	0.01	1.00	100.7	15.51
-	-	-	150.0	9.99
1673.23	0.14	1.00	149.9	

		1.00	GAIN medio	

Tabella 7.24 Risultati filtro modificato 3 scabrezze note ed un set di osservazioni (caso vincolato)

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (1/s)
-	-	-	325.0	- 144.74
-	-	-	200.0	38.47
117.56	1.24	0.99	146.2	50.75
128.75	6.47	0.95	109.9	30.00
139.43	0.00	1.00	104.2	15.52
-	-	-	150.0	10.00
144.95	0.02	1.00	150.3	

		0.985	GAIN medio	

Come per il caso del paragrafo precedente, anche qui è facile osservare come i risultati ottenuti nel caso in cui si hanno vincoli sul sistema delle incognite permette di ottenere un risultato molto accurato anche con un solo set di osservazioni. I GAIN in tutti i casi riportati nelle tabelle 7.21-7.24 sono altissimi ma al contempo, in alcuni casi come quello di tabella 7.21, con poco significato in quanto un GAIN del 98% con una varianza iniziale molto alta permette sì di ridurre la variabilità ma resta, comunque, molto alta in termini assoluti. Per tale motivo, quando si ha a disposizione un solo set di osservazioni, è conveniente fare un doppio filtro di Kalman esteso applicato al sistema con le variabili coefficienti di scabrezza e portate erogate variabili diversamente tra il primo ed il secondo filtro. Tale nuovo filtro sarà dato, nella prima parte, dallo stesso

filtro di Kalman esteso utilizzato fino ad ora per i casi esaminati, mentre, nel secondo filtro, che inizia quando finisce il primo, si andranno a porre i coefficienti di scabrezza con una distribuzione di probabilità ancora uniforme ma specializzata per ogni tratto con una variabilità imposta ridotta il cui valore medio corrisponda al valore trovato nel primo filtro. I risultati di tale doppio filtro sono gli stessi che si ottengono per il caso di filtro di Kalman esteso ma con vincoli sui parametri incogniti di tabella 7.24.

7.5 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: QUATTRO PORTATE EROGATE INCOGNITE

La rete a maglie chiuse analizzata in questo caso è la stessa di quella considerata per i casi precedenti e riportata in figura 7.1. Infatti, la rete è formata da due maglie quadrate con cinque nodi di erogazione, uno di immissione e sette tratti.

Tale sistema ha come parametri noti tutti i carichi nei nodi, quattro portate circolanti oppure la scabrezza, essendo il legame tra portata circolante e scabrezza determinato una volta nota la perdita di carico nel tratto e, soltanto, due portate erogate. Si ipotizzano, quindi, note la portata erogata nel nodo 3 e le portate circolanti o le scabrezze dei tratti $0 - 1$, $0 - 2$, $1 - 5$ e $3 - 4$. Come per il caso precedente, si sono considerati, a vantaggio di complessità, i casi meno informativi nella scelta dei tratti di cui si ha conoscenza dei coefficienti di scabrezza (c) o delle portate circolanti. I quattro tratti scelti sono i due tratti collegati al nodo di immissione in rete, il tratto orizzontale uscente dal nodo 1 ed il quarto tratto, invece, è il tratto orizzontale più lontano dall'ingresso della portata in rete e collegato al nodo di cui non si conosce la portata erogata. In tale situazione, considerando una distribuzione di probabilità per le scabrezze di tipo uniforme, con campo di variabilità generico così da incrementare la variabilità dei parametri incogniti, il sistema misto può essere riscritto sottoforma dell'equazione matriciale (7.7) e, quindi, può essere risolto con l'equazione del filtro di Kalman modificato (8.11). Come per i casi esaminati in precedenza, per verificare ulteriormente la validità del modello del filtro di Kalman esteso ed avere sotto controllo questi sistemi semplici, è possibile ipotizzare un sistema "reale", come

nelle tabelle 7.1 e 7.2, di cui si ha piena conoscenza dei parametri a priori sia di quelli noti che di quelli incogniti. Con questa ipotesi sul sistema “controllato - reale” è possibile applicare il filtro di Kalman esteso e determinare le sue performance. In tabella 7.25 vengono riportati i risultati ottenuti considerando per tutti le ipotesi dette in precedenza ed, inoltre, considerando due set di osservazioni.

Tabella 7.25 Risultati filtro modificato con 4 scabrezze note e 2 set di oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (l/s)
-	-	-	325.0	- 151.66
-	-	-	200.0	-17.90
1705.91	0.03	1.00	7.3	79.72
1515.71	0.01	1.00	310.8	25.55
-	-	-	100.0	34.31
-	-	-	150.0	29.99
1543.75	0.13	1.00	-20.5	

		1.00	GAIN med	

Dai risultati ottenuti si vede come il GAIN è praticamente pari al 100%, ma il risultato è completamente sbagliato sia per quanto riguarda le scabrezze dei tratti incogniti che delle portate erogate ai nodi. Tale risultato, quindi, non è attendibile. La non attendibilità è dovuta al fatto che nel sistema analizzato i nodi 1 e 3 sono dei nodi “speciali” mentre gli altri nodi sono “normali”. Con il termine speciale si intende un nodo in cui convergono più di due tratti e la cui complessità aumenta all’incrementare del numero di tratti che convergono in esso. Invece, si intende normale un nodo in cui si ha un solo tratto in ingresso ed uno solo in uscita. Per tale motivo, considerando un incremento di indeterminatezza del sistema che non è possibile eliminare con ulteriori set di osservazioni, si ottiene un sistema indeterminato anche con più set di osservazioni e, quindi, non osservabile. Con questo risultato si riesce ad ottenere il “limite” massimo di sostituzioni di informazioni 1 a 1 tra portate erogate e scabrezze che, per il caso in esame, è pari a tre. In generale, il numero massimo di possibili interscambiabilità di informazioni che è possibile avere sui tratti invece che sui nodi è dato

dal numero dei nodi non “speciali”, cioè “normali”, presenti nel sistema. Per poter determinare il problema quando si è in presenza di nodi “speciali”, si ha bisogno di incrementare il rapporto di interscambiabilità delle informazioni sui parametri. Quindi, per poter risolvere tutti i problemi in cui non si ha la piena conoscenza delle portate erogate in tutti i nodi, si ha bisogno di considerare un numero di informazioni aggiuntive sui tratti funzione del nodo trascurato e del rapporto di interscambiabilità del nodo stesso. Questo rapporto è pari ad uno nel caso di nodi semplici, aumenta a due nel caso di nodi con tre tratti fino ad arrivare a tre per quelli in cui si innestano quattro tratti.

In ragione di quanto appena detto, si è ipotizzato di fare una nuova ipotesi sulla conoscenza del sistema in modo da verificare quanto finora affermato.

Infatti, ipotizzando nota la sola portata erogata nel nodo 3 e considerate note anche le portate circolanti nei tratti 0 - 1 , 0 - 2, 1 - 5, 2 - 3 e 3 - 4 si ottengono i risultati riportati in tabella 7.26.

Tabella 7.26 Risultati filtro modificato con 5 scabrezze note e 2 set di oss

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (l/s)
-	-	-	325.0	- 145.93
-	-	-	200.0	40.52
-	-	-	150.0	50.05
1289.90	0.02	1.00	100.3	30.00
-	-	-	100.0	15.37
-	-	-	150.0	9.99
1674.31	0.15	1.00	150.5	

		1.00	GAIN medio	

In tabella 7.26 si è ipotizzata la conoscenza delle scabrezze di due tratti collegati al nodo “speciale” 2, così da non avere un’indeterminatezza tale da rendere il sistema non osservabile. Con questa ipotesi di conoscenza, il sistema riportato in figura 7.1 e sviluppato con il filtro di Kalman esteso in tabella 7.26 risulta osservabile, per cui è stato possibile individuare con un elevato grado di precisione tutti i parametri incogniti del sistema.

7.6 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: TUTTE LE PORTATE EROGATE INCOGNITE

La rete a maglie chiuse analizzata in questo caso è la stessa di quella considerata per i casi precedenti e riportata in figura 7.1. Infatti, la rete è formata da due maglie quadrate con cinque nodi di erogazione, uno di immissione e sette tratti.

Tale sistema ha come parametri noti tutti i carichi nei nodi, sei scabrezze dei tratti o sei portate circolanti, essendo il legame tra portata circolante e scabrezza determinato una volta nota la perdita di carico nel tratto. Si ipotizzano, quindi, note le portate circolanti o le scabrezze dei tratti $0 - 1$, $0 - 2$, $1 - 5$, $2 - 3$, $4 - 5$ e $3 - 4$. In tale situazione, considerando una distribuzione di probabilità per le scabrezze di tipo uniforme, con campo di variabilità generico così da incrementare la variabilità dei parametri incogniti, il sistema misto può essere riscritto sottoforma dell'equazione matriciale (7.7) e, quindi, può essere risolto con l'equazione del filtro di Kalman modificato (7.11). Come per i casi esaminati in precedenza, per verificare ulteriormente la validità del modello del filtro di Kalman esteso ed avere sotto controllo questi sistemi semplici, è possibile ipotizzare un sistema "reale", come nelle tabelle 7.1 e 7.2, di cui si ha piena conoscenza dei parametri a priori sia di quelli noti che di quelli incogniti. Con questa ipotesi sul sistema "controllato - reale" è possibile applicare il filtro di Kalman esteso e determinare le sue performance. In tabella 7.27 vengono riportati i risultati ottenuti considerando per tutti le ipotesi dette in precedenza ed, inoltre, considerando due set di osservazioni.

Tabella 7.27 Risultati ottenuti per il filtro modificato con due scabrezze note

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q_i (1/s)
-	-	-	325.0	- 144.73
-	-	-	200.0	36.05
-	-	-	150.0	34.94
1687.41	0.05	1.00	10.5	18.96
-	-	-	100.0	40.89
-	-	-	150.0	13.90
-	-	-	150.0	

		1.00	GAIN medio	

Dai risultati ottenuti si vede come il GAIN è praticamente pari al 100% e, quindi, si otterrebbe la precisa conoscenza dei parametri incogniti del sistema. Ma, confrontando i risultati appena ottenuti con quelli “reali”, si nota come siano fortemente discordanti tra di loro: esiste, quindi, una distorsione non sistematica della stima. Tale distorsione è dovuta al fatto che si è considerato il nodo 3 come un nodo “semplice”, mentre bisogna considerarlo come un nodo “speciale”. Per tale motivo bisogna considerare le sette scabrezze dei tratti, cioè tutte quelle della rete e, quindi, tale sistema ha come parametri noti tutti i carichi nei nodi, tutte le portate circolanti ovvero le scabrezze dei tratti. Tale sistema, caso “degenere” del filtro di Kalman modificato del capitolo precedente, risulta osservabile. Poiché il sistema risulta osservabile è possibile applicare il filtro di Kalman esteso ed ottenere un risultato uguale a quello dei valori reali dei parametri incogniti.

Tabella 7.28 Risultati ottenuti per il filtro modificato con due scabrezze note

Var c iniziale	Var c finale	GAIN step	c media	Q _i (l/s)
-	-	-	325.0	- 145.03
-	-	-	200.0	39.99
-	-	-	150.0	50.02
-	-	-	100.0	30.00
-	-	-	100.0	15.03
-	-	-	150.0	9.99
-	-	-	150.0	

		-	GAIN medio	

Il risultato ottenuto in tabella 7.28 non è niente altro che una particolare applicazione, degenere, del filtro di Kalman esteso in quanto è possibile ottenere lo stesso risultato applicando direttamente le equazioni del moto e di continuità scritte nella forma matriciale (7.4). Partendo dall'equazione (7.4) e riscrivendola in modo tale da avere solo i termini noti a destra dell'uguaglianza matriciale si riesce ad ottenere il sistema matriciale riportato nella (7.14). Per ottenere la (7.14) si sono dovuti considerare vari passaggi tra matrici che qui vengono saltati in quanto sono gli stessi passaggi che si sono ottenuti per passare dalla (7.4) alla (7.7). La differenza tra il sistema ottenuto nella (7.7) e quello che si

ottiene nella (7.14) è dovuta al fatto che le portate erogate, in questo caso, sono tutte incognite e, quindi, il termine Q_i' è pari a Q_i mentre il termine Q_i'' è pari ad una matrice nulla.

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & 0 \\ A_{np} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ Q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Rispetto al caso ottenuto nella (7.7), nella (7.14) il termine A_{pp} ha come termine incognito solo la portata circolante Q_{ij} in quanto sono note a priori tutte le perdite di carico. Il sistema della (7.14) risulta, quindi, un sistema di tipo lineare che è facilmente risolvibile e i cui risultati sono riportati in tabella 7.28.

7.7 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: TUTTI I CARICHI INCOGNITI

Il sistema analizzato in questo paragrafo è sempre il sistema di figura 7.1. Per tale sistema, però, rispetto ai casi precedentemente analizzati, viene considerato il caso in cui non si hanno a disposizione le informazioni inerenti i carichi nei nodi. Con tale ipotesi, partendo dal sistema (7.4) bisogna determinare il nuovo sistema di equazioni, in forma matriciale, che si hanno a disposizione per la risoluzione, se possibile, del problema. Non avendo a disposizione alcun carico nei nodi, la matrice delle perdite di carico dei tratti ΔH deve essere spostata nella parte sinistra del sistema, cioè nella parte dei termini incogniti e mantenere a destra del sistema solo le portate erogate Q_i note a priori. Partendo dalla (7.1) è possibile, tramite le considerazioni appena fatte, ottenere il sistema rappresentato nella (7.15). In tale sistema le matrici dei coefficienti A_{pn} , A_{np} sono matrici “complete” perché, rispetto a quelle considerate finora, inglobano in sé anche il termine A_{p0} ed anche le matrici H_i e Q_i portano in conto le caratteristiche idrauliche di portata e pressione del nodo di immissione.

$$\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pn} \\ A_{np} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ H_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Esplicitando il sistema (7.15), è facile notare come risulti un sistema non osservabile in quanto, a prescindere del numero di osservazioni a disposizione, il sistema non può arrivare ad una soluzione unica perché la (7.16) ha un numero di equazioni sempre inferiore al numero delle incognite.

$$\begin{cases} A_{pp} Q_{ij} + A_{pn} H_i = 0 & (7.16) \\ A_{np} Q_{ij} = Q_i & (7.17) \end{cases}$$

La (7.17) ha come incognite sia la matrice delle portate circolanti Q_{ij} , che la matrice A_{np} , essendo il verso delle portate non definito in maniera univoca perché mancano i carichi nei vari nodi. Per questi motivi, la (7.17) è possibile risolverla in funzione delle portate circolanti inizialmente dando una distribuzione di portate circolanti equilibrate con il sistema ma non univoche e, sostituendo tali risultati nella (7.16) per cercare la soluzione univoca del sistema. Guardando le equazioni a disposizione, è facile notare come le incognite del problema sono i carichi nei nodi (H_i), le portate circolanti (Q_{ij}) e di conseguenza sia i versi di circolazione delle stesse portate circolanti (A_{np}) che la matrice dei coefficienti (A_{pp}). Con tale numero di incognite il sistema risulta indeterminato e, quindi, non osservabile.

7.8 SISTEMA A MAGLIA CHIUSA: NOTE M PERDITE DI CARICO

Il sistema analizzato è quello riportato in figura 7.2.

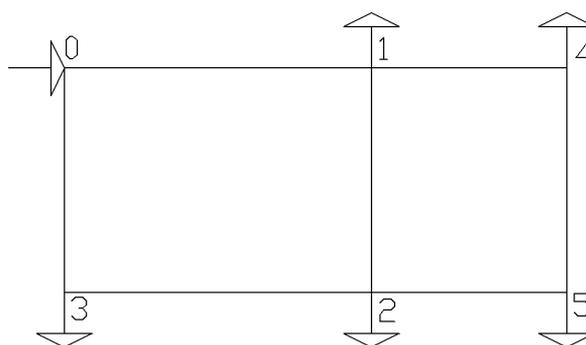


Figura 7.2 Sistema complesso a maglia chiusa

Per tale sistema, in questo caso, vengono considerati note tutte le portate circolanti nei tratti ed m perdite di carico. Avendo a disposizione tutte le portate circolanti, è possibile ottenere, di conseguenza, dalle sole equazioni di continuità al nodo tutte le portate erogate (Q_i), come è accaduto nel caso del paragrafo 7.7. Inoltre, avendo a disposizione anche m perdite di carico, che, nel caso in esame, sono le perdite di carico tra il nodo iniziale e il nodo 2 e il nodo 4 (ΔH_{02} e ΔH_{04}), è possibile risolvere il problema per via diretta senza la necessità di dover utilizzare il filtro di Kalman, bensì utilizzando una più semplice regressione lineare multivariata. Come vedremo, tale impostazione si presenta come una forma particolare del filtro di Kalman, che non richiede di essere impostato in maniera iterativa.

La regressione formalizza e risolve il problema di una relazione esistente tra le variabili misurate (note), o meglio, è un metodo capace di stimare il valore atteso condizionato di una variabile dipendente (Y), una volta note altre variabili indipendenti (X_i).

Più esplicitamente il modello di regressione lineare è dato dalla (7.18).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \quad (7.18)$$

dove:

i varia tra le osservazioni, $i = 1, \dots, n$;

Y_i è la variabile dipendente;

X_i è la variabile indipendente;

$\beta_0 + \beta_1 X$ è la retta di regressione;

β_0 è l'intercetta della retta di regressione;

β_1 è il coefficiente angolare della retta di regressione;

u_i è l'errore statistico.

Per ogni set di osservazione si dispone di una determinazione Y e di k determinazioni non stocastiche X_1, X_2, \dots, X_k . Si cerca, quindi, una relazione di tipo lineare tra la variabile Y e le k variabili deterministiche. L'equazione (7.18) può essere sviluppata ed estesa anche al caso in esame in cui più variabili contribuiscono alla determinazione della variabile dipendente Y e il cui sviluppo è riportato nella (7.19).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad (7.19)$$

in cui :

i varia tra le osservazioni , $i=1, \dots, n$;

Y_i è la i -esima variabile dipendente;

$X_{1i} + X_{2i} + X_{ki}$ sono le i -esime osservazioni di ciascuno delle k variabili indipendenti;

$\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$ è la retta di regressione;

β_0 è il valore atteso di Y quando tutte le X sono pari al valore nullo;

β_i è il coefficiente angolare di X_i ;

u_i è l'errore statistico.

Raggruppando le osservazioni delle variabili esplicative in una unica matrice X di dimensioni $N \times k$, che si ipotizza avere rango massimo, è possibile scrivere in forma matriciale la (7.19):

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (7.20)$$

Nella (7.20) è presente anche il termine dovuto all'errore statistico, che si assume avere una distribuzione di tipo normale con media nulla, ipotesi di omoschedasticità, varianza σ^2 e $E[\varepsilon_i - \varepsilon_j] = 0$ con $i \neq j$, cioè in assenza di correlazione nei disturbi. Inoltre si ipotizza che $E[X' \varepsilon] = 0$, ossia che non vi sia correlazione tra le X e i disturbi casuali, così da poter considerare le X come variabili indipendenti. Tale ipotesi permette di garantire che il vettore di stime dei parametri del modello, β' , abbia per valore atteso il vero valore dei parametri β . Con tali ipotesi alla base del modello, è possibile risolvere la matrice ed ottenere le stime del vettore dei parametri β tramite il metodo dei minimi quadrati, risolvendo il problema di minimo riportato nella (7.21).

$$\min_{\beta'} (y - X\beta')'(y - X\beta')$$

Le condizioni del primo ordine per un minimo definiscono il sistema, detto delle equazioni normali:

$$-2X'y + 2X'X\beta' = 0$$

da cui :

$$\beta' = (X'X)^{-1}X'y \quad (7.21)$$

Per le proprietà della forma quadratica, si è certi che la soluzione trovata corrisponde a un minimo non solo locale ma globale.

Tutto quanto finora detto viene utilizzato per risolvere il sistema di figura 7.1 con le ipotesi dette ad inizio paragrafo. Il sistema matriciale delle equazioni di continuità e del moto riportato in (7.1) deve essere

trasformato in un sistema tale che riproduca l'equazione matriciale (7.20). Dell'equazione (7.20), è possibile trascurare il termine ε dovuto all'errore statistico perché si considera il sistema privo di tale possibile errore ed il sistema matriciale, diventa, considerando due set di osservazione del tipo :

$$\begin{pmatrix} Q_{ij}^{\alpha} \\ Q'_{ij}{}^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta H \\ \Delta H' \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

dove:

Q_{ij}^{α} è una matrice di dimensione $2m \times 1$ in cui si hanno $m \times 1$ equazioni alla maglia ed $m \times 1$ equazioni del rapporto tra perdite di carico monitorate e scabrezza dei tratti;

$Q'_{ij}{}^{\alpha}$ è uguale in forma alla Q_{ij}^{α} ma i cui elementi sono dovuti al secondo set di osservazione;

r_{ij} è un vettore colonna 1×1 in cui sono riportate tutte le scabrezze dei tratti;

α è l'esponente da dare alle portate circolanti ed è funzione della formula che si utilizza.

ΔH è un vettore colonna 1×1 in cui sono presenti le perdite di carico monitorate e 0 nelle righe di equilibrio alla maglia

$\Delta H'$ è un vettore colonna 1×1 uguale in forma a ΔH ma le cui caratteristiche sono funzione del secondo set di osservazioni

Facendo una comparazione tra la (7.20) e la (7.22), si può notare come la y sia la matrice formata dai ΔH e $\Delta H'$; la matrice X , la matrice dei termini noti, è quella formata dai Q_{ij}^{α} e $Q'_{ij}{}^{\alpha}$; β invece è la matrice delle scabrezze incognite r_{ij} . Poiché il sistema deve essere risolto in funzione della variabile scabrezza, applicando la (7.21) al sistema di

figura 7.2, le cui caratteristiche topologiche ed idrauliche sono riportate nelle tabelle 7.29, 7.30 e 7.31.

Tabella 7.29 Set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa

Set di osservazione n.1		
Tratto	ΔH (m)	$Q_{ij,cric}$ (l/s)
0-2	108.42	
0-4	108.96	
0-1		
0-3		
2-3		
1-2		
1-4		
2-5		
5-4		

Tabella 7.30 Caratteristiche topologiche sistema complesso a maglia chiusa

Caratteristiche topologiche della rete			
Tratto	L (m)	D (mm)	c
0-1	1000	100	325
0-3	1500	150	200
2-3	1000	150	150
1-2	1500	150	100
1-4	1000	150	100
2-5	1000	200	150
5-4	1500	150	150

Tabella 7.31 Secondo set di osservazione sistema complesso a maglia chiusa

Set di osservazione n.2		
Tratto	ΔH (m)	$Q_{ij,cric}$ (l/s)
0-2	113.61	
0-4	118.55	
0-1		60.28
0-3		74.72
2-3		49.73
1-2		16.54
1-4		23.74
2-5		36.26
5-4		3.74

Applicando la (7.21), si ottiene la matrice delle scabrezze r_{ij} ; poiché fino ad ora si sono considerati i coefficienti di scabrezza (c) e non le scabrezze r_{ij} dei tratti, è necessario, al fine di valutare la bontà dei risultati ottenuti, passare ai coefficienti di scabrezza che è possibile determinare in funzione della formulazione utilizzata che nel caso in esame è quella di Hazen – Williams. I risultati che si sono ottenuti sono riportati in tabella 7.32.

Tabella 7.32 Risultati ottenuti con regressione multivariata

Set di osservazione n.2		
	r_{ij}	c_{ij}
0-1	0.0491	325.16
0-3	0.0251	200.05
2-3	0.0285	150.12
1-2	0.0908	99.95
1-4	0.0605	99.96
2-5	0.0070	150.02
5-4	0.0605	149.94

I risultati ottenuti in tabella 7.32 sono uguali ai parametri ipotizzati del sistema, per cui, è possibile affermare che con tali condizioni iniziali, il sistema risulta osservabile.

Tabella 7.33 Riassunto risultati ottenuti per sistema misto con n nodi di cui due nodi tripli.

	Sistema VINCOLATO	Sistema NON VINCOLATO
Incognite le portate q_i con $i = 1, \dots, n-2$ negli n_j nodi “normali” con $n_i \leq n - 2$ e note n_j scabrezze 1 set di osservazioni	Non Osservabile per mancanza di osservazioni $GAIN_m > 97 \%$	Non Osservabile per mancanza di osservazioni $GAIN_m < 97 \%$
Incognite le portate q_i con $i = 1, \dots, n-2$ negli n_j nodi “normali” con $n_i \leq n - 2$ e note n_j scabrezze 2 set di osservazioni	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$
Incognite le portate q_i con $i = 1, 2$ negli n_j nodi “speciali” con $n_i \leq 2$ e note n_j scabrezze 2 set di osservazioni	Sistema Non Osservabile	Sistema Non Osservabile
Incognite le portate q_i con $i = 1, 2$ negli n_j nodi “speciali” con $n_i \leq 2$ e note $n_j + 1$ scabrezze 2 set di osservazioni	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$
Incognite tutte le portate erogate e note m scabrezze (una per ogni maglia) 2 set di osservazioni	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$
Incognite m perdite di carico 2 set di osservazioni	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$	Sistema Osservabile $GAIN_m > 99 \%$
Incognite tutte le perdite di carico 2 set di osservazioni	Sistema Non Osservabile	Sistema Non Osservabile

8 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro sono stati analizzati alcuni concetti inerenti il problema del monitoraggio delle reti idriche ed, inoltre, sono state affrontate alcune problematiche riguardanti la calibrazione delle reti idriche. Il sistema di monitoraggio, insieme a quello del telecontrollo, è divenuto, negli anni, requisito fondamentale per una corretta gestione dei servizi idrici in quanto permette di avere una buona conoscenza delle caratteristiche della rete e un più adeguato controllo delle possibili anomalie che si possono presentare durante la vita di un'opera, come per esempio le perdite localizzate o distribuite di grossa entità.

Ovviamente quando si predispone una rete di monitoraggio, bisogna considerare che ogni nodo da monitorare comporta un costo che deve sostenere l'Ente gestore, per cui, il numero di nodi presenti sulla maggior parte delle reti, che adottano il sistema del monitoraggio, è esiguo. Tale esiguità, però, deve poter dare informazioni su una serie elevata di parametri incogniti della rete stessa. Questo studio pone le basi teoriche inerenti i legami che intercorrono tra le varie caratteristiche incognite della rete tramite una contemporanea utilizzazione della struttura idraulica della rete e della struttura stocastica della domanda, così da costruire una correlazione stocastico – strutturale che ha permesso di legare le distribuzioni dei valori delle grandezze osservate ai nodi di misura alle analoghe distribuzioni delle grandezze non misurate direttamente degli stessi nodi e di quelli limitrofi. L'approccio utilizzato in tale studio è possibile applicarlo a qualsiasi tipologia di rete, dal punto di vista dell'approccio teorico al problema, ed, inoltre, è stato analiticamente applicato per alcuni casi di reti con pochi nodi e tratti. Per tali sistemi, considerando le richieste nei nodi Q_i indipendenti fra di loro, è stato possibile definire tutte le relazioni che legano i carichi nei nodi H_i fra di loro, ottenendo il grado di correlazione che esiste fra gli stessi. Applicando questa metodologia, è stato possibile individuare un campo di esistenza dei carichi di forma molto più ristretta rispetto a quella delle portate erogate ai nodi e con una distribuzione delle soluzioni possibili non equiprobabili. Per la particolare forma 'ad aquilone' che tale legame assume nel caso di due variabili, lo si è indicato con l'acronimo CHYTE

(Codomain of HYdraulics and Topological Elements). Il risultato che si ottiene è doppiamente significativo in quanto permette, da un lato, di ridurre il possibile campo di variabilità delle variabili considerate già solo tramite le equazioni dell'idraulica che regolano la struttura del sistema, e, dall'altro, un'ulteriore riduzione di variabilità dovuta alla stocasticità del sistema.

Con questa duplice riduzione del campo di esistenza, è stato possibile definire anche una distribuzione di probabilità condizionata capace di far determinare il nodo migliore da monitorare tra quelli presenti, avendo, con un certo grado di affidabilità, informazioni anche sui restanti nodi in cui non è presente il monitoraggio.

Il nodo "sensibile" da scegliere come nodo da monitorare è stato definito come quel nodo del sistema che produce un'ampiezza dell'intervallo di stima, dei nodi non monitorati, minima.

Analizzando i risultati ottenuti, è stato possibile focalizzare l'attenzione su alcune caratteristiche topologiche della rete, quali la scabrezza dei tratti, che maggiormente, rispetto a tutti gli altri parametri della rete, influenzano il grado di apertura, nonché la forma del campo di variabilità (campo di esistenza) dei carichi nei nodi. Questi parametri, avendo la capacità, quindi, di far variare notevolmente il campo di esistenza dei carichi, come è possibile vedere in Figure 2.8 e 2.9 per esempio, devono essere tenuti maggiormente sotto controllo, in fase di monitoraggio, rispetto a tutti gli altri parametri per i motivi appena esposti.

Tutto quanto finora esposto è possibile applicarlo, teoricamente, per tutti i casi esistenti di reti ma si è preferito, per reti con maggiore numerosità di nodi, utilizzare una metodologia più rapida di simulazione che permette di ottenere con pochi passaggi tutti i campi di esistenza e tutte le distribuzioni condizionate dei vari nodi della rete (Metodologia Montecarlo).

Nella seconda parte della tesi sono state analizzate alcune problematiche inerenti il problema della calibrazione, o problema inverso, che sono state approcciate partendo dalle equazioni dell'idraulica scritte in forma matriciale per arrivare, dopo opportuni passaggi matematici, ad un sistema di equazioni di tipo lineare capace di risolvere il problema della calibrazione stesso superando le insite difficoltà del problema inverso o problema non lineare (Todini 1999). Superato il problema della non linearità, è stato possibile approcciare il problema partendo da casi semplici come quelli analizzati nella fase di monitoraggio, fino ad arrivare a casi con una numerosità di nodi maggiore. La prima problematica

analizzata è stata quella della calibrazione pura, cioè quando si hanno a disposizione informazioni sui carichi e le portate erogate in tutti i nodi e si ha la necessità, tramite l'utilizzo del filtro di Kalman esteso (EKF), di conoscere le scabrezze dei tratti e, di conseguenza, le portate circolanti. Per tale tipologia di ipotesi, tramite lo studio di vari casi semplici sia a bassa numerosità di tratti e nodi che con più elevata (Todini 1999), è stato possibile definire l'applicabilità del filtro di Kalman, per come è stato realizzato, nei vari casi di osservabilità. Dopo questa prima parte di calibrazione pura, è stato necessario ampliare l'applicabilità del filtro di Kalman anche nei casi in cui non erano, necessariamente, note tutte le portate erogate e i carichi nei nodi. Grazie a tale filtro di Kalman modificato è stato possibile analizzare vari scenari di calibrazione in cui le informazioni di partenza erano di tipo misto. A valle di tutti i casi analizzati, in fase di calibrazione, è stato possibile suddividere tutta la casistica in vari sottogruppi per ognuno dei quali è stato possibile determinare l'approccio da utilizzare in funzione anche della osservabilità o meno del gruppo.

Capitolo 8

BIBLIOGRAFIA

- Altman, T., Boulos, P.F. (1995). "Solving flow-constrained network: inverse problem." *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 121(5), 427-431.
- Andersen H.A. and Powell R.S. (2000) "Implicit state-estimation technique for water network monitoring" *Urban Water2*, 123-130.
- Bargiela (1984). *On-line monitoring of water distribution networks*. Ph.D.Thesis, Univ. of Durham
- Bascià, A. and Tucciarelli, T. (2003) Simultaneous zonation and calibration of pipe network parameters. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 129(5), 394-403.
- Bazaraa, M. S., and Shetty, C. M. (1979). *Non linear programming*. John Wiley & Sons, New York.
- Belardi G. and Villani P. (2007) "*Monitoraggio delle reti idriche: modellazione idraulica della rete e modellazione stocastica della domanda*" *Atti Conv. "Terzo seminario sulla ricerca delle perdite e la gestione dei sistemi di condotte"* Perugia, 2007.
- Belardi G. and Villani P. (2009) "*Alcuni concetti relativi al problema della calibrazione nelle reti idriche a maglie chiuse*" *Atti Conv. "Quarto seminario sulla ricerca delle perdite e la gestione dei sistemi di condotte"* Aversa, 2009.
- Benjamin and Cornell, *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, Mc Graw-Hill Book Co.

- Bhave (1988)“Calibrating water distribution network models”
J.Envir.Engrg., ASCE, 114(1), 120-136
- Boulos, P. F., and Wood, D. J. (1990). “Explicit calculation of pipe-network parameters.” *J.Hydr. Engrg.*, ASCE, 116(11), 1329-1344.
- Bovolin, V. e P. Villani, “Individuazione dei nodi sensibili per il monitoraggio delle reti di distribuzione idrica”, Atti XXIX Conv. Idr. e Costr. Idrauliche, Vol. 3, 149-156, Trento, 2004.
- Bovolin V. , et al. (2007). “Simulazione e monitoraggio di una rete idrica interna”, Atti Conv. “Approvvigionamento e distribuzione idrica : esperienze, ricerca ed innovazione” Ferrara, 2007.
- Burrows R. ed al (2000) “ Utilisation of network modelling in the operational management of water distribution systems” *Urban Water 2 (2000)*, 83-95.
- Bush, C. A. & Uber, J. B. (1998) Sampling design methods for water distribution model calibration. *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 124(6), 334-344.
- Chengchao, X. and Tickle, K. (1997) “Parameter dimension estimation for water distribution networks” *Proc. 27 th Congress of the International Ass. of Hydr. Res. Theme A*, 435-440
- Crawford (1985)“Trasfer function models of daily urban water use”
Water Resour.Res. 21(4) 425-32
- Curto, G. & Napoli, E. (1996) Le matrici di sensitività nelle reti di distribuzione idrica. *Scritti in onore di Mario Ippolito*, 213- 225.

- Del Giudice, G. & Di Cristo, C. (2003). Sampling design for water distribution network. *Proc. of the II Int. Conf. on Water Resources Management 2003, Gran Canaria*, WIT Press, 181-190.
- De Schaetzen W.B.F. et al. (2000) "Optimal sampling design for model calibration using shortest path, genetic and entropy algorithms" *Urban Water 2 (2000)*, 141-152.
- Ferreri, Napoli, E. & Tumbiolo, A. (1994) La calibrazione delle scabrezze nelle reti di distribuzione idrica. *Atti del XXIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Napoli, T3b, 53-66.
- Fischer R. (1922) The goodness of fit of regression formulae, and the distribution of regression coefficients, *Journal of the Royal Statistical Society* 85, 597-612;
- Gofman, E., and Rodeh, M. (1981). "Loop equations with unknown pipe characteristics." *J. Hydr. Div.*, ASCE, 107(9), 1047-1060.
- Greco M. ed al. (1999) "La calibrazione delle portate erogate nelle reti di distribuzione idrica" *Atti del XXVI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Catania, 491-504.
- Kapelan, Savic, & Walters (2003) Optimal sampling design for calibration of transient networks model using multi-objective Gas. *Proceedings of PEDS2003 Conference*, Valencia, Balkema, 181-88.
- Lansey, K. E., and Basnet, C. (1991) Parameter estimation for water distribution networks. *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 117(1), 126-140
- Lansey, K.E., El-Shorbagy W., Ahmed, I., Araujo, J. & Haan, C. T. (2001) Calibration assessment and data collection for water distribution networks. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 1274

- Legendre A.M. (1805) *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (l'Appendice contiene una sezione intitolata "Sur la Méthode des Moindres Quarrés" - Sul Metodo dei Minimi Quadrati);
- Loaiciga, H. A., et al.(1992) Review of ground-water quality monitoring network design. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 118(1),11-37.
- Lurette C. and Lecoeuche S. (2003) "Unsupervised and auto-adaptive neural architecture for on-line monitoring. Application to a hydraulic process" *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 16 (2003), 441-451.
- Mallick, K. N., Ahmed, I., Tickle K. S. & Lansey K. E. (2002) Determining pipe groupings for water distribution networks. *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 128(2), 130-139.
- Meier, R. W. & Barkdoll B. D. (2000) Sampling design for network model calibration using genetic algorithms. *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 126(4), 245-250.
- Ormsbee, L. E., and Wood, D. J. (1986). "Explicit pipe network calibration." *J. Water Resour.Plng. and Mgmt.*, ASCE, 112(2), 166-182.
- Ormsbee(1989)"Implicit network calibration." *J. Water Resour.Plng. and Mgmt.*,ASCE, 115(2), 243-57
- Ormsbee, L. E., and Lingireddy, S. (1997). "Calibrating hydraulic network models." *J. Am. Water Works Assoc.*, 89(2), 42-50.
- Papoulis, A., Probabilità,variabili aleatorie e processi stocastici, Boringhieri Torino, 1973

- Perry(1981). "Demand forecasting in water supply networks" *J. Hydr. Engrg.*, ASCE,107(9), 1077-87
- Pianese D. e P. Villani, "Verifica di affidabilità delle reti idriche in pressione. Parte I e II ", Atti XXIV Conv. Idraulica e Costr. Idrauliche, Vol. II-3b, Modelli di simulazione delle reti idrauliche. Correnti in pressioni, T3b-67-94, Napoli, 1994.
- Pianese D. e P. Villani, "Verifica di affidabilità delle reti idriche in pressione. Parte II: Valutazione mediante indici globali. Esempio di applicazione ad un caso di studio", Atti XXIV Conv. Idraulica e Costr. Idrauliche, Vol. II-3b, Modelli di simulazione delle reti idrauliche. Correnti in pressioni, T3b-81-94, Napoli, 1994.
- Pudar, R. & Liggett, J. A. (1992) Leaks in pipe networks. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 118(7),1031-1046.
- Reis, L. F. R., Porto, R. M. & Chaudry, F. H. (1997) Optimal location of control valves in pipe networks by genetic algorithm. *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 123(6), 317-326.
- Shamir, U. (1974). "Optimal design and operations of water distribution systems." *WaterResour. Res.*, 10(1), 27-36.
- Shamir, U., and Howard, C. D. D. (1977). "Engineering analysis of water distribution systems." *J. Am. Water Works Assoc.*, 69(9), 510-514.
- Smith, J.A. (1988). "A model of daily municipal water use for short-term forecasting" *Water Resour. Res.*, 24(2), 201-206.
- Todini E (2000) " Using a Kalman filter approach for looped water distribution networks calibration"

Bibliografia

Walski, T. M. (1983). "Technique for calibrating network model calibration issues." *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 109(4), 360-372.

Walski, T. M. (1986). "Case study: pipe network model calibration issues." *J. Water Resour. Plng. and Mgmt.*, ASCE, 112(2), 238-249.

Yule G. U. (1897) On the Theory of Correlation, *Journal of the Royal Statistical Society*, 812-54;