

Ai miei genitori

INDICE

Indice	iii
Indice delle Figure	ix
Indice delle Tabelle	xxi
Ringraziamenti	xxiii
Summary	xxvii
Sommario	xxix
1 Introduzione	1
1.1 Evoluzione storica	2
1.2 Teoria delle costruzioni in muratura: tra passato e presente	7
1.3 Obiettivi ed organizzazione del lavoro	10
1.4 Bibliografia	12
2 Modellazione agli elementi finiti	15
2.1 Parte I: Introduzione e scale di modellazione.....	15

2.1.1	L'interfaccia malta-mattone	18
2.1.2	Comportamento dei bed joints	18
2.1.3	Comportamento degli head joints	24
2.2	Parte II: Modelli ad interfacce	25
2.2.1	Principali ipotesi alla base della modellazione.....	25
2.2.2	Modellazione in campo elastico.....	29
2.2.3	Modellazione non lineare delle interfacce.....	31
2.2.4	Applicazione numeriche del modello	37
2.3	Parte III: Modelli omogenei	45
2.3.1	Calibrazione del modello omogeneo.....	45
2.3.2	Analisi parametrica sull'influenza delle fasce di piano.....	61
2.3.3	Analisi e confronto tra tecniche di rinforzo di pareti	67
2.4	Bibliografia	74
3	Strategie di modellazione di edifici in muratura.....	77
3.1	La modellazione di edifici in muratura secondo la NTC 2008.....	77
3.2	Il metodo dello spettro di capacità.....	81
3.2.1	Spettri di risposta della domanda	84
3.2.2	Curva di capacità e valutazione dello spostamento massimo	88
3.2.3	Distribuzioni di forze	92
3.3	Modellazione a telaio equivalente secondo NTC 2008	93
3.4	Meccanismi di collasso di I e II modo	96
3.5	L'analisi limite	98
3.6	I modelli bidimensionali a macroelementi	100

3.6.1	Il metodo SISV	101
3.6.2	Il metodo Mas3D	107
3.6.3	Il modello 3Muri	109
3.7	I modelli monodimensionali	113
3.7.1	I modelli a puntone	113
3.7.2	I modelli a telaio equivalente: metodo POR	114
3.7.3	I modelli a telaio equivalente: il SAM.....	117
3.8	Bibliografia	120
4	Comportamento meccanico di pannelli murari	125
4.1	Introduzione.....	125
4.2	Classificazione delle modalità di rottura osservate	128
4.2.1	Comportamento flessionale: aspetti fenomenologici....	128
4.2.2	Comportamento a taglio: aspetti fenomenologici	129
4.3	Modelli la previsione della resistenza a flessione.....	130
4.3.1	Formulazione unitaria	131
4.4	Modelli la previsione della resistenza a taglio	134
4.4.1	Formulazione unitaria	134
4.4.2	Il modello di Mann-Müller.....	135
4.4.3	Il modello di Turnšek -Čačovič.....	137
4.5	Ulteriori considerazioni sullo stato tensionale	141
4.6	I modelli di resistenza nelle norme internazionali.....	143
4.7	Modellazione dell'elemento maschio.....	146
4.7.1	Generalità	146
4.7.2	Costruzione del legame momento-curvatura bilineare .	149

4.7.3	Costruzione del legame momento-curvatura accurato .	149
4.7.4	Costruzione del legame taglio-scorrimento	158
4.8	Modellazione dell'elemento fascia.....	160
4.8.1	Generalità	160
4.8.2	Costruzione del legame momento-curvatura bilineare .	166
4.8.3	Costruzione del legame taglio-scorrimento	178
4.9	Bibliografia	180
5	Calcolo matriciale delle strutture	183
5.1	Formulazione del problema dell'analisi non lineare	183
5.2	Coefficienti di deformabilità dell'asta singola	187
5.3	Coefficienti di rigidezza dell'asta	192
5.4	Matrice di rigidezza dell'asta libera nel piano	196
5.5	Matrice di rigidezza dell'asta con tratti rigidi di estremità	201
5.6	Vettore delle azioni di incastro perfetto dell'asta	205
5.7	Analisi matriciale di strutture intelaiate	207
5.8	Analisi non lineare in controllo di spostamento	216
5.9	Bibliografia	221
6	Il codice di calcolo FREMA.....	223
6.1	Premessa.....	223
6.2	L'input	224
6.2.1	Geometria del telaio equivalente.....	224
6.2.2	Parametri meccanici.....	226
6.2.3	Discretizzazione delle aste e nodo di controllo.....	227

6.3	Modellazione di maschi e fasce di piano	228
6.3.1	Comportamento a flessione dei maschi.....	228
6.3.2	Comportamento a taglio dei maschi	228
6.3.3	Comportamento a flessione delle fasce di piano	229
6.3.4	Comportamento a taglio delle fasce di piano	229
6.4	L'output.....	230
6.5	La routine principale	231
6.6	Validazione e applicazioni del codice di calcolo	234
6.6.1	Prove su pannelli murari singoli: la sperimentazione dell'ISPRA	235
6.6.2	Prove sperimentali su prototipi in scala 1:1: la sperimentazione di Pavia.....	240
6.6.3	Simulazioni numeriche: Il "Progetto Catania"	249
6.6.4	Simulazioni numeriche: Salonikios et al. (2003).....	266
6.7	Dipendenza dei risultati dall'accuratezza della modellazione e relativo costo di elaborazione	269
6.8	Conclusioni e prospettive	273
6.9	Bibliografia	277

Appendice.....	279
-----------------------	------------

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1.1 – Esempi di architetture preistoriche: a) ricostruzione delle strutture rinvenute a Cipro, b) ricostruzione delle abitazioni rettangolari rinvenute in alcuni villaggi iracheni.....	2
Figura 1.2 – Complesso di Djoser (Egitto): la grande piramide a gradoni, probabilmente il primo monumento realizzato interamente in pietra della storia (2600 a.C., Periodo Protodinastico/Antico Regno)	3
Figura 1.3 – L’acquedotto romano di Segovia (Spagna), bene protetto dall’UNESCO	3
Figura 1.4 – Interno della cattedrale di Amiens, navata nord	4
Figura 1.5 – Resti archeologici della città di Gerico: fondazioni di strutture residenziali presso Tell es-Sultan risalenti al 8350 a.C.	5
Figura 1.6 – Affresco rinvenuto nella tomba di Rekhmara con indicazione del processo produttivo dei mattoni	6
Figura 1.7 – Murazione di pietrame con rivestimenti di mattoni e pietre di taglio nell'elevazione e nelle sottobasi del tamburo della cupola di S. Pietro, a Roma (in J. B. Rondelet, <i>Traité theorique et pratique del'Art de Bâtir</i> , Paris, 1802-1817, Tomo II, seconda parte, Tav. LXVI)	7
Figura 1.8 – Macchina per sperimentare la resistenza delle pietre (in J. B. Rondelet, <i>Traité theorique et pratique del'Art de Bâtir</i> , Paris, 1802-1817, Tomo I, Tav. VII, Fig. 2).....	8
Figura 2.1 – Scale di modellazione di strutture in muratura: (a) campione di muratura; (b) micro-modellazione dettagliata; (c) micro - modellazione semplificata; (d) macro-modellazione	16

Figura 2.2 – Prova di trazione uni assiale e definizione di G_f^I (energia di frattura associata al modo I).....	18
Figura 2.3 – Prova di taglio su doppietta e definizione di G_f^{II} (energia di frattura associata al modo II).....	19
Figura 2.4 – (a) Tipiche net bond surface di provini sottoposti a trazione al termine della prova; (b) estrapolazione dell'area netta per provini e sezioni rettangolari.....	21
Figura 2.5 – (a) Setup sperimentali delle prove a taglio; (b) sollecitazioni applicate sul provino	21
Figura 2.6 – Legame forza-spostamento per le prove di taglio; (b) correlazione tra energia di frattura di modo II e sforzo normale di confinamento.....	22
Figura 2.7 – (a) Legame di Mohr-Coulomb; (b) descrizione del fenomeno della dilatanza	23
Figura 2.8 – (a) Correlazione tra dilatanza e tensione di confinamento; (b) Misura dell'uplift per una prova sperimentale.....	23
Figura 2.9 – Prove di trazione ortogonale ai bed joints: (a) preparazione del provino; (b) setup sperimentale.....	24
Figura 2.10 – Diagrammi tensione-deformazione per prove di trazione ortogonale ai giunti di testa.....	25
Figura 2.11 – Schematizzazione ad interfacce. “Espansione” delle unità per tener conto dello spessore nullo dei giunti.....	26
Figura 2.12 – Meccanismi di collasso di assemblaggi malta-mattone.....	27
Figura 2.13 – (a) Assemblaggio di un campione in muratura; (b) Schema delle interfacce considerate nel modello.....	28
Figura 2.14 – Modello 3D di una unità: elementi solidi a 20 nodi ed elementi interfaccia a 16 nodi.....	29
Figura 2.15 – Spostamenti e tensioni affioranti lungo una superficie di interfaccia	30

Figura 2.16 – Modello proposto da Lourenço (1996).....	32
Figura 2.17 – Compression cap secondo Chaimoon & Attard (2007)	33
Figura 2.18 – Modello proposto da Macorini & Izzuddin (2010).....	34
Figura 2.19 – Evoluzione delle superfici plastiche	35
Figura 2.20 – Legami tensioni-spostamenti per la trazione monoassiale, il taglio-scorrimento e la compressione monoassiale e definizione delle relative energie di frattura	36
Figura 2.21 – Legge di degrado dei parametri in funzione dell’evoluzione del danneggiamento	37
Figura 2.22 – Schema di esecuzione delle prove sperimentali e modellazione in ADAPTIC.....	38
Figura 2.23 – Dettaglio delle interfacce definite all’interno del modello in ADAPTIC....	38
Figura 2.24 – Confronti tra i risultati delle prove sperimentali e i risultati delle modellazioni in ADAPTIC	40
Figura 2.25 – Quadro fessurativo sperimentale dei pannelli J4D e J5D	40
Figura 2.26 – Quadro fessurativo simulato, step 1: deformata e W_{pl1} alle interfacce ...	41
Figura 2.27 – Quadro fessurativo simulato, step 2: deformata e W_{pl1} alle interfacce ...	41
Figura 2.28 – Quadro fessurativo simulato, step 3: deformata e W_{pl1} alle interfacce ...	42
Figura 2.29 – Quadro fessurativo simulato, step 4: deformata e W_{pl1} alle interfacce ...	42
Figura 2.30 – Quadro fessurativo simulato, step 4: deformata e W_{pl2} alle interfacce ...	42
Figura 2.31 – Curva forza-spostamento del pannello all’avanzare del quadro fessurativo	43
Figura 2.32 – Tipologie di mesh utilizzate per l’assessment.....	44
Figura 2.33 – Confronto tra i risultati ottenuti con mesh differenti.....	44

Figura 2.34 – Risultati delle prove di taglio diretto (Binda et al., 1994)	46
Figura 2.35 – Risultati delle prove di taglio diretto in termini di criterio di MC (Binda et al., 1994).....	47
Figura 2.36 – Risultati delle prove di taglio diretto (Atkinson et al., 1989) – Old Bricks 49	
Figura 2.37 – Risultati delle prove di taglio diretto (Atkinson et al., 1989) – New Bricks	49
Figura 2.38 – Confronto tra risultati sperimentali e modello agli EF –Old Bricks.....	50
Figura 2.39 – Confronto tra risultati sperimentali e modello agli EF –New Bricks.....	50
Figura 2.40 – Setup delle prove sperimentali riportate in (Anthoine et al., 1995)	51
Figura 2.41 – Tessitura muraria “all’Inglese”.....	51
Figura 2.42 – Modello agli elementi finiti con sezioni preferenziali di rottura	52
Figura 2.43 – Prove sperimentali riportate in (Anthoine et al., 1995): a sinistra Low Wall, a destra High Wall	53
Figura 2.44 – Low Wall: confronto tra modello agli EF e risultato sperimentale	54
Figura 2.45 – High Wall: confronto tra modello agli EF e risultato sperimentale	54
Figura 2.46 – Diagrammi Taglio alla base vs. tensione media agente per alcune pareti a snellezza fissata, al variare della coesione. Confronto tra modello omogeneo e modello discreto.....	56
Figura 2.47 – Alcuni valori della coesione da adottare nel modello omogeneo, $\lambda=2.00$ (sigma=tensione media agente in [MPa], c=coesione in [MPa], T=Taglio alla base in [kN]; old si riferisce al valore discreto, new al valore che realizza l’equivalenza).....	57
Figura 2.48 – Relazione quadratica multi lineare per la valutazione del rapporto c_{eq}/c	58
Figura 2.49 – Parete di Via Martoglio: confronto tra modellazione agli EF secondo Gambarotta & Lagomarsino e modello omogeneo.....	60

Figura 2.50 – Pavia Door Wall: confronto tra prova sperimentale e modello omogeneo	60
Figura 2.51 – Modulo base adottato nella campagna numerica, pianta e prospetto (misure in [cm])	62
Figura 2.52 – Schema delle pareti analizzate	63
Figura 2.53 – Curve taglio spostamento del modulo 4-4 al variare della tipologia di fascia di piano.....	66
Figura 2.54 – Incrementi di resistenza η al variare delle caratteristiche geometriche e della tipologia delle pareti.....	66
Figura 2.55 – Incrementi di resistenza η : dettaglio della zona per $0 < \lambda < 1.5$	67
Figura 2.56 – Tabella riassuntiva dei coefficienti correttivi dei parametri meccanici di pareti in muratura per effetto di interventi di consolidamento (da Circolare 617/2009)	69
Figura 2.57 – Parete 1-1 con fascia forte: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi.....	70
Figura 2.58 – Parete 1-1 con fascia di piano debole: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi.....	70
Figura 2.59 – Parete 4-4 con fascia di piano forte: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi.....	71
Figura 2.60 – Parete 4-4 con fascia di piano debole: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi.....	71
Figura 2.61 - Parete 4-4: incremento di resistenza atteso da un consolidamento mediante intonaco armato al variare del numero di piani interessati dall'intervento ..	73
Figura 2.62 - Parete 4-4: incremento di resistenza atteso da un consolidamento mediante iniezione di miscele leganti al variare del numero di piani interessati dall'intervento	73
Figura 3.1 – Rappresentazione grafica concettuale dei livelli prestazionali.....	79

Figura 3.2 – Spettri elastici di accelerazione (a), spostamento (b) e spettro di domanda nel piano S_D - S_A (c).....	82
Figura 3.3 – Curva di capacità nel piano S_D - S_A	84
Figura 3.4 – Spettri di risposta anelastici a duttilità costante nel piano (S_D , S_A).	88
Figura 3.5 – Processo logico per ottenere il punto di massimo spostamento coerente con lo spettro considerato (performance point).....	89
Figura 3.6 – Comportamento delle pareti della scatola muraria in relazione al grado di ammorsamento	96
Figura 3.7 – Alcuni tipici meccanismi di ribaltamento caratteristici di porzioni di parete o di pareti intere.....	97
Figura 3.8 – Schema sintetico riassuntivo dei principali modelli semplificati oggetto di questo capitolo.....	97
Figura 3.9 – Meccanismi di collasso dell’arco in muratura secondo De la Hire (a sinistra) e secondo Poncelet (a destra).....	98
Figura 3.10 – Cinematismi di collasso del maschio murario (Come & Grimaldi, 1986).....	100
Figura 3.11 – Setto a sezione variabile	102
Figura 3.12 – Metodo SISV: Schema della parete sotto carico.....	103
Figura 3.13 – Metodo SISV: a) discretizzazione dell’elemento maschio/fascia; b) discretizzazione dell’elemento nodo; c) assemblaggio dell’intera parete	105
Figura 3.14 – Metodo SISV: Evoluzione del pannello	106
Figura 3.15 – Pannello a ventaglio multiplo implementato in Mas3D	107
Figura 3.16 – Metodo Mas3D: indicazione dei principali parametri di interesse.....	108
Figura 3.17 – Mas3d: discretizzazione di una parete mediante elementi pannello.....	109
Figura 3.18 – Modello a macroelementi di una parete in 3muri; legenda colori: rosso = maschi; viola = fasce di piano; grigio = nodi rigidi; verde = cordoli in c.a.....	110

Figura 3.19 – Screenshot del software 3Muri. Modello 3D di un edificio irregolare ...	110
Figura 3.20 – (a) Rottura a taglio; (b) Rottura a flessione di pannelli murari.....	111
Figura 3.21 – Macroelemento implementato nel codice di calcolo 3muri.....	112
Figura 3.22 – Identificazione fenomenologica delle bielle compresse in una parete investita da sisma	113
Figura 3.23 – Elementi biella e parete modellata mediante bielle.....	114
Figura 3.24 – Schema strutturale adottato nel metodo POR	115
Figura 3.25 – Metodo POR: Legame taglio-spostamento del singolo maschio.....	115
Figura 3.26 – Parete adottata nell’esempio sviluppato nella circ. 21745/1981.....	116
Figura 3.27 - Modello di parete con il metodo SAM e relativo elemento maschio.....	118
Figura 3.28 – Altezze efficaci dei maschi secondo Dolce (1989, 1991)	118
Figura 3.29 – Comportamento anelastico dell’elemento maschio nel caso di rottura per taglio.....	119
Figura 3.30 – Comportamento elasto-plastico-fragile e comportamento elasto-fragile di un elemento fascia	119
Figura 3.31 – Screenshot del software ANDILWALL: a sinistra modello 3D di un edificio; a destra modello a telaio equivalente.....	120
Figura 4.1 – Modalità di rottura e domini limite della muratura: (a) scala del materiale; (b) scala del pannello.....	127
Figura 4.2 – Tipiche modalità di rottura di un pannello in muratura	129
Figura 4.3 – Assunzioni per la valutazione della resistenza alla rottura per <i>rocking</i> con schiacciamento dell’angolo di base.....	132
Figura 4.4 – Modello di Mann & Müller: a) modello con giunti in schiuma di gomma; b) distribuzione di tensioni ipotizzata sul mattone	136

Figura 4.5 – Modello di Mann & Müller: elemento di muratura isolato dal pannello murario e rappresentazione delle sollecitazioni agenti	136
Figura 4.6 – Modello di Mann & Müller: rappresentazione grafica del dominio di resistenza	137
Figura 4.7 – Modello di Turnšek & Čačovič: rappresentazione grafica del dominio di resistenza nel piano $\sigma-\tau$	138
Figura 4.8 – Modello di Turnšek & Čačovič: schema della prova e cerchio di Mohr dello stato tensionale della parte centrale del pannello.....	139
Figura 4.9 – Influenza della snellezza e del rapporto di taglio sulla resistenza di pannelli in muratura.....	140
Figura 4.10 – Stato di sforzo compatibile nel sistema di riferimento principale (a) e nel sistema di riferimento del materiale (b)	141
Figura 4.11 – Diagramma qualitativo della legge costitutiva $\sigma-\varepsilon$ per la muratura.....	151
Figura 4.12 – Curva adimensionale tensioni-deformazioni della muratura compressa	153
Figura 4.13 – Stato deformativo e tensionale per la sezione integra e fessurata	154
Figura 4.14 – Deformazioni angolari pertinenti all'estremo i di un elemento maschio	159
Figura 4.15 – Modello a fasce forti-maschi deboli: rappresentazione concettuale del comportamento di una parete, con o senza la presenza degli effetti dovuti alla variazione degli sforzi normali.....	161
Figura 4.16 – Risposta delle fasce murarie ad azioni di tipo sismico.....	161
Figura 4.17 – Modello a fasce deboli-maschi forti: rappresentazione concettuale del comportamento di una parete, con o senza il contributo della deformabilità tagliante delle fasce.....	162
Figura 4.18 – Esempi di danni da sisma in edifici in muratura ordinaria.....	164

Figura 4.19 – Volume di riferimento nelle sezioni terminali di interfaccia	167
Figura 4.20 – Meccanismi di collasso delle fasce di piano: a) brick failure; b) joint failure	168
Figura 4.21 – Legame elastico-perfettamente plastico a trazione e a compressione adottato per la modellazione accurata delle fasce di piano	170
Figura 4.22 – Zona 1	171
Figura 4.23 – Zona 2	174
Figura 4.24 – Zona 3	174
Figura 4.25 – Situazione limite che segna il passaggio dalla zona 1 alla zona 2	177
Figura 4.26 – Dominio di resistenza della fascia di piano: confronto tra la proposta della NTC 2008 e il modello di Cattari & Lagomarsino (2008)	178
Figura 4.27 – Modellazione delle fasce: a) fasce elasto-fragili; b) fasce elasto-plastiche-fragili; c) fasce elasto-plastiche	179
Figura 5.1 – Risposta non lineare di una struttura ad un solo grado di libertà	184
Figura 5.2 – Discretizzazione dell’asta generica	187
Figura 5.3 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\alpha_{a,b}$	188
Figura 5.4 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\alpha_{a,b}$	190
Figura 5.5 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\beta_{a,b}$	190
Figura 5.6 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\gamma_{a,b}$	191
Figura 5.7 – Schemi per il calcolo dei coefficienti di rigidezza	193
Figura 5.8 – Momenti d’incastro perfetto	196
Figura 5.9 – Parametri di spostamento dell’asta libera nel piano	197
Figura 5.10 – Parametri di forza dell’asta libera nel piano	197

Figura 5.11 – Parametri di spostamento dell’asta con tratti rigidi.....	202
Figura 5.12 – Parametri di forza dell’asta con tratti rigidi.....	204
Figura 5.13 – Schemi di equilibrio per il calcolo delle azioni di incastro perfetto.....	206
Figura 5.14 – Riferimento globale e riferimento locale.....	208
Figura 6.1 – Screenshot del foglio di input.....	225
Figura 6.2 – Screenshot del foglio di output.....	230
Figura 6.3 – Prove sperimentali eseguite da Anthoine et al. (1995): a sinistra Low Panel, a destra High panel.....	237
Figura 6.4 – Low panel: confronto tra risultato sperimentale e previsione del codice FREMA.....	238
Figura 6.5 – High panel: confronto tra risultato sperimentale e previsione del codice FREMA.....	239
Figura 6.6 – Sperimentazione di Pavia: in alto a sinistra pianta dell’edificio; in alto a destra prospetto della parete A; in basso a sinistra prospetto della parete B (Window Wall); in basso a destra prospetto della parete D (Door Wall).....	241
Figura 6.7 – Sperimentazione di Pavia: schema della prova.....	242
Figura 6.8 – Sperimentazione di Pavia: curve taglio alla base vs. spostamento della Door Wall (a sinistra) e della Window Wall (a destra).....	242
Figura 6.9 – Quadri fessurativi al termine della prova: Door Wall (a sinistra), Window Wall (a destra).....	243
Figura 6.10 – Pavia Door Wall: confronto tra risultato sperimentale e simulazioni numeriche.....	245
Figura 6.11 – Pavia Door Wall: confronto tra i quadri fessurativi e le modalità di collasso previste dai diversi modelli: a) FREMA; b) SAM; c) TREMURI; d) Modello FEM.....	248

Figura 6.12 – Pavia Door Wall: confronto tra simulazioni numeriche fornite dal codice FREMA al variare del meccanismo di collasso delle fasce di piano	249
Figura 6.13 – Edificio di Via Martoglio: pianta e indicazione della parete interna oggetto di analisi.....	251
Figura 6.14 – Modello geometrico della parete di Via Martoglio	251
Figura 6.15 – Modello a telaio equivalente della parete di Via Martoglio	252
Figura 6.16 – Parete di Via Martoglio (modello 1): confronto tra le simulazioni numeriche	255
Figura 6.17 – Parete di Via Martoglio (modello 1): termine della fase 1	255
Figura 6.18 – Parete di Via Martoglio (modello 1): termine della fase 2	256
Figura 6.19 – Parete di Via Martoglio (modello 2): confronto tra le simulazioni numeriche	258
Figura 6.20 – Parete di Via Martoglio (modello 3): confronto tra le simulazioni numeriche	258
Figura 6.21 – Edificio di Via Verdi: pianta ed indicazione delle pareti oggetto di analisi	259
Figura 6.22 – Modello geometrico della parete A di Via Verdi	260
Figura 6.23 – Parete A di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche	262
Figura 6.24 – Modello geometrico della parete B di Via Verdi.....	263
Figura 6.25 – Parete B di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche	264
Figura 6.26 – Modello geometrico della parete D di Via Verdi	264
Figura 6.27 – Parete D di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche	265
Figura 6.28 – Pareti estratte dal lavoro di Salonikios et al. (2003): geometria della parete (in alto) e modello a telaio equivalente (in basso).....	266

Figura 6.29 – Parete 7B_LOAD: confronto tra le simulazioni numeriche.....	267
Figura 6.30 – Parete 7B_ACC: confronto tra le simulazioni numeriche	268
Figura 6.31 – Parete 7B_ACC: dipendenza dei risultati dall'accuratezza dell'analisi ...	271
Figura 6.32 – Parete 7B_LOAD: dipendenza dei risultati dall'accuratezza dell'analisi .	271
Figura 6.33 – Parametro di accuratezza β vs. tempo di elaborazione dati	273

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 2.1 – Parametri meccanici adottati nelle simulazioni numeriche con ADAPTIC	39
Tabella 2.2 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Atkinson et al., 1989)	48
Tabella 2.3 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Anthoine et al., 1995).....	52
Tabella 2.4 – Range di variazione dei parametri snellezza, coesione e tensione media agente sul pannello	55
Tabella 2.5 – Valori delle aperture del modulo base.....	63
Tabella 4.1 - Significato dei parametri nelle modalità di rottura per taglio	139
Tabella 4.2 – Sintesi dei criteri di resistenza adottati nelle principali normative.....	144
Tabella 4.3 – Significato dei parametri adottati nelle principali normative	144
Tabella 4.4 – Drift massimi adottati nelle principali normative	150
Tabella 4.5 – Drift ultimo e duttilità associati alla rottura per taglio da prove sperimentali quasistatiche su pannelli in muratura con rotazioni impedito agli estremi (Magenes & Calvi, 1997).	160
Tabella 6.1– Flow chart del codice di calcolo FREMA.....	231
Tabella 6.2 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Anthoine et al., 1995).....	236
Tabella 6.3 – Parametri meccanici della sperimentazione di Pavia.....	244
Tabella 6.4 – Parametri meccanici della parete di Via Martoglio.....	253
Tabella 6.5 – Carichi verticali e distribuzione delle forze sismiche sulla parete di Via Martoglio.....	254

Tabella 6.6 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete A di Via Verdi	260
Tabella 6.7 – Parametri meccanici della parete di Via Martoglio.....	261
Tabella 6.8 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete B di Via Verdi	263
Tabella 6.9 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete D di Via Verdi	266
Tabella 6.10 – Distribuzione delle forze sismiche nei modelli di Salonikios et al.	267
Tabella 6.11 – Modelli analizzati nella stima del mesh dependency.....	270
Tabella 6.12 – Tempi di calcolo in funzione dell’accuratezza dell’analisi.....	272

RINGRAZIAMENTI

L'esperienza del dottorato di ricerca, che con questo lavoro giunge al termine, ha rappresentato una fase importante della mia vita. Lavorare nell'ambito accademico mi ha permesso di confrontarmi ogni giorno con sfide stimolanti, di conoscere persone eccellenti, di maturare esperienze significative (talvolta in giro per il mondo) e di crescere, sotto tutti i punti di vista, come ingegnere e come uomo.

Tutto questo non sarebbe stato possibile senza la guida dei miei tutors: i professori Vincenzo Piluso e Gianvittorio Rizzano hanno rappresentato per me non soltanto dei formidabili referenti accademici, ma mi hanno insegnato il valore culturale ed umano dell'ingegneria.

I tre anni trascorsi nella stanza dottorandi del Laboratorio di Strutture sono stati un colorato affresco di momenti esaltanti, qualche litigio da nervosismo, risultati numerici e sperimentali che non sempre erano quelli "sperati", qualche caffè di troppo e (tanti) pranzi consumati davanti ad un freddo monitor.

Tutto ciò non avrebbe avuto lo stesso sapore senza i miei impareggiabili amici e colleghi dottorandi (che non elenco per brevità, come si suol dire nelle migliori pubblicazioni scientifiche). A tutti loro va il ringraziamento per essere stati compagni di

(s)ventura nel corso di questo pezzetto di vita che è stato il dottorato. Anche se le nostre strade dovessero dividersi, custodirò gelosamente i bei momenti trascorsi insieme.

Un ringraziamento speciale va ai miei genitori, che mi hanno concesso la grande opportunità di studiare. Ringrazio mio padre che mi ha trasmesso l'abnegazione per il lavoro e l'amore per le cose precise e ben fatte, e mia madre a cui devo l'insegnamento che l'umiltà è la prima qualità che deve possedere un uomo.

Percepire ogni giorno la stima che nutrono di me mi inorgoglisce più di quanto essi stessi possano credere.

Nell'ambito del corso di dottorato ho avuto la fortuna di vivere per un breve periodo a Londra (città di cui mi sono follemente innamorato) in qualità di Exchange Student presso l'Imperial College. Ringrazio il Dr. Lorenzo Macorini, *lecturer* e mio tutor presso il College, per avermi permesso di vivere questa meravigliosa esperienza sotto la guida del Prof. Bassam Izzuddin, per avermi fatto scoprire Waga Mama, e per i tanti "macchiato" condivisi nell'attesa che ADAPTIC macinasse numeri su numeri.

Ringrazio Virginia, mia *flatmate* londinese, per aver vissuto con lei momenti *british* indimenticabili, e per avermi assecondato nella straordinaria impresa di salire almeno una volta su tutte le linee della London Underground (memorabile la Waterloo & City line!).

Last but not least un ringraziamento speciale va (in rigoroso ordine alfabetico) a Giovanni e Marianna, persone davvero speciali per me. La tesi di dottorato è la mia occasione per dire loro quanto siano importanti, e per riparare finalmente al mio peccato originale: non averli inclusi nei ringraziamenti della mia tesi specialistica.

Torino, novembre 2010

“All exact science is dominated by the idea of approximation”

Bertrand Russell

“Science is organized knowledge”

Herbert Spencer

SUMMARY

The strongly inelastic behaviour of masonry panels makes inadequate any kind of linear static analyses, and for this reason, both for academic and practical purposes, engineers have to deal with non-linear analyses of masonry buildings.

On top of that, the need for non-linear static procedures (NSP) also arises as a consequence of the performance-based earthquake engineering concepts, that generally require the comparison of the seismic demand with the building capacity, expressed in terms of displacements.

Within this framework, the choice of the appropriate models to use is fundamental matter: on one hand, the need for accurate predictions of the structural response leads to the adoption of very complex FEM models but, on the other and, the high computational skills and the very time-consuming analyses suggest the adoption of simplified models, such as the equivalent frame approach.

The equivalent frame models are not novel for the analysis of masonry structures, but the actual potentialities have not yet been completely studied, particularly for non-linear applications.

In the present thesis an effective tool for the non-linear static analysis of 2D masonry walls is presented, namely the software FREMA (Equivalent **FR**ame **E** Analysis of **MA**sonry Structures) developed by the author.

In this work, the main innovative features of the proposed model (spread plasticity approach, displacement-driven loading

process, accurate moment-curvature law for piers in rocking, flexural strength of spandrels) are discussed and an extensive validation of the model has been carried out by means of a comparison with experimental tests and accurate FEM models available in literature.

SOMMARIO

Lo spiccato comportamento inelastico delle strutture in muratura rende inapplicabile l'utilizzo di modelli statici lineari, e per tale motivo, sia per scopi accademici che eminentemente pratici, la comunità scientifica è chiamata all'adozione di più complessi modelli strutturali.

A ciò si aggiunge l'esigenza di specifiche procedure statiche non lineari (NSP) che discendono dall'applicazione dei concetti alla base di un approccio performance-based dell'ingegneria sismica. Tali procedure generalmente richiedono il confronto della domanda sismica con la capacità dell'edificio, tipicamente espressa in termini di spostamenti.

In questa logica, la scelta dei più corretti modelli strutturali è di fondamentale importanza: da un lato l'esigenza di una previsione accurata porta all'adozione di modelli agli elementi finiti (EF) molto complessi ma, d'altra parte, l'alto costo in termini di tempo e di capacità computazionali richieste dai modelli agli EF suggerisce l'adozione, specie nella pratica professionale, di modelli semplificati, quali ad esempio il modello a telaio equivalente.

Il modello a telaio equivalente non è una novità nel panorama della modellazione di strutture in muratura, tuttavia le effettive potenzialità del metodo meritano ancora oggi un sostanziale approfondimento, soprattutto in ambito non lineare.

Scopo del presente lavoro di tesi è stata la realizzazione del software FREMA (Equivalent **FR**ame **E** Analysis of **MA**sonry

Structures), efficace strumento per l'analisi statica non lineare di pareti in muratura.

Nel lavoro in esame sono quindi analizzate dapprima le principali caratteristiche del modello proposto (approccio a plasticità diffusa, processo di carico in controllo di spostamento, utilizzo di una legge accurata momento-curvatura per il problema flessionale dei maschi murari, innovativi modelli a flessione per le fasce di piano) e successivamente una esaustiva validazione del software viene realizzata attraverso confronti con risultati teorici (analisi accurate agli EF) e riscontri sperimentali disponibili in letteratura.

1

INTRODUZIONE

Il capitolo 1 riporta un breve quadro sulla storia delle costruzioni in muratura, illustrando lo sviluppo teorico della disciplina della tecnica delle costruzioni murarie ed infine delineando i principali obiettivi e l'organizzazione del lavoro di tesi.

Le costruzioni in muratura rappresentano senza dubbio uno dei più significativi segni dello sviluppo della civiltà umana e del suo avanzamento tecnologico: è difficile rimanere impassibili dinanzi alla grandezza delle piramidi egizie, dei templi greci, dei castelli medievali o delle grandi chiese gotiche.

La principale caratteristica del costruire in muratura risiede in fondo nella sua semplicità: sovrapporre pietre o mattoni l'uno sopra l'altro, con o senza l'ausilio di malta, ha rappresentato una tecnica semplice eppure adeguata sin dall'antichità.

A tale semplicità si aggiungono l'estetica, la durabilità, le buone prestazioni termiche ed acustiche, la protezione nei riguardi del fuoco ed un comportamento strutturale complesso ma senza dubbio valido.

Tuttavia, nonostante tale tecnica costruttiva sia così radicata nella storia dell'uomo, sarebbe senz'altro erroneo ritenere che essa non riservi segreti tanto al "pratico" quanto all'accademico.

1.1 EVOLUZIONE STORICA

Molti studiosi sono concordi nell'affermare che la storia dell'umanità progredisca di pari passo la storia dell'architettura (Musgrove & Fletcher, 1987; Davey 1961).

Il primo materiale da costruzione propriamente inteso è stata probabilmente la pietra. Studi archeologici attestano al 9000-8000 a.C. le primissime costruzioni in pietra, rinvenute nei pressi del Lago Hullen, Israele; successivi rinvenimenti risalenti al 6000-5000 a.C. si sono invece avuti sia nell'isola di Cipro (abitazioni a pianta circolare, 5650 a.C.) sia in Iraq (strutture a pianta rettangolare, 5500-5000 a.C.) entrambi raffigurati in Figura 1.1.

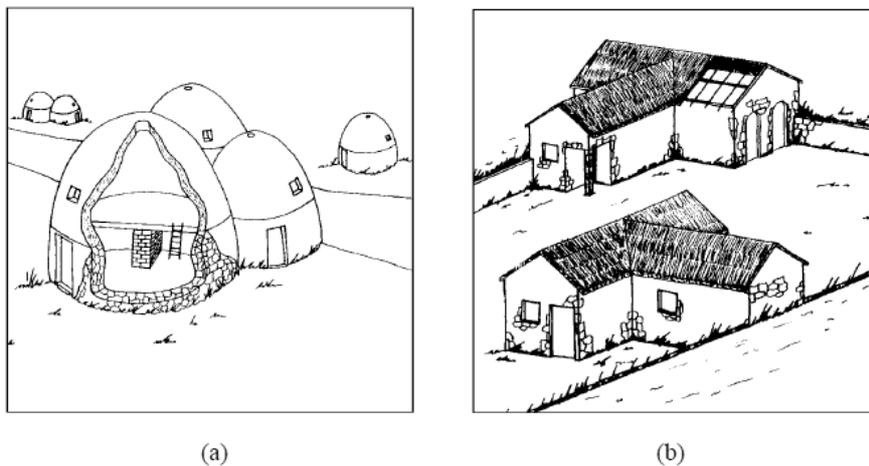


Figura 1.1 - Esempi di architetture preistoriche: a) ricostruzione delle strutture rinvenute a Cipro, b) ricostruzione delle abitazioni rettangolari rinvenute in alcuni villaggi iracheni

Ma è a partire dalla civiltà egizia (Periodo Protodinastico e Antico Regno, ca. 2800-2000 a.C., Figura 1.2) e successivamente con quella romana (0-1200 d.C., Figura 1.3) che l'uomo ha dato vita alle più portentose realizzazioni di strutture in muratura.

Piramidi da un lato, acquedotti, piazze, chiese e templi dall'altra non fanno altro che avvalorare la tesi esposta: la storia dell'umanità progredisce davvero con la storia dell'architettura.



Figura 1.2 – Complesso di Djoser (Egitto): la grande piramide a gradoni, probabilmente il primo monumento realizzato interamente in pietra della storia (2600 a.C., Periodo Protodinastico/Antico Regno)



Figura 1.3 – L'acquedotto romano di Segovia (Spagna), bene protetto dall'UNESCO

L'arte del costruire in muratura raggiunge i massimi splendori con l'architettura gotica (1200-1600, Figura 1.4) dove strutture snelle, protese verso il cielo, sono costituite da maschi, archi, volte e contrafforti in un meraviglioso e magico gioco di equilibrio statico.

La pietra, il cui uso pure raggiunge livelli di eccellenza proprio nel periodo gotico, non ha rappresentato l'unica alternativa nella storia delle costruzioni in muratura. Ben presto si comprese che tutte le operazioni connesse all'uso della pietra (estrazione, trasporto, lavorazione) fossero costose e fortemente antieconomiche in taluni contesti, riservandone quindi la lavorazione agli ambiti monumentali.



Figura 1.4 – Interno della cattedrale di Amiens, navata nord

Questa esigenza, unitamente all'ampia disponibilità di materiali argillosi (che costituiscono una significativa parte della crosta terrestre) e al clima arido proprio di alcune regioni, condusse all'*invenzione* del mattone.

Nella città di Gerico (Figura 1.5), in Cisgiordania, sono state rinvenute abitazioni a pianta ovale realizzate in mattoni e risalenti al periodo 8350-7350 a.C. (quindi antiche quanto le ancestrali costruzioni in pietra del lago Hullen).



Figura 1.5 – Resti archeologici della città di Gerico: fondazioni di strutture residenziali presso Tell es-Sultan risalenti al 8350 a.C.

E anche gli stessi Egizi producevano mattoni a partire dai terreni fangosi del Nilo, che arricchivano di paglia e sabbia per limitare i vistosi fenomeni di shrinkage (pari anche al 30%) dovuti all'essiccazione.

L'uso di mattoni presso la civiltà egizia è testimoniato da un affresco (Figura 1.6) rinvenuto nella tomba di Rekhmara (1500 a.C.) nel quale è raffigurato il processo produttivo di mattoni a Tebe, nell'Alto Egitto.

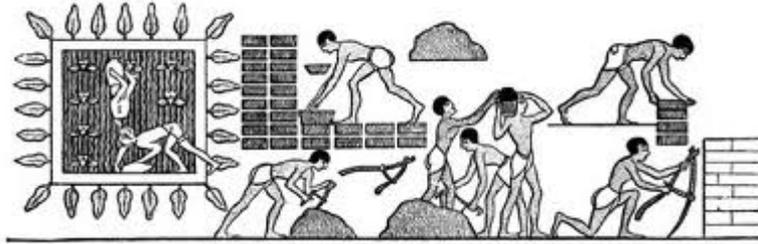


Figura 1.6 – Affresco rinvenuto nella tomba di Rekhmara con indicazione del processo produttivo dei mattoni

La tecnologia di produzione di mattoni ben presto si evolse, passando dai mattoni semplicemente essiccati ai mattoni cotti. Il risultato di tale avanzamento tecnologico fu, tra gli altri, la (mitica) costruzione del primo “grattacielo” della storia, la Torre di Babele, che stando alle fonti bibliche raggiungeva i 90 [m] (in verità l’equivalente archeologico della Torre di Babele è probabilmente lo ziqqurat di Etemenanki, che raggiunse un’altezza di molto inferiore, tra i 15 e i 25 [m], ma rimase verosimilmente incompleto).

La storia del mattone si arricchisce di un particolare fondamentale in epoca romana: i Romani infatti, nel tentativo di omogeneizzare la propria architettura all’interno dell’impero, diedero vita ad un embrione di quella che oggi definiremmo standardizzazione. Si servirono infatti delle costruzioni in muratura per creare un proprio *stile* architettonico da riproporre nelle diverse province dell’Impero, imprimendo quindi una riconoscibilità immediata al costruito. Fu appunto una sorta di standardizzazione delle dimensioni dei mattoni a produrre questo fondamentale risultato (sia sul piano storico che squisitamente tecnico).

Ultimo, fondamentale momento di questo breve excursus storico è la Rivoluzione Industriale (Elliott, 1992), durante la quale l’industrializzazione dei processi produttivi dei mattoni portò alla

produzione in serie e alla standardizzazione vera e propria dei mattoni così come li conosciamo oggi.

1.2 TEORIA DELLE COSTRUZIONI IN MURATURA: TRA PASSATO E PRESENTE

Le tecniche costruttive delle strutture in muratura, che hanno dato vita al grandioso patrimonio monumentale che la storia ci ha lasciato, si sono affinate nei secoli attraverso (talvolta dolorosi) meccanismi empirici di *trial-and-error*.

Ciononostante le costruzioni in muratura non hanno conosciuto una vera e propria sistematizzazione del sapere e delle conoscenze faticosamente acquisite nei secoli.

Un'impostazione razionale della Scienza e della Tecnica delle costruzioni in muratura sorgeva in effetti intorno al XIX secolo grazie al lavoro, tra gli altri, di Navier, Rondelet e Viollet-le-Duc.

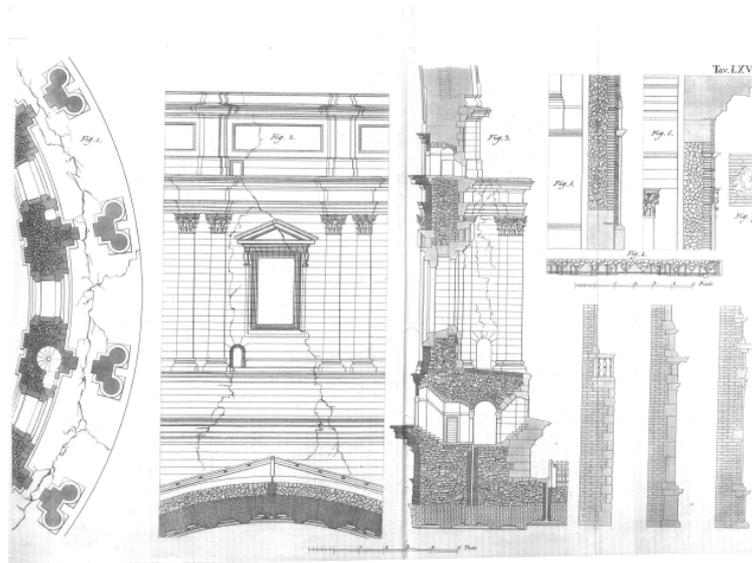


Figura 1.7 – Murazione di pietrame con rivestimenti di mattoni e pietre di taglio nell'elevazione e nelle sottobasi del tamburo della cupola di S. Pietro, a Roma (in J. B. Rondelet, *Traité theorique et pratique del'Art de Bâtir*, Paris, 1802-1817, Tomo II, seconda parte, Tav. LXVI)

Il Rondelet in particolare, nel suo *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir* (Trattato teorico e pratico dell'arte di costruire) si era soffermato su una molteplicità di argomenti connessi alle costruzioni in pietra e in muratura: stereotomia (l'arte di intagliare le pietre per realizzarne elementi strutturali), analisi delle principali chiese e cattedrali del suo tempo (Figura 1.7), studio delle caratteristiche meccaniche dei materiali (Figura 1.8) e così via.

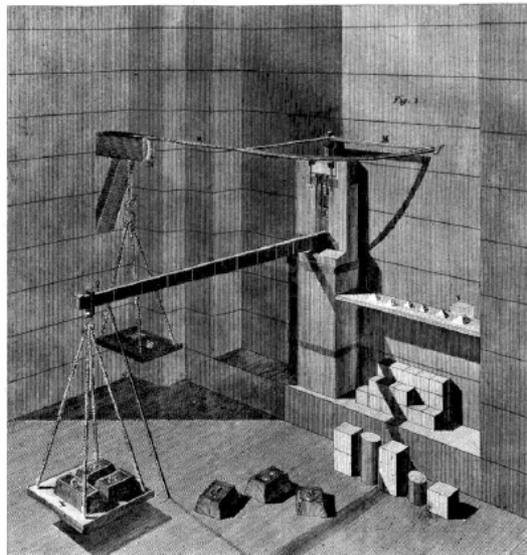


Figura 1.8 – Macchina per sperimentare la resistenza delle pietre (in J. B. Rondelet, *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir*, Paris, 1802-1817, Tomo I, Tav. VII, Fig. 2)

In particolare il Rondelet aveva tentato di offrire regole pratiche per il proporzionamento di elementi strutturali in muratura, basandosi sull'elevazione dei muri stessi. Per quanto tale impostazione fosse più empirica che propriamente analitica, essa rappresentava senza dubbio un ottimo punto di partenza per una teoria "ordinata" delle costruzioni in muratura.

Ma l'avvento del cemento armato finì purtroppo per ostacolare successivi studi sull'argomento. La comunità scientifica trascurò per lungo tempo lo studio teorico delle murature a vantaggio dei nuovi materiali, che promettevano speranze senza pari e costruzioni apparentemente "eterne".

Così, giunti ormai al XXI secolo, malgrado i grandi progressi compiuti nella modellazione strutturale e i significativi avanzamenti in materia di ingegneria sismica, e nonostante la disponibilità di strumenti di calcolo impensabili per gli scienziati di un tempo, le murature ancora rappresentano un punto controverso e "doloroso" nella teoria e nella pratica ingegneristica.

Tale quadro è in realtà ancora più complesso se si prende in considerazione il progressivo, doveroso, aggiornamento delle norme tecniche in materia di costruzioni.

Già nel 2003, dopo il luttuoso sisma che investì San Giuliano di Puglia, provocando la morte di ventisette bambini, il legislatore affrettò l'emanazione di un nuovo codice tecnico (l'Ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri 3274 e successive modificazioni ed integrazioni). In esso veniva finalmente rivisto l'impianto generale in tema di dinamica delle strutture, riconoscendo la maggiore complessità richiesta dalle strutture in muratura in zona sismica. E tale complessità si è conservata anche nelle Norme Tecniche per le Costruzioni emanate nel 2008.

È interessante notare, tuttavia, che essenzialmente già il precedente sistema normativo, risalente agli anni '80 (D.M. 2 luglio 1981, Circolare Ministeriale LL. PP. 21745/1981) proponeva esplicitamente per le strutture in muratura metodi di analisi non lineari, sia pure attraverso modelli relativamente semplici (come ad esempio il metodo POR sviluppato in Slovenia, su cui si ritornerà approfonditamente nel prosieguo).

Fu proprio con le prime ricerche in Slovenia ad opera di Tomažević alla fine degli anni '70 che il mondo accademico cominciò ad interessarsi al comportamento di elementi strutturali in

muratura, cogliendo i primi fondamentali risultati avvalorati su base sperimentale. In seguito, grazie anche all'avvento di sempre più potenti calcolatori elettronici, i metodi di analisi agli elementi finiti si sono rivelati utilissimi nella formulazione e nella validazione di modelli teorici vieppiù complessi.

Ciononostante, tali (recenti) sforzi non hanno condotto ancora alla costituzione di un sapere sistematico e di un insieme di regole progettuali razionali ed "ingegnerizzate". Le costruzioni in muratura continuano ancora oggi a soffrire di un pericoloso paradosso: se da un lato se ne riconosce l'oggettiva complessità, dall'altro, nonostante le portentose realizzazioni che la storia ci ha lasciato, è forse l'ambito applicativo in cui gli ingegneri faticano maggiormente.

Proprio questa grande fatica, che spinge gli ingegneri di oggi verso soluzioni rapide e talvolta "economiche" (spesso accompagnate da un uso non sempre coscienzioso degli strumenti di calcolo attualmente disponibili) rappresenta il punto critico su cui accademici e sperimentatori devono lavorare e collaborare.

1.3 OBIETTIVI ED ORGANIZZAZIONE DEL LAVORO

La disamina fin qui condotta ci porta quindi alla *driving force* che ha animato questo lavoro di tesi: recuperare lo scollamento esistente tra mondo accademico e mondo professionale in tema di modellazione di strutture in muratura.

Il mondo accademico è chiamato non solo a proporre teorie sempre più complesse e rispondenti alla realtà ma deve sforzarsi contemporaneamente di offrire al mondo della pratica ingegneristica strumenti agili, efficaci e di provata affidabilità, che sappiano conseguire un bilanciato compromesso tra validità teorico-sperimentale e praticità applicativa.

In questa logica si inserisce a pieno titolo la problematica della modellazione semplificata di strutture in muratura soggette ad azioni orizzontali. In particolare tale modellazione annovera, tra gli

altri, lo schema a *telaio equivalente*, evoluzione avanzata di quel metodo POR di cui si è già detto (e su cui si tornerà).

Il presente lavoro di tesi ha lo scopo di fornire un contributo originale allo studio del comportamento sismico di pareti in murature caricate nel piano. L'obiettivo finale è stata la realizzazione di un modello teorico per l'analisi strutturale e la successiva codifica nel software FREMA (Equivalent **FR**ame Analysis of **MA**sonry Structures).

Il lavoro è organizzato secondo il seguente schema:

- nel capitolo 2 viene presentata una panoramica dello stato dell'arte della modellazione di elementi in muratura con particolare riguardo alle diverse scale d'analisi (micro e macro-modellazione) nell'ambito di applicazioni agli elementi finiti. Nella seconda parte del capitolo, ampio spazio viene riservato alle modellazioni accurate a livello di meso-scala realizzate con l'ausilio del software ADAPTIC (Izzuddin, 1991). Nella terza parte, infine, vengono riportati i risultati di una campagna di simulazione numerica del comportamento di pannelli in muratura (Rizzano et al., 2008), realizzate attraverso il codice STRAUS7, finalizzate alla comprensione dei principali benefici attesi a seguito di interventi di rinforzo, con particolare riferimento alle fasce di piano (Rizzano et al., 2009), adottando modelli omogenei;
- nel capitolo 3 vengono dapprima riportati cenni di modellazione sismica secondo le attuali norme tecniche italiane. Si passa successivamente ad una rassegna dei principali metodi semplificati di analisi di strutture in muratura disponibili in letteratura, con particolare enfasi sui modelli a telaio equivalente.

- nel capitolo 4 vengono illustrati gli aspetti fenomenologici alla base dei classici modelli di previsione del comportamento flessionale e tagliante di maschi murari e fasce di piano, Vengono altresì presentati i legami costitutivi effettivamente impiegati nel software;
- nel capitolo 5 si riassumono i fondamenti del calcolo matriciale delle strutture intelaiate, con particolare riferimento alle tecniche di programmazione finalizzate alle analisi non lineari in controllo di spostamento;
- nel capitolo 6 viene presentato il codice di calcolo sviluppato (Sabatino & Rizzano 2010; Rizzano & Sabatino, 2010a; Rizzano & Sabatino, 2010b) e ne viene illustrata la validazione realizzate mediante confronti tra le previsioni del modello e dati sperimentali o simulazioni numeriche disponibili in letteratura.

1.4 BIBLIOGRAFIA

Davey N. (1961). *A history of building materials*, Phoenix House, London, UK.

Elliott C. D. (1992). *Technics and architecture: The development of materials and systems of buildings*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA.

Izzuddin B. A. (1991). *Nonlinear Dynamic Analysis of Framed Structures*, PhD Thesis, Imperial College, London.

Musgrove J., Fletcher B. (1987). *Sir Banister Fletcher's: A history of architecture*, Butterworths, London, UK.

Rondelet J. B. (1802-1817). *Traité theorique et pratique del'Art de Bâtir*, Paris.

Rizzano G., Sabatino R., Squizzato A. (2008). Simplified and accurate models in evaluating seismic strength of masonry walls, *Proceedings of 4th CINPAR, International Conference on Structural Defects and Repair*, Aveiro, Portugal.

Rizzano G., Sabatino R., Zambrano M. (2009). L'influenza delle fasce di piano sulla resistenza di pareti in muratura, *Proceedings of 13th ANIDIS - Italian National Conference on Earthquake Engineering*, Bologna, Italy.

Rizzano G., Sabatino R. (2010a). Non-Linear Static Analysis of Masonry Structures by means of Equivalent Frames simplified approach, *Proceedings of 8th International Masonry Conference*, Dresden, Germany, pp. 1211-1220.

Rizzano G., Sabatino R. (2010b). An equivalent frame model for the seismic analysis of masonry structures, *Proceedings of SISMICA 2010, 8th Conference on Seismology and Earthquake Engineering*, Aveiro, Portugal.

Sabatino R., Rizzano G. (2010). Non-Linear Static Analysis Of Masonry Structures. Simplified Equivalent Frames and accurate models, *Proceedings of 14th ECEE, European Conference on Earthquake Engineering*, Ohrid, Macedonia.

2

MODELLAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Il capitolo 2 consta di tre parti distinte. La parte I si sofferma sugli aspetti fenomenologici del comportamento del “materiale” muratura, con l'introduzione del concetto di scala della modellazione, distinguendo in particolare la micro-modellazione dalla macro-modellazione. La parte II è incentrata sulla modellazione accurata agli elementi finiti di pannelli in muratura; vengono riportati i risultati di applicazioni agli elementi finiti a livello di meso-scala realizzati con il codice ADAPTIC (Izzuddin, 1991). La parte III, dedicata alla macro-modellazione, presenta un'estesa campagna numerica realizzata con STRAUS7 volta alla valutazione dell'efficacia di tecniche di rinforzo (con particolare riferimento al rinforzo delle fasce di piano) di pareti in muratura di varia geometria caricate nel proprio piano medio.

2.1 PARTE I: INTRODUZIONE E SCALE DI MODELLAZIONE

La muratura è un materiale che, per effetto della presenza dei giunti di malta, che agiscono come piani di debolezza, presenta un comportamento fortemente anisotropo.

La muratura è “intrinsecamente discreta”, strutturalmente discontinua e tale discontinuità rende la modellazione di questo materiale tanto complessa. Pertanto il livello di accuratezza che si intende perseguire governa la scala di analisi. L'analisi accurata dipende quindi dalla modellazione dei due “elementi” fondamentali costitutivi, ossia le “unità” (blocchi, mattoni) e la malta. In questo senso, in funzione del grado di approfondimento dell'analisi, di

distinguono classicamente tre diverse strategie di modellazione accurata (Figura 2.1):

- Micro-modellazione dettagliata
- Micro-modellazione semplificata
- Macro-modellazione

Nell'ambito della micro-modellazione dettagliata, vengono definiti tre elementi meccanicamente responsabili del comportamento del materiale: l'unità, i giunti di malta e le superfici di interfaccia. In questo approccio sia le unità che i giunti sono modellati come continui (dotati quindi di tutti i propri parametri meccanici) mentre le superfici di interfaccia sono le discontinuità in cui sono concentrate le potenziali linee di scorrimento/frattura.

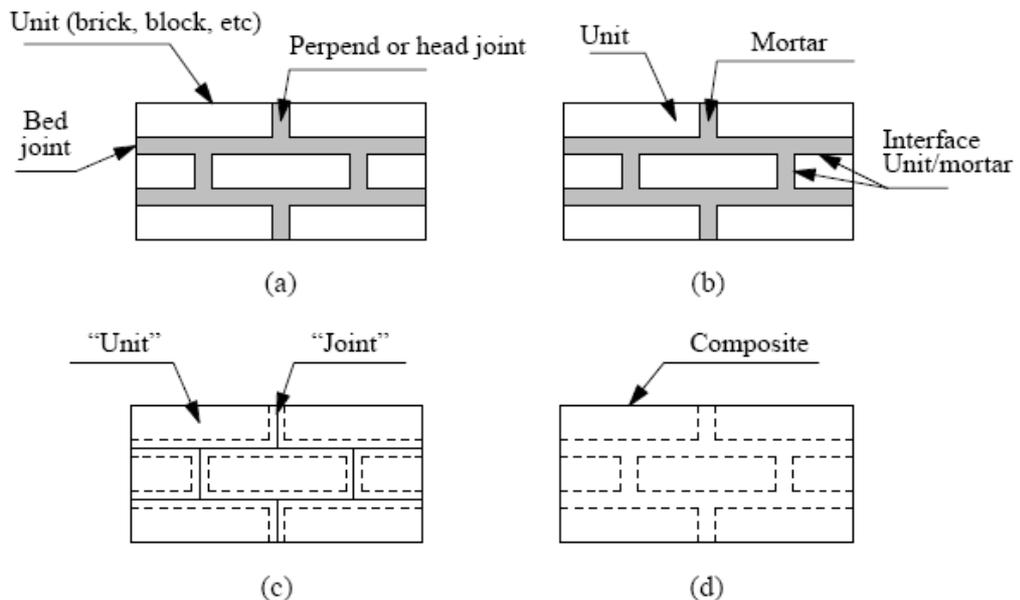


Figura 2.1 – Scale di modellazione di strutture in muratura: (a) campione di muratura; (b) micro-modellazione dettagliata; (c) micro - modellazione semplificata; (d) macro-modellazione

Nella micro-modellazione semplificata, a cui spesso ci si riferisce come “modellazione ad interfacce”, si prendono in considerazione soltanto le unità opportunamente connesse da superfici di interfaccia. In questo modo, pur continuando a concentrare nelle superfici di interfaccia le potenziali linee di frattura/scorrimento, i giunti vengono difatti ridotti ad uno spessore nullo, e le unità vengono congruamente espanse per conservare la geometria oggetto di analisi. Sulla modellazione ad interfacce si tornerà diffusamente nella seconda parte di questo capitolo, dove verranno illustrate delle applicazioni condotte con il codice ADAPTIC (Izzuddin, 1991).

Nel modello ad interfacce si verifica ovviamente una perdita di dettaglio rispetto alla micro-modellazione dettagliata, ed in particolare vengono trascurato gli effetti di contrazione trasversale alla Poisson all'interno della malta.

Con l'approccio omogeneo, o macro-modellazione, si rinuncia completamente alla distinzione tra unità, giunti e superfici a vantaggio di un unico materiale anisotropo “equivalente”; chiaramente la calibrazione del materiale così ottenuto dipenderà comunque dai singoli costituenti, ma il risultato finale meglio si presterà ad analisi di natura ingegneristica.

Va da sé che i tre approcci qui presentati vanno scelti alla luce del problema da risolvere. L'avvento dei calcolatori elettronici e la crescente capacità di calcolo e di storage dei dati ha permesso l'uso di modelli estremamente raffinati, capaci di prevedere con grande accuratezza il comportamento di strutture in muratura. Ovviamente l'adozione di modelli più semplificati potrebbe preferirsi qualora si fosse alla ricerca di un compromesso tra accuratezza e costi della modellazione (e qualora l'ambito di applicazione – pareti “sufficientemente” grandi – permetta di prescindere dalla effettiva localizzazione degli sforzi ma piuttosto di guardare al comportamento su grande scala).

2.1.1 L'interfaccia malta-mattone

I modelli accurati richiedono una dettagliata comprensione del comportamento sperimentale del materiale e dei suoi costituenti. A questo riguardo, l'aspetto fenomenologicamente più rilevante che governa la risposta meccanica di pareti in muratura è rappresentato dal comportamento delle interfacce malta-mattone, di cui in questa sezione vengono forniti brevissimi cenni, strettamente prodepeutici alla discussione dei modelli ad interfacce presentate nel prosieguo, distinguendo il comportamento dei bed joints (giunti orizzontali) dagli head joints (giunti verticali).

2.1.2 Comportamento dei bed joints

Due diverse fenomeni caratterizzano il comportamento dei giunti orizzontali (bed joints): uno associato alla rottura per trazione (modo I) ed uno associato alla rottura per taglio (modo II). Di tali modalità di rottura si discuterà brevemente, poiché esse rappresentano i fondamenti di qualsivoglia modellazione.

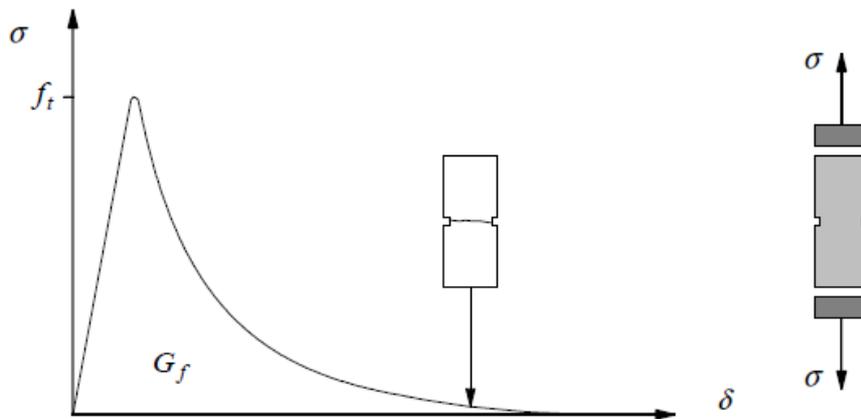


Figura 2.2 – Prova di trazione uni assiale e definizione di G_f^I (energia di frattura associata al modo I)

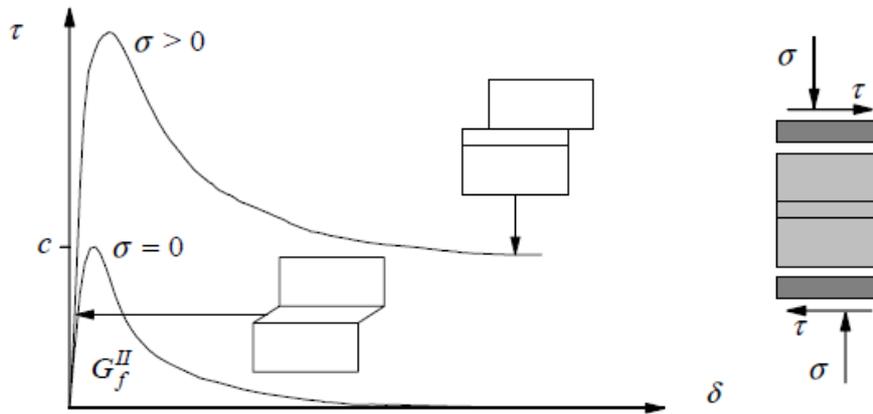


Figura 2.3 – Prova di taglio su doppietta e definizione di G_f^{II} (energia di frattura associata al modo II)

In Figura 2.2 è riportato l'andamento qualitativo dei legami tensione-ampiezza delle fessure per prove di trazione uniassiale; in Figura 2.3 una medesima rappresentazione è riportata per prove di taglio diretto su accoppiamenti malta-mattone. Dall'analisi dei diagrammi è possibile osservare non soltanto la non-linearità dei legami, ma la spiccata presenza di un ramo di softening dovuto al comportamento microscopico del provino nel corso della prova.

Con riferimento ad esempio alla prova a trazione, il ramo iniziale è relativo alla formazione di micro-cricche all'interno dei materiali che, essendo inizialmente stabili, si espandono solo per effetto di un carico crescente. All'aumentare del carico (e quindi al numero e all'apertura delle microcricche), intorno al valore di picco delle tensioni, fanno la loro comparsa macrocricche instabili che determinano una progressiva diminuzione del carico sopportabile dal provino.

I grafici illustrano inoltre due parametri fondamentali che intervengono nell'ambito delle modellazioni accurate, ossia l'energia di frattura associata al modo I e al modo II. Tali energie di fratture

sono valutate come l'integrale delle curve $\sigma - \delta$ e rappresentano pertanto veri e propri parametri meccanici distintivi del materiale.

Le energie di frattura infatti regolano il ramo di softening e pertanto sono fondamentali nel definire l'evoluzione del comportamento post-picco delle strutture in muratura.

Alcuni autori hanno condotto estese campagne sperimentali finalizzate alla valutazione del comportamento delle interfacce malta-mattone, dimostrando come, per il modo I di frattura, il ramo di softening possa essere ben approssimato da una curva ad andamento esponenziale, dipendente, tra gli altri parametri, proprio dall'energia di frattura.

Una delle più estese campagne sperimentali condotte allo scopo di descrivere il comportamento delle interfacce a trazione e a taglio è quella di Van der Pluijm (1992).

Tra gli altri numerosi interessanti risultati a cui l'autore è giunto nella sua ricerca, vi è senz'altro da segnalare l'osservazione fatta sui provini soggetti a trazione al termine dei test. Si evidenziava infatti che l'area di effettivo contatto (*net bond surface*) era sensibilmente minore rispetto alla sezione trasversale lorda del provino. Tale riduzione dell'area di contatto, che sembra concentrarsi nella parte interna della superficie di contatto, è probabilmente originata da una parte dai fenomeni di ritiro della malta, dall'altra dalla modalità esecutiva delle murature stesse, ossia la sovrapposizione stessa di mattoni su letti di malta. Le stime dell'area netta rappresentano in verità un aspetto piuttosto significativo, poiché consente di valutare con maggior precisione sia la resistenza a trazione dell'interfaccia, che l'energia di frattura del modo I.

L'autore ha riscontrato per i provini un'area netta pari mediamente a circa il 35% dell'area lorda, estrapolando quindi, per una parete rettangolare, un valore dell'area pari al 59% dell'area lorda (Figura 2.4).

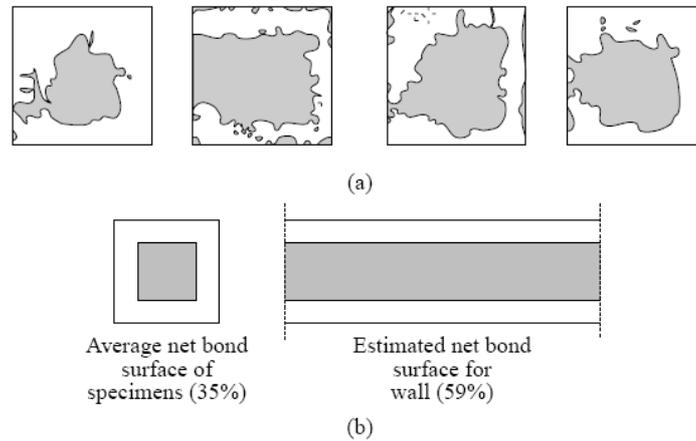
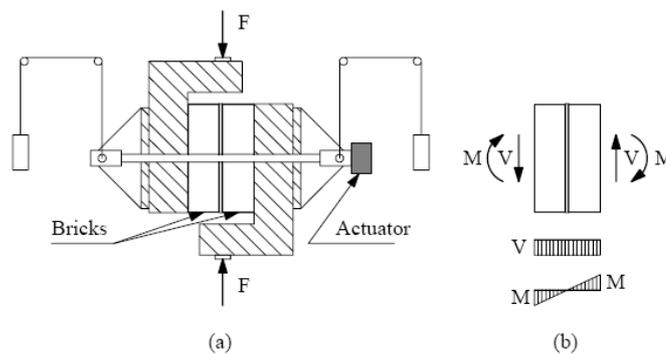


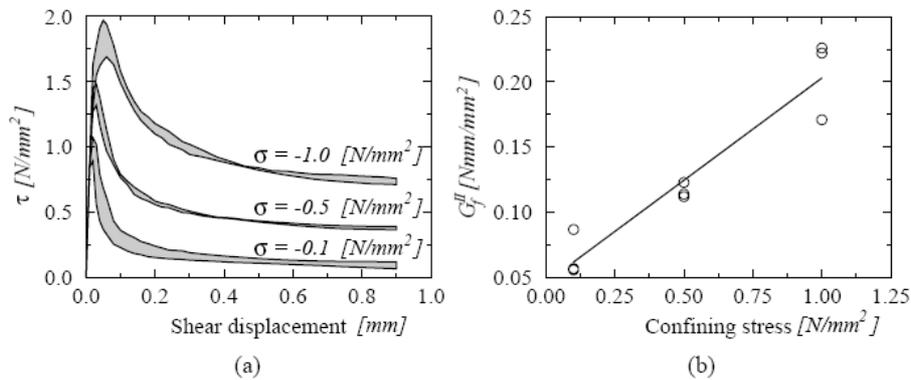
Figura 2.4 – (a) Tipiche net bond surface di provini sottoposti a trazione al termine della prova; (b) estrapolazione dell’area netta per provini e sezioni rettangolari

Con riferimento alle prove di taglio, i risultati di Van der Pluijm sono particolarmente apprezzati poiché il setup sperimentale della sue prove è concepito in maniera da tale da generare uno stato di tensioni praticamente uniforme all’interno del provino, come illustrato in Figura 2.5.



Test set-up to obtain shear bond behavior, Van der Pluijm (1993):
 (a) test specimen ready for testing; (b) forces applied to the test specimen during testing.

Figura 2.5 – (a) Setup sperimentali delle prove a taglio; (b) sollecitazioni applicate sul provino

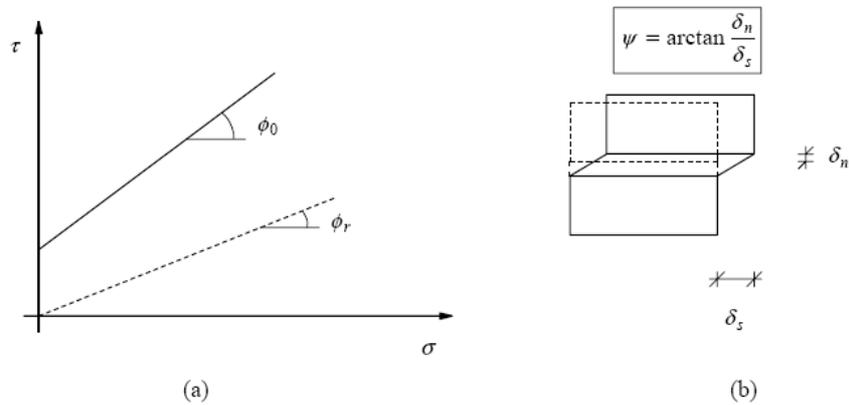


(a) Typical shear bond behavior of the joints for solid clay units, Van der Pluijm (1993): (a) stress-displacement diagram for different normal stress levels (the shaded area represents the envelope of three tests); (b) mode II fracture energy G_f^{II} as a function of the normal stress level.

Figura 2.6 – Legame forza-spostamento per le prove di taglio; (b) correlazione tra energia di frattura di modo II e sforzo normale di confinamento

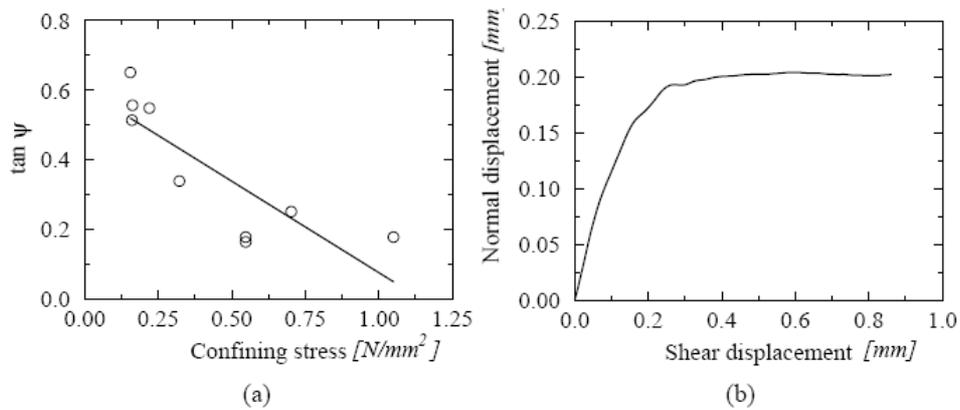
Con riferimento alle prove di taglio, i risultati di Van der Pluijm hanno evidenziato il tipico comportamento attritivo esprimibile attraverso un legame alla Mohr-Coulomb, ma hanno fornito anche una stima dell'energia di frattura di modo II in funzione della pressione di confinamento agente sui giunti. Alla luce di quanto precedentemente illustrato, questo risultato è particolarmente apprezzato considerando che molto raramente nell'ambito della modellazione si dispone dei valori numerici dell'energia di frattura.

Le prove di Van der Pluijm rappresentano infine un fondamentale supporto anche nella stima dell'angolo di dilatanza ψ , ossia la misura dell'uplift (spostamento normale di "sollevamento") di una unità rispetto alla sottostante nell'ambito di un test a taglio. I valori di dilatanza ottenuti sono stati tutt'altro che trascurabili, con una prevedibile tendenza ad una dilatanza inversamente proporzionale rispetto alla pressione di confinamento, come illustrato in Figura 2.7.



Definition of friction and dilatancy angles: (a) Coulomb friction law, with initial and residual friction angle; (b) dilatancy angle as the uplift of neighboring units upon shearing.

Figura 2.7 – (a) Legame di Mohr-Coulomb; (b) descrizione del fenomeno della dilatanza



Typical shear bond behavior of the joints for solid clay units, Van der Pluijm (1993): (a) tangent of the dilatancy angle ψ as a function of the normal stress level; (b) relation between the normal and the shear displacement upon loading.

Figura 2.8 – (a) Correlazione tra dilatanza e tensione di confinamento; (b) Misura dell'uplift per una prova sperimentale

2.1.3 Comportamento degli head joints

Se si sottopone un campione di muratura ad una trazione ortogonale ai giunti verticali, il collasso sarà tipicamente causato per effetto del superamento della debole resistenza a trazione del giunto verticale malta-mattone. In questo caso quindi, la resistenza complessiva della muratura coincide in sostanza con la resistenza a trazione del giunto stesso.

Nel caso di unità particolarmente deboli (ad esempio perché forate) accoppiate con malte ad alta resistenza può invece avere luogo un collasso localizzato nell'unità stessa, ed in tal caso la resistenza a trazione della muratura coincide grosso modo con la resistenza a trazione dell'unità.

È interessante sottolineare che in letteratura sono state realizzate prove sperimentali specificamente tese alla analisi di questo problema, tra cui si ricorda in particolare il lavoro di Backes (1985). Il setup sperimentale adottato per l'esecuzione della prova prevedeva, come illustrato in Figura 2.9 (a), un provino realizzato da quattro filari, inizialmente accostati secondo l'usuale prassi costruttiva e successivamente ruotato di 90° poco prima dell'esecuzione del test per mezzo di uno speciale dispositivo, in accordo alla Figura 2.9 (b).

In Figura 2.10 sono riportati i diagrammi tensione-deformazione relativi ai due meccanismi di rottura poc'anzi discussi.

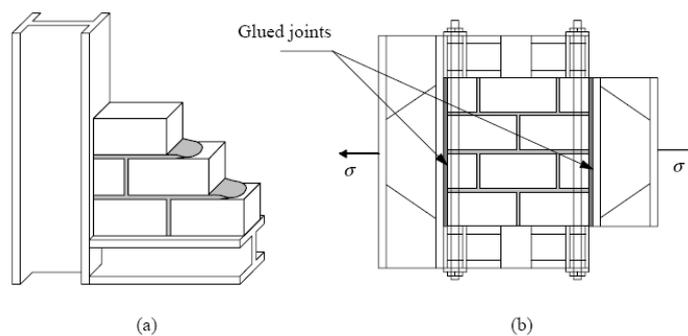
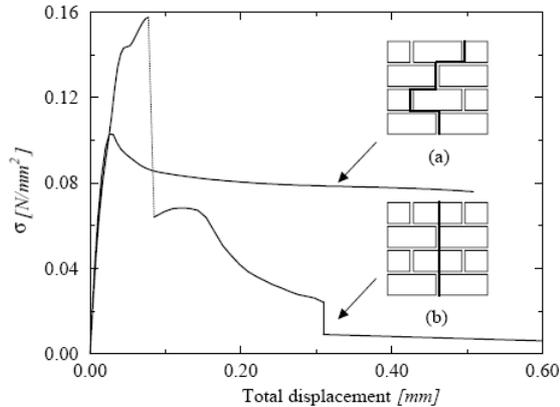


Figura 2.9 - Prove di trazione ortogonale ai bed joints: (a) preparazione del provino; (b) setup sperimentale



Typical experimental stress-displacement diagrams for tension in the direction parallel to the bed joints, Backes (1985): (a) failure occurs with a stepped crack through head and bed joints; (b) failure occurs vertically through head joints and units.

Figura 2.10 – Diagrammi tensione-deformazione per prove di trazione ortogonale ai giunti di testa

2.2 PARTE II: MODELLI AD INTERFACCE

La micro modellazione rappresenta uno strumento complesso ma particolarmente efficace per l'analisi delle strutture in muratura. In questa sezione si riportano i risultati di alcune modellazioni sviluppate presso l'Imperial College di Londra (Regno Unito), ottenuti attraverso il codice di calcolo agli elementi finiti ADAPTIC (Izzuddin, 1991).

La modellazione ad interfacce qui presentata (Macorini & Izzuddin, 2010) è concepita unicamente per brick-masonry, alla quale si farà esclusivamente riferimento in seguito.

2.2.1 Principali ipotesi alla base della modellazione

I modelli ad interfacce schematizzano la muratura come costituita da unità collegate da superfici di interfaccia di spessore nullo (rinunciando pertanto a descrivere i giunti di malta come

elementi solidi). Pertanto le dimensioni delle unità vengono opportunamente “espanso” (Figura 2.11) proprio per tener conto dell’ingombro dei giunti di malta.

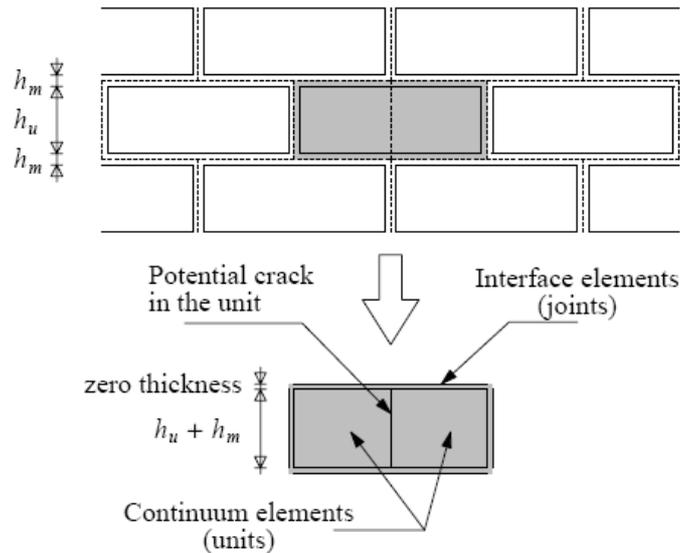


Figura 2.11 – Schematizzazione ad interfaccia. “Espansione” delle unità per tener conto dello spessore nullo dei giunti

La caratteristica peculiare della modellazione ad interfaccia risiede nella possibilità di concentrare attraverso una formulazione unitaria tutti i possibili meccanismi di rottura che, a livello dell’assemblaggio malta-mattone, caratterizzano le pareti in muratura.

Come si evince dall’analisi della Figura 2.12, infatti, tutti i possibili meccanismi di rottura di un assemblaggio malta-mattone sono rappresentati da:

- (1) rottura a trazione dei giunti di malta;
- (2) rottura a taglio dei giunti di malta;
- (3) rottura a trazione delle unità;
- (4) rottura a taglio delle unità;

(5) schiacciamento della muratura.

Non è superfluo sottolineare che i meccanismi di collasso illustrati in questa sede sono stati riscontrati sperimentalmente in numerose campagne sperimentali, si veda ad esempio (Mann & Müller, 1980).

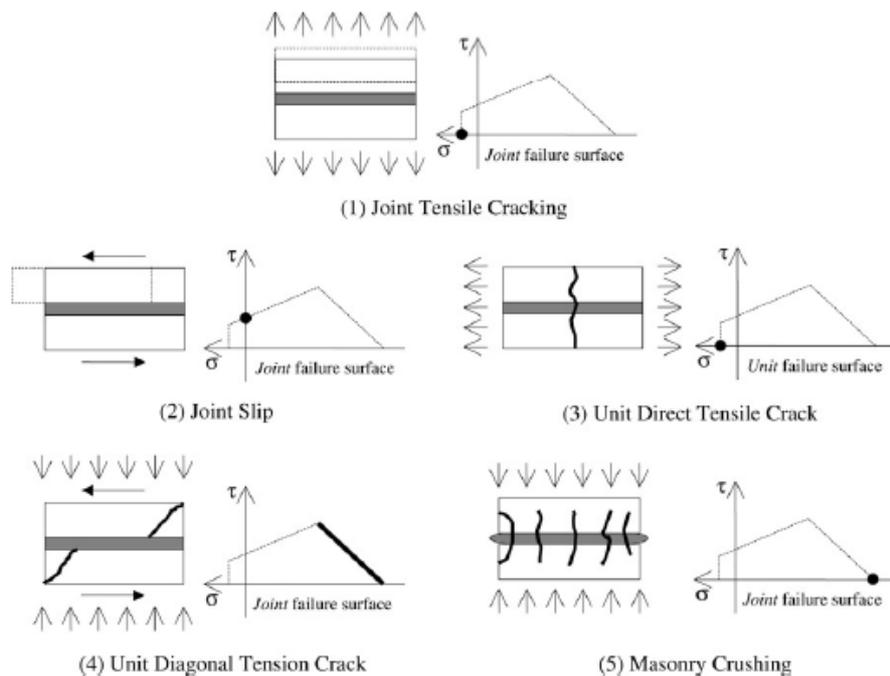


Figura 2.12 – Meccanismi di collasso di assemblaggi malta-mattone

Pertanto, allo scopo di cogliere attraverso la modellazione tutti i possibili meccanismi di rottura, in aggiunta ai correnti di malta orizzontali e verticali (rispettivamente bed joints e head joints) si individua un'ulteriore fittizia superficie di interfaccia (di spessore nullo) posta nella mezzeria del piano verticale di ciascuna unità, finalizzata a localizzare la rottura per trazione in direzione orizzontale delle unità.

Nel modello sviluppato da Macorini & Izzudin (2010), le unità sono modellate da elementi finiti 3D elastici di tipo bricks a 20 nodi, mentre le interfacce sono elementi 2D a 16 nodi, entrambi capaci di

tenere conto di regimi di grandi spostamenti (Figura 2.13). Attraverso queste ipotesi è pertanto possibile modellare non solo il comportamento nel piano di pannelli murari, ma anche assemblaggi più complessi tridimensionali (e pertanto anche il comportamento fuori piano).

La non linearità meccanica che caratterizza il comportamento di mattoni, malta ed interfacce è rappresentata attraverso un approccio discreto fondato sui principi di meccanica della frattura non lineare.

L'uso di interfacce non lineari per modellare potenziali piani o superfici di scorrimento consente un progressivo aumento dell'accuratezza della soluzione semplicemente attraverso un mesh refinement.

In questo contesto, il comportamento softening post-picco non comporta mesh-dependency dal momento che tale comportamento, come si è avuto modo di illustrare, è direttamente connesso all'energia di frattura, che è una caratteristica intrinseca del materiale. Ciò permette di non dover pre-indirizzare la localizzazione della soluzione, esigenza che tipicamente si presenta quando viene adottato un approccio al continuo con plasticità diffusa.

Tutte le non-linearità sono essenzialmente concentrate nelle interfacce, unica possibile sede di fratture (da qui la possibilità di modellare le unità essenzialmente come solidi elastici, sia pure non rinunciando alla possibilità di prevedere grandi spostamenti).

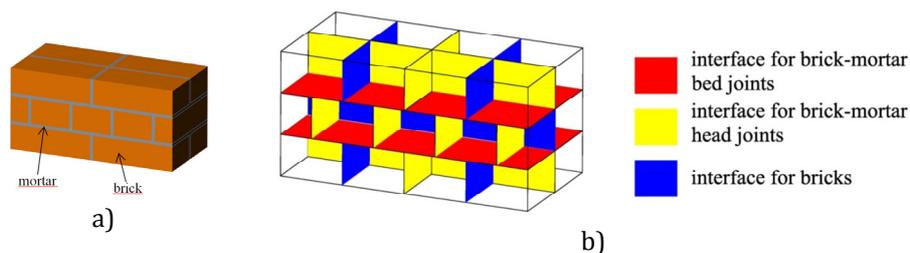


Figura 2.13 – (a) Assemblaggio di un campione in muratura; (b) Schema delle interfacce considerate nel modello

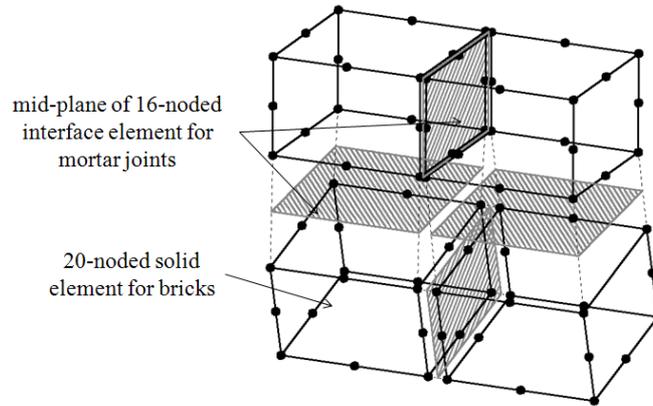


Figura 2.14 – Modello 3D di una unità: elementi solidi a 20 nodi ed elementi interfaccia a 16 nodi

Nell'approccio in esame, sono quindi analizzati tre diversi legami costitutivi (unit, mortar interface, brick interface), distinguendo poi per le interfacce la modellazione in campo elastico da quella in campo inelastico.

Brevissimi cenni di tali modellazioni sono fornite nei prossimi paragrafi, concentrando in particolare l'attenzione sulla modellazione delle interfacce di malta.

2.2.2 Modellazione in campo elastico

In campo elastico, le interfacce (sia mortar che brick interface) sono modellate introducendo la classica relazione tensoriale:

$$\sigma = Ku \quad (2.1)$$

ossia, in forma completa

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t & & \\ & k_t & \\ & & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

con σ vettore delle tensioni, \mathbf{K} matrice di rigidità elastica ed \mathbf{u} vettore degli spostamenti (Figura 2.15).

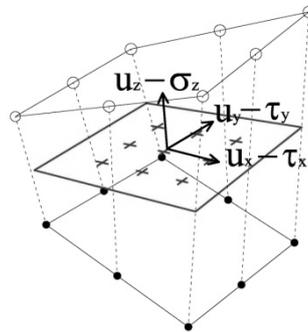


Figura 2.15 - Spostamenti e tensioni affioranti lungo una superficie di interfaccia

Per quanto attiene alle mortar interfaces, è interessante notare che, per effetto della scelta di giunti a spessore nullo, le rigidità elastiche delle mortar interfaces assumono l'espressione:

$$k_n = \frac{E_u E_m}{t_m (E_u - E_m)} \cong \frac{E_m}{t_m} \quad (2.3)$$

$$k_t = \frac{G_u G_m}{t_m (G_u - G_m)} \cong \frac{G_m}{t_m} \quad (2.4)$$

dove i pedici u ed m indicano rispettivamente la unità e la malta, i pedici n e t indicano rispettivamente i termini normali e

tangenziali, t_m è lo spessore (reale) del giunto di malta, E e G sono rispettivamente i moduli elastici normali e tangenziali. Una dimostrazione più completa che conduce alle relazioni (2.3)-(2.4) è reperibile in (CUR, 1997).

Nell'ipotesi in cui i moduli elastici delle unità siano significativamente maggiori di quelli della malta (come tipicamente accade) è possibile fare ricorso alle espressioni approssimate riportate a terzo membro delle (2.3)-(2.4).

Con riferimento invece alla matrice di rigidezza elastica delle interfacce brick, l'approccio proposto dagli autori prevede l'adozione di un penalty factor (una rigidezza fittizia molto elevata, di volta in volta valutata a seconda degli ordini di grandezza dei parametri in gioco).

2.2.3 Modellazione non lineare delle interfacce

La modellazione inelastica delle interfacce rappresenta l'aspetto più significativo e più importante dei modelli accurati, poiché tale modellazione deve portare in conto tutti i possibili meccanismi di collasso e l'evoluzione dei domini limite all'avanzare del danneggiamento in funzione del lavoro plastico compiuto dalle componenti di tensione.

La modellazione completa deve infatti prevedere la presenza di diverse yield surfaces:

- una superficie limite in trazione;
- un legame attritivo alla Mohr-Coulomb;
- una superficie limite in compressione.

Numerosi autori hanno formulato diversi modelli per ottimizzare la forma del dominio di resistenza complessivo. Occorre infatti considerare che varie problematiche di natura numerica intervengono nell'ambito delle procedure di analisi, e pertanto la "forma" delle superfici adottate assume un peso estremamente rilevante in fase di modellazione.

Con riferimento ad esempio al limite in trazione, esso può avere la forma di un semplice cut-off (retta verticale), oppure può essere opportunamente inglobato nella legge attritiva (ad esempio con un'unica legge parabolica che descriva al tempo stesso il legame tension/shear e il ramo compression/shear).

Analogamente, il limite in compressione è di importanza strategica. Drucker et al. (1957) furono i primi ad introdurre, sia pure con riferimento alla meccanica dei terreni, un limite in compressione di forma sferica (*compression cap*). Successivamente questo approccio è stato applicato alle murature a livello di micro scala da (Lourenço, 1996; Lourenço & Rots, 1997).

In Figura 2.16 è pertanto rappresentato un modello globale che tenga conto del tension cut-off, del *compression cap* rappresentato da un arco di ellisse e dalla legge attritiva alla Mohr-Coulomb (Lourenço, 1996; Lourenço & Rots, 1997).

Altri autori hanno ipotizzato ai fini della modellazione altre forme per il *compression cap*, si veda ad esempio Chaimoon & Attard (2007) che propongono un *compression cap* semplicemente lineare (Figura 2.17).

Nell'ambito del modello sviluppato in ADAPTIC, Macorini & Izzuddin (2010) hanno proposto un modello basato sull'utilizzo di differenti superfici di plasticizzazione, in accordo a quanto descritto precedentemente.

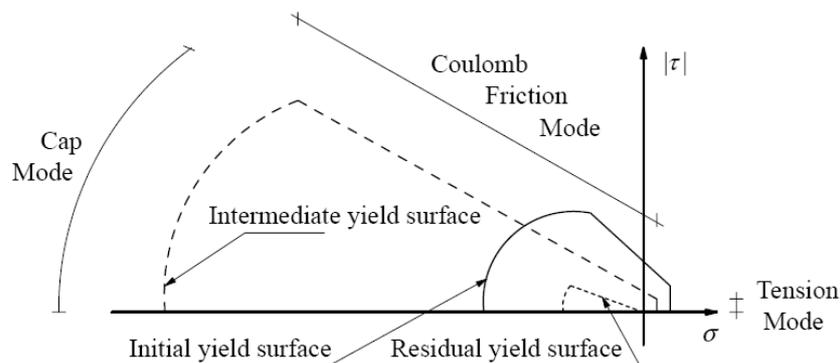


Figura 2.16 - Modello proposto da Lourenço (1996)

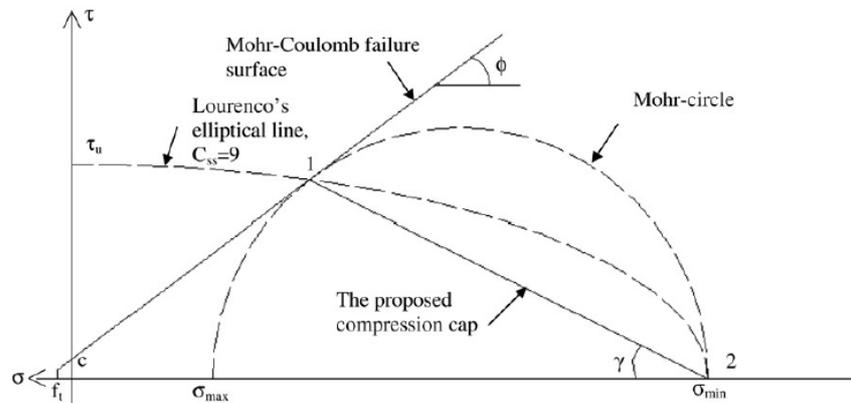


Figura 2.17 – Compression cap secondo Chaimoon & Attard (2007)

Una legge alla Mohr-Coulomb è adottata per modellare globalmente il comportamento a taglio e il tension cut-off mentre un compression cap iperbolico tiene conto del crushing.

È stata adottata una formulazione che, relativamente al taglio, definisce un potenziale plastico diverso dalla funzione di snervamento. In questo modo la direzione delle deformazioni plastiche è resa indipendente dalla funzione di snervamento e inoltre è possibile portare in conto gli effetti di dilatanza dovuti alla scabrezza delle superfici fratturate a taglio.

Nel contesto della teoria della plasticità multi-superficie, sono state quindi definite due superfici iperboliche di snervamento F_1 (relative al taglio e al limite sulla trazione) ed F_2 (compression cap) e le due rispettive funzioni di potenziale plastico Q_1 e Q_2 (Figura 2.18).

Si fa notare che il compression cap è definito per le sole mortar interfaces.

Le quattro superfici innanzi definite sono funzione delle sollecitazioni di taglio e sforzo normale (σ , τ_x , τ_y) secondo le seguenti relazioni:

$$F_1 = \tau_x^2 + \tau_y^2 - (C - \sigma \tan \phi)^2 + (C - \sigma_t \tan \phi)^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$F_2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 - (D + \sigma \tan \theta)^2 + (D - \sigma_c \tan \theta)^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$Q_1 = \tau_x^2 + \tau_y^2 - (C_Q - \sigma \tan \phi_Q)^2 + (C_Q - \sigma_t \tan \phi_Q)^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$Q_2 = F_2 \quad (2.8)$$

Nelle relazioni (2.5)-(2.8) compaiono alcuni parametri che hanno un esplicito significato fisico.

Si distinguono infatti i parametri C , σ_t e ϕ (associati alla F_1) che rappresentano rispettivamente la coesione, la resistenza a trazione e l'angolo d'attrito delle brick/mortar interfaces.

Analogamente, per quanto attiene alla F_2 , σ_c è la resistenza a compressione della *muratura* (pertanto è un parametro intermedio tra la resistenza delle unità e quella della malta), θ è l'inclinazione dell'asintoto obliquo della F_2 , e D è un parametro geometrico che regola la forma della yield surface.

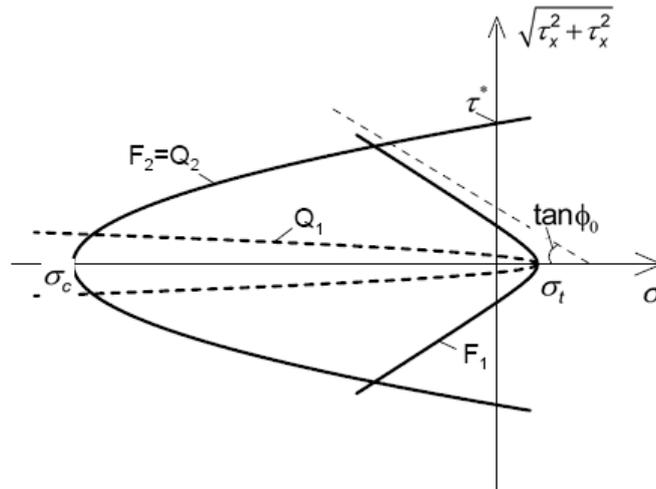


Figura 2.18 – Modello proposto da Macorini & Izzuddin (2010)

I parametri che compaiono nella Q_1 , infine, sono formalmente analoghi a quelli presenti nella F_1 (il pedice Q differenzia la coesione e l'angolo d'attrito propri della Q_1).

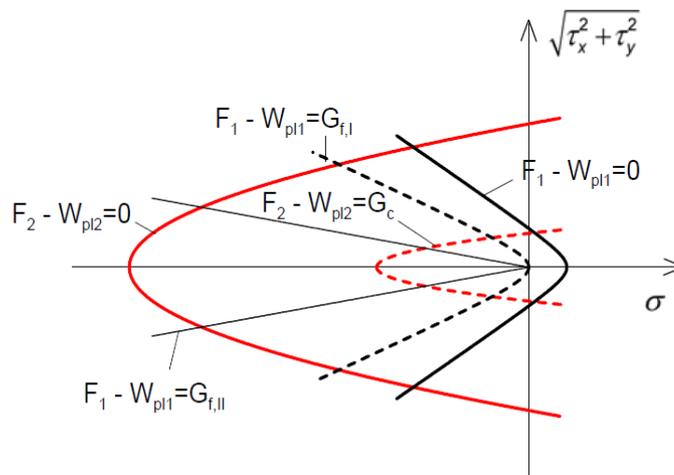


Figura 2.19 – Evoluzione delle superfici plastiche

Le superfici iperboliche evolvono (Figura 2.19) all'aumentare del lavoro plastico compiuto dalle deformazioni plastiche, in accordo al softening dei parametri del materiale.

Risulta pertanto fondamentale caratterizzare completamente i legami tensioni-spostamenti (Figura 2.20), individuando non solo i parametri meccanici di picco (C_0 , ϕ_0 , θ_0 , σ_{c0} , σ_{t0}), ma anche i parametri residui (ϕ_r , θ_r , σ_{cr}) e le energie di frattura $G_{f,I}$, $G_{f,II}$, G_c .

Si definiscono quindi i lavori plastici W_{pl1} e W_{pl2} , che si riferiscono alle superfici F_1 e F_2 rispettivamente.

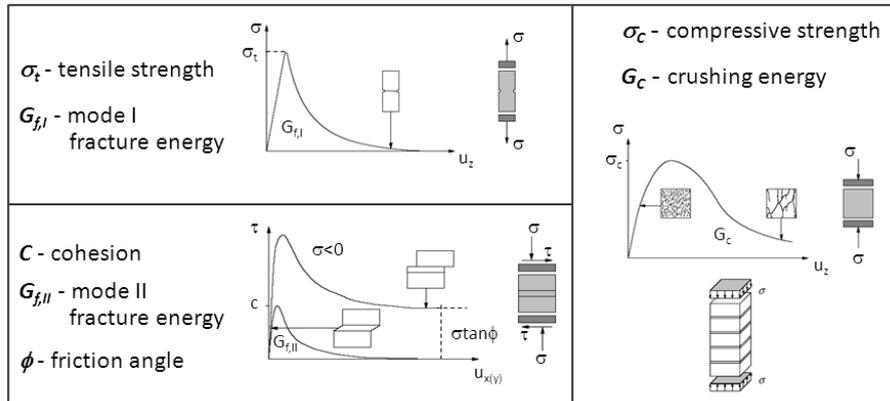


Figura 2.20 – Legami tensioni-spostamenti per la trazione monoassiale, il taglio-scorrimento e la compressione monoassiale e definizione delle relative energie di frattura

La legge di degrado dei parametri del modello all’aumentare del lavoro plastico è espresso mediante una relazione del tipo:

$$A = A_0 - (A_0 - A_r) \delta \quad (2.9)$$

dove $A=(C, \sigma_t, \tan\phi, D, \tan\theta, \sigma_c)$ e dove il parametro di degrado δ è espresso in funzione del pertinente lavoro plastico ed energia di frattura (Figura 2.22):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi W_{pl}^*}{G_{f^*}}\right) \right] & \text{per } 0 \leq W_{pl}^* \leq G_{f^*} \\ 1 & \text{per } W_{pl}^* > G_{f^*} \end{cases} \quad (2.10)$$

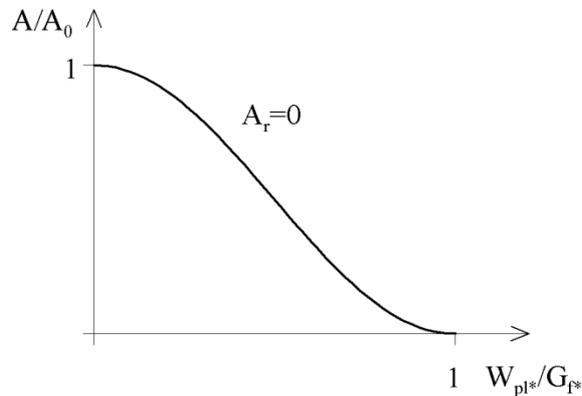


Figura 2.21 – Legge di degrado dei parametri in funzione dell'evoluzione del danneggiamento

2.2.4 Applicazione numeriche del modello

Il modello descritto brevemente nel precedente paragrafo è stato implementato in ADAPTIC allo scopo di simulare la risposta di pannelli in muratura soggetti a prove di taglio.

È stata presa a riferimento la campagna sperimentale riportata in (Vermeltfoort & Raijmakers, 1993). La campagna prevedeva la sperimentazione di pannelli in muratura a singola testa di dimensioni 990×1000 [mm²], costituiti da 18 corsi di mattoni ($204 \times 98 \times 50$ [mm³]) intervallati da giunti di malta spessi 12.5 [mm]. La prova prevedeva l'applicazione di un carico di compressione p e successivamente l'imposizione di una forza orizzontale F_h alla testa del pannello. La presenza di una traversa rigida alla testa del pannello impediva le rotazioni in testa (Figura 2.22).

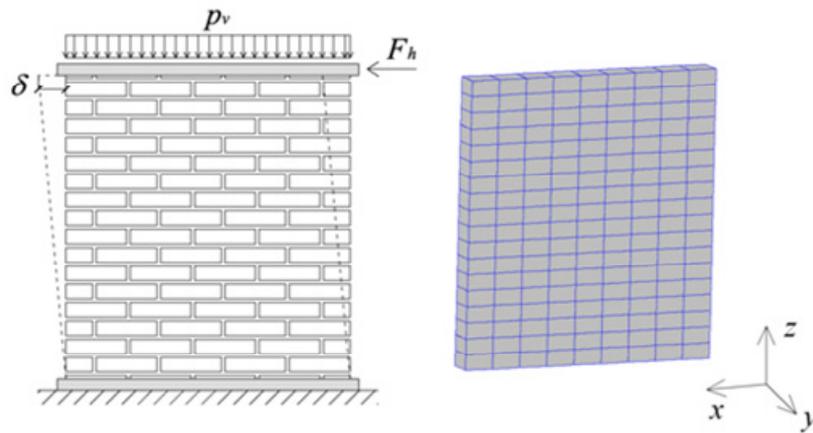


Figura 2.22 – Schema di esecuzione delle prove sperimentali e modellazione in ADAPTIC

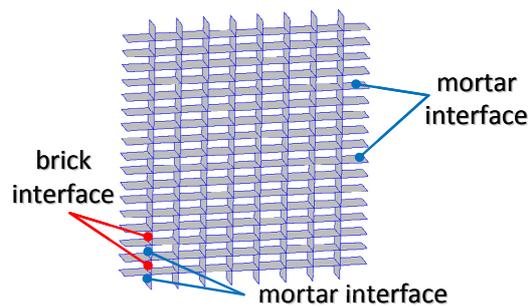


Figura 2.23 – Dettaglio delle interfacce definite all'interno del modello in ADAPTIC

Nel complesso sono stati analizzati (Figura 2.23) tre pannelli (J4D, J5D, J7D) sottoposti a due diversi valori del carico di precompressione p . Nel caso dei pannelli (identici) J4D e J5D, $p=0.3$ [MPa]; per il pannello J7D $p=2.12$ [MPa].

I parametri meccanici adottati ai fini delle simulazioni sono riassunti in Tabella 2.1.

Tabella 2.1 – Parametri meccanici adottati nelle simulazioni numeriche con ADAPTIC

	Rigidezze elastiche	Superficie F_1	Superficie Q_1	Superficie $F_2 = Q_2$
Malta	$k_n = 82$ [N/mm ³] $k_t = 36$ [N/mm ³]	$\sigma_{t0} = 0.25$ [MPa] $C_0 = 0.375$ [MPa] $\tan \phi_0 = \tan \phi_s = 0.75$ $G_{f,I} = 0.018$ [N/mm] $G_{f,II} = 0.125$ [N/mm]	$\sigma_{t0} = 0.25$ [MPa] $C_0 = 37.5$ [MPa] $\tan \phi_0 = 0.001$ $\tan \phi_s = 0.0001$	$\sigma_{c0} = 10.5$ [MPa] $\sigma_{cr} = 1.5$ [MPa] $D = 10.5$ [MPa] $\tan \theta_0 =$ $\tan \theta_s = 0.045$ $G_c = 5.0$ [N/mm]
Mattono	$k_n = 10^4$ [N/mm ³] $k_t = 10^4$ [N/mm ³]	$\sigma_{t0} = 2.0$ [MPa] $C_0 = 2.8$ [MPa] $\tan \phi_0 = \tan \phi_s = 1.0$ $G_{f,I} = 0.08$ [N/mm] $G_{f,II} = 0.5$ [N/mm]	$\sigma_{t0} = 2.0$ [MPa] $C_0 = 2.8$ [MPa] $\tan \phi_0 = \tan \phi_s = 1.0$ $G_{f,I} = 0.08$ [N/mm] $G_{f,II} = 0.5$ [N/mm]	

Completano il quadro dei parametri meccanici il modulo di Young $E=16700$ [MPa] e il modulo di Poisson $\nu=0.15$ dei mattoni; una densità media di 1700 [kg/m³] è stata utilizzata per portare in conto il peso proprio del pannello.

Il confronto tra i risultati sperimentali e le simulazioni ottenute con ADAPTIC è illustrato in Figura 2.24. Dal confronto emerge chiaramente che la previsione di ADAPTIC è estremamente precisa, non soltanto in termini di rigidezza e risposta di picco, ma anche in termini di previsione del ramo softening.

In Figura 2.25 è rappresentato il quadro fessurativo riscontrato durante la prova sperimentale sui pannelli J4D e J5D: dapprima sono state riscontrate fessure orizzontali da flessione alla testa e al piede del pannello, e successivamente la fessurazione diagonale ha iniziato a diffondersi dal centro del pannello. All'apertura delle prime fessure al centro del pannello ha avuto luogo l'inizio del ramo di softening.

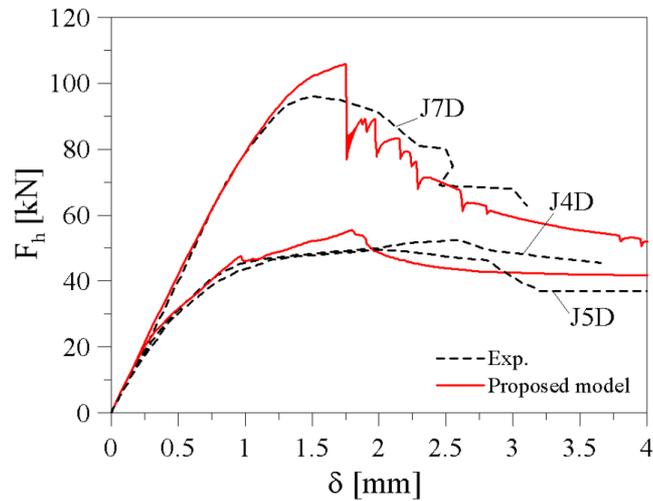


Figura 2.24 – Confronti tra i risultati delle prove sperimentali e i risultati delle modellazioni in ADAPTIC

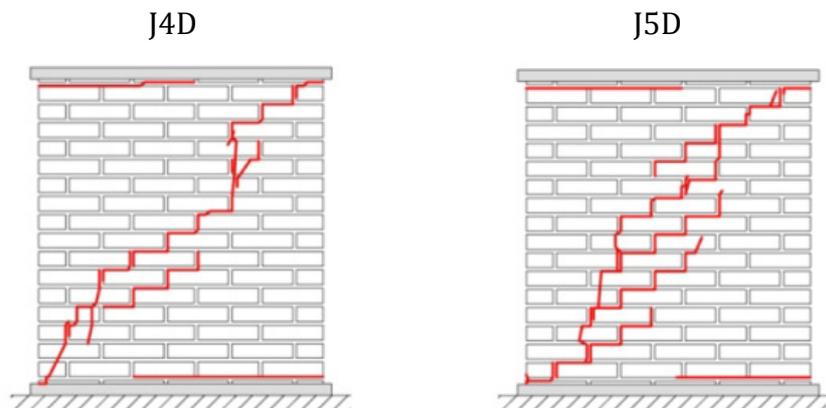


Figura 2.25 – Quadro fessurativo sperimentale dei pannelli J4D e J5D

ADAPTIC simula perfettamente il comportamento sperimentale riscontrato. Nelle Figura 2.26-Figura 2.30 è illustrato il quadro fessurativo predetto dalla simulazione numerica e il relativo contour plot dei lavori plastici alle interfacce. La successione dei fenomeni

fessurativi previsti dal codice di calcolo rispecchia fedelmente quella sperimentale: dapprima la comparsa di fessure orizzontali in testa e al piede del pannello (step 1); successivamente l'apertura di fessure diagonali progressivamente più consistenti (step 2-3); infine la condizione prossima al collasso (step4) con fessure diagonali e crushing dei bed joints compressi ai due bordi superiore ed inferiore del pannello.

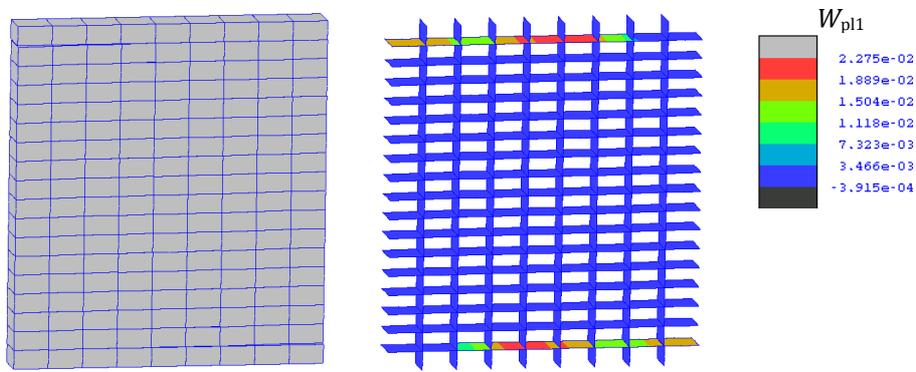


Figura 2.26 – Quadro fessurativo simulato, step 1: deformata e W_{p11} alle interfacce

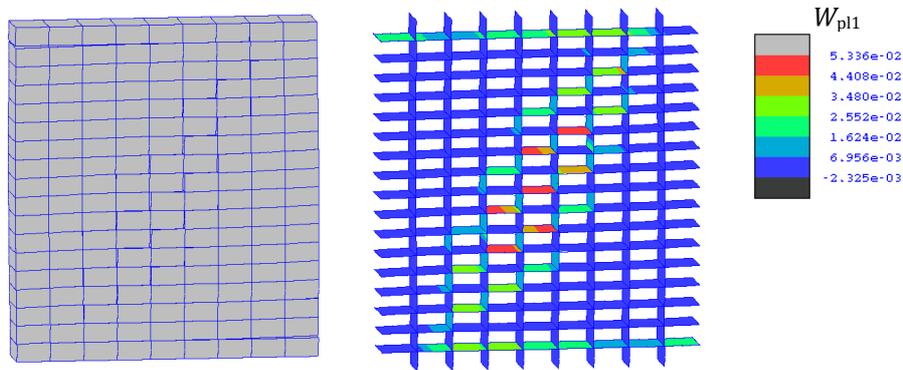


Figura 2.27 – Quadro fessurativo simulato, step 2: deformata e W_{p11} alle interfacce

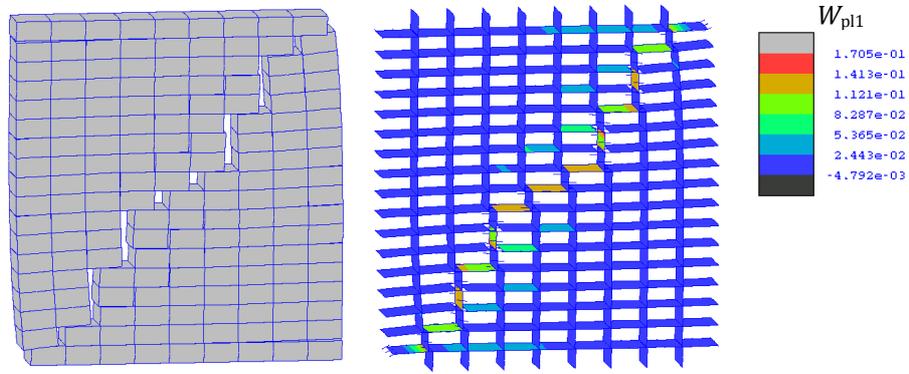


Figura 2.28 – Quadro fessurativo simulato, step 3: deformata e W_{pl1} alle interfacce

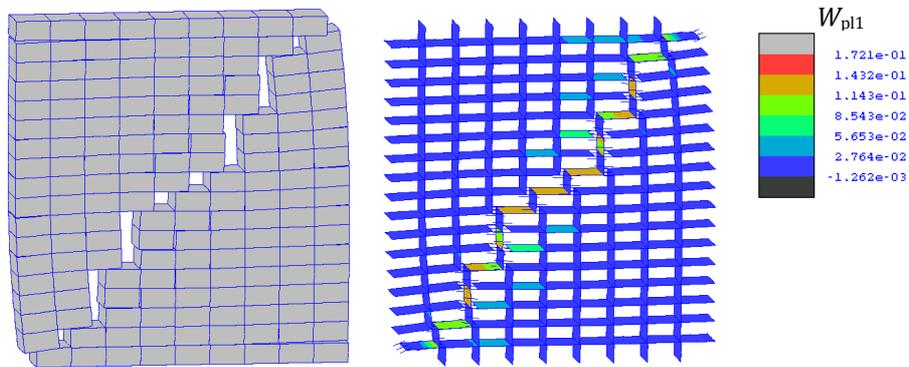


Figura 2.29 – Quadro fessurativo simulato, step 4: deformata e W_{pl1} alle interfacce

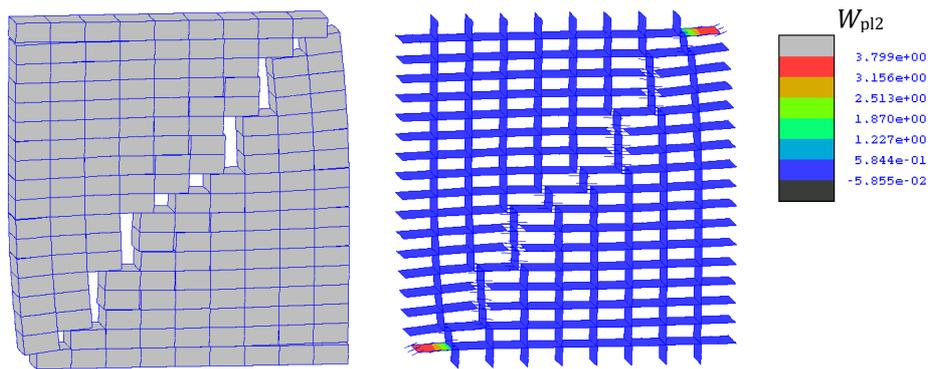


Figura 2.30 – Quadro fessurativo simulato, step 4: deformata e W_{pl2} alle interfacce

In Figura 2.31 è rappresentato infine l'avanzamento della curva forza-spostamento predetta da ADAPTIC in funzione del quadro fessurativo. È interessante rilevare che, così come riscontrato sperimentalmente, il picco della risposta si ottenga in corrispondenza dello step 3, relativo alla improvvisa apertura delle fessure diagonali al centro del pannello.

In conclusione di questa sezione, si riportano i risultati relativi al *mesh assessment*. In Figura 2.32 sono rappresentate le due tipologie di mesh adottate per l'assessment: la mesh 1 è quella utilizzata ai fini delle simulazioni numeriche descritte nella parte precedente di questa sezione. La mesh 2 è stata ottenuta a partire da un infittimento della mesh 1.

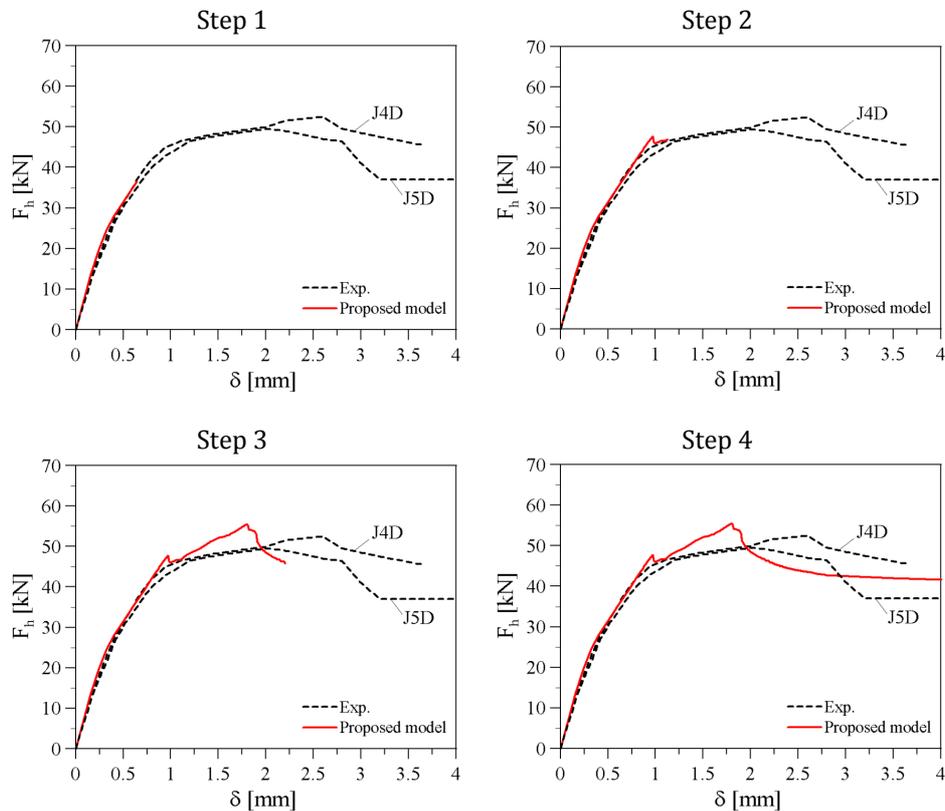


Figura 2.31 – Curva forza-spostamento del pannello all'avanzare del quadro fessurativo

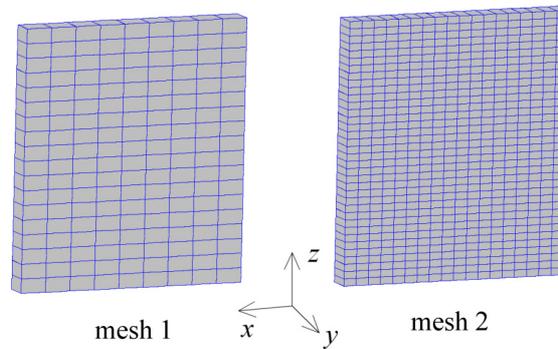


Figura 2.32 – Tipologie di mesh utilizzate per l'assessment

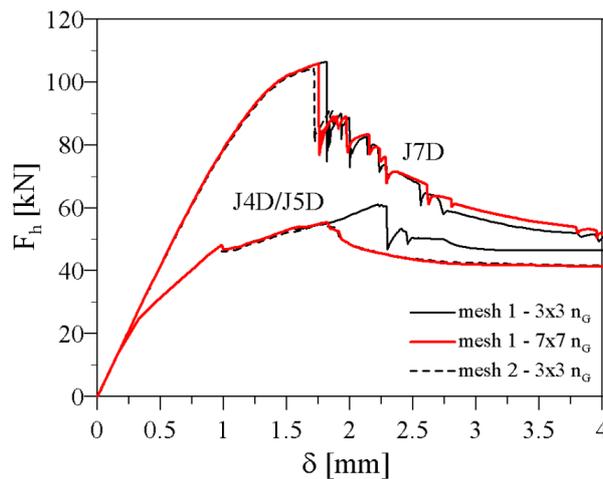


Figura 2.33 – Confronto tra i risultati ottenuti con mesh differenti

In Figura 2.33 è rappresentato il confronto tra i risultati ottenuti con le diverse mesh. È altresì riportata la curva ottenuta adottando la mesh 1 ma aumentando il numero dei punti di integrazione lungo le interfacce. Dal confronto tra le curve, risulta evidente che un infittimento della mesh non comporta sostanziali variazioni nel risultato; si osserva in particolare le previsioni della

mesh 1, se opportunamente infittita nel numero di punti di integrazione, coincidono perfettamente con le previsioni della più accurata mesh 2.

2.3 PARTE III: MODELLI OMOGENEI

In questa terza ed ultima parte del capitolo si analizzano i risultati di una campagna di simulazione numerica sviluppata con il software STRAUS7.

Lo scopo della modellazione è stato anzitutto la definizione di un materiale omogeneo equivalente.

Completata la calibrazione del materiale omogeneo, si è quindi passati all'analisi parametrica di pareti in muratura sollecitate nel proprio piano, al variare delle caratteristiche geometriche di maschi e fasce e numero di piani, evidenziando i benefici ottenibili da interventi di rinforzo sulle fasce stesse.

Conclude l'analisi parametrica la valutazione dell'efficacia di alcuni tipici interventi di consolidamento in termini di miglioramento della soglia di resistenza.

2.3.1 Calibrazione del modello omogeneo

Ai fini della modellazione agli elementi finiti delle pareti con il codice di calcolo Straus7 è stato necessario preliminarmente caratterizzare un materiale omogeneo equivalente, in grado di simulare il comportamento del mezzo effettivo "muratura", costituito dall'abbinamento malta-mattone (Rizzano & Squizzato, 2007; Rizzano et al., 2008).

In relazione alla scelta della tipologia di elemento finito da adottare nelle analisi successive, scartati gli elementi a tre nodi, per la loro inattitudine a descrivere problemi in campo plastico, e gli elementi a sei nodi, per la possibile dipendenza della soluzione dall'orientamento dell'elemento (Brebbia & Connor, 1993; Cesari

1997a, 1997b), la scelta è ricaduta su elementi quadrangolari ad otto nodi.

Il materiale omogeneo è stato calibrato sulla base di prove sperimentali disponibili in letteratura. In una prima fase sono state prese in esame prove di taglio diretto su doppiette e triplete di mattoni (Binda et al., 1994; Atkinson et al., 1989) e prove su singoli pannelli in muratura (Anthoine et al., 1995), allo scopo di modellare appropriatamente gli accoppiamenti malta-mattone.

Le prove di taglio diretto (Binda et al., 1994) hanno avuto anzitutto lo scopo di individuare il legame di interfaccia malta-mattone tramite una legge di tipo attritivo alla Mohr-Coulomb (nel seguito per brevità si indicherà tale criterio come "MC"), come illustrato in Figura 2.34 e in Figura 2.35.

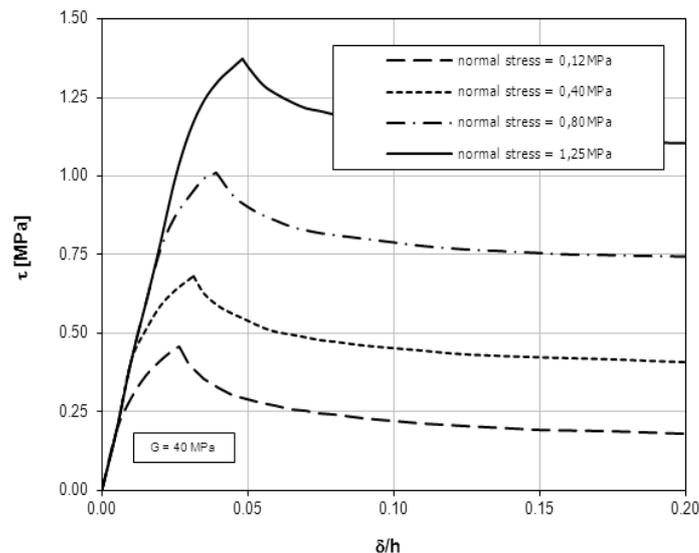


Figura 2.34 – Risultati delle prove di taglio diretto (Binda et al., 1994)

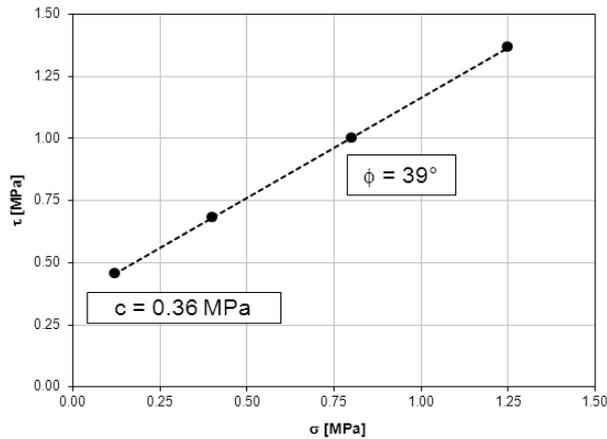


Figura 2.35 – Risultati delle prove di taglio diretto in termini di criterio di MC (Binda et al., 1994)

Tale criterio di resistenza è stato successivamente modellato in sede di analisi numerica, per esigenze di regolarità dei domini di resistenza, mediante un legame alla Drucker-Prager (DP).

Sono stati pertanto individuati per via numerica i coefficienti che, applicati ai parametri del legame DP, fornissero risultati del tutto equivalenti a quelli ottenuti impiegando un legame alla MC.

Mediante tali analisi sono stati ottenute le seguenti relazioni tra i parametri meccanici coesione c ed angolo di attrito ϕ :

$$\left. \begin{array}{l} c^{MC} = 0,36 \text{ MPa} \\ c^{DP} = 0,27 \text{ MPa} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_c = \frac{c^{DP}}{c^{MC}} = \frac{0,27}{0,36} = 0,75 \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi^{MC} = 39^\circ \\ \phi^{DP} = 55^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_\phi \frac{\phi^{DP}}{\phi^{MC}} = \frac{55}{39} = 1,41 \quad (2.12)$$

dove si è indicato con c^{DP} e c^{MC} la coesione nel modello MC e quella nel modello DP rispettivamente, e ϕ^{DP} e ϕ^{MC} sono i valori dell'angolo d'attrito adottati nei due criteri di resistenza in esame.

Ottenuta la relazione necessaria al passaggio dal criterio di MC al criterio di DP, si è passati ad analizzare un'ulteriore prova di taglio diretto su doppietta (Atkinson et al., 1989).

Nella sperimentazione in esame venivano testate due tipologie di accoppiamenti malta-mattone, rispettivamente "Old Bricks" e "New Bricks", le cui caratteristiche meccaniche sono riassunte in Tabella 2.2. L'esito delle prove sperimentali è illustrato in Figura 2.36 e in Figura 2.37.

Tabella 2.2 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Atkinson et al., 1989)

			Old Bricks	New Bricks
Brick elastic modulus	E_b	[MPa]	8796	14700
Brick Poisson's ratio	ν_b	[-]	0.16	0.22
Brick thickness	t_b	[mm]	13	17
Mortar elastic modulus	E_m	[MPa]	1050	2110
Mortar Poisson's ratio	ν_m	[-]	0.06	0.05
Mortar shear modulus	G_m	[MPa]	495	1005
Mohr-Coulomb parameters				
Cohesion	c	[MPa]	0.180	1.000
Angle of friction	ϕ	[°]	34	34
Drucker-Prager parameters				
Cohesion	c	[MPa]	0.135	0.750
Angle of friction	ϕ	[°]	48	48

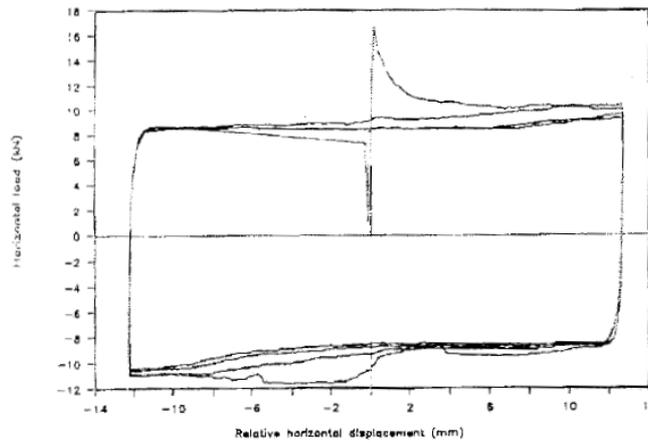


Figura 2.36 – Risultati delle prove di taglio diretto (Atkinson et al., 1989) – Old Bricks

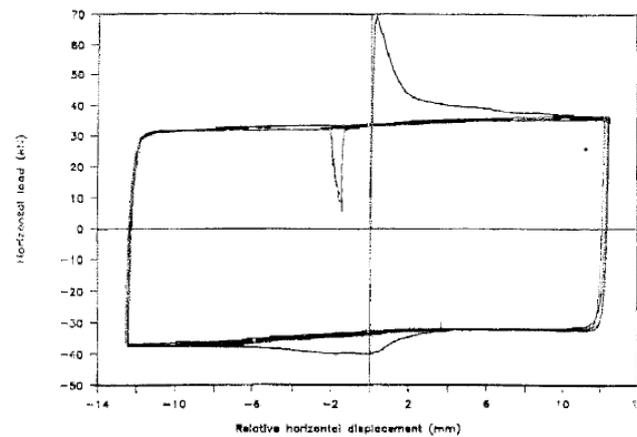


Figura 2.37 – Risultati delle prove di taglio diretto (Atkinson et al., 1989) – New Bricks

I risultati del modello in STRAUS7 sono riportati in Figura 2.38 e in Figura 2.39. La modellazione agli elementi finiti coglie accuratamente la risposta sperimentale in termini di rigidezza e massima resistenza; va comunque sottolineato che il codice di

calcolo impiegato, non ammettendo leggi di degrado dei materiali, e non tenendo conto della fessurazione degli elementi, non è in grado di cogliere il ramo softening delle curve sperimentali.

In tal senso, quindi, il modello sarà valido unicamente nella previsione della soglia di resistenza e della rigidità iniziale, laddove nessuna informazione relativa al comportamento post-picco potrà essere ricavata.

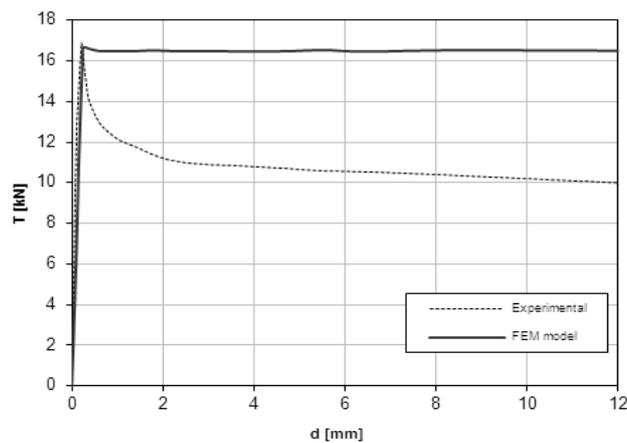


Figura 2.38 – Confronto tra risultati sperimentali e modello agli EF –Old Bricks

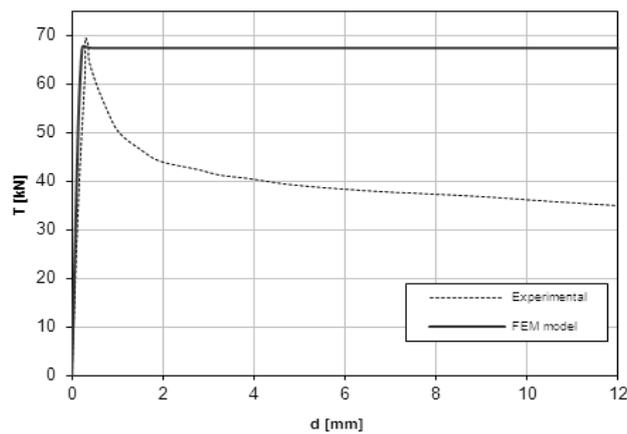


Figura 2.39 – Confronto tra risultati sperimentali e modello agli EF –New Bricks

Sempre nell'ambito della modellazione accurata malta-mattone, è stata presa in considerazione la campagna sperimentale riportata in (Anthoine et al., 1995).

Due pannelli murari, di diversa altezza, sono stati testati imponendo una tensione media di compressione $p=0.6$ [MPa] alla testa dei pannelli ed una forza orizzontale ciclica applicata in controllo di spostamento (Figura 2.40).

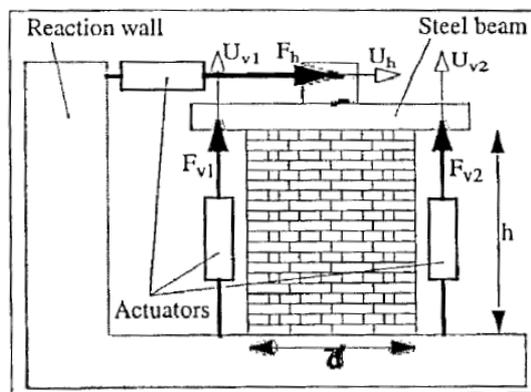


Figura 2.40 – Setup delle prove sperimentali riportate in (Anthoine et al., 1995)

I pannelli in esame, che si differenziavano solo per l'altezza, sono stati realizzati da mattoni disposti secondo una tessitura cosiddetta "all'Inglese" (Figura 2.41).



Figura 2.41 – Tessitura muraria "all'Inglese"

Il modello agli EF sviluppato per la simulazione numerica di queste ultime prove è stato pertanto ottenuto introducendo delle sezioni preferenziali di rottura, caratterizzate da un comportamento puramente coesivo, Figura 2.42.

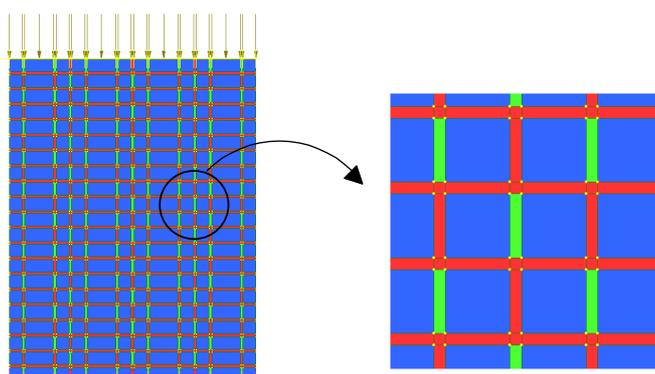


Figura 2.42 – Modello agli elementi finiti con sezioni preferenziali di rottura

La modellazione in STRAUS7 delle pareti in esame è stata realizzata in accordo ai parametri meccanici e geometrici riportati in Tabella 2.3.

Tabella 2.3 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Anthoine et al., 1995)

Panels			
Low Panel height	H	[cm]	135
High Panel height	H	[cm]	200
Base	b	[cm]	100
Panel thickness	t_p	[cm]	25
Bricks			
Thickness	t_b	[mm]	55
Brick elastic modulus	E_b	[MPa]	14700
Brick Poisson's ratio	ν_b	[-]	0.22

Mortar			
Thickness	t_m	[mm]	10
Elastic modulus	E_m	[MPa]	210
Poisson's ratio	ν_m	[-]	0.05
Shear modulus	G_m	[MPa]	100
MC cohesion	c_m	[MPa]	0.400
MC angle of friction	ϕ_m	[°]	17
DP cohesion	c_m	[MPa]	0.300
DP angle of friction	ϕ_m	[°]	24

Brick interface			
Elastic modulus	E_{bi}	[MPa]	2400
Poisson's ratio	ν_{bi}	[-]	0.2
Shear modulus	G_{bi}	[MPa]	1000
DP cohesion	c_{bi}	[MPa]	1.2
DP angle of friction	ϕ_{bi}	[°]	0

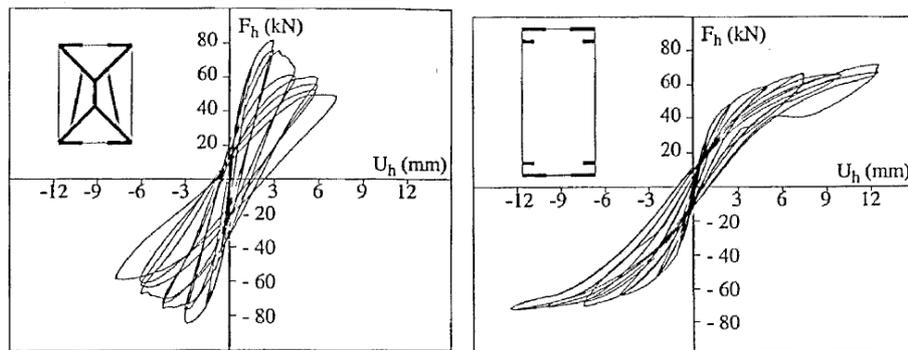


Figura 2.43 – Prove sperimentali riportate in (Anthoine et al., 1995): a sinistra Low Wall, a destra High Wall

I risultati del confronto tra la simulazione numerica realizzata in STRAUS7 e l'esito della prova sperimentale (Figura 2.43) sono illustrati in Figura 2.44 e in Figura 2.45.

La previsione del modello agli EF coglie adeguatamente sia la rigidità iniziale che la risposta di picco; per il comportamento post-picco valgono le considerazioni già svolte in precedenza.

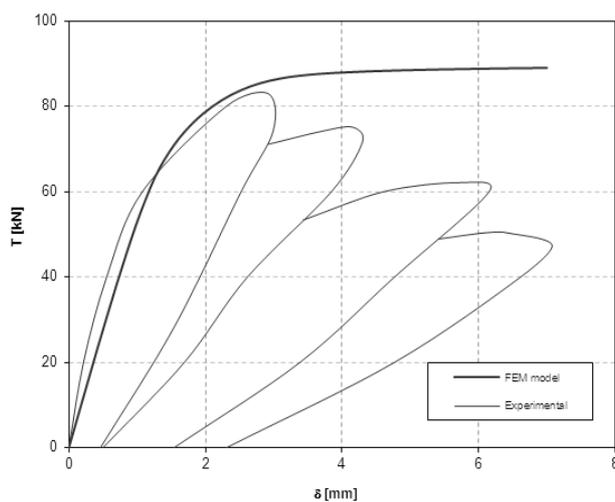


Figura 2.44 – Low Wall: confronto tra modello agli EF e risultato sperimentale

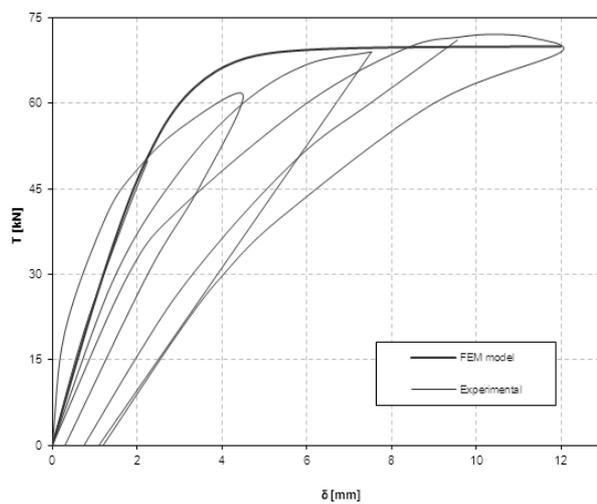


Figura 2.45 – High Wall: confronto tra modello agli EF e risultato sperimentale

A valle delle tre prove sperimentali fin qui esaminate, la modellazione dell'accoppiamento discreto malta-mattone può ritenersi completa.

Si passa quindi alla definizione di un unico materiale omogeneo opportunamente calibrato, capace di cogliere il comportamento dell'accoppiamento-malta mattone.

A tale scopo, partendo proprio da pannelli murari con caratteristiche analoghe a quelli analizzate nelle prove di (Anthoine et al., 1995), è stata condotta un'analisi parametrica su 258 pannelli, ottenuti da opportune combinazioni di differenti terne valori di tensione normale media agente σ , snellezza λ e coesione c dell'interfaccia malta-mattone (Tabella 2.4).

Tabella 2.4 - Range di variazione dei parametri snellezza, coesione e tensione media agente sul pannello

λ	1.0	1.35	1.7	2.0	2.3	2.6
c [MPa]	0.15	0.30	0.40	0.50	0.60	
σ [MPa]	Range 0.1-0.9					

Ciascuna parete è stata quindi modellata sia in termini discreti, in accordo alla modellazione calibrata sulle prove precedentemente analizzate, sia in termini omogenei, adottando un unico materiale con un opportuno valore dei moduli di Young omogeneizzati (Gambarotta & Lagomarsino 1997a; 1997b):

$$E_v = \frac{1}{\frac{\eta_m}{E_m} + \frac{\eta_b}{E_b} - \frac{\eta_b \eta_m E_b E_m}{E_v} \left(\frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right)^2} = 1270 \text{ [MPa]} \quad (2.13)$$

$$E_h = \eta_m E_m + \eta_b E_b = 12470 \text{ [MPa]} \quad (2.14)$$

dove η_m e η_b sono le frazioni volumetriche di malta e mattone, rispettivamente pari a 0.154 e 0.846.

La procedura di omogeneizzazione si è infine risolta nella scelta di un appropriato valore della coesione da utilizzare nel materiale equivalente che rendesse identica, in termini di resistenza, la risposta delle pareti modellate in termini discreti.

Le 258 pareti sottoposte ad analisi pushover hanno pertanto consentito di individuare, parete per parete ed al variare dei parametri innanzi definiti, i valori di tale coesione equivalente.

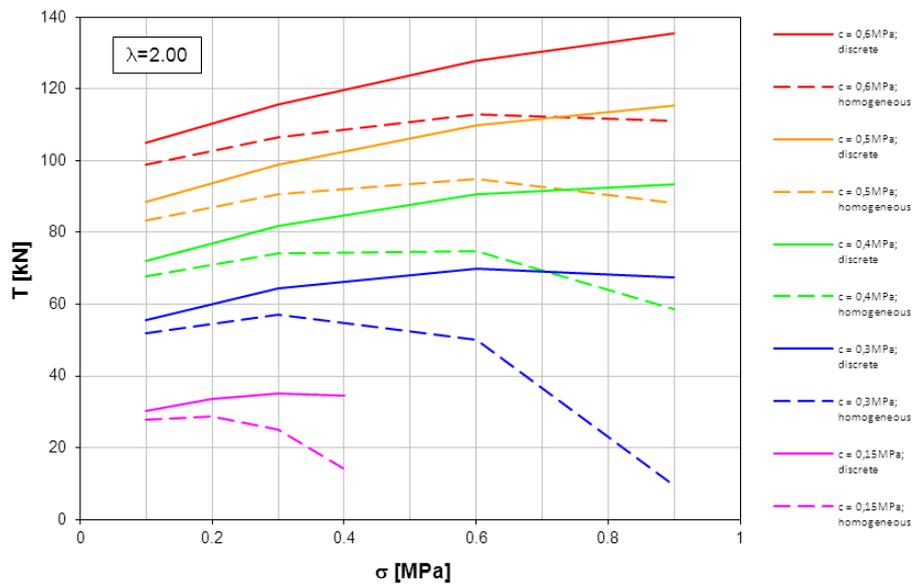


Figura 2.46 – Diagrammi Taglio alla base vs. tensione media agente per alcune pareti a snellezza fissata, al variare della coesione. Confronto tra modello omogeneo e modello discreto

A titolo esemplificativo, in Figura 2.46 è riportato un grafico che riporta, per alcune pareti a snellezza fissata, il valore del taglio alla base massimo ottenuto nelle analisi con STRAUS7 sia con il modello discreto che con il modello omogeneo, al variare della

tensione media agente e per alcuni valori di coesione. Dall'analisi della Figura 2.46 è evidente che i due modelli discreto ed omogeneo non forniscano lo stesso risultato in termini di taglio alla base, se uno stesso valore di coesione viene adottato in entrambi.

c = 0,15		c = 0,3		c = 0,4		c = 0,5		c = 0,6	
sigma	0,1	sigma	0,1	sigma	0,1	sigma	0,1	sigma	0,1
T(eterog.)	30,251	T(eterog.)	55,514	T(eterog.)	72,124	T(eterog.)	88,615	T(eterog.)	104,946
T(omog.)	27,663	T(omog.)	51,879	T(omog.)	67,646	T(omog.)	83,267	T(omog.)	98,753
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1657	c(new)	0,3229	c(new)	0,4286	c(new)	0,5344	c(new)	0,6403
c(new)/c(old)	1,1047	c(new)/c(old)	1,0763	c(new)/c(old)	1,0715	c(new)/c(old)	1,0688	c(new)/c(old)	1,0672
sigma	0,15	sigma	0,15	sigma	0,15	sigma	0,15	sigma	0,15
T(eterog.)	32,19	T(eterog.)	58,098	T(eterog.)	74,876	T(eterog.)	91,466	T(eterog.)	107,857
T(omog.)	28,59	T(omog.)	53,714	T(omog.)	69,697	T(omog.)	85,446	T(omog.)	101,004
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1705	c(new)	0,3272	c(new)	0,4327	c(new)	0,5386	c(new)	0,6444
c(new)/c(old)	1,1367	c(new)/c(old)	1,0907	c(new)/c(old)	1,0818	c(new)/c(old)	1,0772	c(new)/c(old)	1,0740
sigma	0,2	sigma	0,2	sigma	0,2	sigma	0,2	sigma	0,2
T(eterog.)	33,623	T(eterog.)	60,409	T(eterog.)	77,416	T(eterog.)	94,147	T(eterog.)	110,626
T(omog.)	28,622	T(omog.)	55,172	T(omog.)	71,467	T(omog.)	87,389	T(omog.)	103,066
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1757	c(new)	0,3317	c(new)	0,4371	c(new)	0,5429	c(new)	0,6487
c(new)/c(old)	1,1713	c(new)/c(old)	1,1057	c(new)/c(old)	1,0928	c(new)/c(old)	1,0858	c(new)/c(old)	1,0812
sigma	0,25	sigma	0,25	sigma	0,25	sigma	0,25	sigma	0,25
T(eterog.)	34,558	T(eterog.)	62,464	T(eterog.)	79,759	T(eterog.)	96,661	T(eterog.)	113,252
T(omog.)	27,526	T(omog.)	56,266	T(omog.)	72,961	T(omog.)	89,117	T(omog.)	104,944
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1817	c(new)	0,3366	c(new)	0,4418	c(new)	0,5475	c(new)	0,6532
c(new)/c(old)	1,2113	c(new)/c(old)	1,1220	c(new)/c(old)	1,1045	c(new)/c(old)	1,0950	c(new)/c(old)	1,0887
sigma	0,3	sigma	0,3	sigma	0,3	sigma	0,3	sigma	0,3
T(eterog.)	35,033	T(eterog.)	64,259	T(eterog.)	81,9	T(eterog.)	99,012	T(eterog.)	115,739
T(omog.)	25,174	T(omog.)	56,971	T(omog.)	74,182	T(omog.)	90,63	T(omog.)	106,631
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1886	c(new)	0,3416	c(new)	0,4466	c(new)	0,5521	c(new)	0,6578
c(new)/c(old)	1,2573	c(new)/c(old)	1,1387	c(new)/c(old)	1,1165	c(new)/c(old)	1,1042	c(new)/c(old)	1,0963
sigma	0,35	sigma	0,35	sigma	0,35	sigma	0,35	sigma	0,35
T(eterog.)	35,047	T(eterog.)	65,806	T(eterog.)	83,849	T(eterog.)	101,203	T(eterog.)	118,09
T(omog.)	20,918	T(omog.)	57,265	T(omog.)	75,111	T(omog.)	91,922	T(omog.)	108,151
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,1959	c(new)	0,3468	c(new)	0,4514	c(new)	0,5568	c(new)	0,6626
c(new)/c(old)	1,3060	c(new)/c(old)	1,1560	c(new)/c(old)	1,1285	c(new)/c(old)	1,1136	c(new)/c(old)	1,1043
sigma	0,4	sigma	0,4	sigma	0,4	sigma	0,4	sigma	0,4
T(eterog.)	34,606	T(eterog.)	67,105	T(eterog.)	85,604	T(eterog.)	103,235	T(eterog.)	120,304
T(omog.)	14,174	T(omog.)	57,032	T(omog.)	75,746	T(omog.)	92,982	T(omog.)	109,49
c(old)	0,15	c(old)	0,3	c(old)	0,4	c(old)	0,5	c(old)	0,6
c(new)	0,2037	c(new)	0,3522	c(new)	0,4566	c(new)	0,5617	c(new)	0,6673
c(new)/c(old)	1,3580	c(new)/c(old)	1,1740	c(new)/c(old)	1,1415	c(new)/c(old)	1,1234	c(new)/c(old)	1,1122

Figura 2.47 – Alcuni valori della coesione da adottare nel modello omogeneo, $\lambda=2.00$ (sigma=tensione media agente in [MPa], c=coesione in [MPa], T=Taglio alla base in [kN]; old si riferisce al valore discreto, new al valore che realizza l'equivalenza)

L'obiettivo di questa parte del lavoro è pertanto consistito nel comprendere quali valori della coesione dovessero essere assegnati al materiale equivalente affinché curve del tipo riportate in Figura 2.46 si sovrapponevano perfettamente.

In Figura 2.47 sono pertanto riportati, per le pareti illustrate in Figura 2.46, i valori della coesione da adottare nel modello omogeneo tale da renderne la risposta equivalente al modello omogeneo. Tali valori sono stati ricavati per via numerica, ripetendo le analisi sui modelli omogenei con STRAUS7 per ciascuna parete, fino al raggiungimento del valore di taglio alla base fornito dal modello discreto.

Attraverso una regressione statistica è stata quindi individuata la legge in grado di esprimere il valore della coesione equivalente in funzione dei parametri da cui essa dipende.

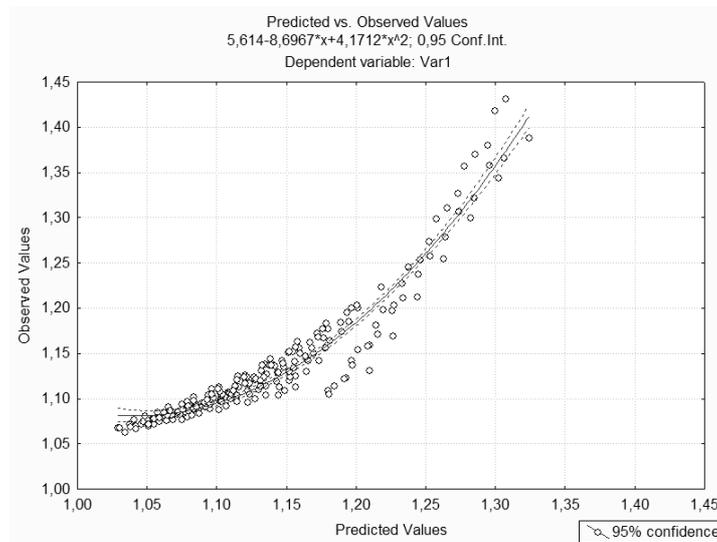


Figura 2.48 – Relazione quadratica multi lineare per la valutazione del rapporto c_{eq}/c

Tale regressione, rappresentata in Figura 2.48, è espressa dalla relazione:

$$c_{eq} / c = 4.1712t^2 - 8.6967t + 5.6140 \quad (2.15)$$

dove il parametro t è dato da:

$$t = 0.617545 + \frac{0.036671}{c} + 0.296728 \cdot \exp(\sigma) + \quad (2.16)$$

$$+ 0.00012 \cdot 10^\lambda + \frac{0.048976}{\lambda} + 0.023621 \cdot \ln c$$

Il materiale omogeneo così modellato è stato a sua volta validato. Allo scopo è stato simulato il comportamento di pareti oggetto di sperimentazione in scala 1:1 (Pavia Door Wall) realizzate presso l'Università di Pavia (Calvi & Magenes 1994) e una parete (Parete di Via Martoglio) estratta dagli edifici analizzati nell'ambito del "Progetto Catania" (Liberatore, 2000) già oggetto di modellazione da parte dell'Università di Genova attraverso una modellazione numerica ad elementi finiti bidimensionali con legge costitutiva non lineare (Gambarotta & Lagomarsino, 1997b).

Le pareti adottate per la validazione saranno ampiamente richiamate nel capitolo 6, pertanto si riportano solo i grafici relativi ai confronti tra modelli originali e modello omogeneo.

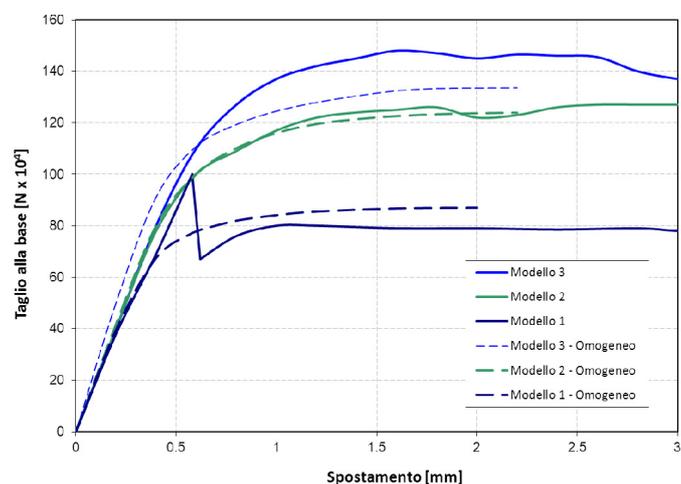


Figura 2.49 – Parete di Via Martoglio: confronto tra modellazione agli EF secondo Gambarotta & Lagomarsino e modello omogeneo

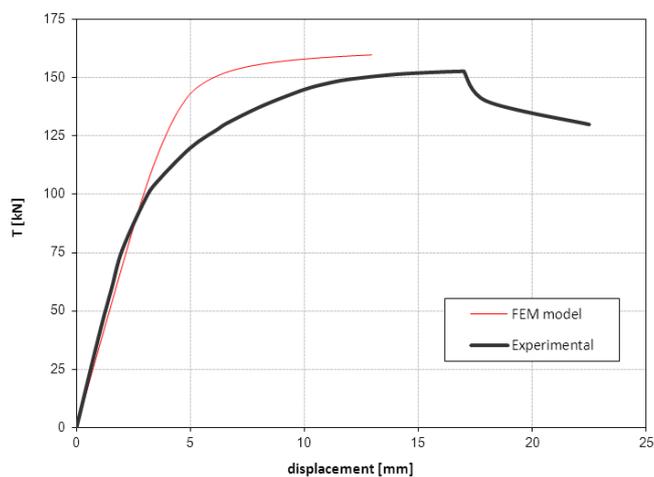


Figura 2.50 – Pavia Door Wall: confronto tra prova sperimentale e modello omogeneo

In Figura 2.49 è riportato il confronto relativo alla parete di Via Martoglio (Progetto Catania): le simulazioni numeriche fanno riferimento a tre casi: modello 1, parete di sola muratura; modello 2,

parete con cordoli elastici in c.a., con modulo di Young $E= 5000$ [MPa]; modello 3, parete con cordoli elastici in c.a., con modulo di Young $E= 20000$ [MPa].

In Figura 2.50 è riportato il confronto relativo alla Pavia Door Wall.

Le simulazioni numeriche hanno mostrato una soddisfacente aderenza tra il modello omogeneo proposto e l'evidenza sperimentale. Si può pertanto ritenere che il materiale omogeneo così modellato riesca adeguatamente a simulare la risposta meccanica di pareti in muratura soggette ad azioni nel proprio piano.

2.3.2 Analisi parametrica sull'influenza delle fasce di piano

Le fasce di piano giocano un ruolo fondamentale nel comportamento delle pareti in muratura sollecitate nel proprio piano. I diversi dettagli costruttivi normalmente riscontrabili nel costruito in muratura evidenziano infatti che le fasce di piano possono realizzare un diverso grado di accoppiamento tra i maschi murari, dando vita quindi a diversi comportamenti strutturali.

Sono state quindi condotte delle analisi parametriche (Rizzano et al., 2009) volte a valutare l'influenza delle fasce di piano; le analisi faranno riferimento a tre tipologie di fasce di piano (Calderoni et al., 2007), di seguito descritte:

a) fascia di piano "pendolare". Tale tipologia di fascia rappresenta lo schema limite inferiore in termini di rigidità e resistenza flessionale delle fasce a cui tende il comportamento delle strutture reali in presenza di fascia di ridotta dimensione e dettagli costruttivi quali ad esempio solai in legno ed assenza di catene e cordoli. Tali fasce risultano prive di rigidità flessionale e strutturalmente si configurano unicamente come pendoli che collegano i maschi. Questi ultimi, a loro volta, si comporteranno come mensole estese per l'intera altezza dell'edificio, e pertanto, per effetto della loro elevata snellezza, presenteranno tipicamente una

rottura per pressoflessione. Questa configurazione di fascia di piano è quella che espone l'edificio alla maggiore vulnerabilità sismica. Tale tipologia di fascia richiede sempre interventi di consolidamento, quanto meno attraverso l'inserimento di elementi resistenti a trazione (catene) per migliorare il grado di accoppiamento tra i maschi ed evitare quindi che essi lavorino come elementi strutturalmente indipendenti;

b) fascia di piano "non consolidata". Nel presente lavoro, con questa accezione ci si riferirà a fasce di piano che, sebbene prive di cordoli e piattabande, sono strutturalmente in grado di realizzare un accoppiamento tra i maschi e sono caratterizzate da deformabilità taglianti e flessionali finite;

c) fascia di piano "infinitamente rigida e resistente". Si considera, in tale modello, lo schema limite superiore in termini di resistenza e rigidezza flessionale delle fasce che vengono quindi assunte come infinitamente rigide rispetto ai maschi costituenti la parete. Conseguentemente, la parete lavorerà nel proprio piano principalmente come un telaio shear-type.

Le pareti oggetto di analisi in questa prima parte del lavoro ammontano complessivamente a 144, ottenute attraverso la ripetizione del modulo base riportato in Figura 2.51 in nove diverse configurazioni di assemblaggio (Figura 2.52). Lo spessore delle pareti, pari a 30 cm, è stato assunto costante per tutte le configurazioni analizzate, indipendentemente dal numero di piani.

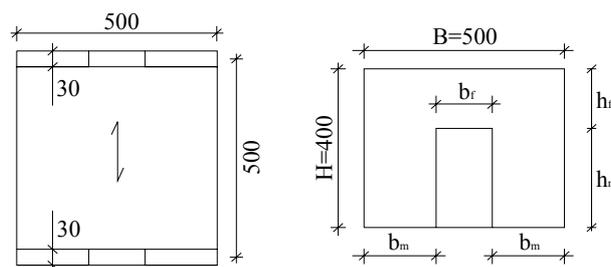


Figura 2.51 – Modulo base adottato nella campagna numerica, pianta e prospetto (misure in [cm])

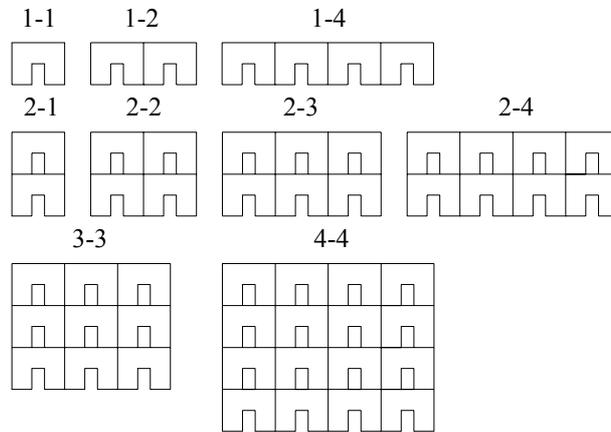


Figura 2.52 – Schema delle pareti analizzate

Il singolo modulo, a sua volta, è stato caratterizzato da diverse geometrie della fascia di piano e dei maschi, attraverso la scelta di otto differenti valori di base ed altezza delle aperture (Tabella 2.5) combinati opportunamente fra loro a formare 16 diverse configurazioni geometriche.

Tabella 2.5 – Valori delle aperture del modulo base

b_f [m]	1.2	1.4	1.6	1.8
h_f [m]	2.0	2.4	2.8	3.2

Sulla base della geometria dei moduli descritta, risultano individuati i ranges nei quali variano la snellezza delle fasce di piano λ_f , dei maschi interni $\lambda_{m,i}$ e dei maschi esterni $\lambda_{m,e}$, definite dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_f &= \frac{b_f}{h_f} \\ \lambda_{m,i} &= \frac{h_m}{2b_m} \\ \lambda_{m,e} &= \frac{h_m}{b_m}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Per ciascuna tipologia di elemento, il campo di variazione dei parametri di snellezza esaminato è definito dai seguenti intervalli:

$$0.60 \leq \lambda_f \leq 2.25$$

$$0.52 \leq \lambda_{m,i} \leq 1.00$$

$$1.05 \leq \lambda_{m,e} \leq 2.00$$

Ciascuna parete è stata analizzata nelle due configurazioni di fascia “non consolidata” e di fascia “infinitamente resistente”. Lo scopo di questo confronto è quello di valutare il massimo valore dell’incremento di resistenza che si può ottenere per una parete per la quale si progetti un intervento di consolidamento delle fasce in grado di conferirle adeguata resistenza ed elevata rigidezza.

Le pareti sono state esaminate conducendo analisi statiche non lineari e modellandole con il materiale omogeneo equivalente definito in base alle considerazioni svolte nella sezione precedente.

Valutata la resistenza offerta dalla parete a fasce non consolidate T_0 , e la resistenza ottenuta nel caso in cui le fasce di piano siano infinitamente resistenti T_∞ , è stata introdotta la quantità η :

$$\eta = \frac{T_\infty - T_0}{T_0}\tag{2.18}$$

rappresentativa del massimo incremento di resistenza che è possibile ottenere per una data parete qualora le fasce di piano vengano rinforzate sia a taglio che a flessione.

Allo scopo di analizzare in che misura le caratteristiche geometriche delle fasce e dei maschi influiscano sull'incremento di resistenza atteso, è stato considerato il seguente parametro λ pari al rapporto tra le rigidezze taglianti di maschi e fasce, che come si evince da semplici passaggi matematici equivale al rapporto tra le snellezze di maschi e fasce elevato al cubo:

$$\lambda = \frac{k_m}{k_f} = \frac{12 \cdot (EI)_m}{h_m^3} \cdot \frac{b_f^3}{12 \cdot (EI)_f} = \left(\frac{\lambda_{m,e}}{\lambda_f} \right)^3 \quad (2.19)$$

Ciascuna parete, caratterizzata da determinate caratteristiche geometriche (e quindi da un determinato valore del parametro λ) è stata analizzata, mediante un'analisi pushover, nella configurazione "non consolidata" e "infinitamente resistente". A titolo di esempio si riporta in Figura 2.53 la curva taglio alla base vs spostamento della parete 4-4 (vedi Figura 2.52) al variare delle configurazioni della fascia di piano.

Curve analoghe sono state tracciate per le 144 pareti oggetto di analisi, fornendo nel piano $\lambda-\eta$ la distribuzione di punti riportata in Figura 2.54.

L'analisi dei risultati di Figura 2.54 porta chiaramente ad individuare che la massima efficacia dell'intervento di rinforzo delle fasce è attesa nella zona in cui risulta $\lambda < 1.5$, ossia nel caso di pareti caratterizzate da fasce di piano "deboli" rispetto ai maschi, con un miglioramento in termini di resistenza variabile tra il 30% e 60%. Questo particolare campo di variazione di λ è rappresentato in maggior dettaglio in Figura 2.55, dove è suggerito un limite superiore ed un limite inferiore della funzione $\eta(\lambda)$.

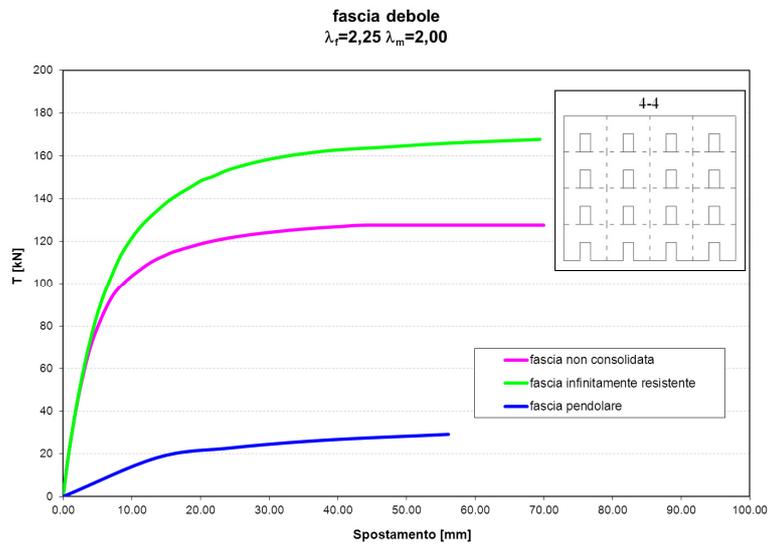


Figura 2.53 – Curve taglio spostamento del modulo 4-4 al variare della tipologia di fascia di piano

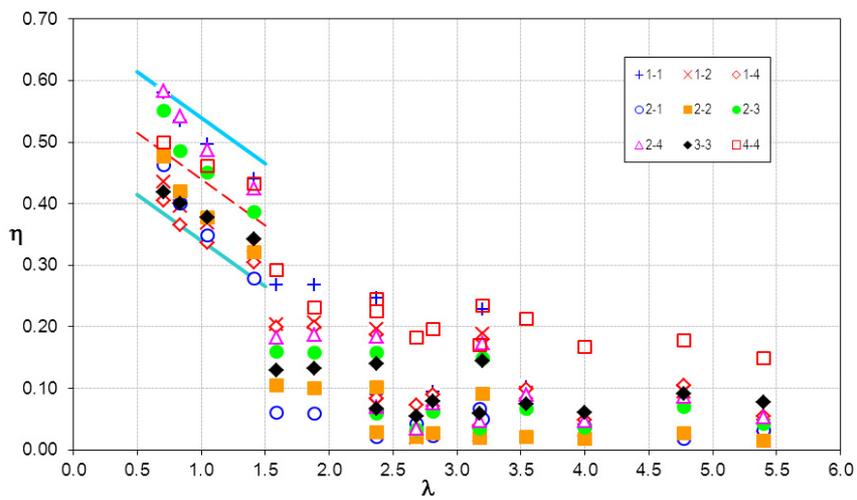


Figura 2.54 – Incrementi di resistenza η al variare delle caratteristiche geometriche e della tipologia delle pareti

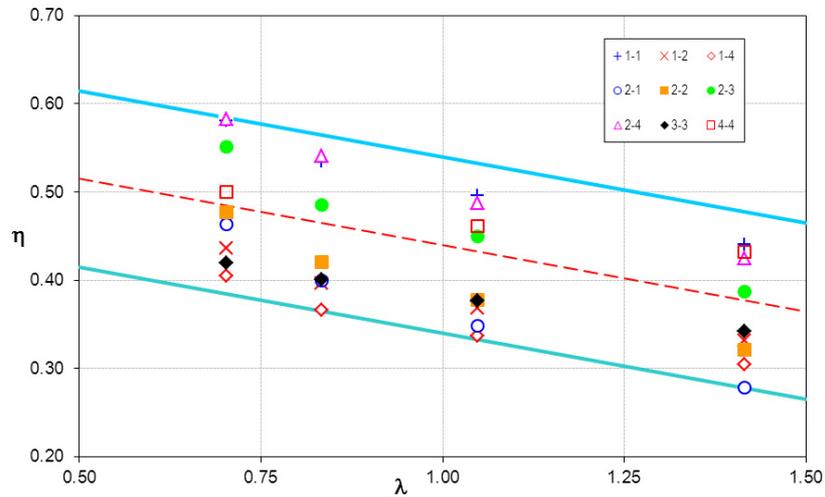


Figura 2.55 – Incrementi di resistenza η : dettaglio della zona per $0 < \lambda < 1.5$

Dall'analisi svolta è peraltro possibile avere una stima dell'efficacia media attesa dall'intervento di consolidamento delle fasce nel campo evidenziato in Figura 2.55. In particolare risulta:

$$\lambda < 1.5 : \eta = -0.15\lambda + 0.59 \quad (2.20)$$

Per quanto attiene al campo $\lambda > 1.5$, in cui i risultati appaiono più dispersi, risulta più complesso individuare un trend, e l'efficacia dell'intervento di rinforzo delle fasce di piano si attesta su livelli più bassi, generalmente inferiori al 20%.

2.3.3 Analisi e confronto tra tecniche di rinforzo di pareti

La valutazione quantitativa dell'efficacia degli interventi di consolidamento su pareti in muratura rappresenta una problematica complessa sul piano pratico, per la difficoltà di effettuare prove

sperimentali tese a cogliere, in maniera diretta, il reale miglioramento ottenuto con un dato intervento.

D'altra parte, il grandissimo numero di tipologie murarie diffuse sul territorio italiano, unitamente alla dispersione intrinseca dei risultati attesi dagli interventi di consolidamento tipicamente realizzati, impedisce di formulare dei criteri "generali" per stimare il miglioramento atteso con un certo intervento.

A questo scopo, l'attuale normativa italiana (Norme Tecniche per le Costruzioni, 2008; Circolare 617/2009), suggerisce esplicitamente di valutare l'effetto degli interventi di miglioramento su pareti in muratura applicando dei coefficienti correttivi alle proprietà meccaniche del materiale originario.

Nel rispetto della norma vigente, e nell'intento di fornire delle indicazioni pratiche di carattere progettuale, in questo lavoro si è adottato l'approccio suggerito dalla norma, valutando l'efficacia di alcune tipologie di interventi, ed in particolare:

- Iniezioni di miscele leganti (estese all'intero pannello o a parte dello stesso);
- Realizzazione di intonaci armati (estese all'intero pannello o a parte dello stesso);
- Realizzazione di cordoli di piano e piattabande.

Al fine di cogliere comportamenti estremi nel campo di variazione dei risultati, le analisi sono state condotte su pareti del tipo 1-1 e 4-4, scegliendo per ciascun modulo una parete a fascia geometricamente "forte" ($\lambda=5.35$) ed una parete a fascia "debole" ($\lambda=0.70$)

Tabella C8A.2.2 - Coefficienti correttivi dei parametri meccanici (indicati in Tabella C8A.2.1) da applicarsi in presenza di: malta di caratteristiche buone o ottime; giunti sottili; ricorsi o listature; sistematiche connessioni trasversali; nucleo interno particolarmente scadente e/o ampio; consolidamento con iniezioni di malta; consolidamento con intonaco armato.

Tipologia di muratura	Malta buona	Giunti sottili (<10 mm)	Ricorsi o listature	Connessioni trasversale	Nucleo scadente e/o ampio	Iniezione di miscela leganti	Intonaco armato *
Muratura in pietrame disordinata (ciottoli, pietre erratiche e irregolari)	1,5	-	1,3	1,5	0,9	2	2,5
Muratura a conci sbozzati, con spessore di limitato spessore e	1,4	1,2	1,2	1,5	0,8	1,7	2
Muratura in pietre a spacco con buona fessitura	1,3	-	1,1	1,3	0,8	1,5	1,5
Muratura a conci di pietra tenera (tufo, calcarenite, ecc.)	1,5	1,5	-	1,5	0,9	1,7	2
Muratura a blocchi lapidei quadrati	1,2	1,2	-	1,2	0,7	1,2	1,2
Muratura in mattoni pieni e malta di calce	1,5	1,5	-	1,3	0,7	1,5	1,5

* Valori da ridurre convenientemente nel caso di pareti di notevole spessore (p.es. > 70 cm).

Figura 2.56 – Tabella riassuntiva dei coefficienti correttivi dei parametri meccanici di pareti in muratura per effetto di interventi di consolidamento (da Circolare 617/2009)

Con riferimento alla realizzazione di interventi tramite iniezione di miscela leganti e intonaci armati, sono state realizzate analisi pushover nelle quali i parametri meccanici modulo elastico E , modulo elastico tangenziale G , resistenza media a compressione f_m e resistenza media a taglio τ_0 , sono stati incrementati rispettivamente dei coefficienti 1.7 e 2, valori suggeriti dalla Circolare 617/2009, Tabella C.8A.2.2 (Figura 2.56), per “murature a conci di pietra tenera”.

La modellazione di cordoli e piattabande è stata invece realizzata in STRAUS7 attraverso l'introduzione di opportuni elementi in cemento armato.

Nelle Figura 2.57-Figura 2.60 è riportata la valutazione dell'efficacia dei diversi interventi mediante la rappresentazione del seguente parametro:

$$\Delta = \frac{T_c - T_0}{T_0} \quad (2.21)$$

del tutto simile al parametro η precedentemente introdotto, e rappresentativo dell'incremento di resistenza nel passaggio dalla configurazione di partenza (con taglio resistente T_0) alla configurazione consolidata (con taglio resistente T_c).

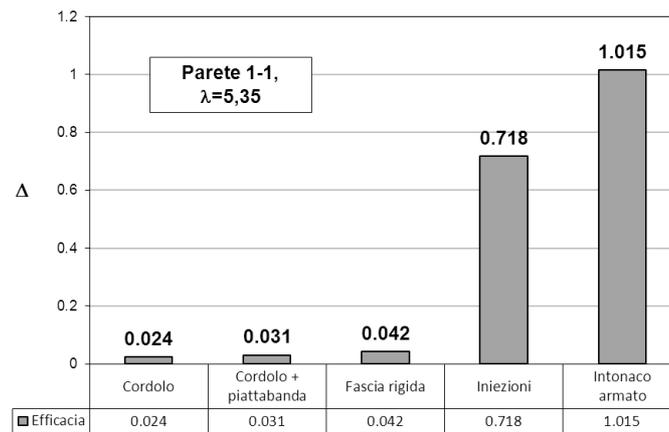


Figura 2.57 – Parete 1-1 con fascia forte: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi

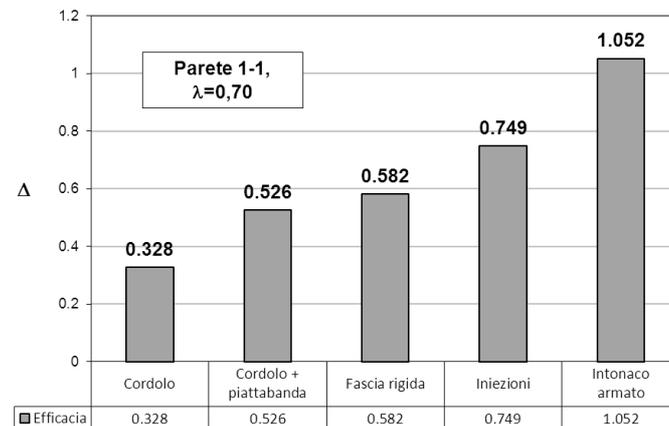


Figura 2.58 – Parete 1-1 con fascia di piano debole: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi

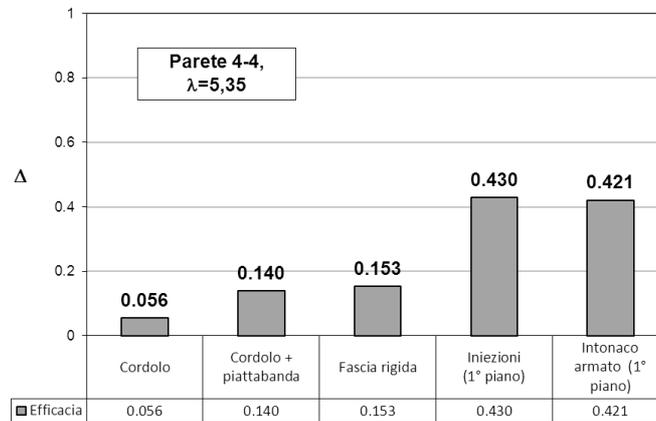


Figura 2.59 – Parete 4-4 con fascia di piano forte: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi

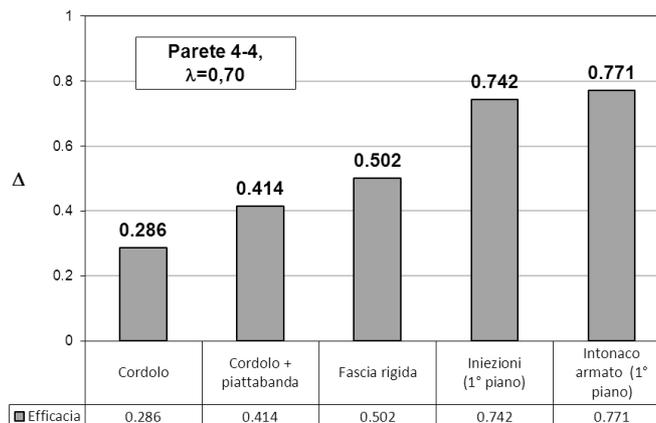


Figura 2.60 – Parete 4-4 con fascia di piano debole: incremento di resistenza atteso in funzione dei diversi interventi

I valori di resistenza ottenuti applicando le prescrizioni normative mettono in luce alcuni aspetti peculiari.

Si può notare che, indipendentemente dalle dimensioni della parete, nel caso di fasce di piano forti ($\lambda=5.35$), l'incremento di

resistenza che è possibile ottenere mediante interventi quali l'inserimento di cordoli o piattabande è modesto, rispetto all'incremento di resistenza ottenibile mediante un intervento di iniezioni o di intonaco armato e, in accordo con quanto riportato nel paragrafo precedente, l'incremento di resistenza rispetto alla parete non consolidata risulta al massimo pari al 14%.

Pertanto, per tali pareti un aumento di resistenza più significativo si può ottenere in sede di consolidamento della parete solo con interventi di iniezioni di miscele leganti o realizzazione di intonaci armati.

Nel caso invece di pareti con fasce di piano deboli, si osserva che un intervento limitato al rinforzo delle fasce di piano comporta in ogni caso un significativo beneficio, fermo restando la maggiore efficacia di iniezioni e intonaci armati.

Va inoltre osservato nelle Figura 2.57Figura 2.60 che è possibile ottenere per le fasce di piano un comportamento prossimo a quello di fascia infinitamente rigida e resistente a condizione di realizzare sia il cordolo di piano che la piattabanda.

Con riferimento al modulo 4-4, che per le sue dimensioni meglio si presta ad interpretare i dati relativi ad una parete reale di un edificio multipiano, si è focalizzata l'attenzione sull'incremento di resistenza atteso nei casi in cui le iniezioni di miscele leganti o la realizzazione di intonaci armati venissero realizzati per un solo piano o per un numero maggiore di piani.

In Figura 2.61Figura 2.62 è riportato, al variare del parametro λ , l'incremento di resistenza Δ , in relazione al numero di piani interessati dall'intervento.

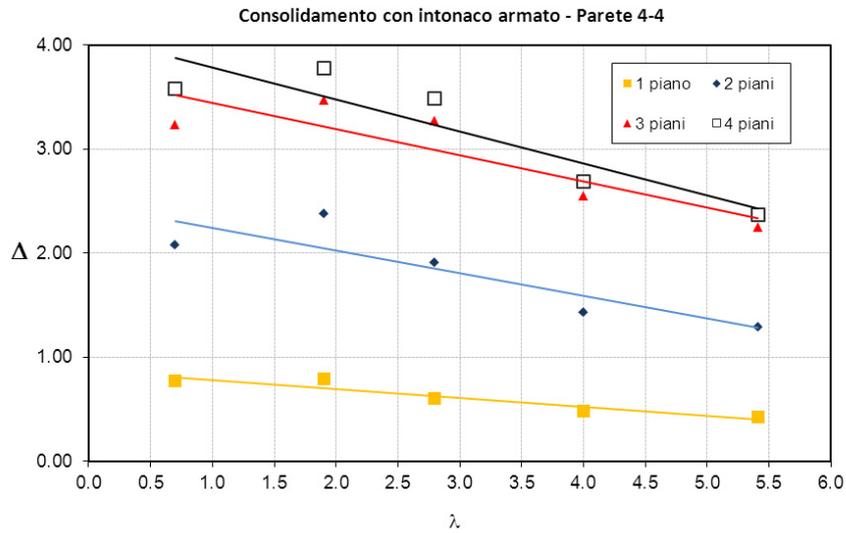


Figura 2.61 - Parete 4-4: incremento di resistenza atteso da un consolidamento mediante intonaco armato al variare del numero di piani interessati dall'intervento

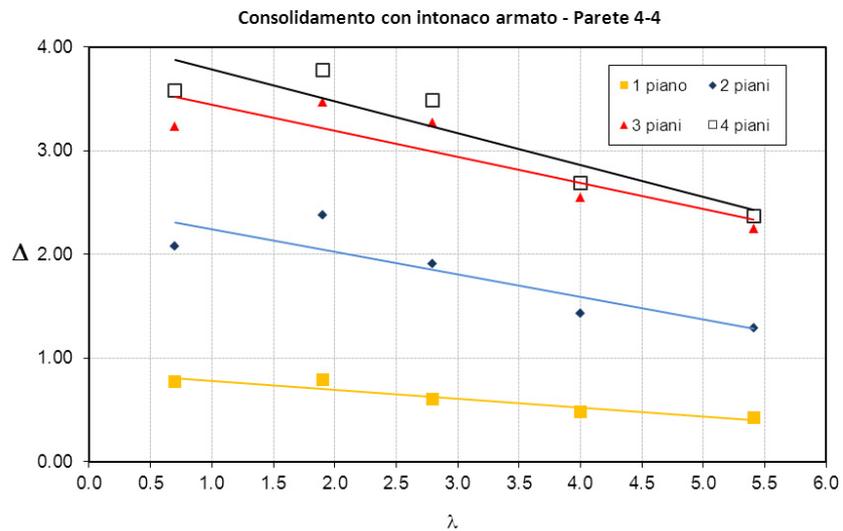


Figura 2.62 - Parete 4-4: incremento di resistenza atteso da un consolidamento mediante iniezione di miscele leganti al variare del numero di piani interessati dall'intervento

Dall'analisi delle Figura 2.61Figura 2.62 è possibile riconoscere che l'estensione ad un maggior numero di piani dell'intervento di consolidamento mediante intonaco armato ed iniezioni comporta un notevole aumento in termini di resistenza della parete. Per l'intonaco armato è infatti possibile ottenere miglioramenti nell'ordine del 150-200% applicando il rinforzo ai primi due piani; ordine di grandezza del miglioramento indicativamente analoghi sono attesi anche nel caso di iniezioni di miscele leganti.

Gli incrementi di resistenza ottenibili aumentano ulteriormente estendendo il consolidamento anche ai piani superiori ma con un beneficio progressivamente di entità sempre minore.

2.4 BIBLIOGRAFIA

Anthoine A., Magonette G. and Magenes G.(1995). Shear-compression testing and analysis of brick masonry walls, in G. Duma (ed.), *Proc. 10th European Conference on earthquake engineering*, Rotterdam.

Atkinson R. H., Amadei P. B., Saeb S. and Sture S. (1989). Response of masonry bed joints in direct shear, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 115, No.9, pp. 2276-2296.

Backes H. P. (1985). *On the behaviour of masonry under tension in direction of the bed joints*, Dissertation, Aachen University of Technology, Aachen, Germany.

Binda L., Mirabella G., Tiraboschi C. and Abbaneo S. (1994). Measuring masonry material properties, in D.P. Abrams and G.M. Calvi (eds), *Proc. U.S.-Italy workshop on guidelines for seismic evaluation and rehabilitation of unreinforced masonry buildings*, State Univ. of New York at Buffalo, NCEER-94-0021, 6-3/24, Pavia.

Brebbia C.A., Connor J.J. (1993). *Fondamenti del metodo agli elementi finiti*, Città Studi Ed.

Calderoni B., Cordasco E., Leanza P. (2007). Il ruolo della fascia di piano nel comportamento sismico degli edifici in muratura, *Ingegneria Sismica*, **1/2007**, 26-40.

Calvi G. M. and Magenes G. (1994). Experimental research on response of URM building system, in D.P. Abrams and G. M. Calvi (eds), *Proc. U.S.-Italy Workshop on guidelines for seismic evaluation and rehabilitation of unreinforced masonry buildings*, State Univ. of New York at Buffalo, NCEER-94-0021, 3-41/57, Pavia.

Cesari F. (1997a). *Calcolo automatico di strutture con comportamento non lineare*, Pitagora Editrice, Bologna.

Cesari F. (1997b). *Introduzione al metodo degli elementi finiti*, Pitagora Editrice, Bologna.

Chaimoon K., Attard M. M. (2007). Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression, *Engineering Structures*, Vol. 29, Issue 9, pp. 2056-2068.

Circolare 617/2009. Istruzioni per l'applicazione delle "Nuove norme tecniche per le costruzioni" di cui al D.M. 14 gennaio 2008.

CUR - Centre for Civil Engineering Research and Codes (1997). *Structural Masonry: An Experimental/Numerical Basis for Practical Design Rules*, Balkema, Rotterdam.

D.M. 14.01.2008 (2008). Norme Tecniche per le Costruzioni, Ministero Infrastrutture e Trasporti, Rome, Italy.

Drucker D. C, Gibson R.E, Henkel D. J (1957). Soil mechanics and work hardening theories of plasticity, *Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, vol. **122**. pp. 338-46.

Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997a). Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26:4**, 424-441.

Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997b). Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its application, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26:4**, 441-462.

Izzuddin B. A. (1991). *Nonlinear Dynamic Analysis of Framed Structures*, PhD Thesis, Imperial College, London.

Liberatore, D. (A cura di) (2000). *Progetto Catania: indagine sulla risposta sismica di due edifici in muratura*, CNR - Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti, Roma.

Lourenço P.B. (1996). *Computational Strategies for Masonry Structures*, Ph.D. Thesis, The Netherlands: Delft University of Technology.

Lourenço P. B., Rots J. G (1997). Multisurface Interface Model for Analysis of Masonry Structures, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 123, No. 7, pp. 660-668.

Macorini L., Izzudin B. A. (2010). 3D Mesoscale Modelling for Nonlinear Analysis of Brick-Masonry, *Proc. of the 8th International Masonry Conference*, Dresden, Germany, 2010.

Mann W., Müller, H. (1980). Failure of shear stressed masonry – An enlarged theory, tests and application to shear-walls, *Proceedings of the International Symposium on Load-Bearing Brickwork*, London, UK.

Rizzano G., Squizzato A. (2007). L'impiego di modelli semplificati nella valutazione della resistenza di pareti in muratura in zona sismica, *Proceedings of 12th ANIDIS - Italian National Conference on Earthquake Engineering*, Pisa, Italy.

Rizzano G., Sabatino R., Squizzato A. (2008). Simplified and accurate models in evaluating seismic strength of masonry walls, *Proceedings of 4th CINPAR, International Conference on Structural Defects and Repair*, Aveiro, Portugal.

Rizzano G., Sabatino R., Zambrano M. (2009). L'influenza delle fasce di piano sulla resistenza di pareti in muratura, *Proceedings of 13th ANIDIS - Italian National Conference on Earthquake Engineering*, Bologna, Italy.

Van der Pluijm R. (1992). Material properties of masonry and its components under tension and shear, *Proc. 6th Canadian Masonry Symposium*, eds. V.V. Neis, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, pp. 675-686.

Vermeltoort A.T. & Raijmakers T.M.J. (1993). *Deformation controlled meso shear tests on masonry piers – Part 2*, Draft Report, TU Eindhoven, dept. BKO.

3

STRATEGIE DI MODELLAZIONE DI EDIFICI IN MURATURA

Il capitolo 3 riporta cenni di modellazione del comportamento sismico di strutture in muratura in accordo all'attuale norma tecnica italiana, con particolare riferimento alle analisi statiche non lineari e alle modellazioni a telaio equivalente. Successivamente si passano in rassegna i principali metodi semplificati proposti in letteratura nell'analisi di strutture in muratura nell'ambito del comportamento nel piano.

3.1 LA MODELLAZIONE DI EDIFICI IN MURATURA SECONDO LA NTC 2008

I criteri di progettazione antisismica sono suddivisibili in due categorie principali: il cosiddetto “force-based design” (approccio tradizionale tipico seguito nelle normative meno recenti) ed il “performance-based design” (entrato più recentemente nel panorama normativo europeo con l'Eurocodice 8 ed italiano con l'OPCM 3274/03).

Il primo metodo applica direttamente l'analisi statica lineare riconducendo il problema ad una verifica degli elementi strutturali del modello, confrontando le sollecitazioni indotte dal terremoto con quelle massime ammesse dalle resistenze dei materiali. Il sisma viene simulato attraverso l'applicazione di condizioni di carico identificabili con forze d'inerzia che il terreno trasferisce alla struttura, calcolate mediante opportuni spettri forniti dalle normative medesime che terranno in conto, in modo forfettario, degli effetti dovuti alle dissipazioni isteretiche. Infatti, la dissipazione

indotta dalle plasticità è considerata mediante una riduzione delle forze statiche di verifica. Pur eseguendo verifiche locali di duttilità, rispetto a parametri sperimentali, per prevenire collassi locali che metterebbero a rischio la vita degli occupanti, non risulta tuttavia possibile quantificare precisamente la condizione dell'edificio al termine dell'evento.

Una progettazione più razionale e consapevole è possibile con un approccio prestazionale, capace cioè di correlare il sisma agente allo stato di danno indotto, ovvero, in fase progettuale a dimensionare un edificio in ragione della funzione che verrà richiesta al termine del sisma.

Il metodo parte quindi dalla scelta del livello prestazionale richiesto in base all'uso dell'edificio e rispetto ad eventi sismici di differente periodo di ritorno, passando poi alla progettazione degli elementi resistenti, sempre in ragione del livello prestazionale assunto, e alla verifica diretta della duttilità attraverso lo stato di spostamento del modello.

Nella logica di questo approccio, in generale si individuano i seguenti livelli prestazionali (Figura 3.1):

- (IO, immediate occupancy) completa operatività, non vengono interrotte le attività e i danni sono trascurabili;
- operatività, non vengono interrotte le attività e si verificano danni marginali;
- riparabilità, i danni sono tali da interrompere le attività, ma sono riparabili;
- (LS, life safety) salvaguardia della vita, la vita umana non viene messa in pericolo ma si verificano danni ingenti, talvolta anche irreparabili, con interruzione delle attività;

- (CP, collapse prevention) collasso, i danni sono tali da mettere a rischio la stabilità della struttura e quindi la vita umana.

Questa progettazione prevede la consapevole scelta di un livello accettabile di danno determinato in base ad aspetti di tipo sociale, funzionale (destinazione d'uso, importanza per la collettività, etc.) e al contempo statistici (probabilità sismica e rischio sismico): ovvero per edifici di importanza strategica si dovrà garantire la funzionalità anche per sismi di rilevante accelerazione (e dunque di scarsa probabilità poiché associati a periodi di ritorno più elevati), mentre per edifici civili si può scegliere di garantire unicamente la sopravvivenza degli abitanti.

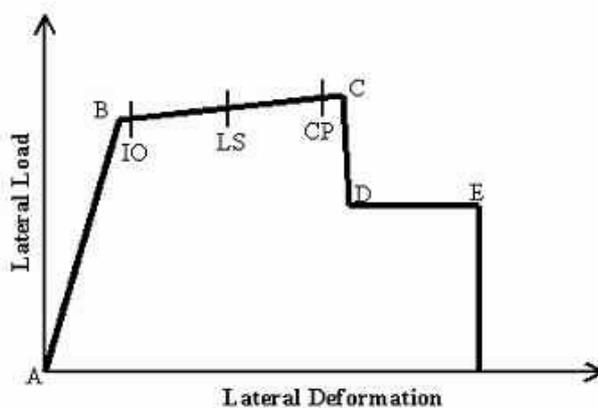


Figura 3.1 – Rappresentazione grafica concettuale dei livelli prestazionali

Per sismi frequenti si vorrà evitare un danneggiamento eccessivo, che comporterebbe spese importanti per il ripristino: fondamentale in questo tipo di analisi risulta, dunque, la componente probabilistica correlata al rischio sismico. Inoltre questa metodologia

richiede la determinazione dello stato reale di danno ovvero si parte dalla scelta prestazionale (ad esempio incolumità per sismi elevati) per gestire l'intera progettazione.

L'approccio è concettualmente molto diverso da quanto visto prima. L'analisi prestazionale richiede l'utilizzo delle caratteristiche proprie dei materiali cercando di favorirne il comportamento duttile; la duttilità complessiva deriva della duttilità locale, ma viene ora calcolata direttamente (solitamente mediante analisi di pushover), così come il meccanismo finale di collasso.

In definitiva la progettazione sismica prestazionale si basa su un uso più intuitivo e controllato delle risorse di duttilità e spostamenti in campo anelastico attraverso modelli locali e globali capaci di cogliere il comportamento non lineare del materiale.

La procedura di analisi più accurata per valutare il comportamento di un edificio nei confronti di un'azione sismica rimane ovviamente l'analisi dinamica non lineare; tuttavia molti elementi concorrono a ostacolarne l'utilizzo sistematico:

- la dipendenza dall'accelerogramma scelto comporta l'uso di molteplici segnali per ogni direzione di analisi (nella recente normativa italiana NTC 2008 e nell'EC8 ne sono richieste 7 terne);
- la complessità del metodo lo rende applicabile solo in presenza di legami sufficientemente elaborati, disponibili in pochi programmi ad hoc e con conseguenti tempi di analisi non trascurabili;
- la valutazione dei risultati in chiave prestazionale è tutt'altro che immediata: può divenire comunque necessario affiancarvi un'analisi statica.

Sia la ricerca, sia la pratica progettuale, si sono orientate a metodologie alternative di tipo statico, capaci di "sintetizzare" gli effetti della risposta dinamica.

In campo elastico l'analisi statica lineare, a partire dagli spettri elastici, opera una riduzione forfettaria delle azioni per contemplare la duttilità dell'edificio.

Più complessa, ma più realistica, è la formulazione statica non lineare, elaborata negli ultimi decenni, che si propone di ricondurre l'edificio ad un oscillatore elastoplastico su cui valutare i massimi spostamenti, in analogia al metodo degli spettri di risposta. Tale procedimento, proposto da più autori (Fajfar & Fischinger, 1988; Freeman, 1998) è riportato, nella sua formulazione generale nel paragrafo seguente; negli aspetti più specifici si seguirà la riproposizione presente nel nuovo testo normativo che recepisce gli studi di Fajfar (2000).

Per le costruzioni in muratura, tuttavia, questo approccio non rappresenta una novità in senso assoluto: sebbene i metodi di calcolo e verifica proposti siano diversi ed aggiornati, l'idea di una più efficace descrizione della capacità della struttura attraverso un'analisi statica non lineare era già presente nelle precedenti normativa (D.M. LL.PP. 02/07/1981; Circ. Min. LL.PP. 21745/1981) con il cosiddetto Metodo POR.

3.2 IL METODO DELLO SPETTRO DI CAPACITÀ

Il metodo dello spettro di capacità consiste nel confronto tra la domanda del sisma, espressa in termini di spettri di risposta di accelerazione e spostamento, e la capacità della struttura, espressi in termini di un legame completo forza-spostamento, da convertire in accelerazione-spostamento, ottenuto applicando un sistema di forze orizzontali ai vari piani. Si ricorda, che ci si riferirà "impropriamente" alla pseudo-accelerazione come accelerazione poiché nell'ambito dell'ingegneria civile, in generale, e delle strutture in muratura, in particolare, le due grandezze tendono a coincidere (Pettrini et al., 2004).

La metodologia di seguito illustrata segue la formulazione del cosiddetto “metodo dello spettro di capacità” (Fajfar, 2000), introdotto precedentemente da Freeman (Freeman, 1998).

Il metodo dello spettro di capacità, nella sua formulazione originale, è stato adottato dalla normativa statunitense ATC 40, mentre la versione presentata nella norma italiana deriva, con alcune correzioni in particolare per gli edifici in muratura, da quella contenuta nella nuova versione dell'Eurocodice 8, secondo l'impostazione di Fajfar.

Partendo dai due spettri di risposta di spostamento e accelerazione, illustrati in Figura 3.2 (a) e (b) (come già osservato in precedenza si tratta in realtà di una pseudo-accelerazione) è possibile costruire un unico diagramma rappresentativo della domanda del sisma. Tale diagramma è impropriamente detto “spettro della domanda”: in ascissa è riportato lo spettro di risposta di spostamento, mentre in ordinata lo spettro di accelerazione; il periodo proprio pertanto non è esplicitamente presente. Ciononostante i differenti periodi identificano un fascio proprio di rette con centro nell'origine del riferimento cartesiano, Figura 3.2 (c).

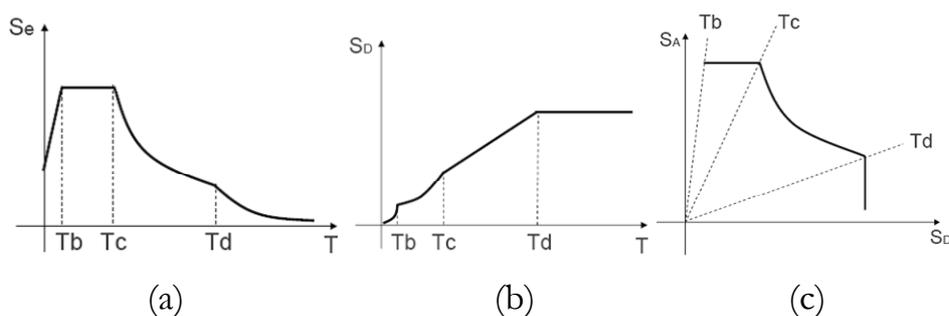


Figura 3.2 – Spettri elastici di accelerazione (a), spostamento (b) e spettro di domanda nel piano S_D - S_A (c)

Gli spettri sono solitamente definiti, in base alla tipologia di suolo, attraverso ordinate corrispondenti ad alcuni valori di periodo, che definiscono la forma della curva.

Come si può notare dalla Figura 3.2(c), apparentemente scompare una dipendenza esplicita dal periodo o dalla frequenza (per questo motivo la definizione di “spettro” è impropria), ma i punti a uguale periodo si trovano allineati su rette passanti per l'origine degli assi, secondo l'espressione:

$$S_A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot S_D \quad (3.1)$$

Sullo stesso piano (S_D , S_A) è possibile rappresentare lo “spettro di capacità” della struttura, convertendo opportunamente i valori di forza (somma delle reazioni vincolari nella direzione considerata) e spostamento (spostamento orizzontale nella direzione considerata di un punto della struttura) ottenuti dall'analisi.

La curva di capacità forza-spostamento è il risultato dell'analisi statica non lineare su una struttura a più gradi di libertà, su cui, ai diversi piani dell'edificio, sono applicate delle forze orizzontali proporzionali ad una prefissata distribuzione (ad esempio possono essere proporzionali alle masse). L'analisi in particolare per le strutture in muratura, non è semplicemente un'analisi statica incrementale: si tratta di un'analisi “a spinta” (analisi pushover) cioè in grado di seguire la capacità di spostamento della struttura anche dopo il raggiungimento della resistenza massima. Infatti l'algoritmo, impone il progressivo incremento dello spostamento di un nodo di riferimento garantendo un fissato rapporto fra le forze degli altri nodi.

Ad ulteriore semplificazione della curva pushover, ottenuta per punti, e nell'ottica di voler rappresentare un oscillatore elastoplastico SDOF (Shibata & Sozen, 1976), si può riassumere la

curva con un andamento bilineare. È in tal modo evidente il tratto elastico iniziale ed il tratto degradato successivo, come illustrato nella Figura 3.3.

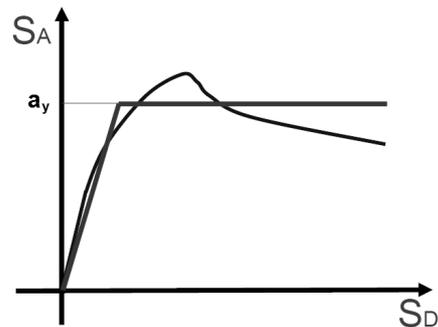


Figura 3.3 - Curva di capacità nel piano S_D - S_A

Dal confronto tra capacità e domanda, ovvero dall'intersezione tra lo spettro di capacità e quello della domanda, è possibile determinare le prestazioni richieste alla struttura dalla sollecitazione sismica di progetto. È bene notare, tuttavia, che la domanda deve essere ridotta quando, per effetto dell'entrata in campo non lineare, la struttura è maggiormente in grado di dissipare energia. La riduzione degli spettri della domanda può essere effettuata secondo due distinti approcci: utilizzando un coefficiente di smorzamento viscoso equivalente incrementato per tener conto dell'energia dissipata per isteresi (spettro di risposta elastico sovrasmorzato); utilizzando fattori di riduzione delle ordinate spettrali dipendenti dalla duttilità globale (spettro di risposta anelastico).

3.2.1 Spettri di risposta della domanda

Come si è accennato, le strutture che presentano una resistenza alle azioni orizzontali inferiore alla massima sollecitazione elastica dovuta al sisma, hanno una risposta caratterizzata dal superamento

del limite elastico: gli edifici, cioè, si danneggiano e per sopportare l'eccitazione sismica fanno affidamento non più sulla resistenza, ma sulla loro capacità di deformarsi in campo non lineare.

Al comportamento duttile, che emerge da un'analisi statica allorché si instaura un meccanismo di collasso, è però associato, per la natura dinamica ed alternata dell'azione sismica, un comportamento ciclico isteretico: una parte dell'energia trasmessa dal sisma alla struttura viene dunque assorbita da questo fenomeno dissipativo. L'effetto dell'energia dissipata nei cicli di isteresi viene in genere quantificato riducendo le ordinate degli spettri di risposta di accelerazione e spostamento. Ad esempio, gli spettri di progetto proposti dalle NTC 2008, al punto 3.2.3, attraverso l'introduzione del coefficiente di struttura, sono basati su questo tipo di considerazioni.

Si noti che la riduzione della domanda del terremoto avviene sulla base delle proprietà post-elastiche della struttura che si sta analizzando, cioè dalla sua curva di capacità ottenuta con l'analisi pushover, e non invece da un preassegnato valore valido per un'intera tipologia strutturale.

Gli spettri di risposta elastici in accelerazione e spostamento di un terremoto rappresentano, come noto, la domanda di massima accelerazione assoluta e massimo spostamento relativo per sistemi ad un grado di libertà con legame indefinitamente elastico lineare, caratterizzati da uguale smorzamento viscoso e periodo proprio di vibrazione variabile.

Se, però, l'ipotesi di struttura elastica lineare viene sostituita da quella di struttura con legame bilineare elastico perfettamente plastico e se il terremoto è tale da portare a superare il limite di elasticità, la massima accelerazione strutturale risulta, invece, proporzionale alla resistenza, attraverso la massa:

$$a_y = \frac{F_y}{m} \quad (3.2)$$

Per effetto del superamento del limite elastico varia, a seconda del periodo di vibrazione iniziale, la domanda di spostamento relativo massimo, cioè di duttilità: per sistemi flessibili ($T \geq T_C$), si ha che lo spostamento massimo indotto dal terremoto, corrisponde all'incirca a quello di un sistema elastico lineare, mentre, per sistemi mediamente rigidi ($T < T_C$), la duttilità richiesta è ottenuta generalmente con il criterio dell'uguaglianza dell'energia.

Si ha, dunque, in generale:

$$\begin{cases} \mu_R = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{S_e(T)}{a_y} \right)^2 \right], & T < T_C \\ \mu_R = \frac{S_e(T)}{a_y}, & T \geq T_C \end{cases} \quad (3.3)$$

La NTC 2008 (punto C7.3.4.1) recepisce la trattazione di Fajfar (2000) esprimendo la domanda di duttilità mediante:

$$\begin{cases} \mu_R = 1 + (q^* - 1) \frac{T}{T_C}, & T < T_C \\ \mu_R = q^*, & T \geq T_C \end{cases} \quad (3.4)$$

dove il termine

$$q^* = \frac{S_e(T)}{a_y} = \frac{S_e(T)m}{F_y} \quad (3.5)$$

rappresenta una sorta di fattore di struttura.

In termini di spostamento massimo si ha, perciò:

$$\begin{cases} d_{\max} = \frac{d_e}{q^*} \left[1 + (q^* - 1) \frac{T}{T_C} \right], & T < T_C \\ d_{\max} = d_e, & T \geq T_C \end{cases} \quad (3.6)$$

con

$$d_e = S_{De}(T) = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 S_e(T) \quad (3.7)$$

Con questo approccio è pertanto possibile calcolare la massima domanda di spostamento attesa per effetto dell'azione sismica di progetto, rappresentata dallo spettro di risposta elastico, per un sistema bilineare ad un grado di libertà caratterizzato dal periodo di vibrazione elastico T e accelerazione resistente a_y (Figura 3.3).

Lo spostamento massimo indotto dal sisma di progetto può essere confrontato, in fase di verifica, con la capacità di spostamento corrispondente allo stato limite in esame. La duttilità disponibile può tuttavia essere un dato progettuale ed essa può essere utilizzata per la determinazione di altri parametri come ad esempio il valore di a_y . In altre parole invertendo le relazioni precedenti si possono definire fattori di riduzione degli spettri di risposta elastici in funzione della duttilità (Fajfar, 2000):

$$\begin{cases} R(\mu, T) = 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_C}, & T < T_C \\ R(\mu, T) = \mu, & T \geq T_C \end{cases} \quad (3.8)$$

Di conseguenza gli spettri di risposta ridotti detti appunto "spettri anelasti a duttilità costante", possono essere così ottenuti a partire dagli spettri di risposta elastici:

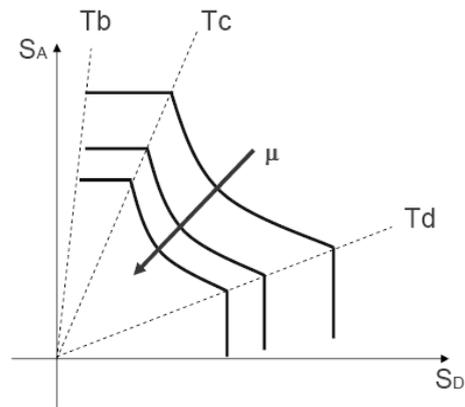


Figura 3.4 – Spettri di risposta anelastici a duttilità costante nel piano (S_D, S_A).

$$S_a(T, \mu) = \frac{S_e(T)}{R(\mu, T)} \quad (3.9)$$

$$S_{Da}(T, \mu) = \frac{\mu}{R(\mu, T)} S_{De}(T) = \mu \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 S_a(T, \mu)$$

in cui, con $S_a(T, \mu)$ e $S_{Da}(T, \mu)$, si intendono rispettivamente gli spettri di risposta anelastici di accelerazione e spostamento.

In alternativa all'approccio descritto in precedenza, è possibile tener conto della maggiore dissipazione di energia dovuta alla risposta elastoplastica definendo un valore di smorzamento viscoso equivalente che surroggi la dissipazione di energia legata al comportamento isteretico.

3.2.2 Curva di capacità e valutazione dello spostamento massimo

Come già accennato, il prodotto dell'analisi statica non lineare è la cosiddetta "curva di capacità". Attraverso la curva di capacità, ottenuta, prima, in termini di taglio alla base-spostamento in

sommità e, poi convertita in accelerazione-spostamento, si ha la descrizione del comportamento post-elastico della struttura intesa come un sistema non lineare equivalente ad un grado di libertà.

La curva di capacità si ottiene come risultato di un'analisi pushover, eseguita su un modello meccanico rappresentativo della struttura dell'edificio: la modellazione deve riprodurre la geometria delle pareti e tenere conto dell'effetto di collegamento, ripartizione ed irrigidimento degli orizzontamenti.

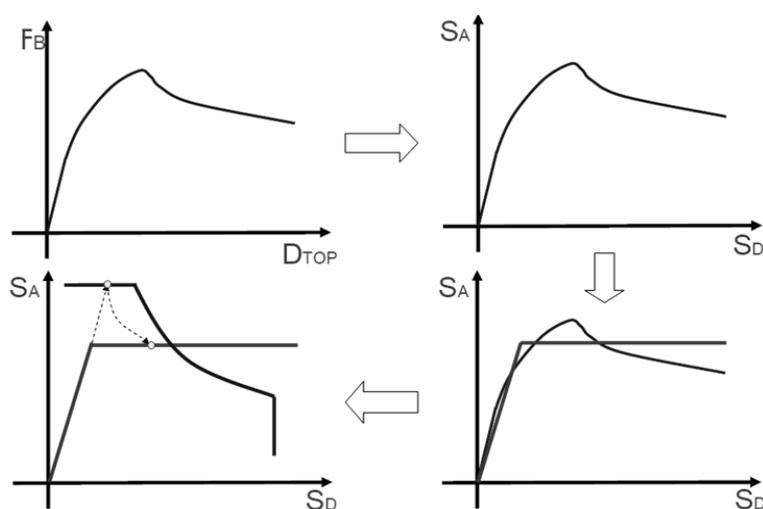


Figura 3.5 – Processo logico per ottenere il punto di massimo spostamento coerente con lo spettro considerato (performance point).

La descrizione del comportamento strutturale attraverso la curva di capacità, sottintende l'ipotesi che la struttura sviluppi una risposta sismica complessiva: l'attenzione ai particolari costruttivi, quali ad esempio i collegamenti tra pareti e tra pareti e solai o i limiti di snellezza trasversale (spessori minimi) delle pareti stesse, fanno sì che si instauri un meccanismo di risposta globale e che le singole pareti collaborino alla risposta sulla base della rigidezza e resistenza nel proprio piano, analogamente a sistemi di controvento verticali

resi collaboranti da irrigidimenti di piano costituiti dai solai. In altre parole, cioè, si ipotizza che l'attivazione di meccanismi di danno locali, quali ad esempio il ribaltamento fuori piano di pareti o porzioni di pareti, non possa avvenire prima dell'instaurarsi di una risposta globale legata al comportamento delle pareti nel piano. Le verifiche locali per azioni ortogonali al piano delle pareti devono comunque essere effettuate.

L'analisi statica non lineare prevede di poter individuare lo spostamento massimo a seguito di un evento dinamico di spettro noto mediante l'intersezione fra la curva di capacità e lo spettro opportunamente modificato per tener conto delle non linearità (di seguito si farà riferimento al metodo degli spettri anelastici).

Si illustra brevemente il procedimento secondo la formulazione inserita nelle NTC 2008 (punto 7.3.4.1, coerentemente con quanto esposto da Fajfar) e rivista in modo da effettuare direttamente il calcolo dello spostamento a partire da uno spettro di accelerazione:

a) in primo luogo si determina, per la struttura in esame con le masse applicate, il vettore Φ rappresentativo del primo modo di vibrare che viene determinato analizzando le oscillazioni libere della struttura, ovvero in assenza di smorzamento e di forzanti;

b) si calcola il coefficiente di partecipazione modale e la massa partecipante al primo modo mediante le seguenti relazioni:

$$\Gamma = \frac{\sum_i m_i \Phi_i}{\sum_i m_i \Phi_i^2} \quad (3.10)$$

$$m^* = \sum_i m_i \Phi_i \quad (3.11)$$

c) si determina la curva di capacità del sistema SDOF equivalente dividendo sia le forze, sia gli spostamenti per il fattore Γ di partecipazione modale del primo modo;

d) si valuta la rigidità k^* del sistema bilineare tracciando la secante alla curva nel punto corrispondente al 60% del taglio massimo;

e) si valuta lo spostamento ultimo del sistema bilineare equivalente come quello ottenuto in fase degradante in corrispondenza di un degrado di F_{bu} che sia $\leq 0.20 F_{bu}$ (punto C7.8.1.5.4, per le costruzioni di muratura);

f) note rigidità iniziale elastica e spostamento ultimo, in base all'uguaglianza delle aree, si ottiene la curva bilineare equivalente;

g) si calcola infine il periodo di vibrazione del sistema bilineare equivalente come segue:

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} \quad (3.12)$$

h) tramite la (3.6) con il valore di T^* calcolato al punto precedente, si determina il massimo spostamento d_{\max}^* richiesto al sistema equivalente normalizzato (performance point);

i) si converte la risposta del sistema equivalente ad un grado di libertà in quella effettiva dell'edificio, per il quale si valuta, in definitiva, la seguente domanda di spostamento:

$$d_{\max} = \Gamma \cdot d_{\max}^* \quad (3.13)$$

Una volta trovata la domanda in termini di spostamento d_{\max} per lo stato limite in esame si verifica che sia $d_{\max} \leq d_u$ e si procede alla verifica della compatibilità degli spostamenti per gli

elementi/meccanismi duttili e delle resistenze per gli elementi/meccanismi fragili.

3.2.3 Distribuzioni di forze

Il funzionamento del metodo si basa sull'assunzione che, attraverso un'analisi pushover, si possa individuare il comportamento di un oscillatore elastoplastico SDOF equivalente al sistema di partenza. Tuttavia la distribuzione di forze non è univoca e la stessa normativa ne propone due tipologie da usarsi contemporaneamente.

Al punto 7.3.4.1 le NTC 2008 riportano infatti:

“Si devono considerare almeno due distribuzioni di forze d'inerzia, ricadenti l'una nelle distribuzioni principali (Gruppo 1) e l'altra nelle distribuzioni secondarie (Gruppo 2) appresso illustrate.

Gruppo 1 - Distribuzioni principali

- *distribuzione proporzionale alle forze statiche di cui al § 7.3.3.2, applicabile solo se il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata ha una partecipazione di massa non inferiore al 75% ed a condizione di utilizzare come seconda distribuzione la 2 a);*

- *distribuzione corrispondente ad una distribuzione di accelerazioni proporzionale alla forma del modo di vibrare, applicabile solo se il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata ha una partecipazione di massa non inferiore al 75%;*

- *distribuzione corrispondente alla distribuzione dei tagli di piano calcolati in un'analisi dinamica lineare, applicabile solo se il periodo fondamentale della struttura è superiore a T_C .*

Gruppo 2 - Distribuzioni secondarie

a) *distribuzione uniforme di forze, da intendersi come derivata da una distribuzione uniforme di accelerazioni lungo l'altezza della costruzione;*

b) distribuzione adattiva, che cambia al crescere dello spostamento del punto di controllo in funzione della plasticizzazione della struttura.”

L'idea alla base è che la distribuzione debba essere tale da evidenziare i meccanismi di danno riscontrabili nelle analisi dinamiche: una distribuzione coerente con la prima forma modale può essere una buona approssimazione. Le norme tendono a sostituire questa forma con la sua approssimazione triangolare, proporzionale alla massa ed all'altezza dell'edificio. Altra distribuzione di riferimento è un andamento proporzionale alle masse in modo da cogliere meccanismi di collasso che interessino i livelli inferiori: infatti, se in fase elastica è lecito aspettarsi una risposta più simile alla modale, ovvero la struttura “filtrerà” il sisma amplificandone gli effetti sulle porzioni più alte, col progredire del degrado l'azione del sisma può localizzarsi nelle porzioni inferiori, portando a collasso il piano terreno.

Ovviamente, partendo da due distribuzioni distinte, si ottengono risultati potenzialmente differenti, e tanto più alto sarà l'edificio tanto più si discosteranno. Per ovviare a questi problemi sono state proposte “distribuzioni adattive”, capaci di prendere in considerazione, ad ogni passo di analisi, la reale rigidezza dell'edificio, ricalcolando i rapporti di forza utilizzati, ovvero ricalcolando ad ogni passo gli autovettori sulla base della rigidezza degradata corrente, in modo da arrivare all'attivazione del meccanismo di collasso più probabile.

3.3 MODELLAZIONE A TELAIO EQUIVALENTE SECONDO NTC 2008

Le NTC 2008 riportano al punto 7.8.1.5 le possibili modalità di modellazione degli edifici in muratura.

Con riferimento alle analisi statiche lineari la norma precisa al 7.8.1.5.2:

“[...] Le rigidezze degli elementi murari debbono essere calcolate considerando sia il contributo flessionale sia quello tagliante. L'utilizzo di rigidezze fessurate è da preferirsi; in assenza di valutazioni più accurate le rigidezze fessurate possono essere assunte pari alla metà di quelle non fessurate.

Nell'ipotesi di infinita rigidezza nel piano dei solai, il modello può essere costituito dai soli elementi murari continui dalle fondazioni alla sommità, collegati ai soli fini traslazionali alle quote dei solai.

*In alternativa, gli elementi di accoppiamento fra pareti diverse, quali travi o cordoli in cemento armato e travi in muratura (qualora efficacemente ammorsate alle pareti), possono essere considerati nel modello, a condizione che le verifiche di sicurezza vengano effettuate anche su tali elementi. Per gli elementi di accoppiamento in muratura si seguono i criteri di verifica di cui ai §§ 7.8.1.6, 7.8.2.2 e 7.8.3.2. Possono essere considerate nel modello travi di accoppiamento in muratura ordinaria solo se sorrette da un cordolo di piano o da un architrave resistente a flessione efficacemente ammorsato alle estremità. Per elementi di accoppiamento in cemento armato si seguono i criteri di cui al § 7.4.4.6, considerando efficaci per l'accoppiamento elementi aventi altezza almeno pari allo spessore del solaio. In presenza di elementi di accoppiamento l'analisi può essere effettuata utilizzando **modelli a telaio**, in cui le parti di intersezione tra elementi verticali e orizzontali possono essere considerate infinitamente rigide [...].”*

L'uso dei modelli a telaio equivalente è quindi suggerito dalla norma nell'ambito delle analisi statiche non lineari al punto 7.8.1.5.2:

L'analisi statica non lineare è applicabile agli edifici in muratura anche nei casi in cui la massa partecipante del primo modo di vibrare sia inferiore al 75% della massa totale ma comunque superiore al 60%.

Il modello geometrico della struttura può essere conforme a quanto indicato nel caso di analisi statica lineare ovvero essere ottenuto utilizzando modelli più sofisticati purché idonei e adeguatamente documentati.

I pannelli murari possono essere caratterizzati da un comportamento bilineare elastico perfettamente plastico, con resistenza equivalente al limite elastico e spostamenti al limite elastico e ultimo definiti per mezzo della risposta flessionale o a taglio di cui ai §§ 7.8.2.2 e 7.8.3.2. Gli elementi lineari in c.a. (cordoli, travi di accoppiamento) possono essere caratterizzati da un comportamento bilineare elastico perfettamente plastico, con resistenza equivalente al limite elastico e spostamenti al limite elastico e ultimo definiti per mezzo della risposta flessionale o a taglio.

Dall'analisi del precedente estratto della norma tecnica, è pertanto evidente che l'analisi statica non lineare rappresenti, anche nell'ottica del legislatore, la metodologia di analisi più generale, dal momento che può essere applicata con limitazioni meno stringenti (rispetto alla statica lineare) in termini di massa partecipante del primo modo di vibrare. La norma peraltro ammette esplicitamente la possibilità di adottare modelli a telaio equivalente, e suggerisce alcuni possibili legami costitutivi per i pannelli rigorosamente non lineari (benché semplificati), lasciando aperta al contempo la possibilità di servirsi di modelli più complessi se di comprovata affidabilità.

È evidente pertanto dalla disamina fin qui svolta che i modelli a telaio equivalenti effettivamente rappresentino una concreta possibilità per la pratica ingegneristica professionale. Come si è già accennato nel capitolo 1, è convinzione dello scrivente che tali modelli uniscano ad una certa efficacia nella precisione della risposta strutturale, una ragionevole semplicità di calcolo ed un costo-macchina vantaggioso, e pertanto meritano una profonda investigazione da parte del mondo accademico.

3.4 MECCANISMI DI COLLASSO DI I E II MODO

Come si è avuto modo ampiamente di discutere, la muratura è un “materiale” fortemente eterogeneo, caratterizzato da un legame costitutivo dalle spiccate caratteristiche non lineari già per valori relativamente bassi della deformazione.

A ciò si aggiungono una serie di altri aspetti, quali la fragilità a trazione, l’apertura (ed eventuale chiusura in ambito ciclico) di fessure, la resistenza a taglio di natura attritiva, i meccanismi di degrado della resistenza e così via, tutte caratteristiche che comportano necessariamente l’esigenza di adottare analisi non lineari.

Si sottolinea che, salvo i brevi aspetti di modellazione accurata esposti nel precedente capitolo, nell’ambito del presente contributo si focalizza l’attenzione sui soli meccanismi di danno classificabili di “II modo” (Como & Grimaldi, 1986).

Si fa pertanto esplicito riferimento ad un comportamento scatolare dell’edificio (Figura 3.6), tale che le pareti rispondano all’azione sismica nel proprio piano medio, il che presuppone l’affidabilità dei collegamenti reciproci tra pareti ortogonali e tra pareti ed orizzontamenti. Si esula quindi dal trattare i meccanismi di “I modo” (Giuffré, 1993), ossia in generale le problematiche connesse al ribaltamento di montanti murari o porzioni di parete (Figura 3.7).

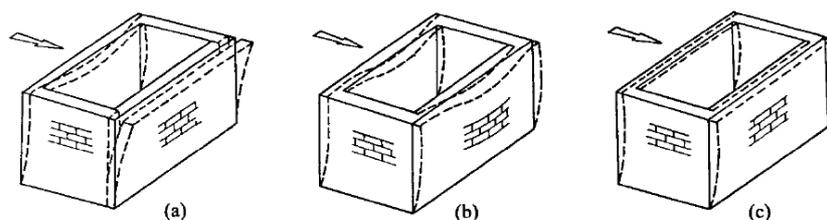


Figura 1.1

- (a) pareti non vincolate o ammorsate; (b) pareti ammorsate con orizzontamenti flessibili;
 (c) pareti ammorsate con orizzontamenti rigidi.

Figura 3.6 – Comportamento delle pareti della scatola muraria in relazione al grado di ammorsamento

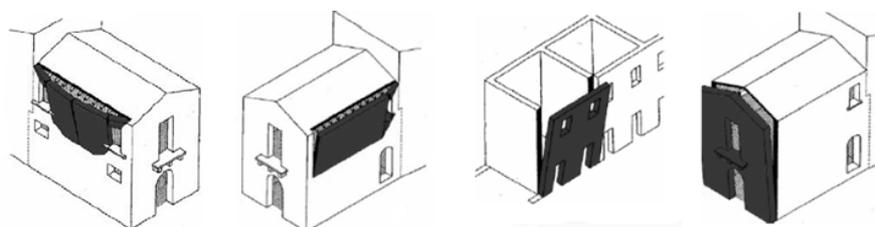


Figura 3.7 – Alcuni tipici meccanismi di ribaltamento caratteristici di porzioni di parete o di pareti intere

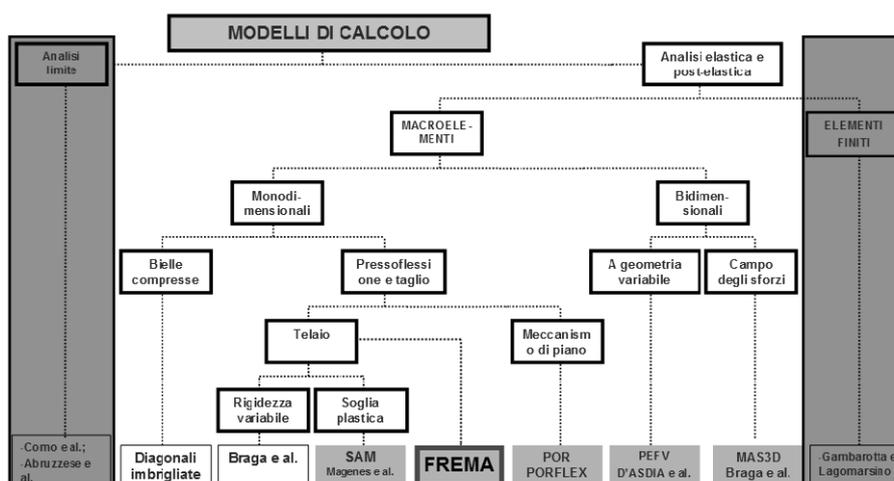


Figura 3.8 – Schema sintetico riassuntivo dei principali modelli semplificati oggetto di questo capitolo

La verifica di tali meccanismi, che peraltro rappresentano un aspetto cruciale nella valutazione della vulnerabilità di edifici in muratura, viene affrontata attraverso analisi cinematiche che non costituiscono oggetto di questo lavoro. Si ribadisce dunque, che l'analisi globale di un edificio, e quindi la possibilità dell'analisi nel

piano per singola parete, assume significato quando tutti i meccanismi di rottura per ribaltamento fuori piano sono prevenuti da opportuni dettagli strutturali quali la presenza di catene e/o cordoli.

Lo scopo del presente capitolo è di passare brevemente in rassegna le principali metodologie di analisi storicamente adottate per le murature, unitamente ai principali modelli semplificati proposti negli ultimi anni, sinteticamente riassunti nello schema di Figura 3.8.

3.5 L'ANALISI LIMITE

I metodi basati sull'analisi limite rappresentano un interessante specchio dell'evoluzione della storia della Scienza delle Costruzioni. L'analisi limite, infatti, è stato il banco di prova di numerosi pensatori, generalmente interessati, a partire dalla fine del XVIII secolo, alla valutazione della statica di archi e volte (Figura 3.9)

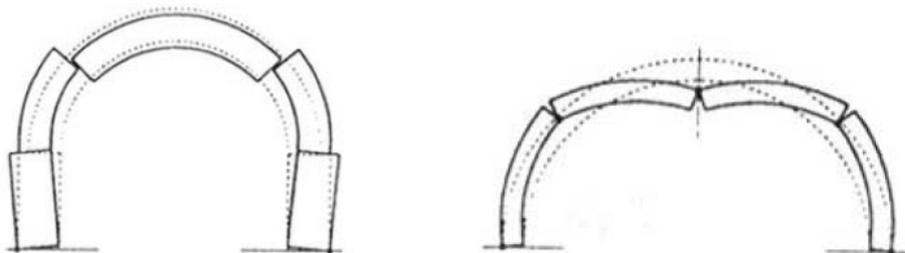


Figura 3.9 - Meccanismi di collasso dell'arco in muratura secondo De la Hire (a sinistra) e secondo Poncelet (a destra)

Un'interessante trattazione degli aspetti storici ed evolutivi della materia è esposta in (Calderini, 2004) in cui vengono brevemente illustrati i risultati conseguiti dagli studiosi che maggiormente hanno segnato lo sviluppo dei modelli di analisi

limite: da De La Hire e Couplet (fine XVIII sec.) a Coulomb, da Mery fino ad arrivare ad Heymann.

Grazie alle ipotesi di non resistenza a trazione e, in genere, di infinita resistenza a compressione, è possibile ricondurre la parete in muratura ad una catena cinematica di corpi rigidi, in cui la configurazione del sistema è funzione di un'unica coordinata lagrangiana. Ipotizzato il cinematismo il sistema presenta un solo grado di libertà equivalente, ed è possibile calcolare il moltiplicatore statico dei carichi in corrispondenza della soglia di attivazione del meccanismo.

Tale moltiplicatore rappresenterebbe, sotto l'ipotesi di comportamento perfettamente rigido sino all'attivazione, il valore in unità di g dell'accelerazione orizzontale di collasso associata a quel particolare meccanismo di collasso.

Per i meccanismi di primo modo questo metodo porta a valutazioni accettabili della vulnerabilità (in particolare nella valutazione dell'efficacia di interventi di miglioramento sismico). Per i meccanismi di secondo modo, invece, il metodo si dimostra eccessivamente cautelativo, riuscendo a cogliere solamente un limite inferiore di resistenza residua per la parete associata ai meccanismi di ribaltamento.

L'analisi limite si sofferma sul calcolo del carico di collasso e del relativo meccanismo associato (Figura 3.10), tralasciando la deformabilità della struttura in fase elastica e post-elastica, in quanto si riconduce, in sostanza, ad uno studio di equilibri e cinematismi di corpi rigidi.

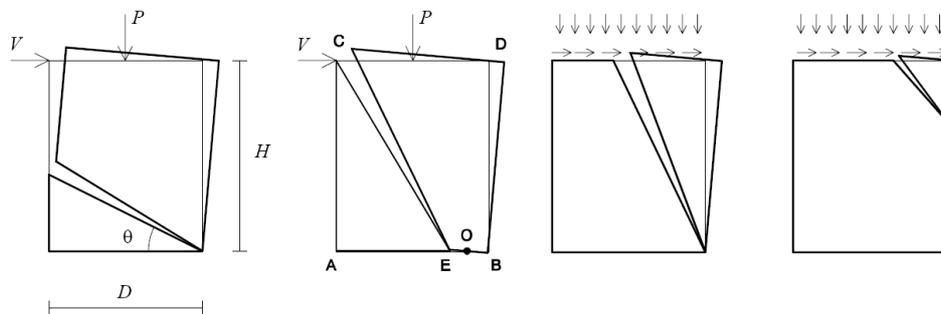


Figura 3.10 – Cinematismi di collasso del maschio murario (Come & Grimaldi, 1986)

Applicazioni di questo metodo a cinematismi complessi si sono tuttavia dimostrate utili per la valutazione della vulnerabilità e del miglioramento sismico conseguito con interventi di consolidamento. Per particolari classi di edifici, quali l'edilizia ecclesiastica e monumentale, per cui è effettivamente atteso un comportamento per parti, l'applicazione di questa metodologia ad ampie porzioni della costruzione ("macroelementi") assume una valenza rigorosa come guida al progetto di restauro statico.

3.6 I MODELLI BIDIMENSIONALI A MACROELEMENTI

Nei modelli bidimensionali a macroelementi l'intera parete viene modellata mediante elementi macroscopici che presentano caratteristiche simili, tipicamente i maschi, le fasce di piano e i nodi rigidi in corrispondenza delle intersezioni tra maschi e fasce.

In altre parole, l'intera parete viene modellata mediante un assemblaggio di macroelementi connessi opportunamente da blocchi rigidi, realizzando in questo modo dei modelli che, per il limitato numero di gradi di libertà, consentono di ottenere, con modesto onere computazionale, la risposta di una parete sotto azioni orizzontali.

Questa classe di modelli ha come ipotesi fondamentale il comportamento monolatero (o no-tension) del materiale. Tale ipotesi consiste nel ritenere la muratura non resistente a trazione, in ambito generalizzato o soltanto limitato a particolari giaciture (orientate, ad esempio, come i letti di malta).

L'implementazione della condizione di no-tension viene realizzata nei diversi modelli attraverso varie strategie: variando la geometria degli elementi (D'Asdia et al., 1992) al fine di eliminare le zone in trazione; formulando un opportuno campo di tensioni all'interno del pannello (Braga et al., 1990); aggiornando direttamente la rigidità degli elementi.

Tipicamente, nella classe di modelli analizzata, nelle zone compresse (reagenti) degli elementi vengono mantenute delle relazioni costitutive di tipo elastico lineare. Per tener conto di eventuali meccanismi di rottura, quali ad esempio quelli legati al *crushing* della muratura compressa, è quindi necessario introdurre specifiche verifiche sui valori massimi delle tensioni di compressione. La rottura a taglio parimenti richiede dei controlli sulle tensioni, in quanto l'ipotesi di comportamento no-tension non è necessariamente cautelativa nei confronti di tali meccanismi.

Tra i modelli a macroelementi si citano tra gli altri il metodo SISV (D'Asdia et al., 1992) ed il Mas3D (Braga et al., 1990) ed il 3Muri (Galasco et al., 2002).

3.6.1 Il metodo SISV

Il metodo SISV (**Setto Inclinato a Sezione Variabile**) si fonda sull'aggiornamento della geometria dei macroelementi nel corso dell'analisi al variare delle zone interessate da tensione. Maschi e fasce vengono modellati attraverso otto elementi finiti di forma triangolari; le zone di nodo sono invece modellate attraverso diciotto elementi finiti triangolari.

In SISV lo schema del modello del singolo pannello verticale è quello mostrato in Figura 3.11: le zone in cui le tensioni verticali risultano di trazione vengono considerate non più collaboranti e quelle compresse vengono schematizzate come un setto (trave) a sezione variabile con asse congiungente i punti medi delle sezioni reagenti di estremità. Data la non linearità del problema, la procedura di calcolo è incrementale al passo con redistribuzione dei carichi tra i diversi pannelli e ri-applicazione al passo successivo dei residui squilibrati.

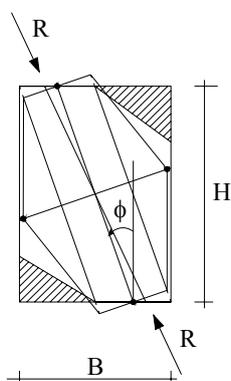


Figura 3.11 – Setto a sezione variabile

L'evoluzione della forma resistente dei pannelli verticali, sotto l'azione dei carichi orizzontali, introduce due indeterminazioni nella valutazione delle rigidezze dei pannelli stessi: in primo luogo le rigidezze assiale e trasversale di un setto inclinato dipendono dalle dimensioni (sezioni resistenti) del setto medesimo, cioè dall'inclinazione del setto resistente all'interno del setto originario ovvero dall'inclinazione della risultante R dei carichi agenti e quindi dalla stessa ripartizione delle forze tra i diversi pannelli, ripartizione che deve essere effettuata a partire da tali rigidezze; in secondo luogo occorre notare come le rigidezze orizzontale e verticale equivalenti di un setto inclinato dipendono, oltre che da quelle

assiale e trasversale, anche dall'angolo d'inclinazione dello spostamento che deve essere effettuato dalla testa del setto stesso, spostamento che deve essere determinato con quelle stesse rigidezze.

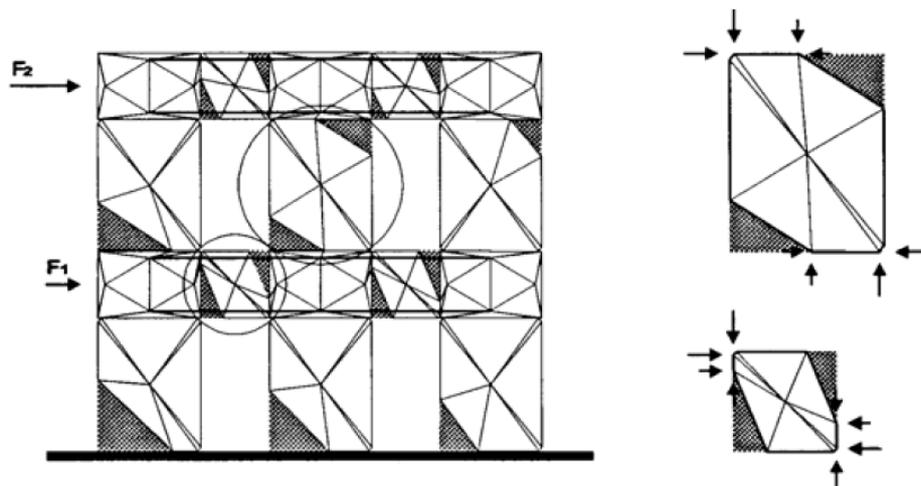


Figura 3.12 – Metodo SISV: Schema della parete sotto carico

La prima indeterminazione viene superata semplicemente impiegando, ad ogni passo, le rigidezze assiale e trasversale ricavabili al termine del passo precedente.

Per la seconda indeterminazione, invece, utilizzare l'angolo di spostamento del passo precedente e utilizzare direttamente le rigidezze verticali e orizzontali equivalenti dei singoli maschi, nella ripartizione dei carichi esterni, porta ad una incontrollabile divergenza del procedimento, nonché ad una mancanza di congruenza tra gli spostamenti dei pannelli di uno stesso piano (è proprio la mancata congruenza ad innescare la divergenza).

In una parete multipiano (Figura 3.12) però, l'ipotesi di fasce rigide consente di analizzare ciascun livello nel suo riferimento locale, dipendendo dai livelli inferiori solo per la sua posizione

rispetto al riferimento globale e dai livelli superiori solo per il carico ed il momento totale agenti su di esso.

Utilizzando quindi al meglio l'ipotesi di fasce rigide, ad ogni passo di carico vengono determinati gli spostamenti (orizzontali e verticali) e le rotazioni di tali fasce, utilizzando in ciascun piano le rigidità risultanti dalla combinazione di quelle di tutti i pannelli verticali presenti. Noti gli spostamenti rigidi delle fasce, vengono trovati gli spostamenti in testa a ciascun pannello, assicurando automaticamente la congruenza; conseguentemente vengono trovate le sollecitazioni e le nuove risultanti dei carichi competenti a ciascun setto, nonché le nuove forme delle parti ancora reagenti e le nuove rigidità assiali e trasversali dei setti inclinati che le schematizzano.

Si rende quindi necessario un ciclo iterativo all'interno di ciascun passo di carico: la componente verticale dello spostamento della fascia è causata dalla reazione dei setti inclinati allo spostamento orizzontale della stessa, ma a sua volta provoca una reazione in direzione orizzontale, da parte degli stessi setti, e così via. La procedura è sempre convergente, grazie alla congruenza intrinsecamente garantita, con una precisione liberamente predefinibile.

Quando non è possibile ipotizzare che le fasce di piano siano più rigide e resistenti dei maschi, si propone il seguente approccio, basato sull'uso di elementi finiti (o meglio, macroelementi) di forma variabile che, essendo specificamente finalizzato all'analisi di pareti multipiano, consente notevoli riduzioni in quanto a modellazione e soluzione, mentre conserva il vantaggio, tipico dei metodi di calcolo agli elementi finiti, di non introdurre alcuna ipotesi circa le rigidità relative e le resistenze degli elementi costituenti la parete.

La discretizzazione dei pannelli murari avviene attraverso un numero limitato di semplici elementi finiti triangolari a deformazione costante, come mostrato in Figura 3.13a nel caso di un pannello, in Figura 3.13b per il nodo rigido (zona di sovrapposizione tra maschio e fascia) e in Figura 3.13c per un'intera parete.

Tali macroelementi sono disposti in modo tale da poter modificare ad ogni passo la forma della parte reagente dei pannelli, escludendo le zone ove la trazione, nella direzione dell'asse del pannello, ha superato il valore limite prefissato.

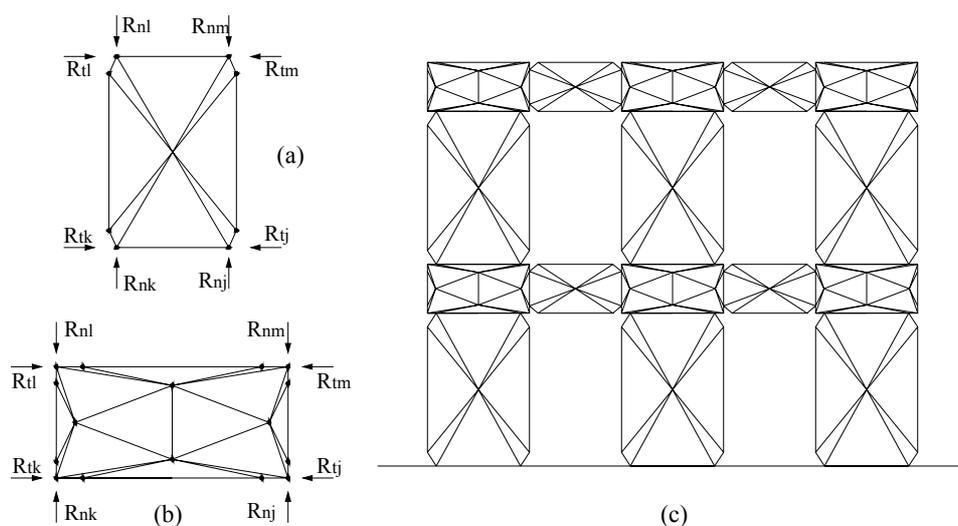


Figura 3.13 – Metodo SISV: a) discretizzazione dell'elemento maschio/fascia; b) discretizzazione dell'elemento nodo; c) assemblaggio dell'intera parete

Infatti, al termine di ogni passo di carico vengono determinate le reazioni nodali in corrispondenza delle sezioni di estremità di ciascun pannello, con le quali si calcola l'equivalente stato di sollecitazione in termini di sforzo normale, taglio e momento flettente delle stesse sezioni, nonché la risultante dei carichi agenti sul pannello. Quindi, sulla base della posizione di quest'ultima nell'attraversare le sezioni trasversali, viene aggiornata la geometria della parte resistente del pannello spostando opportunamente alcuni dei nodi del suo contorno: in particolare, mentre vengono lasciati al loro posto i quattro nodi prossimi alla diagonale compressa, gli altri quattro vengono traslati ciascuno lungo il proprio lato fino al limite della zona ancora assialmente compressa (ovvero sull'asse neutro

nelle sezioni d'estremità) se la resistenza a trazione è supposta nulla Figura 3.14(a) oppure, al limite di una zona assialmente tesa, ma con valori rientranti nella resistenza ipotizzata ammissibile a trazione Figura 3.14(b). Si ottiene in tal modo la configurazione da utilizzare al passo successivo.

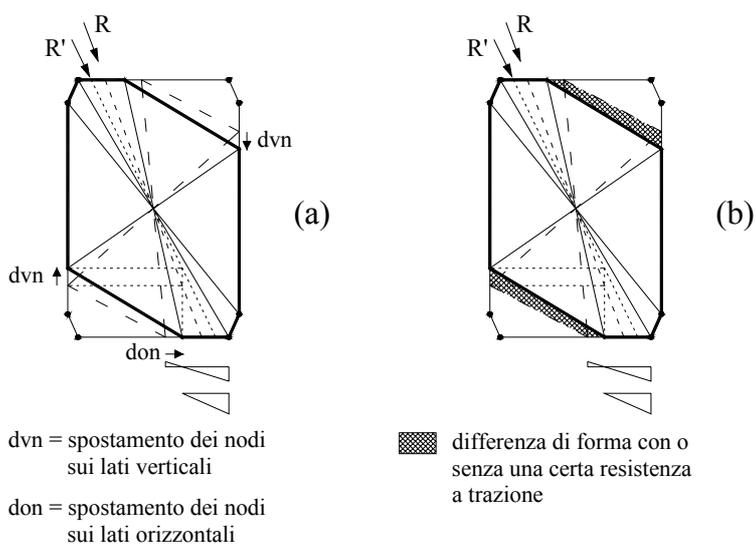


Figura 3.14 - Metodo SISV: Evoluzione del pannello

Si osserva che l'operazione descritta, pur comportando variazioni dello stato tensionale e delle forze nodali, non modifica la risultante all'interfaccia tra pannelli verticali, od orizzontali, e gli elementi di nodo; pertanto non ne modifica le condizioni di equilibrio.

Si può notare che la struttura così modellata, all'incrementarsi delle forze orizzontali, vede ridursi la propria rigidezza flessionale e di taglio, mentre oppone ai carichi una crescente rigidezza assiale, all'interno dei singoli pannelli, manifestando meccanismi resistenti prevalentemente a compressione. Questo è in accordo con il reale comportamento delle strutture murarie, concepite in modo da creare

nel loro ambito situazioni di equilibrio con il solo, o prevalente, apporto delle tensioni di compressione.

3.6.2 Il metodo Mas3D

Il modello Mas3D adopera un macroelemento non reagente a trazione, il cosiddetto pannello a ventaglio multiplo; il comportamento di tale elemento semplifica in modo significativo la reale risposta del materiale, adottando un legame costitutivo lineare in compressione ed introducendo la non resistenza a trazione.

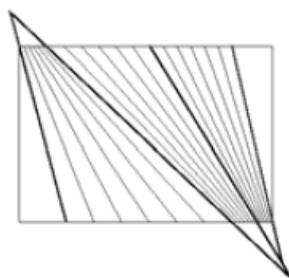


Figura 3.15 – Pannello a ventaglio multiplo implementato in Mas3D

L'elemento pannello è costituito da un insieme di ventagli compressi (Figura 3.15) che soddisfano le seguenti ipotesi di base: (a) le facce terminali sono rigide; (b) è assente qualsiasi interazione tra i lati dei ventagli elementari. Lo stato tensionale del pannello è quindi individuato dalle tensioni radiali all'interno di ogni ventaglio, mentre sono nulle le tensioni tangenziale e circonferenziale. Sotto tali ipotesi vengono facilmente soddisfatte le equazioni di equilibrio e le relazioni costitutive, così come le equazioni cinematiche in direzione radiale; in generale, però, non si possono soddisfare le equazioni cinematiche in direzione tangenziale.

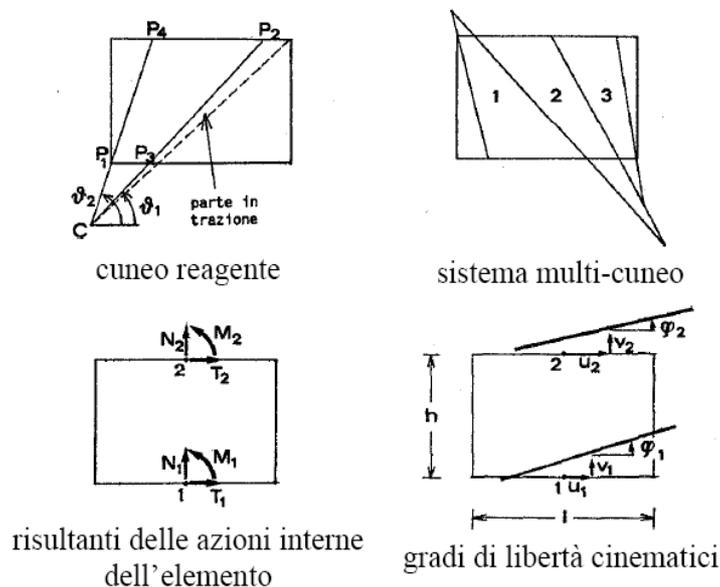


Figura 3.16 – Metodo Mas3D: indicazione dei principali parametri di interesse

Nonostante l'elemento sia basato su una formulazione tensionale, vengono assunte come incognite gli spostamenti nodali che definiscono gli spostamenti e le rotazioni delle facce di estremità. L'elemento finito così messo a punto permette, con un onere computazionale estremamente ridotto, di calcolare direttamente l'energia, le forze e la matrice di rigidezza evitando la procedura di minimizzazione dell'Energia Complementare Totale.

L'elemento pannello, a fronte di una grande semplicità d'uso e di una elevata efficienza in termini di tempo-uomo e di tempo-macchina, necessarie nella comune progettazione, garantisce una modellazione molto efficace del comportamento di intere macrozone di muratura. Confronti con i risultati forniti da modellazioni molto più elaborate ed onerose consentono, infatti, di considerarlo un efficace strumento di calcolo: gli andamenti delle tensioni principali e delle caratteristiche della sollecitazione mostrano un buon accordo con quelli forniti da diverse schematizzazioni.

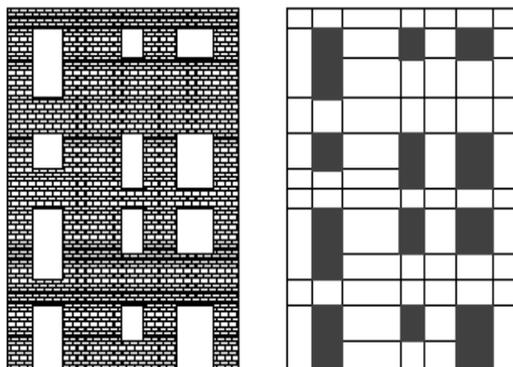


Figura 3.17 – Mas3d: discretizzazione di una parete mediante elementi pannello

La discretizzazione in elementi pannello di strutture in muratura è effettuata per parete e su tutta l'altezza (Figura 3.17); pochi elementi sono, quindi, capaci di modellare la risposta di edifici anche complessi.

3.6.3 Il modello 3Muri

Il modello 3Muri (Galasco et al., 2002) costituisce l'applicazione commerciale (software commercializzato da S.T.A. DATA) del modello a macroelementi proposto dai ricercatori dell'Università di Genova (Gambarotta & Lagomarsino, 1996; Gambarotta & Lagomarsino, 1997a; Gambarotta & Lagomarsino, 1997b). Il modello si distingue da quelli finora citati in quanto, sebbene possa essere utilizzato per l'analisi non lineare statica, mira alla modellazione del comportamento ciclico delle pareti in muratura.

Trattandosi di un modello a macroelementi (Figura 3.18, Figura 3.19) ha quindi il grande pregio di consentire analisi dinamiche con un onere computazionale relativamente ridotto.

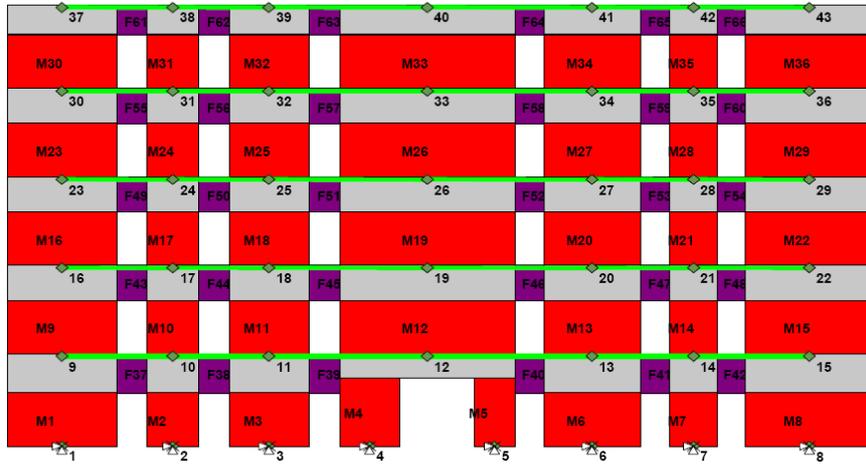


Figura 3.18 – Modello a macroelementi di una parete in 3muri; legenda colori: rosso = maschi; viola = fasce di piano; grigio = nodi rigidi; verde = cordoli in c.a.

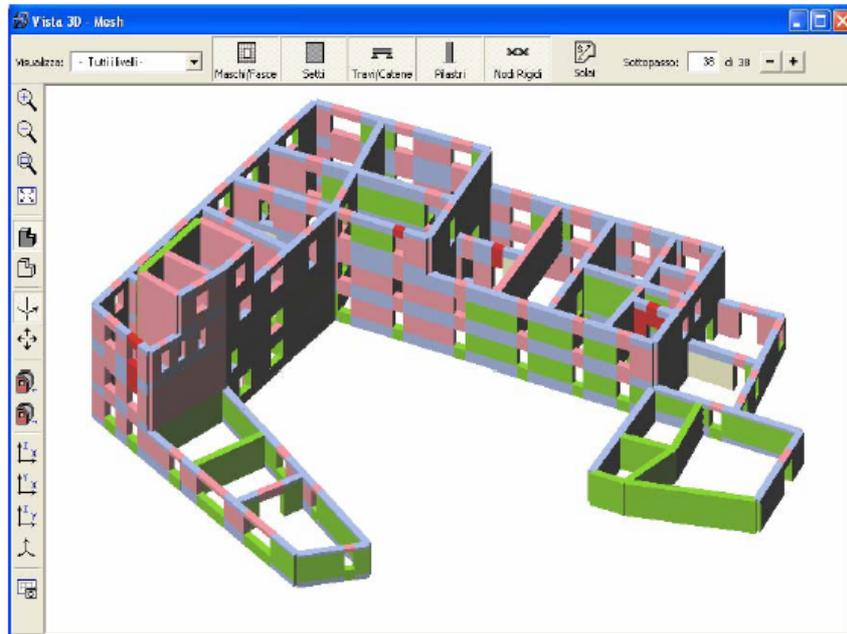


Figura 3.19 – Screenshot del software 3Muri. Modello 3D di un edificio irregolare

In base ai criteri finora discussi, la classificazione del modello non risulta immediata. Di fatto, le grandezze cinematiche e statiche utilizzate per la formulazione dell'elemento consistono in spostamenti e rotazioni nodali e in azioni risultanti M , V , N , che richiamano pertanto i modelli monodimensionali.

L'introduzione tuttavia di gradi di libertà interni all'elemento e di opportune considerazioni sui cinematismi di ribaltamento (rocking) e di taglio-scorrimento (sliding shear failure) conferiscono un carattere di "bidimensionalità" all'elemento, che sembra quindi riprodurre in modo efficace e sintetico le caratteristiche più importanti della risposta non lineare dei pannelli murari.

Citando testualmente il manuale del software in commercio:

"Dall'osservazione di edifici in muratura danneggiati dal sisma, emergono due differenti meccanismi di taglio: rottura per taglio (Figura 3.20a) e rottura per pressoflessione (Figura 3.20b).

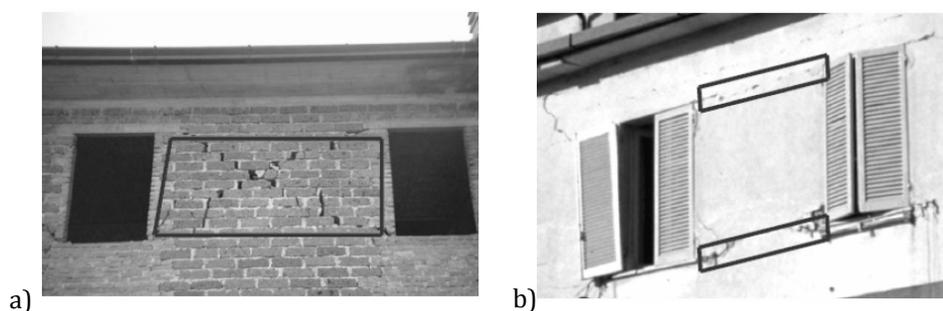


Figura 3.20 – (a) Rottura a taglio; (b) Rottura a flessione di pannelli murari

L'osservazione pratica dei danni sulle strutture esistenti, ha portato alla formulazione del macroelemento muratura come elemento che nella sua parte centrale coglie il comportamento a taglio e che nelle zone periferiche coglie il comportamento a pressoflessione.

Da quanto sopra osservato emerge la formulazione teorica di tale macroelemento."

Il macroelemento (Figura 3.21) viene schematizzato in tre parti: nelle basi inferiore e superiore viene concentrata la deformabilità elastica del maschio (o della fascia) con l'ulteriore ipotesi di contatto monolaterale, cioè efficace solo a compressione; alla parte centrale viene attribuita la deformabilità a taglio.

Di conseguenza la rottura per flessione (rotazione del pannello murario) e la corrispondente componente di deformazione anelastica si realizzano alle estremità, mentre la rottura a taglio e la deformazione angolare interessano il solo modulo centrale del macroelemento. Le condizioni di rottura a taglio sono riferite a grandezze medie che descrivono lo stato di tensione-deformazione dell'intero pannello murario, e quindi non rappresentano condizioni locali sulla singola superficie di discontinuità.

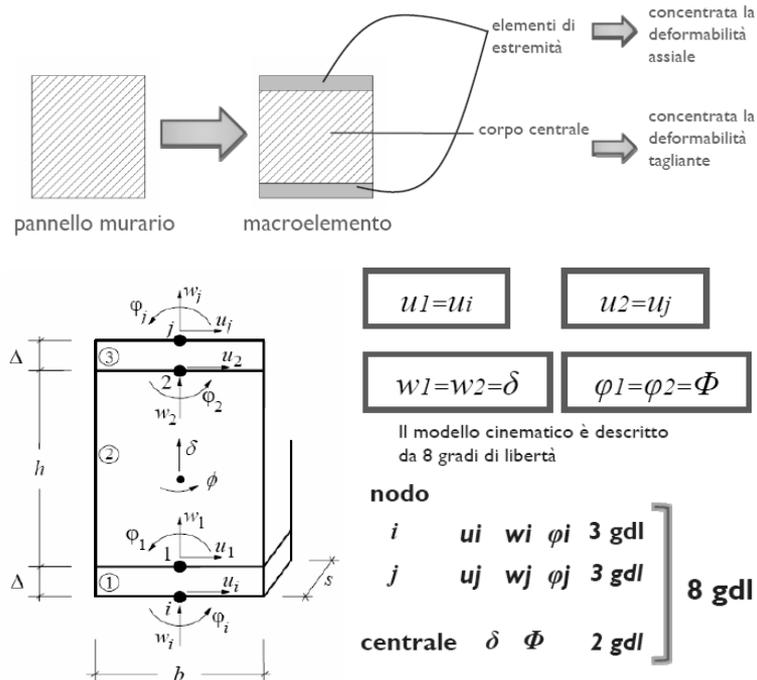


Figura 3.21 – Macroelemento implementato nel codice di calcolo 3muri

3.7 I MODELLI MONODIMENSIONALI

La classe dei modelli 1D assimila il comportamento delle pareti in muratura ad elementi monodimensionali capaci di rappresentare opportune porzioni della parete. Rientrano in questa categoria i modelli a puntone ed i modelli a telaio equivalente, tra i quali spicca, per ragioni storiche, il metodo POR.

3.7.1 I modelli a puntone

Nell'ambito dei modelli a biella o a puntone (Calderoni et al., 1987; Calderoni et al., 1989) si propone di schematizzare la porzione reagente del pannello murario mediante un elemento biella (Figura 3.22, Figura 3.23) la cui inclinazione e rigidità riproducano complessivamente il comportamento globale del pannello. Poiché al crescere della parzializzazione consegue una variazione delle proprietà geometriche della biella equivalente (inclinazioni, dimensioni della sezione), tali metodi sono classificabili come a geometria variabile.

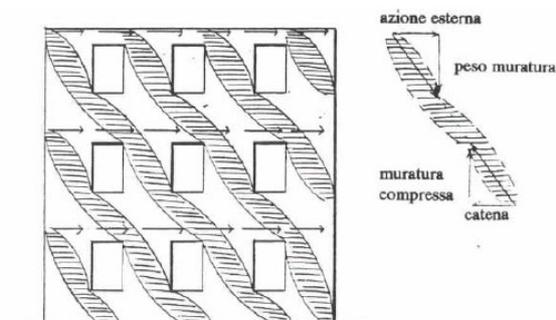


Figura 3.22 - Identificazione fenomenologica delle bielle compresse in una parete investita da sisma

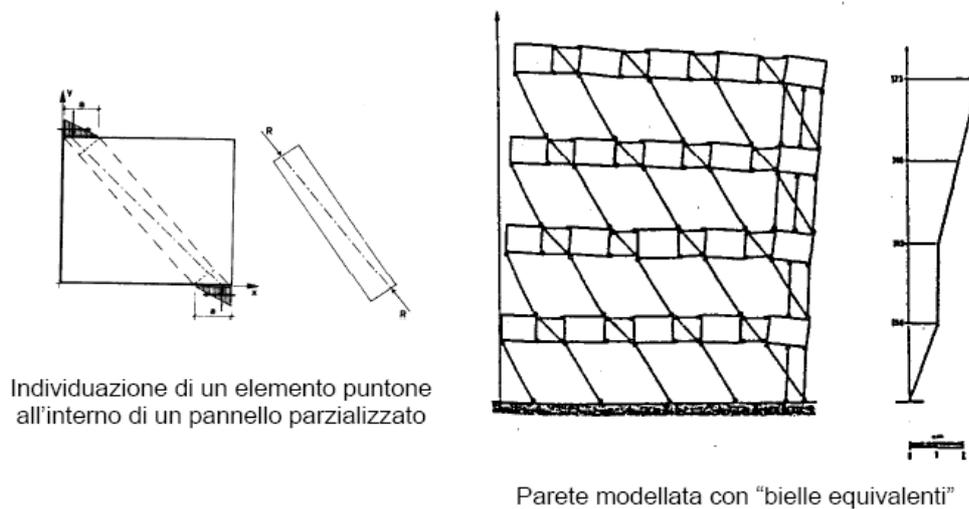


Figura 3.23 – Elementi biella e parete modellata mediante bielle

La crisi dei singoli pannelli è associata al raggiungimento di una configurazione limite di equilibrio oppure alla rottura per compressione del puntone.

3.7.2 I modelli a telaio equivalente: metodo POR

La seconda sottoclasse all'interno dei modelli 1D prevede la schematizzazione della parete mediante elementi lineari del tipo trave con deformazione a taglio (oltre che ovviamente a flessione).

In questo ambito sono stati proposti sia elementi a rigidezza variabile (basata sul calcolo in sezione parzializzata) che elementi a comportamento elastico-perfettamente plastico (Tomaževic, 1978; Dolce, 1989; Tomaževic e Weiss, 1990).

Rientra in questa casistica lo storico modello POR, sviluppato negli anni '70 in Slovenia (Tomaževic, 1978) e caratterizzato dalla modellazione della parete mediante telai alla Grinter e focalizzando l'analisi delle pareti per piano.

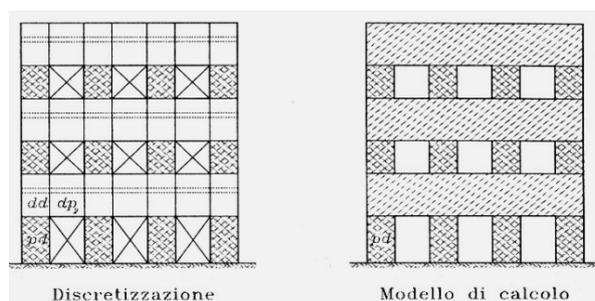


Figura 3.24 – Schema strutturale adottato nel metodo POR

Il modello POR (qui descritto per l'importanza storica che ancora riveste) assume *a priori* una geometria maschio debole-fascia forte (Figura 3.24), e modella il maschio attraverso un legame elasto-plastico con soglia di resistenza specifica del meccanismo di collasso da fessurazione diagonale (Figura 3.25).

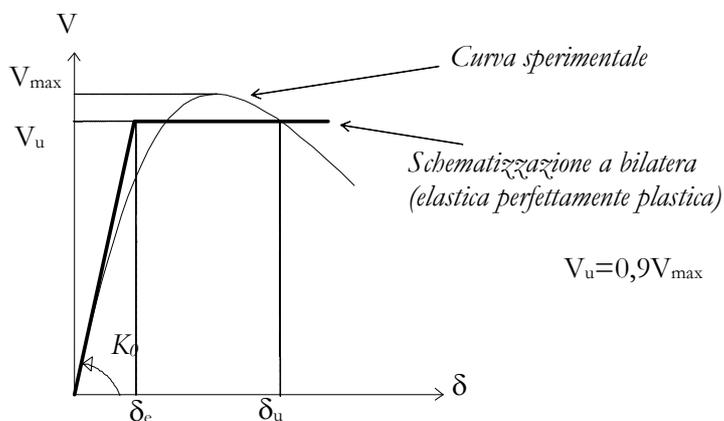


Figura 3.25 – Metodo POR: Legame taglio-spostamento del singolo maschio

Nonostante le forti limitazioni del modello originario (considerare i maschi murari come unica sede di deformazioni e di rotture; ipotizzare un solo possibile meccanismo di rottura dei

maschi murari; trascurare la distribuzione degli sforzi normali nei maschi dovuta al sisma), il metodo POR ha il merito “storico” di aver introdotto una tecnica di analisi non lineare nell’ambito delle strutture in muratura.

L’importanza storica del metodo POR è tale che la normativa tecnica italiana ne introduceva specificamente l’uso negli anni ’80 (Circolare Ministeriale LL. PP. 21745/1981). Nella citata circolare, infatti, una specifica appendice illustrava un esempio applicativo di “*verifica di un edificio in muratura caratterizzato da un comportamento al collasso del tipo taglio*”, e che consisteva appunto nell’applicazione del metodo POR.

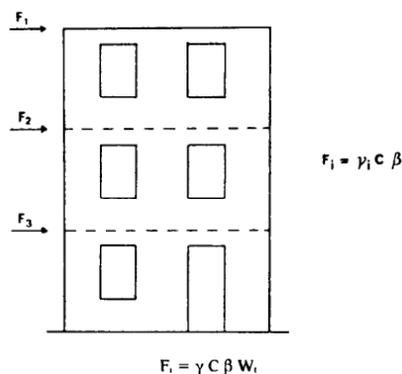


Figura 3.26 – Parete adottata nell’esempio sviluppato nella circ. 21745/1981

Il metodo POR ha rappresentato uno schema estremamente apprezzato dagli ingegneri, poiché illustrava delle procedure di calcolo che, pur adottando un’analisi non lineare (in periodi storici nei quali il calcolo elastico lineare imperava in tutti gli ambiti strutturali), si rivelava relativamente semplice e di efficace applicazione.

È importante riconoscere che il metodo POR proposto nella circolare succitata ha rappresentato il primo ed unico esempio di calcolo sismico di edifici in muratura nel panorama normativo

italiano fino alle più recenti norme tecniche: una finestra temporale davvero ampia che ha consolidato l'applicazione del metodo nell'ambito professionale.

È altrettanto ovvio, però, che un metodo nato negli anni '80 sia ampiamente superato dopo trent'anni di applicazione. Il metodo POR introduce semplificazioni inaccettabili, spesso a svantaggio di statica. Per queste ragioni successive proposte di miglioramento del metodo (Tomazevic & Weiss, 1990) hanno tentato di porvi rimedio, innanzitutto ampliando i meccanismi di collasso contemplati dal metodo originale.

Va detto peraltro che il modello POR, basandosi sul meccanismo di piano, non può prendere in considerazione il problema del calcolo delle sollecitazioni delle fasce (rimuovendo quindi l'ipotesi di infinita resistenza) se non facendo eventualmente ricorso a calcoli approssimati (Braga & Dolce, 1982; Fusier & Vignoli, 1993).

3.7.3 I modelli a telaio equivalente: il SAM

Tra i modelli monodimensionali a telaio equivalente, particolarmente rappresentativo è il metodo SAM (acronimo di **Simplified Analysis of Masonry buildings**), sviluppato presso l'Università di Pavia (Magenes & Calvi, 1996; Magenes & Della Fontana, 1998; Magenes et al., 2000). Questo metodo, nato per l'analisi di pareti multipiano caricate nel proprio piano, è stato successivamente esteso all'analisi di problemi tridimensionali.

Il metodo SAM rappresenta un fondamentale riferimento per questo lavoro di tesi, dal momento che esso condensa in sé gran parte degli aspetti tipici della modellazione a telaio equivalente, che saranno opportunamente richiamati nella descrizione del codice FREMA e di cui pertanto si forniscono adesso solo brevi cenni.

Nel SAM la parete viene suddivisa in elementi (maschi e fasce) e nodi rigidi, rappresentati da opportuni offsets alle estremità degli elementi (Figura 3.27). L'altezza dei maschi è determinata secondo i

criteri proposti in (Dolce, 1989; Dolce, 1991) per tener conto in maniera approssimata della deformabilità delle zone nodali (Figura 3.28), mentre la lunghezza delle fasce è determinata direttamente da quella delle architravi.

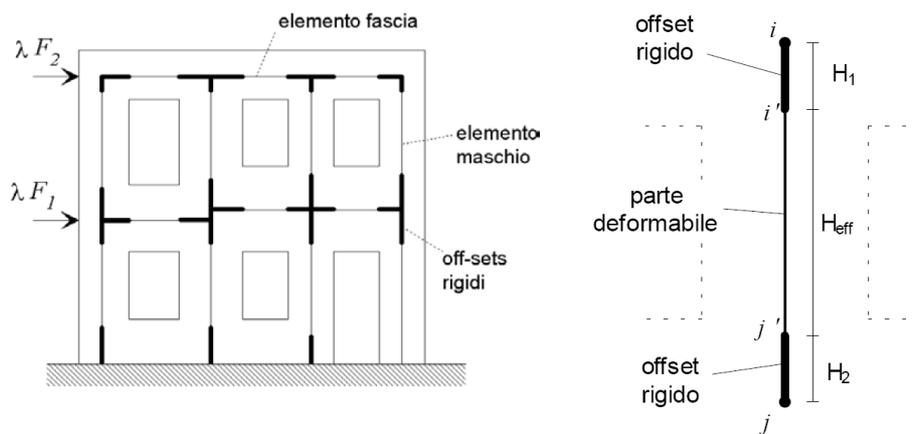


Figura 3.27 - Modello di parete con il metodo SAM e relativo elemento maschio

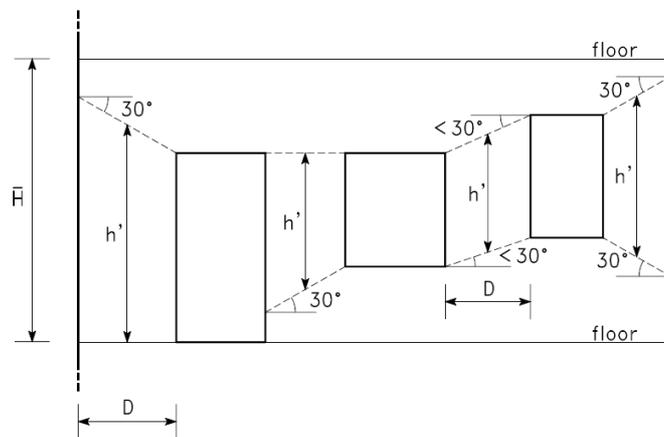


Figura 3.28 - Altezze efficaci dei maschi secondo Dolce (1989, 1991)

Il comportamento degli elementi maschio e fascia è generalmente formulato su base fenomenologica, considerando tipicamente legami elasto-plastici (Figura 3.29). Per le fasce, in particolare (Figura 3.30), in accordo ai risultati sperimentali disponibili, nel legame a taglio viene introdotto una caduta di resistenza (più o meno rapida) con successiva soglia di resistenza residua.

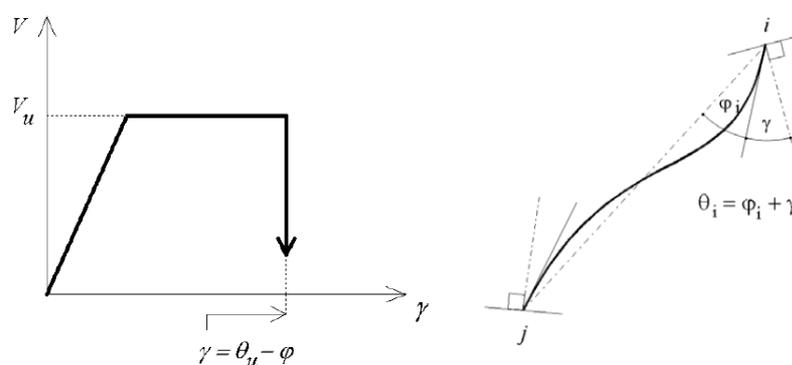


Figura 3.29 – Comportamento anelastico dell'elemento maschio nel caso di rottura per taglio

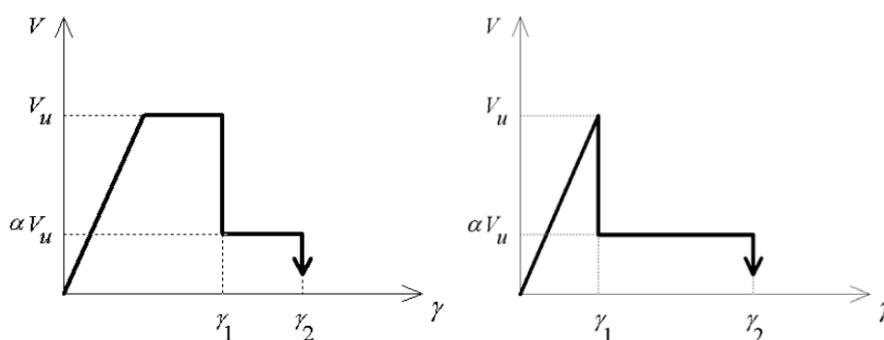


Figura 3.30 – Comportamento elasto-plastico-fragile e comportamento elasto-fragile di un elemento fascia

Il metodo SAM si è dimostrato strumento valido ed affidabile per l'analisi statica non lineare (pushover) di pareti e, nella sua successiva versione, di sistemi tridimensionali (Magenes et al., 2000). Attualmente il codice denominato SAM II è il risolutore alla base del software ANDILWall (Figura 3.31), implementato presso EUCENTRE e presso l'Università degli Studi di Pavia, e commercializzato da CR Soft s.r.l. per conto di ANDIL – Assolaterizi.

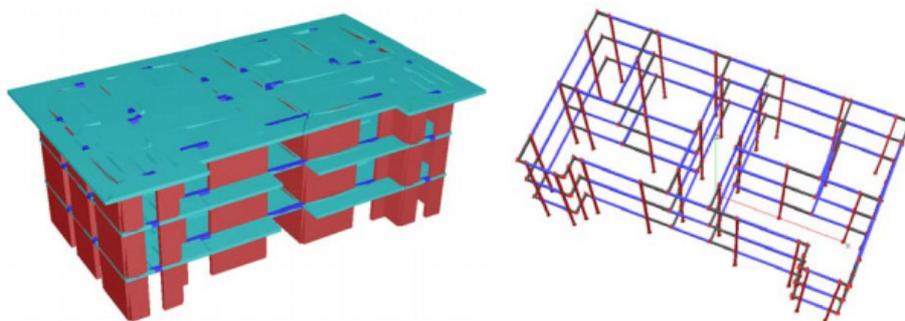


Figura 3.31 – Screenshot del software ANDILWALL: a sinistra modello 3D di un edificio; a destra modello a telaio equivalente

3.8 BIBLIOGRAFIA

ATC (1996). Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, ATC-40 Report, American Technical Council, Redwood City, United States.

Braga F., Dolce M. (1982). Un metodo per l'analisi di edifici multipiano in muratura antisismici, *Proc. of the 6th I.B.Ma.C.*, Roma, pp.1088-1099.

Braga F., Liberatore D. (1990). A finite element for the analysis of the response of masonry buildings, *Proc. of the 5th North American Masonry Conference*, Urbana, United States.

Calderini C. (2004). *Un modello costitutivo per la muratura: formulazione ed implementazione per l'analisi di strutture complesse*, PhD Thesis, Università degli Studi di Genova.

Calderoni B., Lenza P., Pagano M. (1989). Attuali prospettive per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura, *Atti del IV Congresso Nazionale ANIDIS*, Milano, 1989.

Calderoni B., Marone P., Pagano M. (1987). Modelli per la verifica statica di edifici in muratura in zona sismica, *Ingegneria Sismica*, **3**, pp. 19-27.

Como M., Grimaldi A. (1986). A new method on the lateral strength evaluation of masonry walls and buildings, *Proc. of 8th European Conference on Earthquake Engineering*, LNEC, Lisbon.

D'Asdia P., Palombini F., Viskovic A. (1992). Un modello di Setto Inclinato a Sezione Variabile (SISV) per l'analisi delle pareti murarie, *Quaderni del Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica*, Università La Sapienza di Roma.

Dolce M. (1989). Schematizzazione e modellazione per azioni nel piano delle pareti, *Corso sul consolidamento degli edifici in muratura in zona sismica*, Ordine degli Ingegneri, Potenza.

Dolce M. (1991). Schematizzazione e modellazione degli edifici in muratura soggetti ad azioni sismiche, *L'Industria delle Costruzioni*, **242**, 44-57.

ENV 1998-1 (2005). Eurocode 8 - Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures. Part 1-1: General Rules - Seismic Actions and General Requirements for Structures. CEN: Brussels.

Fajfar P. (2000). A non-linear analysis method for performance-based seismic design, *Earthquake Spectra*, **16**, 3.

Fajfar, P., Fischinger, M. (1988). N2 - A method for non-linear seismic analysis of regular buildings, *9th World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo, Kyoto, Japan.

Freeman, S.A. (1998). The capacity spectrum method as a tool for seismic design, *11th European Conference on Earthquake Engineering*, Paris, France.

Fusier F., Vignoli A. (1993). Proposta di un metodo di calcolo per edifici in muratura sottoposti ad azioni orizzontali, *Ingegneria Sismica*, Anno X, n. **1**, 10-24.

Galasco A., Lagomarsino S., Penna, A. (2002). TREMURI Program: Seismic Analyser of 3D Masonry Buildings, University of Genoa, Italy.

Gambarotta L., S. Lagomarsino (1996). Sulla risposta dinamica di pareti in muratura, *La Meccanica delle Murature tra Teoria e Progetto*, Messina.

Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997a). Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26**:4, 424-441.

Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997b). Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its application, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26**:4, 441-462.

Giuffrè A. (a cura di) (1993). Sicurezza e conservazione dei centri storici – Il caso Ortigia, Ed. Laterza.

D. M. 02/07/81 (1981). Normativa per le riparazioni ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma nelle regioni Basilicata, Campania e Puglia.

Circolare Ministeriale 21745/1981 (1981). Istruzioni per l'applicazione della normativa tecnica per la riparazione e il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma.

Magenes G., Calvi G. M. (1996). Prospettive per la calibrazioni di metodi semplificati per l'analisi sismica di pareti murarie, *La Meccanica delle Murature tra Teoria e Progetto*, Messina.

Magenes G., Della Fontana A. (1998). Simplified non-linear seismic analysis of masonry buildings, *5th International Masonry Conference*, Proc. of the British Masonry Society, 8, 190-195.

Magenes G., Bolognini D., Braggio C. (2000). Metodi semplificati per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura, GNDT – Gruppo Nazionale Difesa Terremoti, Roma.

Ordinanza P. C. M. 3274/2003 (2003). Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica.

Petrini L., Pinho R., Calvi G. M. (2004). *Criteri di progettazione antisismica degli edifici*, IUSS Press, Pavia.

Shibata, A., Sozen M. A. (1976). Substitute-structure method for seismic design in R/C, *Journal of the Structural Division*, ASCE, **102**:1, 1-18.

Tomaževic M., Weiss P. (1990). A rational, experimentally based method for the verification of earthquake resistance of masonry buildings, *Proc. of the 4th U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Palm Springs, Vol. 2, pp. 349-359.

Tomaževic M. (1978). The computer program POR, Report ZMRK, Institute for Testing and Research in Materials and Structures, Ljubljana, Slovenia.

4

COMPORTAMENTO MECCANICO DI PANNELLI MURARI

Il capitolo 4 analizza il comportamento sperimentale tagliente e flessionale di maschi murari e fasce di piano soffermandosi quindi sulle principali formulazioni analitiche di previsione della resistenza suggerite in letteratura. Viene quindi riportato un ampio confronto con le principali normative internazionali. Il capitolo riassume infine i modelli di comportamento effettivamente implementati nel codice FREMA.

4.1 INTRODUZIONE

La modellazione monodimensionale a telaio equivalente di pareti in muratura prevede la discretizzazione delle stesse mediante un sistema di pannelli orizzontali e verticali assemblati insieme.

Tale approccio di modellazione è avvalorato dall'osservazione dei danni indotti dai terremoti reali e dall'analisi dei dati di test sperimentali da cui risulta che tipicamente il danneggiamento si concentra in porzioni ben definite della parete: i maschi murari e le fasce di piano.

Tali elementi vengono modellati evidenziando, su base fenomenologica, i meccanismi macroscopici di danneggiamento nel proprio piano, cioè taglio e pressoflessione.

L'approccio a telaio equivalente, come si è già discusso, prescinde dai fenomeni di ribaltamento fuori piano che vanno

considerati a parte o del tutto esclusi in presenza di dispositivi specifici (catene, cordoli).

La capacità portante di pannelli murari può valutarsi mediante prove sperimentali capaci di riprodurre il comportamento reale in termini di vincoli e forze agenti. Da tali prove è possibile definire, per un pannello di una particolare tipologia muraria e di una data snellezza, il dominio di resistenza nello spazio delle sollecitazioni applicate.

Un tale approccio alla modellazione, sebbene abbastanza accurato e affidabile, risulta non praticabile in termini di costi e tempi proprio perché richiede un gran numero di prove. Inoltre, in molti casi, è tecnicamente inapplicabile su edifici esistenti per la sua natura altamente distruttiva. Pertanto, si rende necessario lo sviluppo di modelli teorici semplificati che ripropongano con sufficiente approssimazione il comportamento reale della muratura.

Con riferimento alla sola resistenza, in letteratura e nelle norme sismiche internazionali sono disponibili diversi modelli semplificati. Seguendo un approccio prettamente ingegneristico, tali modelli si basano generalmente sulla valutazione approssimata dello stato di sforzo indotto dalle azioni esterne nella muratura e sulla verifica della sua ammissibilità mediante un criterio di resistenza.

L'applicazione di questo tipo di approccio pone i seguenti problemi tuttavia una rilevante serie di considerazioni.

La muratura è un materiale anisotropo, ed anche considerando uno stato di sollecitazione piano omogeneo resta il problema dei diversi meccanismi di resistenza e rottura, Figura 4.1 (a).

Questa caratteristica influenza fortemente la risposta di un pannello soggetto ad un'azione sismica nel piano, come illustrato in Figura 4.1 (b), che riporta le osservazioni dei danni indotti dal sisma su strutture reali e nell'ambito di prove di laboratorio. È necessario allora riproporre i criteri di resistenza mediante approcci semplificati.

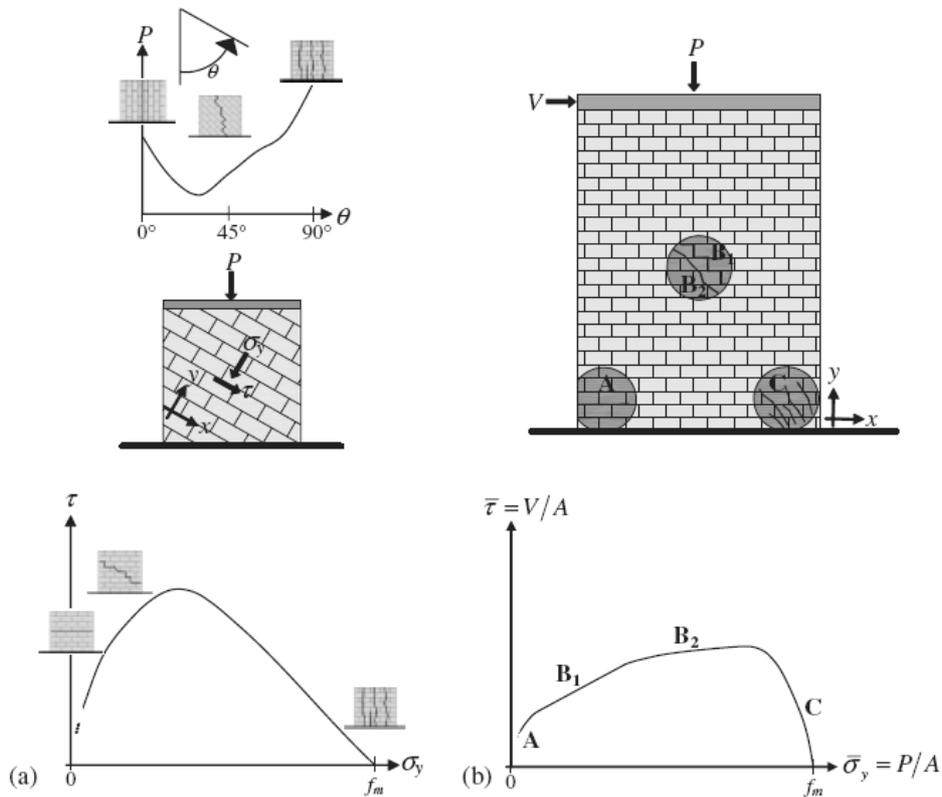


Figura 4.1 – Modalità di rottura e domini limite della muratura: (a) scala del materiale; (b) scala del pannello

Le forze agenti su pannelli in muratura producono stati di sforzo fortemente non omogenei. Questo è vero sia in campo lineare, per le condizioni di vincolo e le forze agenti, sia in campo non lineare, a causa della redistribuzione degli sforzi derivata dai processi di danneggiamento del materiale. Ciò implica che il dominio di resistenza del pannello murario non coincide con il dominio di resistenza della sola muratura. Un approccio rigoroso richiederebbe pertanto che, dato un dominio di resistenza della muratura,

l'ammissibilità dello stato di sforzi sia valutato in tutti i punti del pannello. Di contro, l'idealizzazione a telaio equivalente impone la valutazione dello stato di sforzo solo in un numero limitato di sezioni.

Per la complessità del materiale considerato, la valutazione sperimentale dei parametri richiesta dal modello non è di facile determinazione: da una parte l'interpretazione delle prove non è sempre univoca; dall'altro, ragioni pratiche, tecniche o meramente economiche non sempre permettono il ricorso a prove sperimentali per la calibrazione del modello.

Si passeranno quindi in rassegna i principali modelli semplificati proposti in letteratura per la previsione della resistenza dei pannelli murari e le relative prescrizioni delle normative internazionali più importanti.

4.2 CLASSIFICAZIONE DELLE MODALITÀ DI ROTTURA OSSERVATE

L'osservazione dei danni indotti dal sisma su pareti complesse in muratura, così come gli esperimenti di laboratorio, mostrano che pannelli in muratura caricati nel piano presentano due tipi di comportamenti con fratture locali, come mostrato in Figura 4.1 (b), con relative modalità di rottura associate.

4.2.1 Comportamento flessionale: aspetti fenomenologici

Si distinguono concettualmente due differenti modalità di rottura. Se i carichi verticali agenti sono bassi, in modo da non superare la resistenza a compressione della muratura, i carichi orizzontali producono fessure per trazione localizzate in uno spigolo del pannello (Figura 4.2) che comincia a comportarsi quasi come un corpo rigido che ruota intorno all'estremo compresso inferiore (*rocking*).

Se non si verificano significative fessure da flessione, per elevati carichi verticali applicati, il pannello è progressivamente

caratterizzato da un diffuso quadro fessurativo, con fratture sub-verticali orientate in direzione degli spigoli maggiormente compressi (*crushing*). In entrambi i casi, lo stato limite ultimo è ottenuto per cedimento del materiale nelle zone maggiormente compresse.

4.2.2 Comportamento a taglio: aspetti fenomenologici

Per quanto attiene al comportamento a taglio, si distinguono due diverse modalità di rottura.

Nella rottura per scorrimento (*sliding shear failure*), lo sviluppo di fratture da flessione ai lembi tesi riduce la sezione resistente; la rottura si raggiunge per scorrimento lungo un giunto orizzontale, generalmente localizzato ad un'estremità del pannello.

Nella fessurazione diagonale (*diagonal cracking*), la rottura si raggiunge per formazione di una fessura diagonale che si propaga normalmente a partire dal centro del pannello verso gli angoli.

La fessura può interessare prevalentemente i giunti di malta (assumendo l'andamento a gradini per murature di mattoni con tessitura regolare, Figura 4.2).

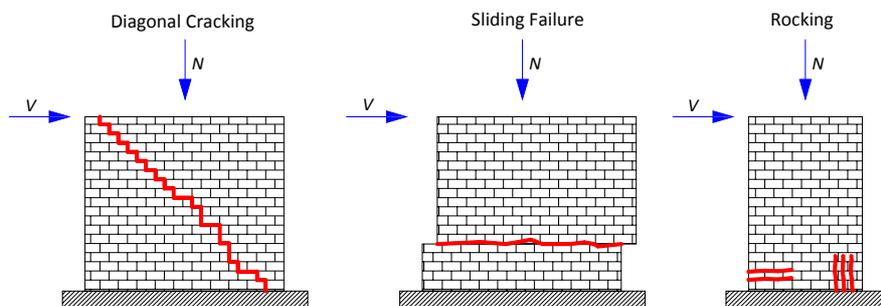


Figura 4.2 – Tipiche modalità di rottura di un pannello in muratura

L'evenienza che si verifichi una modalità di rottura piuttosto che un'altra dipende da molteplici condizioni: la geometria del

pannello, le condizioni di vincolo, lo sforzo assiale agente, le caratteristiche meccaniche dei materiali costituenti la muratura (malta, blocchi lapidei, interfacce), le caratteristiche geometriche della muratura (rapporto di forma dei blocchi, tessitura longitudinale e trasversale della muratura).

In ambito di ricerca sono stati effettuati test finalizzati alla valutazione dell'influenza dei succitati questi parametri sulle modalità di rottura di un pannello.

In generale è emerso che la rottura per *rocking* interessa maggiormente i pannelli snelli, mentre lo scorrimento lungo giunti orizzontali interessa pannelli molto tozzi.

Nei pannelli di snellezza intermedia, la fessurazione diagonale tende a prevalere sulle altre modalità di rottura man mano che aumenta la compressione verticale. In particolare la fessurazione diagonale per propagazione attraverso i blocchi prevale su quella per propagazione attraverso i giunti di malta per livelli maggiori di compressione verticale e per valori crescenti del rapporto tra la resistenza della malta e dei blocchi. L'aumento dell'interlocking tra i blocchi (rapporto dimensionale dei blocchi e tessitura della muratura) può indurre un passaggio da fessurazione diagonale attraverso i giunti di malta al *rocking*, alla fessurazione diagonale attraverso i blocchi, o allo scorrimento.

La rottura per *crushing* si raggiunge tipicamente solo per livelli molto elevati della compressione verticale e pertanto si presenta meno frequentemente nell'ambito delle usuali applicazioni ingegneristiche.

4.3 MODELLI LA PREVISIONE DELLA RESISTENZA A FLESSIONE

Nel seguente paragrafo, si illustrano i più comuni modelli semplificati presenti in letteratura per la previsione della resistenza di pannelli murari.

I modelli semplificati si basano sulla scelta di una tensione di “riferimento” (una tra la tensione tangenziale, la tensione normale o una tensione principale) e un punto di “riferimento” nel quale tale componente di tensione è calcolata. L’ammissibilità dello stato di tensione è quindi accertata per il tramite di un opportuno dominio di resistenza della muratura. La tensione di “riferimento” sarà indicata nel prosieguo come σ_c .

4.3.1 Formulazione unitaria

I modelli che considerano il comportamento flessionale dei pannelli valutano generalmente lo stato tensionale nella sezione di base.

Assumono pertanto, quale tensione di riferimento (σ_c) la massima tensione di compressione agente sulla giacitura orizzontale. Tale tensione è calcolata sulla base della teoria tecnica della trave, trascurando la resistenza a trazione del materiale e assumendo un’appropriata distribuzione di tensioni di compressione.

Sia per quanto riguarda il meccanismo di *rocking*, sia per quello di *crushing*, la rottura è associata al raggiungimento della resistenza massima a compressione, normale alla giacitura orizzontale (Figura 4.3).

Trascurando il peso proprio del pannello, le relazioni di equilibrio conducono alla seguente equazione generale:

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}_y}{k_{2r}(1-2\kappa k_{1r})} \leq f_m \quad (4.1)$$

dove il significato dei simboli introdotti è il seguente:

- k_{1r} (rapporto di taglio) è un coefficiente che tiene conto della snellezza e delle condizioni di vincolo del pannello, valutato come H_0/D , essendo D l’altezza della sezione trasversale (Figura 4.3). Per pannelli impediti di ruotare

in testa e alla base $H_0 = H/2$, mentre per pannelli incastrati solo alla base e liberi di ruotare in testa vale $H_0 = H$, essendo H l'altezza del pannello.

- k_{2r} è un coefficiente che porta in conto la distribuzione di tensioni di compressione al bordo compresso;
- κ è il rapporto tra la forza orizzontale agente V e la forza verticale applicata P ;
- $\bar{\sigma}_y = P/DT$ è la tensione verticale media agente sulla sezione (D e T sono l'altezza e lo spessore della sezione, rispettivamente);
- f_m è la resistenza a compressione della muratura.

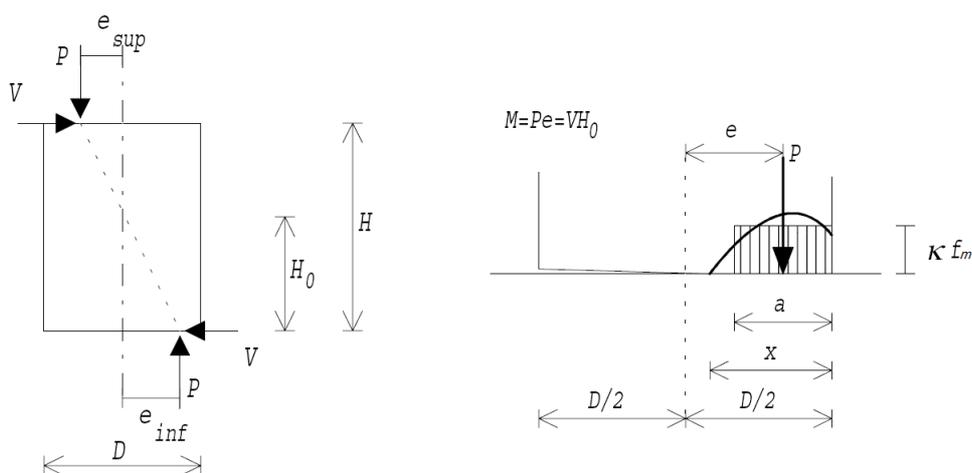


Figura 4.3 – Assunzioni per la valutazione della resistenza alla rottura per *rocking* con schiacciamento dell'angolo di base

Il parametro k_{2r} dipende dalla legge costitutiva scelta per il materiale. Esso permette eventualmente di definire una distribuzione tipo stress-block, riducendo la resistenza a

compressione in modo da portare in conto la reale distribuzione delle tensioni (che ovviamente è non lineare).

L'assunzione di una duttilità infinita del materiale in compressione porta ad avere $k_{2r}=1$. Considerando, invece, una duttilità finita in compressione, sotto le già menzionate ipotesi per la muratura, il coefficiente k_{2r} assume la forma seguente:

$$k_{2r} = \frac{(2\zeta - 1)^2}{4(\zeta^2 - \zeta + 1/3)} \quad (4.2)$$

dove ζ è la duttilità del materiale. Si può osservare che il valore di k_{2r} tende rapidamente all'unità, anche per bassi valori della duttilità; molte norme assumono $k_{2r} = 0.85$, a cui corrisponde una duttilità $\zeta = 1.18$.

Va sottolineato che la (4.2) è valida solo per asse neutro che taglia la sezione (rottura per *rocking*); nel caso di rottura per *crushing*, l'uso della (4.2) è a vantaggio di sicurezza.

Comparando la resistenza del pannello ottenuta tramite la (4.1) con il valore limite ottenuto con l'ipotesi di blocco rigido, si può osservare che per bassi valori del carico assiale (relativamente alla resistenza a compressione della muratura), il valore della resistenza a compressione f_m ha una influenza limitata.

Considerando che in generale i maschi murari di edifici in muratura sono soggetti a carichi assiali per lo più lontani dal valore limite della resistenza a compressione, si potrebbe ritenere che le incertezze nella stima di f_m , sebbene talvolta significative (per la grande dispersione dei risultati sperimentali) non influenzino sempre in maniera significativa la previsione della resistenza.

4.4 MODELLI LA PREVISIONE DELLA RESISTENZA A TAGLIO

4.4.1 Formulazione unitaria

Sono stati sviluppati diversi modelli per descrivere la rottura associata al comportamento a taglio dei pannelli. È possibile riconoscerne due differenti tipi: modelli che descrivono la muratura come un materiale composito, considerando separatamente i componenti costitutivi della stessa (giunti di malta e blocchi lapidei), e modelli che assumono la muratura come un materiale isotropo equivalente, che valutano lo sviluppo della frattura lungo una direzione principale di tensione.

Molti modelli sviluppati in letteratura e adottati dalle normative internazionali, assumono che la rottura per taglio lungo i giunti di malta sia basata sul criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, applicato in differenti sezioni e modi. Le differenti formulazioni possono essere quindi sintetizzate attraverso la seguente espressione generale:

$$\sigma_c = k_{1d} \bar{\tau} \leq k_{1s} \tilde{c} + \tilde{\mu} \bar{\sigma}_y \quad (4.3)$$

dove

- \tilde{c} e $\tilde{\mu}$ sono la coesione e il coefficiente di attrito che caratterizzano la muratura (Tabella 4.1);
- k_{1d} dipende dalla snellezza del pannello H/D (in seguito λ) e rappresenta il rapporto tra la tensione di taglio nella sezione di riferimento (σ_c) e la tensione media $\bar{\tau} = V/DT$;
- k_{1s} è un coefficiente che porta in conto la parte compressa della sezione di riferimento, e pertanto è il rapporto tra la lunghezza della zona non fessurata e l'altezza totale della sezione trasversale.

4.4.2 Il modello di Mann-Müller

Nei modelli che descrivono lo scorrimento lungo un giunto orizzontale è assunta come sezione di riferimento quella di base (questa sezione ha la più piccola zona non fessurata che porta al più piccolo valore della resistenza); σ_c si assume coincidente con la tensione tangenziale media $\bar{\tau}$ ($k_{1d} = 1$).

I parametri \tilde{c} e $\tilde{\mu}$ assumono quindi un significato locale, pertanto rappresentano la coesione c e l'angolo di attrito μ della malta (Tabella 4.1). In criterio di resistenza espresso dalla (4.3) si configura quindi come il criterio di Mohr-Coulomb a tutti gli effetti.

Nei modelli che descrivono la fessurazione diagonale attraverso i giunti di malta, la tensione di riferimento (σ_c) è in genere calcolata al centro del pannello. In tale sezione, assunta interamente reagente, lo sforzo di taglio ha una distribuzione parabolica; in tal caso $k_{1s} = 1$ e $k_{1d} > 1$ (il suo valore è assunto di solito dipendente da λ).

In questo caso I parametri \tilde{c} e $\tilde{\mu}$, non hanno un significato locale, poiché descrivono una modalità di rottura complessa, che coinvolge i giunti di malta verticali e orizzontali.

La formulazione più utilizzata per definire questi parametri è stata sviluppata da Mann e Müller (1980).

Essa si basa sull'ipotesi che i mattoni sono più rigidi dei giunti di malta e le proprietà meccaniche dei giunti di malta verticali sono trascurabili. Poiché non possono essere trasferite tensioni di taglio attraverso i giunti verticali, i blocchi sono sollecitati da un momento; l'equilibrio può ottenersi solo attraverso una coppia di forze verticali, corrispondente ad una distribuzione non uniforme delle azioni di compressione sui giunti orizzontali (Figura 4.4, Figura 4.5). Queste ipotesi conducono ad una definizione di \tilde{c} e $\tilde{\mu}$, che permette di portare in conto le caratteristiche geometriche della tessitura della muratura (si veda la Tabella 4.1, dove $\varphi = 2\Delta_y/\Delta_x$, con Δ_x e Δ_y larghezza e altezza dei blocchi, rispettivamente).

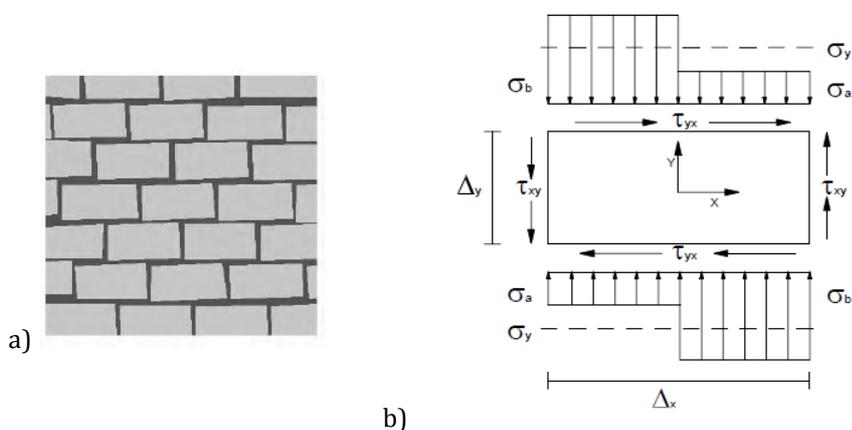


Figura 4.4 – Modello di Mann & Müller: a) modello con giunti in schiuma di gomma; b) distribuzione di tensioni ipotizzata sul mattone

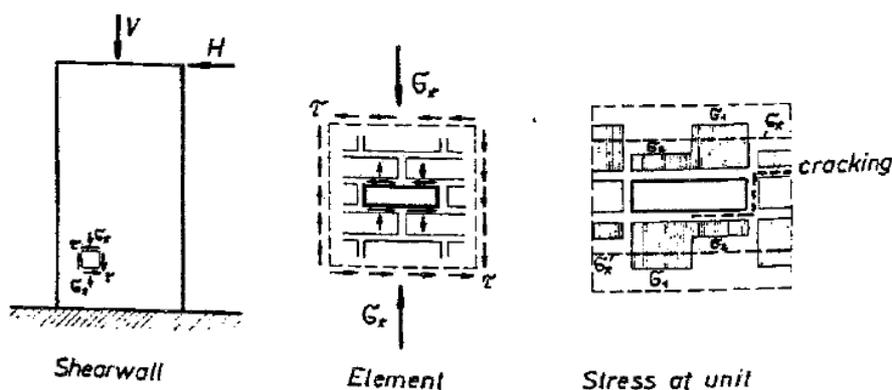


Figura 4.5 – Modello di Mann & Müller: elemento di muratura isolato dal pannello murario e rappresentazione delle sollecitazioni agenti

Sulla base delle stesse ipotesi adottate per la descrizione della fessurazione diagonale attraverso i giunti di malta, Mann e Müller hanno sviluppato anche un criterio che porta in conto la rottura dei blocchi. Poiché i giunti verticali non possono trasmettere azioni di taglio, gli autori assumono che un'azione doppia di taglio può trasferirsi attraverso i blocchi. Il criterio adotta la tensione principale

massima agente nel centro del blocco come la tensione di riferimento σ_c ; questa non deve superare la resistenza a trazione del blocco f_{bt} .

Il criterio (Figura 4.6) può pertanto scriversi nella seguente forma:

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}_y}{2} + \sqrt{\left(k_{1d}k_{2d}\bar{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{2}\right)^2} \leq f_{bt} \quad (4.4)$$

dove k_{2d} è il rapporto tra la tensione di taglio media applicata sul blocco e la tensione di taglio locale agente al centro dello stesso. Si è dimostrato che $k_{2d} = 2.3$ per murature standard per le quali vale $\phi = 0.5$.

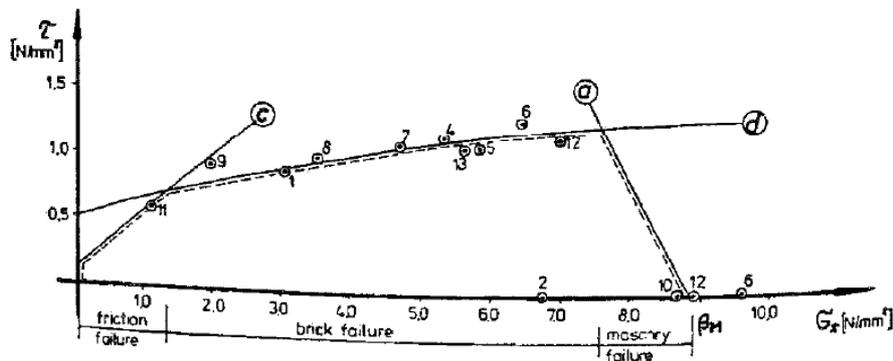


Figura 4.6 - Modello di Mann & Müller: rappresentazione grafica del dominio di resistenza

4.4.3 Il modello di Turnšek -Čačovič

Fra i modelli che considerano indistintamente lo sviluppo delle fessure lungo una direzione principale di tensione, il più largamente utilizzato fu proposto in origine da Borchelt (1970) e da Turnšek & Čačovič (1970).

Borchelt basò la sua formulazione su un pannello quadrato testato in compressione diagonale, mentre la formulazione di Turnšek e Čačovič fu sviluppata sulla base di prove effettuate su muri a mensola. Entrambi considerano come tensione di riferimento σ_c la tensione principale massima agente al centro del pannello σ_1 . La muratura è assunta essere un materiale isotropo.

La tensione principale massima non deve pertanto essere superiore alla resistenza a trazione di riferimento della muratura f_t :

$$\sigma_c = \sigma_I = \frac{\bar{\sigma}_y}{2} + \sqrt{\left(k_{1d} \bar{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{2}\right)^2} \leq f_t \quad (4.5)$$

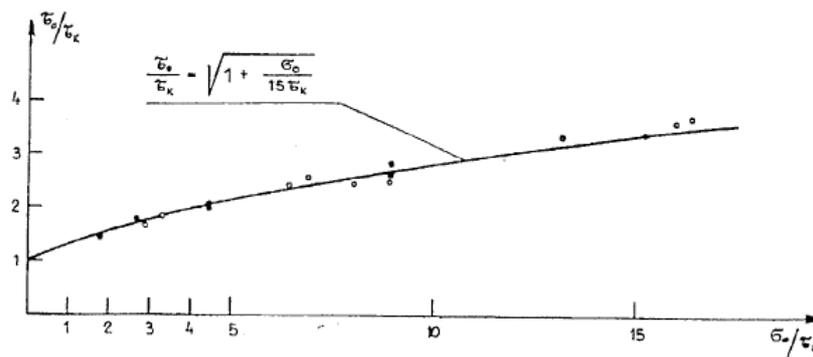


Figura 4.7 – Modello di Turnšek & Čačovič: rappresentazione grafica del dominio di resistenza nel piano σ - τ

Borchelt assumeva la tensione tangenziale al centro del pannello coincidente con la tensione media sulla sezione trasversale; perciò, nella sua formulazione è $k_{1d} = 1$. Come dimostrato da altri autori, questa formulazione implica una forte approssimazione del reale campo di tensioni agente. Nel loro lavoro originale, Turnšek e Čačovič assunsero $k_{1d} = 1.5$ (Figura 4.7, Figura 4.8).

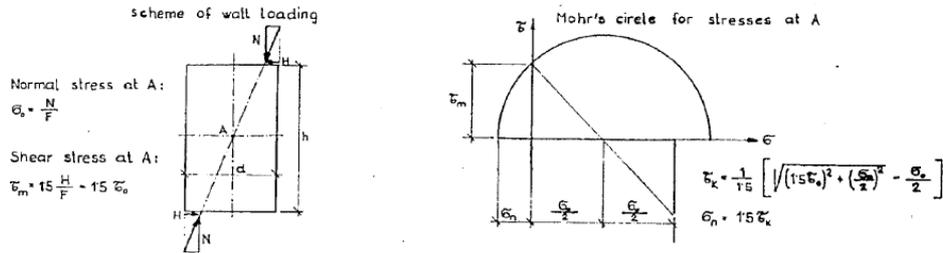


Figura 4.8 – Modello di Turnšek & Čačovič: schema della prova e cerchio di Mohr dello stato tensionale della parte centrale del pannello

Tabella 4.1 - Significato dei parametri nelle modalità di rottura per taglio

Modalità di rottura	k_{1d}	k_{1s}	\tilde{c}	$\tilde{\mu}$
Sliding shear	1	Funzione della legge σ - ε	c	μ
Diagonal Cracking	Funzione della snellezza λ	1	$c \frac{1}{1 + \mu\varphi}$	$\mu \frac{1}{1 + \mu\varphi}$

In seguito, altri autori hanno proposto delle espressioni più dettagliate per questo parametro. Un criterio per la pratica progettuale fu introdotto da Benedetti e Tomažević (1984), per i quali $k_{1d} = \lambda$, con $1 < k_{1d} < 1.5$.

Una proposta alternativa è stata avanzata da Magenes e Calvi (1997), che definiscono il coefficiente $k_{1d} = 1 + H_0/D$, in modo da portare in conto sia l'influenza della snellezza, sia l'influenza delle condizioni di vincolo (Figura 4.9).

È noto dalle prove sperimentali che la resistenza media a taglio di un pannello in muratura aumenta man mano che il pannello diviene più tozzo, ma poiché tali prove sono condotte con un solo tipo di condizioni di vincolo, la snellezza e il rapporto di taglio variano nella stessa proporzione. Le simulazioni numeriche di

Magenes e Calvi dimostrano che, cambiando le condizioni di vincolo, il parametro dominante risulta essere il fattore di taglio ($H_0/D = M/VD$) piuttosto che la snellezza.

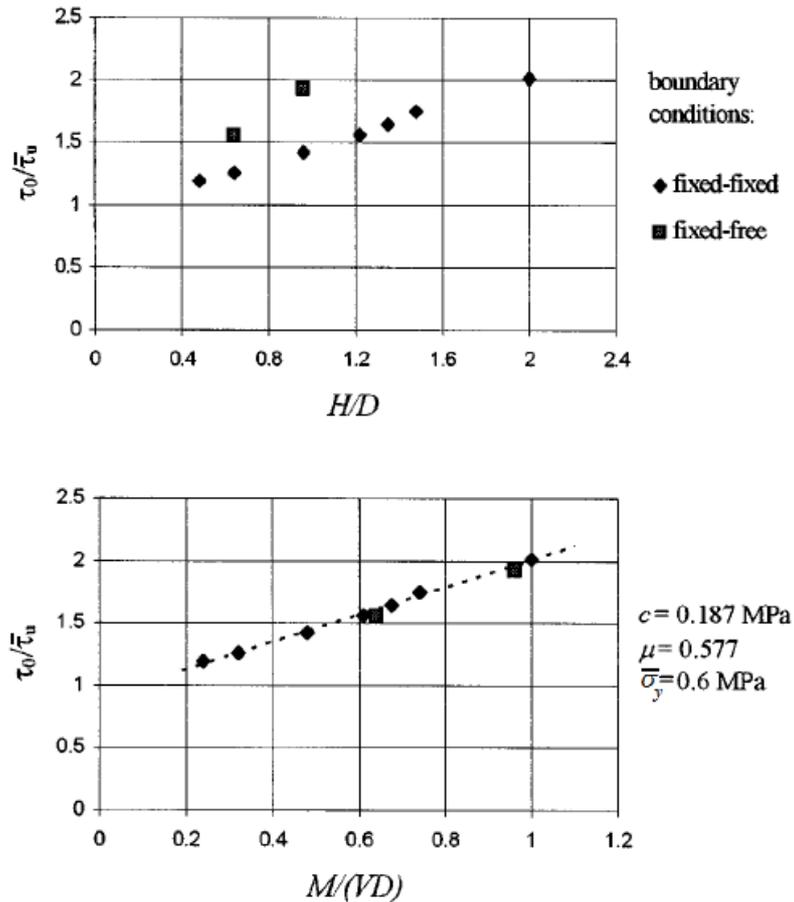


Figura 4.9 – Influenza della snellezza e del rapporto di taglio sulla resistenza di pannelli in muratura

Mantenendo invariati tutti gli altri parametri, la resistenza media a taglio del pannello diminuisce con legge iperbolica con il rapporto di taglio, o, più semplicemente, il reciproco di $\bar{\tau}_u$ aumenta

linearmente con il rapporto di taglio, come mostrato in Figura 4.9. Questa influenza dal rapporto di taglio non sembra dipendere dalla modalità di propagazione della rottura.

La validità della formulazione di Mann e Müller è stata verificata per valori di $H_0/D < 1$ (per valori superiori del rapporto di taglio tendono comunque a prevalere altri meccanismi di rottura).

In (Magenes et al., 2000) si ritiene infatti che per valori del rapporto di taglio superiori a 1 tale formulazione tende a diventare eccessivamente cautelativa al crescere di H_0/D , e pertanto si suggerisce di porre comunque $k_{1d} < 2$.

Si sottolinea che la formulazione proposta da Mann e Müller è stata sviluppata per una muratura in mattoni caratterizzata da tessitura e giunti regolari e può non essere appropriata per murature irregolari. In questo caso, infatti, il materiale tende ad avere un comportamento pressoché isotropo, e quindi è più attendibile il criterio proposto da Turnšek e Čačovič.

4.5 ULTERIORI CONSIDERAZIONI SULLO STATO TENSIONALE

La discussione dei criteri di resistenza a taglio è un'occasione per riprendere alcune considerazioni in merito alle relazioni che sussistono fra eventuali ipotesi di comportamento monolatero o no-tension del materiale e la resistenza a taglio.

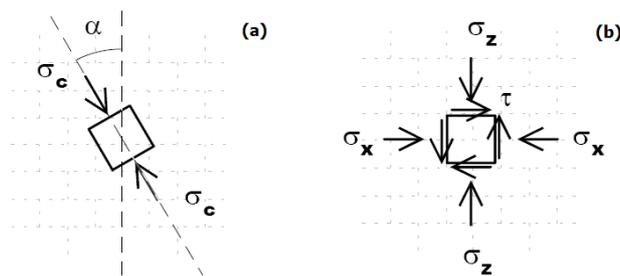


Figura 4.10 – Stato di sforzo compatibile nel sistema di riferimento principale (a) e nel sistema di riferimento del materiale (b)

Si consideri uno stato tensionale caratterizzato dalla sola esistenza di uno sforzo principale di compressione con una certa inclinazione α , compatibile con l'ipotesi di comportamento monolatero, Figura 4.10 (a), e si supponga che il materiale muratura sia caratterizzato da un dominio di resistenza esprimibile nel sistema di riferimento x-z del materiale, Figura 4.10 (b), come:

$$\tau \leq c + \mu \sigma_z \quad (4.6)$$

La trasformazione di coordinate che lega le componenti degli sforzi nei due sistemi di riferimento è:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_c \cdot \cos^2 \alpha \\ \tau &= \sigma_c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.7)$$

Perché sia rispettato il dominio di resistenza espresso dalla (4.6) deve dunque risultare, sostituendo le (4.7) nella (4.6):

$$\sigma_c \leq \frac{c}{\cos \alpha \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (4.8)$$

Si nota quindi che, in generale, l'assunzione di comportamento monolatero non comporta necessariamente il rispetto dei criteri di resistenza a taglio del materiale, quale sarebbe ad esempio un criterio associato alla rottura per scorrimento dei giunti orizzontali.

Analogamente, limitare la tensione principale di compressione σ_c ad un valore inferiore alla resistenza a compressione monoassiale f_m misurata in direzione normale ai letti di malta non garantisce nei confronti della rottura per taglio: la (4.8) può comportare limiti notevolmente inferiori.

Supponendo, ad esempio, dei valori abbastanza comuni per una muratura di mattoni quali $f_m = 6$ MPa, $c = 0.15$ MPa, $\mu = 0.5$ e ipotizzando $\alpha = 30^\circ$ allora la (4.8) fornisce $\sigma_c < 2.59$ MPa, valore ben inferiore a f_m . D'altra parte numerosi lavori sperimentali hanno posto in evidenza come, anche in stati di sforzo monoassiali, la resistenza a compressione sia funzione della direzione dello sforzo rispetto alla giacitura dei letti di malta. L'ipotesi di comportamento monolatero quindi, sebbene possa idealizzare in maniera efficace alcuni aspetti del comportamento meccanico della muratura, non ne esaurisce di per sé le modalità di rottura, e richiede l'introduzione di appositi modelli per i meccanismi di rottura per taglio e scorrimento.

4.6 I MODELLI DI RESISTENZA NELLE NORME INTERNAZIONALI

I modelli analizzati in precedenza sono largamente utilizzati nelle normative internazionali per il progetto-verifica di murature soggette ad azioni orizzontali (anche di natura non sismica).

Nella Tabella 4.2 sono riassunti i criteri di sicurezza adottati da alcune delle normative più importanti con riferimento alla classificazione introdotta nei paragrafi immediatamente precedenti. La Tabella 4.3 riporta i valori che in tali norme si attribuiscono ai coefficienti contenuti nelle (4.1)-(4.5).

Per quanto riguarda la risposta flessionale, le diverse norme legano l'azione orizzontale all'eccentricità con cui è applicato il carico verticale. Pertanto, la resistenza a flessione dei maschi murari è generalmente associata alla resistenza a compressione della muratura f_m . Molte norme, tra cui quella italiana, assumono un criterio di verifica riconducibile a quello espresso mediante la (4.1), assumendo una distribuzione tipo stress-block.

Un approccio differente è adottato dalle norme ACI 530-05, in cui la resistenza a trazione della muratura non è assunta nulla; adottando una distribuzione lineare (con comportamento fragile a trazione), viene proposta una verifica indipendente per le tensioni di compressione e le tensioni di trazione.

Tabella 4.2 – Sintesi dei criteri di resistenza adottati nelle principali normative

Normativa		NTC 2008	EC6 EC8	EC8 parte III	ACI 530- 05	FEMA 356/306	DIN 1053- 100
Comportamento a flessione	Eq. (4.1)	√	-	√	-	√	√
	Altro	-	√	-	√	-	-
Comportamento a taglio	Eq. (4.3)	√	√	√	√	√	√
	Eq. (4.4)	-	-	-	-	-	√
	Eq. (4.5)	-	-	-	-	√	-
	Altro ¹	√	√	√	√	-	-
Note	¹ Si fa riferimento a limitazioni generiche di resistenza, non relative ad interpretazioni meccaniche specifiche.						

Tabella 4.3 – Significato dei parametri adottati nelle principali normative

Normativa		NTC 2008	EC6 EC8	EC8 parte III	ACI 530-05	FEMA 356/30 6	DIN 1053- 100
Comportamento a flessione	k_{1r}	1	-	1	-	H/D	Nota 7
	k_{2r}	0.85	-	0.85	Nota 4	0.70	0.85
Comportamento a taglio	k_{1d}	1	1	1	1.5	Nota 5	Nota 8
	k_{1s}	Nota 1	Nota 1	Nota 1	1	1	1
	\tilde{c}	Nota 2	Nota 3	Nota 3	0.255 [MPa]	Nota 6	Nota 9
	$\tilde{\mu}$	0.4	0.4	0.4	0.45	0.75	$\mu \frac{1}{1+\mu\phi}$
	k_{1d}	-	-	-	-	-	2.3
Note	¹ Funzione della legge costitutiva adottata. ² Ricavato da prove su triplette o da prove di taglio diagonale su muretti o tabellato in funzione del tipo di blocco (resistenza						

caratteristica a compressione) e del tipo di malta.

³ Ricavato da prove su triplete o da una tabella in funzione del tipo di blocco e del tipo di malta.

⁴ Calcolato portando in conto la resistenza a trazione.

⁵ Per taglio-scorrimento 1.5; per fessurazione diagonale 1.5 (se $\lambda=1.5$), 1 (se $\lambda \leq 1$), e interpolato linearmente altrove.

⁶ Da prove sperimentali, moltiplicato per 0.56.

⁷ Calcolato in funzione della snellezza e delle condizioni di vincolo.

⁸ 1.5 (se $\lambda=2$), 1 (se $\lambda < 1$), interpolato linearmente altrove.

⁹ Tabellato in funzione del tipo di malta.

Relativamente al comportamento a taglio, la maggioranza delle norme assumono una verifica basata sul criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, espresso in generale nella forma della (4.3).

In alcuni casi non viene dichiarato se si fa riferimento allo scorrimento lungo un giunto di malta o alla fessurazione diagonale. È il caso degli Eurocodici 6 e 8 e delle NTC 2008. Da una parte è presa in considerazione la sola zona compressa della sezione trasversale e viene assunto $k_{1d} = 1$; riguardo ai parametri di resistenza, $\tilde{\mu}$ è considerato costante e \tilde{c} è assunto dipendente dalla tipologia della muratura, ma nessuno dei due viene fatto dipendere dall'interconnessione dei blocchi. Quest'ultima assunzione sembra far riferimento al meccanismo di scorrimento. Dall'altra parte, il valore di 0.4 assunto per μ sembra fin troppo cautelativo per rappresentare il coefficiente d'attrito dei giunti di malta, mentre sembra più appropriato se guardato nell'ottica della teoria di Mann e Müller. Infatti, può ottenersi ponendo un coefficiente d'attrito locale $\mu = 0.6$ e un coefficiente di interconnessione $\phi = 0.83$ (corrispondente al valore 2.4 del rapporto d'aspetto Δ_x/Δ_y , tipico di normali murature). L'ultima osservazione sembra invece ricondurre al criterio di fessurazione diagonale.

In altri casi, i valori di alcuni coefficienti sembrano essere non appropriati al criterio dichiarato. La FEMA 306 considera un criterio simile all'equazione (4.3), dichiarando che può essere usato indistintamente per il meccanismo di scorrimento (nella sezione di

mezzeria o alla base) o per la fessurazione diagonale attraverso i giunti di malta. Comunque, è assunto un coefficiente $k_{1d} = 1.5$ ed è fatto riferimento sempre alla sezione integra del pannello.

La normativa tedesca è l'unica chiaramente basata sulla teoria di Mann e Müller, e pertanto propone la rottura per fessurazione diagonale attraverso i giunti di malta. In ogni caso, il calcolo è condotto sulla sola parte compressa della sezione trasversale, assunzione che generalmente fa riferimento alla sezione terminale del pannello e non di mezzeria. Tal modo di procedere porta ad una valutazione eccessivamente cautelativa della resistenza, specialmente se la rottura parte dal centro del maschio.

Vale la pena far notare che molti codici introducono dei limiti alla tensione di taglio, cosa che sembra portare in conto la rottura dei mattoni. Il più delle volte, queste limitazioni si esprimono riducendo la resistenza a compressione della muratura o dei blocchi (attraverso una radice quadrata o un moltiplicatore). Solo la normativa tedesca sviluppa un criterio dove è presa direttamente in considerazione la resistenza a trazione dei blocchi, sulla base della teoria di Mann e Müller.

Infine, il modello espresso mediante la (4.5) è considerato nelle NTC 2008 (punto C8.7.1.5) per le costruzioni esistenti e nelle norme FEMA 356 e FEMA 306.

4.7 MODELLAZIONE DELL'ELEMENTO MASCHIO

4.7.1 Generalità

Nei paragrafi precedenti sono state analizzate le condizioni per cui un pannello in muratura raggiunge la sua resistenza ultima, secondo diverse modalità di rottura.

Ai fini della messa a punto di un modello a telaio equivalente per l'analisi statica non lineare di pareti in muratura, è necessario definire anche le capacità deformative di detti pannelli, ad esempio tramite legami costitutivi momento-curvatura e taglio-scorrimento,

che permettano di seguire l'evoluzione del pannello prima e dopo il raggiungimento della resistenza ultima.

Si consideri, inizialmente, il problema della deformabilità del pannello prima del raggiungimento della resistenza ($V < V_u$). Se si assume che l'unico fenomeno significativo sia costituito dalla parzializzazione del maschio ovvero dal comportamento monolatero, è evidente che solo i modelli che riproducono esplicitamente questo tipo di comportamento riescono a cogliere gli elementi fondamentali della risposta, con la progressiva diminuzione della rigidità al crescere della forza orizzontale V .

Un modello che idealizza il maschio murario come un elemento monodimensionale di tipo trave con deformazione a taglio e comportamento elasto-plastico (come nel metodo POR) inevitabilmente riproduce in maniera molto rozza e solo in media il comportamento deformativo, e non solo per quel che riguarda la legge $V-\delta$.

Infatti una rottura per ribaltamento di un pannello tende a sviluppare un campo di spostamenti con significative componenti verticali. Tale comportamento è anche osservabile sperimentalmente ed è comprensibile qualora si pensi ai cinematismi di corpo rigido descritti al capitolo 3.

Rispetto al caso rigido, la deformabilità del materiale reale può in parte ridurre le componenti verticali di spostamento, che comunque possono rivestire una certa rilevanza in alcuni contesti (ad esempio in presenza di tiranti verticali). Questo aspetto della risposta è comunque tanto meno rilevante quanto più elevata è la compressione media nel maschio, ovvero quanto minore è la parzializzazione.

Per quel che riguarda il comportamento post-picco, una modellazione semplificata può seguire due approcci.

Il primo è quello di assumere un comportamento fragile, ovvero di postulare che nel momento in cui si raggiunga una qualunque condizione di rottura individuata da uno dei criteri sopra

elencati si abbia il collasso del pannello, ovvero la resistenza del pannello si abbatta a zero. Tale approccio semplifica la modellazione ed è sicuramente a favore di sicurezza, ma risulta essere alquanto penalizzante. Sicuramente una rottura per ribaltamento nel piano consente lo sviluppo di spostamenti orizzontali molto elevati, ma anche nel caso di rottura per taglio il degrado di resistenza dell'inviluppo ciclico $V-\delta$ presenta una certa gradualità, tale da indurre a parlare di "duttilità" della muratura.

Emblematico è l'approccio dei metodi di tipo POR, in cui la lunghezza del ramo plastico della legge $V-\delta$ che caratterizza il maschio murario tiene conto di una parte della deformazione pertinente al ramo di softening: si assume cioè che il collasso del pannello possa essere associato alla condizione in cui il valore del taglio resistente letto sull'inviluppo sperimentale dei cicli degradi oltre un certo limite, espresso come percentuale del taglio massimo. Questa definizione convenzionale di collasso si richiama a un criterio accettato anche per altri tipi di strutture, quali quelle in acciaio o cemento armato. Considerare parte della deformabilità post-picco consente di tenere in maggior conto le capacità di redistribuzione interna delle azioni in sistemi che possono essere fortemente iperstatici, e che possono quindi trarre notevoli vantaggi da tale redistribuzione. Per restare nell'ambito dei metodi di tipo POR, la deformazione o più precisamente lo spostamento ultimo è tradizionalmente definito in termini di duttilità ovvero come multiplo dello spostamento al limite elastico.

Recentemente è stato osservato come, nel caso di rottura per taglio, risulti possibile associare lo spostamento ultimo al raggiungimento di una deformazione angolare ultima o *drift* ultimo, ovvero il rapporto tra lo spostamento ultimo e l'altezza della parte deformabile del pannello (Magenes & Calvi, 1997).

Questo secondo approccio avrebbe il notevole vantaggio di svincolare la previsione della effettiva capacità di deformazione ultima della struttura dall'accuratezza con cui si modella la rigidità

elastica iniziale. L'approccio in duttilità infatti comporta che, supposto di prevedere con sufficiente accuratezza la resistenza, qualunque errore di previsione della rigidezza elastica iniziale si rifletta sullo spostamento ultimo, in quanto esso è multiplo dello spostamento al limite elastico ($\delta_u = \mu\delta_y$).

4.7.2 Costruzione del legame momento-curvatura bilineare

Ai fini della modellazione del comportamento flessionale del pannello è possibile definire un legame momento-curvatura semplificato, con legge elastica-perfettamente plastica.

La soglia di resistenza massima in termini di momento è ricavabile dalla (4.1), assumendo $k_{2r}=0.85$.

Il comportamento precedente al raggiungimento della soglia di resistenza, assunto elastico, resta definito dalla sola rigidezza flessionale della sezione del pannello, il che significa che non è considerata la riduzione progressiva della rigidezza per effetto della fessurazione.

L'ulteriore informazione per il completamento del legame è la definizione di un limite deformativo oltre cui assumere la rottura per il meccanismo di flessione considerato. Tale limite può porsi, come detto in precedenza, in termini di massimo drift. Pertanto la curvatura ultima χ_u è quella corrispondente al raggiungimento dello spostamento laterale ultimo per rottura a pressoflessione.

Le normative quantificano i drift massimi distinti per il meccanismo di collasso, proponendo i valori maggiori proprio per le modalità di rottura per *rocking*.

4.7.3 Costruzione del legame momento-curvatura accurato

La messa a punto di un legame momento-curvatura accurato permetterebbe di ovviare a tutte le semplificazioni adottate per il legame con legge elastica-perfettamente plastica, ovvero permetterebbe di portare in conto innanzitutto la perdita progressiva di rigidezza della sezione per effetto della fessurazione, e

quindi di definire la rottura attraverso il controllo del raggiungimento di una curvatura ultima, indipendentemente dallo spostamento laterale raggiunto dal pannello.

Tabella 4.4 – Drift massimi adottati nelle principali normative

Normativa	NTC 2008	EC8 parte III	FEMA 356/306
Comportamento a flessione	0.008 ^a	0.008 H_0/D	0.008 H/D
Comportamento a taglio	0.004	0.004	0.004
Note	^a Nel caso di costruzioni esistenti si assume il valore 0.006 incrementabile fino al 100% se il pannello esibisce un comportamento a mensola (punto C.8.7.1.4).		

Gran parte delle difficoltà che si incontrano nel formulare un legame di questo tipo deriva dalla impossibilità di descrivere in modo immediato la legge costitutiva sforzi-deformazioni della muratura.

In Figura 4.13 è rappresentato l'andamento qualitativo di un diagramma monoassiale tensioni–deformazioni, assumendo positivi gli sforzi di compressione e le deformazioni di contrazione.

Si distinguono:

- un primo tratto OA elastico lineare;
- un tratto AB non lineare, dovuto alla formazione nel materiale murario di zone fessurate, con il punto B che corrisponde alla tensione massima sopportabile dal materiale per schiacciamento;
- un tratto BC di softening in cui la muratura, anche se ampiamente fessurata, non ha ancora perduto completamente la sua capacità statica di sopportare un carico;
- la condizione di rottura (punto C)

- un breve tratto lineare OL di trazione direttamente seguito dalla rottura. Questo tratto comunemente viene trascurato ed approssimato con il segmento OH.

In termini deformativi, guardando alla muratura come ad un materiale omogeneo ed isotropo, si può pensare ad un primo tratto OA a deformazioni reversibili (elastiche) e ad un secondo tratto AC a deformazioni irreversibili (inelastiche), ad un punto C in cui si attinge la massima deformazione consentita dal materiale prima che avvenga la rottura.

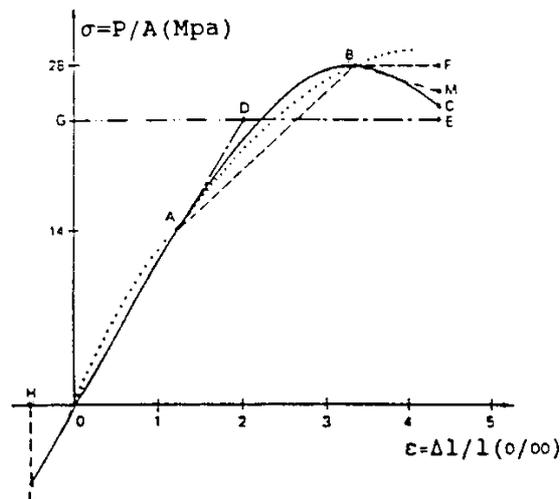


Figura 4.11 - Diagramma qualitativo della legge costitutiva σ - ϵ per la muratura

Il comportamento reale può essere schematizzato, ai fini di una descrizione analitica, in diversi modi. Di seguito si riportano quelli più frequentemente utilizzati, trascurando la resistenza a trazione del materiale:

- modello elastico lineare (tratto OA);
- modello elastico non lineare (tratto punteggiato);

- modello elastico perfettamente plastico (ODE);
- modello elasto-plastico incrudente-perfettamente plastico (OABF).

Una formulazione generale più completa per il legame sforzi-deformazioni delle murature è offerta dalla seguente legge polinomiale:

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = A \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right) + B \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^C \quad (4.9)$$

nella quale σ_u è la resistenza massima a compressione della muratura, ε_u il livello deformativo corrispondente al raggiungimento di σ_u e A, B, C una terna di coefficienti che descrive la forma del legame.

Tali coefficienti non possono assumere un valore qualunque: è possibile infatti verificare che, affinché la curva passi per il punto $(\sigma_u, \varepsilon_u)$ deve risultare:

$$A + B = 1 \quad (4.10)$$

mentre la condizione che nello stesso punto il legame presenti un massimo relativo:

$$\left. \frac{d(\sigma/\sigma_u)}{d(\varepsilon/\varepsilon_u)} \right|_{\varepsilon/\varepsilon_u=1} = \left[A + BC \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^{C-1} \right]_{\varepsilon/\varepsilon_u=1} = 0 \quad (4.11)$$

si traduce nella seguente seconda relazione tra i coefficienti del legame:

$$A + BC = 0 \quad (4.12)$$

La calibrazione dei coefficienti A , B e C può avvenire ovviamente su base sperimentale. Alcune tipiche terne suggerite in letteratura sono ad esempio le seguenti:

- $A=2, B=-1, C=2$ (Hendry, 1981)
- $A=6.4, B=-5.4, C=1.17$ (Turnšek & Sheppard, 1980)

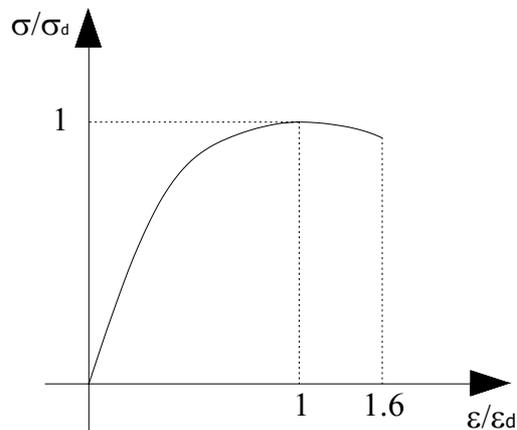


Figura 4.12 - Curva adimensionale tensioni-deformazioni della muratura compressa

La deformazione ultima ε_u per le murature si aggira su valori del 2.5÷3.5‰.

Adottando, per la generalità del risultato, una distribuzione di tensioni data dalla (4.9) e sotto l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, è possibile tracciare il legame momento-curvatura accurato per la muratura.

Si consideri la sezione di un elemento di una parete in muratura di altezza unitaria. Lo stato di tensione e deformazione

della sezione, sia in fase integra che in fase fessurata, è completamente noto se è nota la curvatura χ della sezione e la posizione dell'asse neutro y_c .

Tali quantità possono essere ricavate considerando le equazioni di equilibrio tra le caratteristiche della sollecitazione esterne e le tensioni mobilitate internamente.

Riferendosi allo schema illustrato in (4.13), le caratteristiche della sollecitazione interna sono date da:

$$N = \int_0^{\bar{D}} \sigma \cdot t dy \quad (4.13)$$

$$M = \int_0^{\bar{D}} \sigma \cdot (y_G - y) \cdot t dy \quad (4.14)$$

dove \bar{D} è l'estensione della zona compressa della sezione, e vale D se la sezione è integra, mentre coincide con la profondità dell'asse neutro y_c se la sezione è parzializzata.

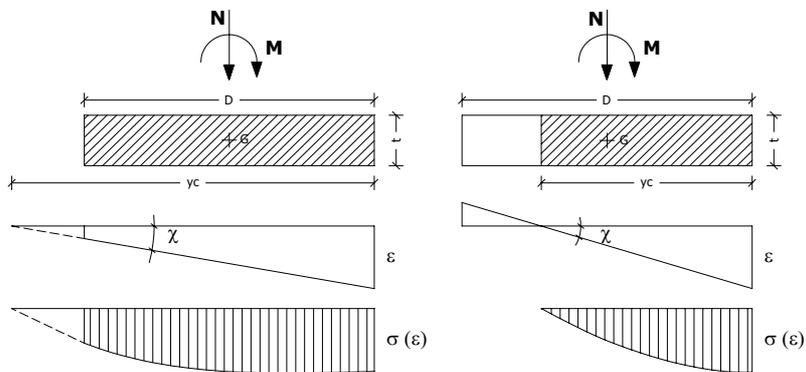


Figura 4.13 – Stato deformativo e tensionale per la sezione integra e fessurata

Per lo sviluppo analitico, è opportuno adimensionalizzare le relazioni di equilibrio e porle nella forma:

$$v = \int_0^{\bar{D}/D} \frac{\sigma}{\sigma_u} d\zeta \quad (4.15)$$

$$\mu = \int_0^{\bar{D}/D} \frac{\sigma}{\sigma_u} \cdot \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) d\zeta \quad (4.16)$$

dove sono state introdotte le seguenti quantità adimensionali:

$$v = \frac{N}{D \cdot t \cdot \sigma_u} \quad \begin{array}{l} \text{sforzo normale } N \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.17)$$

$$\mu = \frac{M}{D^2 \cdot t \cdot \sigma_u} \quad \begin{array}{l} \text{momento flettente } M \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.18)$$

$$\zeta = \frac{y}{D} \quad \begin{array}{l} \text{posizione della fibra} \\ \text{generica } y \text{ adimensionale} \end{array} \quad (4.19)$$

$$\xi = \frac{y_c}{D} \quad \begin{array}{l} \text{posizione dell'asse neutro } y_c \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.20)$$

Sezione integra ($\xi > 1$)

La deformazione della generica fibra della sezione del pannello è esprimibile in funzione della curvatura come:

$$\varepsilon = \chi \cdot (y_c - y) \quad (4.21)$$

Sostituendo la (4.21) nella (4.9) si ottiene:

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = A \left(\frac{\chi D}{\varepsilon_u} \right) (\xi - \zeta) + B \left(\frac{\chi D}{\varepsilon_u} \right)^c (\xi - \zeta)^c \quad (4.22)$$

Definendo le due costanti

$$k_1 = \frac{A}{2} \left(\frac{\chi D}{\varepsilon_u} \right) \quad (4.23)$$

$$k_2 = \frac{B}{C+1} \left(\frac{\chi D}{\varepsilon_u} \right)^C \quad (4.24)$$

la (4.22) diventa:

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = 2k_1 \cdot (\xi - \zeta) + (C+1)k_2 \cdot (\xi - \zeta)^C \quad (4.25)$$

Il legame costitutivo così scritto può sostituirsi nell'equazione (4.15) di equilibrio alla traslazione, particolarizzata al caso della sezione integra:

$$v = \int_0^1 \left[2k_1 \cdot (\xi - \zeta) + (C+1)k_2 \cdot (\xi - \zeta)^C \right] d\zeta \quad (4.26)$$

Tramite semplici passaggi matematici, l'equazione di equilibrio alla traslazione, che permette la determinazione dell'asse neutro ad assegnata curvatura per sezione interamente reagente, diviene:

$$v = k_1 \cdot \left[\xi^2 - (\xi - 1)^2 \right] + k_2 \cdot \left[\xi^{C+1} - (\xi - 1)^{C+1} \right] \quad (4.27)$$

Il momento flettente adimensionale per la curvatura assegnata si ricava dalla (4.16) particolarizzata al caso della sezione integra, sostituendovi la (4.23) e con ξ determinato:

$$\mu = \int_0^1 \left[2k_1 \cdot (\xi - \zeta) + (C+1)k_2 \cdot (\xi - \zeta)^C \right] \cdot \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) d\zeta \quad (4.28)$$

Con semplici passaggi matematici il valore del momento si calcola come:

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{k_1}{2} \cdot \left[\xi^2 + (\xi - 1)^2 \right] + \frac{k_1}{3} \cdot \left[(\xi - 1)^3 - \xi^3 \right] + \\ & + \frac{k_2}{2} \cdot \left[\xi^{C+1} + (\xi - 1)^{C+1} \right] + \frac{k_2}{C+2} \cdot \left[(\xi - 1)^{C+2} - \xi^{C+2} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sezione fessurata ($\xi < 1$)

Nel caso di sezione fessurata, sfruttando ancora la (4.13), particolarizzata al caso della sezione fessurata, e la (4.25), l'equazione di equilibrio alla traslazione diviene:

$$v = \int_0^{\xi} \left[2k_1 \cdot (\xi - \zeta) + (C+1)k_2 \cdot (\xi - \zeta)^C \right] d\zeta \quad (4.30)$$

Svolgendo l'integrale:

$$v = k_1 \cdot \xi^2 + k_2 \cdot \xi^{C+1} \quad (4.31)$$

Una volta ricavato dalla (4.31) il valore di ξ , il momento corrispondente alla curvatura χ imposta vale:

$$\mu = \int_0^{\xi} \left[2k_1 \cdot (\xi - \zeta) + (C+1)k_2 \cdot (\xi - \zeta)^C \right] \cdot \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) d\zeta \quad (4.32)$$

ovvero:

$$\mu = \frac{k_1}{2} \cdot \xi^2 - \frac{k_1}{3} \cdot \xi^3 + \frac{k_2}{2} \cdot \xi^{C+1} - \frac{k_2}{C+2} \cdot \xi^{C+2} \quad (4.33)$$

Il valore della curvatura di prima fessurazione χ_{cr} , che divide il campo di utilizzo delle due formulazioni per sezione integra ($\chi < \chi_{cr}$) e per sezione fessurata ($\chi \geq \chi_{cr}$), può ricavarsi sfruttando la (4.31) ad asse neutro assegnato e pari alla profondità D della sezione ($\xi=1$).

$$\nu = \frac{A}{2} \left(\frac{D}{\varepsilon_u} \right) \chi_{cr} + \frac{B}{C+1} \left(\frac{D}{\varepsilon_u} \right)^C \chi_{cr}^C \quad (4.34)$$

4.7.4 Costruzione del legame taglio-scorrimento

La rottura per taglio avviene al raggiungimento del valore ultimo V_u del taglio nel maschio. Tale valore è scelto come minimo tra quelli proposti dai criteri di rottura per fessurazione diagonale (Equazione (4.4) affiancata dall'equazione (4.3) con i valori dei parametri riportati in Tabella 4.1, oppure equazione (4.5) a seconda della natura della muratura) e per taglio scorrimento (Equazione (4.3) con i valori dei parametri riportati in Tabella 4.1).

Nel caso di rottura per taglio, si suppone che nell'elemento abbiano luogo deformazioni taglianti plastiche senza incrudimento, in cui viene posto un limite alla deformazione angolare $\theta = \phi + \gamma$ (*chord rotation*), oltre il quale la resistenza si annulla.

La deformazione angolare θ all'estremo i del maschio è espressa come somma della deformazione flessionale ϕ e di quella a

taglio γ , ovvero come somma del drift δ e della rotazione nodale α (Figura 4.14).

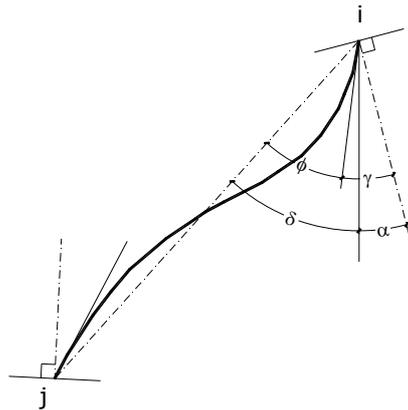


Figura 4.14 – Deformazioni angolari pertinenti all'estremo i di un elemento maschio

Sotto l'azione sismica, poiché la parete è spinta lateralmente dal moto del suolo, si ha $\delta \gg \alpha$ e quindi la domanda di deformazione angolare è approssimata al solo drift.

L'introduzione di un limite di deformazione angolare in sostituzione di un limite in duttilità trae le sue origini dal lavoro già citato di Magenes & Calvi (1997) in cui si è notato che pannelli murari con diversi rapporti di forma portati a rottura per taglio tendono a presentare una dispersione molto contenuta della deformazione angolare ultima, e una dispersione molto maggiore della duttilità ultima in spostamento (Tabella 4.5).

Il comportamento del pannello prima del raggiungimento della soglia di resistenza è assunto elastico, con rigidezza a taglio GA/χ riferita all'intera sezione.

Tabella 4.5 – Drift ultimo e duttilità associati alla rottura per taglio da prove sperimentali quasistatiche su pannelli in muratura con rotazioni impedito agli estremi (Magenes & Calvi, 1997).

Monotonic test				
Wall	H/D	p (MPa)	δ_u/H	δ_u/δ_e
MI1 m	1.33	1.02	8.75×10^{-3}	5.47
Cyclic tests				
Wall	H/D	p (MPa)	δ_u/H	δ_u/δ_e
MI1 (+)	1.33	1.12	5.10×10^{-3}	4.25
MI2 (-)	1.33	0.68	5.95×10^{-3}	2.53
MI3 (+)	2.00	1.24	4.80×10^{-3}	3.27
MI3 (-)	2.00	1.24	4.93×10^{-3}	4.63
MI4 (+)	2.00	0.69	5.00×10^{-3}	1.83
MI4 (-)	2.00	0.69	6.00×10^{-3}	2.28
ISP1 (+)	1.35	0.60	4.37×10^{-3}	4.54
ISP1 (-)	1.35	0.60	5.41×10^{-3}	7.30
ISP3 (+)	1.35	1.08	5.26×10^{-3}	6.45
ISP3 (-)	1.35	1.08	6.15×10^{-3}	7.55
		mean	5.30×10^{-3}	4.46
		c.o.v. (%)	10.90	46.30

Note: MI: tests performed in Pavia; ISP: tests performed in Ispra; (+), (-) respectively positive, negative direction

4.8 MODELLAZIONE DELL'ELEMENTO FASCIA

4.8.1 Generalità

I montanti murari sono il sistema “principale” di resistenza al sisma e ai carichi verticali. Tuttavia, la funzione strutturale delle fasce è tutt'altro che secondaria in quanto, fornendo l'accoppiamento fra i montanti murari, le fasce possono influenzare considerevolmente il meccanismo di risposta di una parete multipiano, incidendo direttamente sul grado di vincolo dei maschi.

Tale influenza è tanto maggiore quanto maggiore è il numero di piani di un edificio (Magenes et al., 2000).

L'adozione frequente di modelli molto semplici (anche suggeriti da norme internazionali come la FEMA 356) del tipo "fasce forti-maschi deboli" o "fasce deboli-maschi forti" rende non necessaria la modellazione di tali elementi.

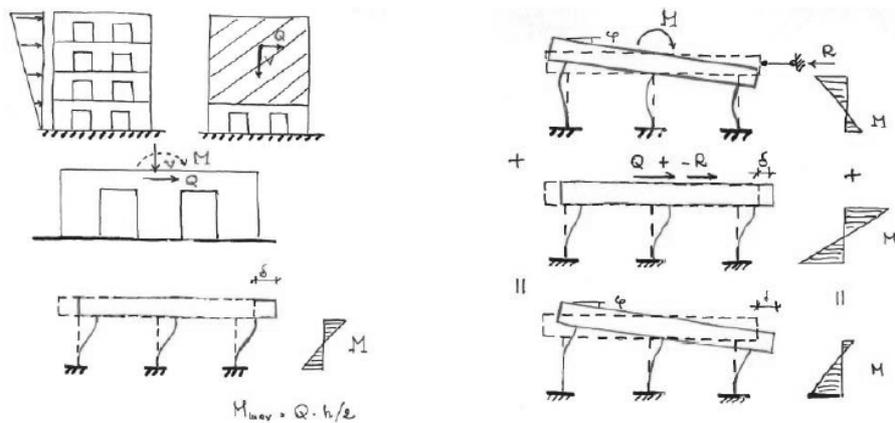


Figura 4.15 – Modello a fasce forti-maschi deboli: rappresentazione concettuale del comportamento di una parete, con o senza la presenza degli effetti dovuti alla variazione degli sforzi normali

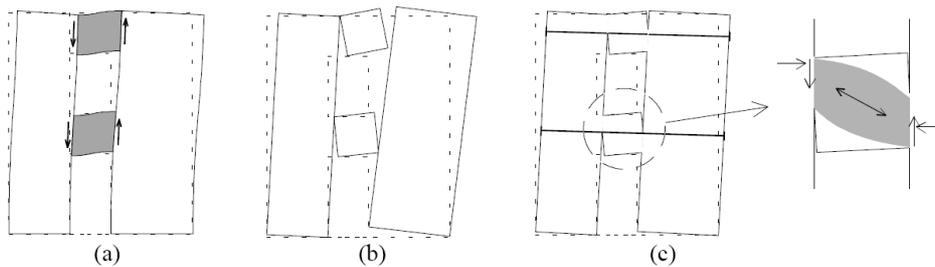


Figura 4.16 – Risposta delle fasce murarie ad azioni di tipo sismico

Il modello “fasce forti-maschi deboli” (Figura 4.15) assume che i maschi si rompono prima delle fasce. Come regola generale tale assunzione è fondata per gli edifici di nuova costruzione nei quali le fasce sono sempre connesse da cordoli e architravi in cemento armato o catene in acciaio. Tali elementi essendo rigidi e in grado di assorbire sforzi di trazione, assicurano un considerevole grado di accoppiamento tra i maschi. Difatti, il meccanismo di Figura 4.16(b) genera una dilatazione globale della parete in senso orizzontale.

Le catene o i cordoli, opponendosi a questa dilatazione, Figura 4.16(c), generano un incremento di compressione delle fasce, che aumenta la resistenza a flessione delle stesse, e instaura un meccanismo a puntone inclinato che garantisce l'accoppiamento dei montanti murari.

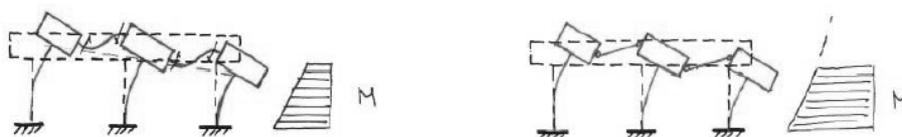


Figura 4.17 - Modello a fasce deboli-maschi forti: rappresentazione concettuale del comportamento di una parete, con o senza il contributo della deformabilità tagliante delle fasce

Negli edifici storici, al contrario, le fasce sono fondamentalmente deboli (i cordoli sono generalmente in legno o muratura, le catene sono assenti, i solai in legno sono flessibili). Pertanto sulla base del modello “fasce deboli-maschi forti” (Figura 4.17), si assume la totale assenza di rigidità e resistenza delle fasce ovvero i maschi si considerano come mensole indipendenti, non accoppiate.

È evidente che entrambi i modelli risultano fortemente limitati nella previsione della risposta della parete specie in quei casi in cui la risposta non lineare della struttura può portare ad un'evoluzione progressiva dei rapporti relativi di rigidità e quindi del grado di accoppiamento.

In modelli più complessi, come quelli a telaio equivalente, le fasce sono generalmente modellate come maschi ruotati di 90° adottandone gli stessi criteri di rottura. A causa dei bassi valori di sforzo normale agente nelle fasce, tali assunzioni portano ad una non realistica predominanza e precocità della rottura per flessione.

Inoltre le condizioni di vincolo delle fasce differiscono di molto da quelle dei maschi, specialmente per l'interconnessione con le altre zone della muratura. Pertanto adottare i risultati sperimentali ottenuti per i maschi nella modellazione delle fasce, senza che siano modificati, può risultare poco accurato (Cattari & Lagomarsino, 2008).

L'analogia con i criteri di rottura proposti per i pannelli di maschio può essere considerata tenendo però presente alcune differenze importanti:

- nel caso di murature regolari (ad es. murature di mattoni o a conci squadrate e regolari) l'orientamento dei letti è parallelo all'asse dell'elemento, che è orizzontale;
- l'azione assiale (risultante di compressione parallela all'asse orizzontale) dovuta ai soli carichi da gravità è solitamente bassa se non nulla.

Questo fa sì che il comportamento flessionale sia fortemente influenzato dai bassi valori di sforzo normale (specie in assenza di elementi capaci di resistere a trazione), mentre il comportamento a taglio, esclusa la possibilità di rotture per scorrimento lungo letti di

malta verticali, è legato al meccanismo di fessurazione diagonale, e dovuto all'interconnessione con le zone di muratura limitrofe.

L'osservazione dei danni causati dal sisma mette in evidenza che i fenomeni di rottura per fessurazione diagonale tendono a prevalere sulle fasce dei piani intermedi, mentre la rottura per flessione interessa principalmente i piani superiori.



Figura 4.18 – Esempi di danni da sisma in edifici in muratura ordinaria

Nel caso di rottura per flessione lo stato limite ultimo è raggiunto per schiacciamento dell'angolo compresso, calcolando la resistenza sulla base della teoria della trave e adottando una opportuna distribuzione di tensioni, che generalmente trascura la resistenza a trazione del materiale, eq. (4.1).

Si ritiene, infatti, che pur potendo essere la resistenza a trazione della muratura in direzione parallela ai letti di malta (nelle murature a tessitura regolare e ben organizzata con conci ben ammorsati) maggiore di quella ortogonale ai letti, comunque resta non di entità tale da renderla affidabile per la resistenza a flessione della fascia stessa (Magenes et al., 2000).

Nel caso, invece, di fessurazione diagonale, se una muratura è a tessitura regolare e ben organizzata con conci ben ammorsati, la resistenza a taglio è principalmente funzione della compressione normale ai letti e, in misura minore, della compressione in direzione parallela ai letti stessi. Quindi, essendo nella sostanza trascurabile la

compressione normale ai letti di una fascia al di sotto delle aperture, la resistenza a taglio di una fascia può essere molto bassa ed è principalmente funzione della coesione offerta dal legante.

Se una muratura è invece di tipo irregolare e mal organizzata, il materiale tende ad avere un comportamento pressoché isotropo, e quindi in linea di principio la fascia può essere trattata come un maschio ruotato di 90°.

Guardando alla normativa italiana NTC 2008, essa pone una distinzione nel criterio di resistenza per flessione delle fasce in funzione delle ipotesi sullo sforzo normale agente (punto 7.8.2.2.4). Se, infatti, lo sforzo normale è noto dall'analisi il comportamento della fascia è sostanzialmente assimilato a quello di un maschio ruotato:

$$M_u = \frac{N \cdot h}{2} \left(1 - \frac{N}{h \cdot t \cdot \kappa f_d} \right) \quad (4.35)$$

essendo h l'altezza della fascia, t lo spessore, f_d la resistenza della muratura in direzione verticale e $\kappa = 0.85$, per una distribuzione di tensione rettangolare tipo stress-block.

Qualora l'azione assiale non sia nota dal modello di calcolo (ad es. quando l'analisi è svolta su modelli a telaio con l'ipotesi di solai infinitamente rigidi nel piano), ma siano presenti, in prossimità della trave in muratura elementi orizzontali dotati di resistenza a trazione (catene, cordoli), i valori delle resistenze potranno essere assunti non superiori a quelli deducibili dalla seguente relazione:

$$M_u = \frac{H_p \cdot h}{2} \left(1 - \frac{H_p}{0.85 f_{hd} \cdot h \cdot t} \right) \quad (4.36)$$

con H_p minimo tra la resistenza a trazione dell'elemento teso disposto orizzontalmente (catena, cordolo) ed il valore $0.4f_{hd}ht$, essendo f_{hd} la resistenza di calcolo a compressione della muratura in direzione orizzontale.

Le formulazioni proposte con la (4.35) e la (4.36) per la resistenza a flessione delle fasce sono in sostanziale accordo con quanto presente in letteratura, ma la decisiva assenza di sforzo normale conduce, tramite la prima delle due, ad una sottostima eccessiva della resistenza dell'elemento e alla ovvia predominanza della rottura per flessione su quella per fessurazione diagonale, diversamente da quanto osservabile da danni sismici su edifici reali.

D'altra parte adottando la seconda formulazione risulta che necessariamente la resistenza per flessione è diversa da zero nel solo caso della presenza di elementi resistenti a trazione.

Stando a quanto detto, è ragionevole assumere un minimo di resistenza delle fasce nei confronti della flessione, diversamente da quanto si farebbe per i maschi, anche in assenza di compressione, se non altro perché in questi le azioni da sisma inducono una sollecitazione di trazione normale ai giunti di malta orizzontali, mentre nelle fasce la trazione è normale a quelli verticali. La risposta conseguente deve essere necessariamente diversa, riconoscendo che la muratura è un materiale anisotropo.

È bene sottolineare che comunque non si è a conoscenza di studi sperimentali orientati a valutare in modo approfondito la resistenza, il comportamento deformativo e la capacità dissipativa delle fasce murarie soggette a sollecitazioni di tipo sismico. Questa situazione rende quindi anche impossibile una discussione approfondita sul comportamento deformativo in fase pre- e post-picco, se non facendo ricorso ad analogie, peraltro non controllate sperimentalmente, con i maschi.

4.8.2 Costruzione del legame momento-curvatura bilineare

Il legame momento-curvatura per l'elemento fascia è formalmente uguale al legame momento-curvatura bilineare già presentato per i maschi murari. Nella sezione in cui viene raggiunto

il momento ultimo è introdotta una cerniera plastica, con ipotesi di comportamento perfettamente plastico indefinito, quindi senza una soglia di deformazione massima il cui raggiungimento segni il collasso dell'elemento per il meccanismo di flessione considerato.

La resistenza flessionale dell'elemento è però assunta differente a seconda della tipologia di muratura. Essendo noto dall'analisi con modello a telaio equivalente lo stato di sforzo assiale presente, in generale si assume una soglia di resistenza massima per flessione in accordo con quanto proposto dalle NTC 2008, ovvero trattando la fascia come un maschio ruotato di 90° (punto 7.8.2.2.4). Tale resistenza è quindi calcolata per il tramite della (4.35).

Per le murature a tessitura regolare e ben organizzate, con conci ben ammorsati, è proposto un criterio di resistenza che non considera più il comportamento no-tension del materiale.

La soglia di resistenza a trazione è calcolata sulla base della teoria riportata in (Kasten & Schubert, 1985; Schubert & Weschke, 1986) per i maschi, e riproposta da Cattari & Lagomarsino (2008) per le fasce.

Questo criterio si basa sul presupposto che la risposta a "puntone equivalente" delle fasce in questo tipo di murature, può sempre attivarsi in virtù dei fenomeni di interconnessione all'interfaccia tra le sezioni terminali e le zone contigue della muratura: di conseguenza può definirsi una resistenza a trazione "equivalente" f_{tu} , che caratterizza la fascia e non la muratura.

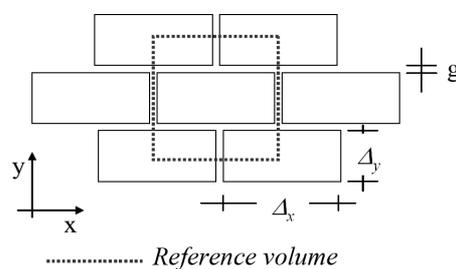


Figura 4.19 – Volume di riferimento nelle sezioni terminali di interfaccia

La formulazione assume come ipotesi principali che la distribuzione delle tensioni di trazione (ortogonali ai giunti di malta verticali) e la distribuzione delle tensioni di taglio (lungo i giunti di malta orizzontali) siano uniformi e che si possano trascurare le proprietà meccaniche dei giunti di malta verticali.

Pertanto, con riferimento al volume di muratura nelle sezioni terminali di interfaccia della fascia (la geometria è descritta in Figura 4.19, con Δ_x larghezza del blocco, Δ_y la sua altezza e g lo spessore del giunto di malta), si considerano due meccanismi di rottura:

- a) rottura per trazione dei blocchi (brick failure)
- b) rottura per taglio dei giunti di malta orizzontali (joint failure).

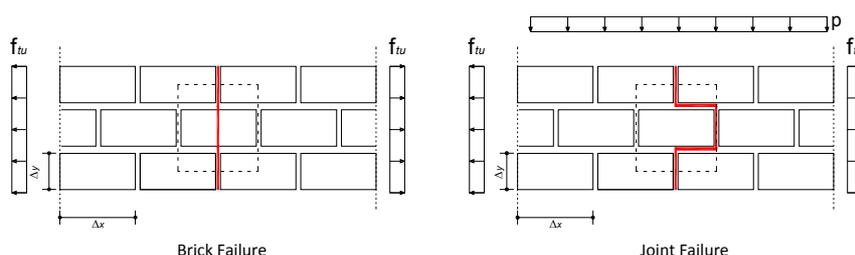


Figura 4.20 – Meccanismi di collasso delle fasce di piano: a) brick failure; b) joint failure

Nel caso del meccanismo a), la condizione di l'equilibrio in direzione orizzontale quando i blocchi raggiungono la resistenza ultima per trazione f_{bt} , porta ad avere:

$$f_{tu,a} = \sigma_x = f_{bt} \frac{\Delta_y}{2(\Delta_y + g)} \cong \frac{f_{bt}}{2} \quad (4.37)$$

dove lo spessore del giunto di malta è stato trascurato, in quanto piccolo rispetto alle dimensioni del blocco.

Nel caso del meccanismo b), poiché non può essere trasferito alcuno sforzo attraverso i giunti di malta, l'equilibrio è garantito dalle tensioni di taglio che si sviluppano lungo i giunti di malta orizzontali.

Se si assume per la malta ancora il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, la tensione di taglio diviene funzione della componente di tensione verticale media $p = \sigma_y$ (normale ai giunti di malta orizzontali) e della coesione c . Pertanto la resistenza a trazione "equivalente" con questo meccanismo può scriversi come:

$$f_{u,b} = (c + \mu\sigma_y) \frac{\Delta_x}{2(\Delta_y + g)} \cong (c + \mu\sigma_y) \frac{\Delta_x}{2\Delta_y} \quad (4.38)$$

dove μ è il coefficiente di attrito.

Ai fini di questi meccanismi, assumono allora un ruolo determinante il parametro interconnessione $\varphi = 2\Delta_y/\Delta_x$ (già presentato a proposito del criterio di Mann e Müller per la fessurazione diagonale) e l'entità dello sforzo σ_y agli estremi della fascia, per il cui valore Cattari e Lagomarsino (2008) assumono il 65% della tensione normale alla base dei maschi adiacenti agli estremi stessi.

Con questo criterio, a differenza di quello della (4.36) le fasce di murature regolari godono, nella modellazione, di un contributo significativo di resistenza nei confronti della flessione.

In definitiva la tensione resistente a trazione "equivalente" si assume come valore minimo di quella associabile ai due meccanismi di rottura a) e b) poc'anzi descritti. Di solito, escludendo le murature con blocchi molto deboli, prevale il meccanismo b). Va inoltre precisato che la rottura per trazione dei blocchi è una rottura fragile, mentre il meccanismo di rottura della malta può ritenersi duttile.

Assumendo una legge costitutiva σ - ε elastica-perfettamente plastica con duttilità ζ_c limitata in compressione, e duttilità ζ_t illimitata in trazione possono tracciarsi i domini di resistenza $M_u=f(N, \zeta_c, \eta)$ essendo con η il rapporto tra la resistenza a trazione “equivalente” f_{tu} e quella a compressione della muratura f_{wc} .

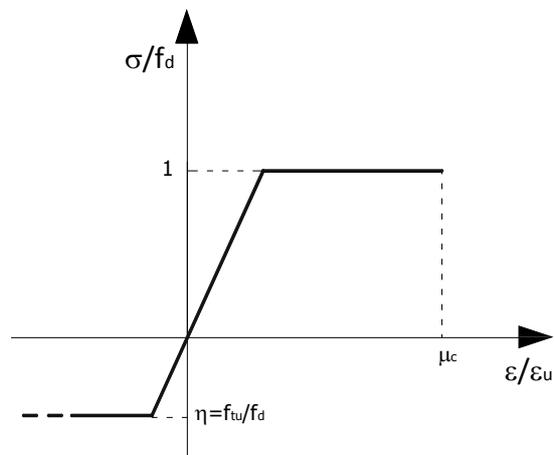


Figura 4.21 – Legame elastico-perfettamente plastico a trazione e a compressione adottato per la modellazione accurata delle fasce di piano

Per la legge costitutiva assunta è possibile procedere in maniera analoga alla teoria tecnica del cemento armato, ossia si individuano zone caratteristiche di un determinato regime di deformazioni (e quindi di tensioni).

In particolare, fissato al bordo superiore della sezione il raggiungimento della deformazione ultima per compressione ε_u , il passaggio da una zona all'altra resta definita dal raggiungimento delle seguenti deformazioni al bordo inferiore:

- deformazione di snervamento per trazione;
- deformazione nulla;
- deformazione di snervamento per compressione.

Zona 1

In zona 1 si verificano deformazioni plastiche sia a compressione, sia a trazione (Figura 4.22).

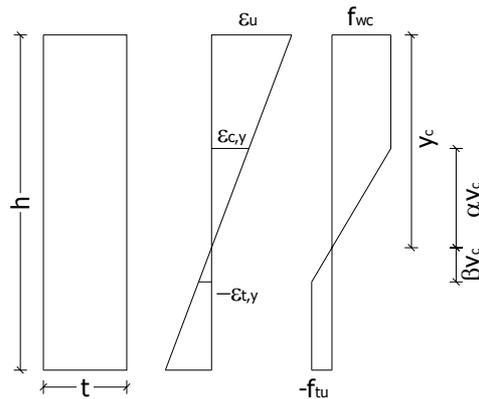


Figura 4.22 - Zona 1

Per la scrittura delle equazioni di equilibrio è necessario innanzitutto definire i coefficienti α e β , che consentono di valutare l'estensione delle zone in campo elastico per compressione e per trazione, rispettivamente. Questo può farsi mediante semplici considerazioni geometriche e meccaniche come di seguito riportato. Infatti, per quanto riguarda α si ha:

$$\frac{\alpha \cdot y_c}{\varepsilon_{c,y}} = \frac{y_c}{\varepsilon_u} \quad (4.39)$$

vale a dire, ricordando la definizione di duttilità:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{c,y}}{\varepsilon_u} = \frac{1}{\zeta_c} \quad (4.40)$$

Operando allo stesso modo per β si scrive la proporzione:

$$\frac{\beta \cdot y_c}{\varepsilon_{t,y}} = \frac{y_c}{\varepsilon_u} \quad (4.41)$$

ovvero:

$$\beta = \frac{\varepsilon_{t,y}}{\varepsilon_u} = \frac{f_{tu}/E}{\zeta_c \cdot f_{wc}/E} = \frac{\eta}{\zeta_c} \quad (4.42)$$

Pertanto i due coefficienti suddetti restano definiti una volta fissato il valore della duttilità in compressione ζ_c e il rapporto tra le tensioni η .

L'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive, allora:

$$N_u = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1 - \alpha) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} - f_{tu} \cdot t \cdot \frac{\beta y_c}{2} - f_{tu} \cdot t (h - y_c \cdot (1 + \beta)) \quad (4.43)$$

Introducendo le seguenti quantità adimensionalizzate:

$$v_u = \frac{N_u}{h t f_{wc}} \quad \begin{array}{l} \text{sforzo normale } N_u \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.44)$$

$$\mu_u = \frac{4 M_u}{h^2 t f_{wc}} \quad \begin{array}{l} \text{momento flettente } M_u \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.45)$$

$$\xi = \frac{y_c}{D} \quad \begin{array}{l} \text{posizione dell'asse neutro } y_c \\ \text{adimensionale} \end{array} \quad (4.46)$$

la (4.43) diviene:

$$v_u = \xi(1-\alpha) + \frac{\alpha\xi}{2} - \frac{\eta\beta}{2} - \eta(1-\xi(1+\beta)) \quad (4.47)$$

La (4.47) permette di determinare la profondità dell'asse neutro:

$$\xi = \frac{v_u + \eta}{1 - \frac{\alpha}{2} + \eta\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} \quad (4.48)$$

Il momento ultimo si ricava dalla scrittura dell'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$\begin{aligned} M_u = & f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1-\alpha) \left(\frac{h}{2} - \frac{y_c}{2} \cdot (1-\alpha) \right) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} \left(\frac{h}{2} - y_c \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \alpha \right) \right) + \\ & - f_{tu} \cdot t \cdot \frac{\beta y_c}{2} \left(\frac{h}{2} - y_c \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \beta \right) \right) - f_{tu} \cdot t (h - y_c \cdot (1+\beta)) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h + y_c (1+\beta)}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Adimensionalizzando la relazione (4.52) il momento flettente ultimo vale:

$$\mu_u = \xi \left[2 - \alpha + \eta(2 + \beta) \right] - \frac{2}{3} \xi^2 \left[3 - 3\alpha + \alpha^2 + \eta(3 + 3\beta + \beta^2) \right] \quad (4.50)$$

Zone 2-3

Nelle due zone successive le equazioni risolventi sono formalmente uguali, anche se in zona 2 la sezione è ancora parzialmente tesa, ma con deformazioni di trazione elastiche (Figura 4.23) mentre in zona 3 la sezione è tutta compressa, con una parte in campo elastico (Figura 4.24)

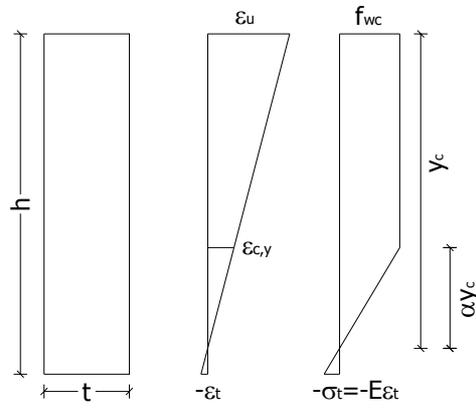


Figura 4.23 - Zona 2

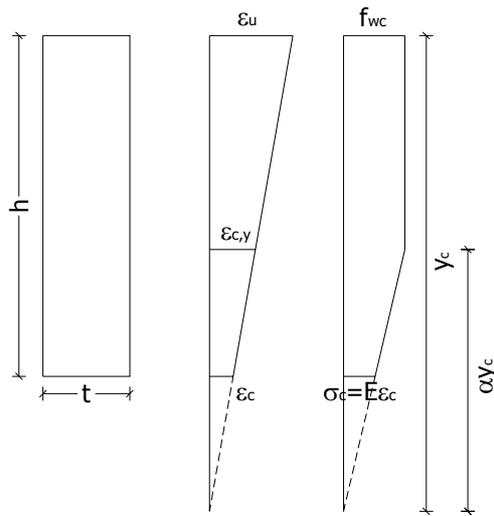


Figura 4.24 - Zona 3

Le equazioni di equilibrio alla traslazione si scrivono, rispettivamente per la zona 2 e la zona 3:

$$N_u = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1 - \alpha) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} - \sigma_t \cdot t \cdot \frac{h - y_c}{2} \quad (4.51)$$

$$N_u = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1 - \alpha) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} - \sigma_c \cdot t \cdot \frac{y_c - h}{2} \quad (4.52)$$

Con le posizioni già viste in precedenza, e con semplici considerazioni geometriche che portano a definire le tensioni come:

$$\sigma_c = E \varepsilon_c = E \varepsilon_u \frac{y_c - h}{y_c} = \zeta_c \cdot f_{wc} \frac{y_c - h}{y_c} \quad (4.53)$$

$$\sigma_t = E \varepsilon_t = E \varepsilon_u \frac{h - y_c}{y_c} = \zeta_c \cdot f_{wc} \frac{h - y_c}{y_c} \quad (4.54)$$

la (4.53) e la (4.54) diventano:

$$\nu_u = \xi (1 - \alpha) + \frac{\alpha \xi}{2} - \zeta_c \frac{(1 - \xi)^2}{2 \xi} \quad (4.55)$$

Dalla (4.55) si ricava la posizione dell'asse neutro adimensionalizzato, che vale:

$$\xi = \frac{\nu_u - \zeta_c + \sqrt{(\nu_u - \zeta_c)^2 + \zeta_c (2 - \alpha - \zeta_c)}}{2 - \alpha - \zeta_c} \quad (4.56)$$

Gli equilibri alla rotazione si scrivono, rispettivamente per la zona 2 e la zona 3:

$$M_u = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1-\alpha) \left(\frac{h}{2} - \frac{y_c}{2} \cdot (1-\alpha) \right) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} \left(\frac{h}{2} - y_c \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \alpha \right) \right) +$$

$$-\sigma_t \cdot t \cdot \frac{h-y_c}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{2h+y_c}{3} \right) \quad (4.57)$$

$$M_u = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1-\alpha) \left(\frac{h}{2} - \frac{y_c}{2} \cdot (1-\alpha) \right) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} \left(\frac{h}{2} - y_c \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \alpha \right) \right) +$$

$$-\sigma_c \cdot t \cdot \frac{y_c-h}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y_c+2h}{3} \right) \quad (4.58)$$

Adimensionalizzando le relazioni (4.57)-(4.58) con le posizioni già viste in precedenza, il momento flettente ultimo vale in entrambi i casi:

$$\mu_u = \xi [2 - \alpha - \zeta_c] - \frac{2}{3} \xi^2 [3 - 3\alpha + \alpha^2 - \zeta_c] + \frac{\zeta_c}{3\xi} \quad (4.59)$$

Zona 4

In zona 4 la sezione è interamente plasticizzata in compressione e, pertanto, risulta $\nu_u = 1$ e $\mu_u = 0$.

Ai fini del tracciamento del dominio limite restano da definire i limiti per il passaggio da una zona all'altra. Essendo la zona 4 una degenerazione della zona 3 e le equazioni che reggono il problema formalmente identiche per la zona 2 e la zona 3, non resta che definire semplicemente il limite tra la zona 1 e la zona 2.

Con riferimento all'implementazione nel codice di calcolo **FREMA**, risulta utile porre tale limite di passaggio in termini di sforzo normale, poiché nell'ambito del flow del programma questa informazione è esplicitamente fornita.

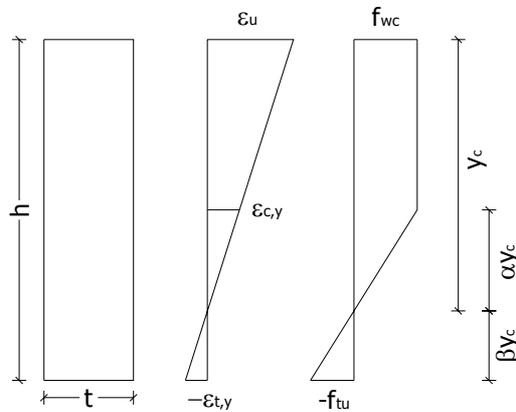


Figura 4.25 – Situazione limite che segna il passaggio dalla zona 1 alla zona 2

È facile verificare che in questa situazione lo sforzo normale $N_{1,2}$ vale:

$$N_{1,2} = f_{wc} \cdot t \cdot y_c (1 - \alpha) + f_{wc} \cdot t \cdot \frac{\alpha y_c}{2} - f_{tu} \cdot t \cdot \frac{\beta y_c}{2} \quad (4.60)$$

Con

$$y_c = h - \beta y_c \Rightarrow y_c = \frac{h}{1 + \beta} \quad (4.61)$$

Sostituendo il valore dell'asse neutro così calcolato nella (4.60) e adimensionalizzando, si ottiene:

$$v_{1,2} = \frac{1}{1 + \beta} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\eta \beta}{2} \right) \quad (4.62)$$

La Figura 4.26 confronta il dominio di resistenza ottenuto in accordo alla NTC 2008 (eq. (4.35)) con il modello fin qui descritto. Il dominio di resistenza è stato ottenuto ponendo $\zeta_c=1.18$, $\zeta_t=\infty$, $\eta=0.1$.

La presenza di una (seppur piccola) resistenza a trazione amplia notevolmente il dominio di resistenza della fascia di piano; in particolare è evidente che anche in assenza di una compressione agente sulla fascia di piano ($N=0$) è possibile ottenere una significativa resistenza flessionale della fascia. Ciò è estremamente significativo dal punto di vista pratico, poiché “ritarda” il collasso delle fasce di piano (rispetto alla formulazione delle NTC 2008) e pertanto modifica sostanzialmente l’intero schema strutturale di una eventuale parete oggetto di analisi.

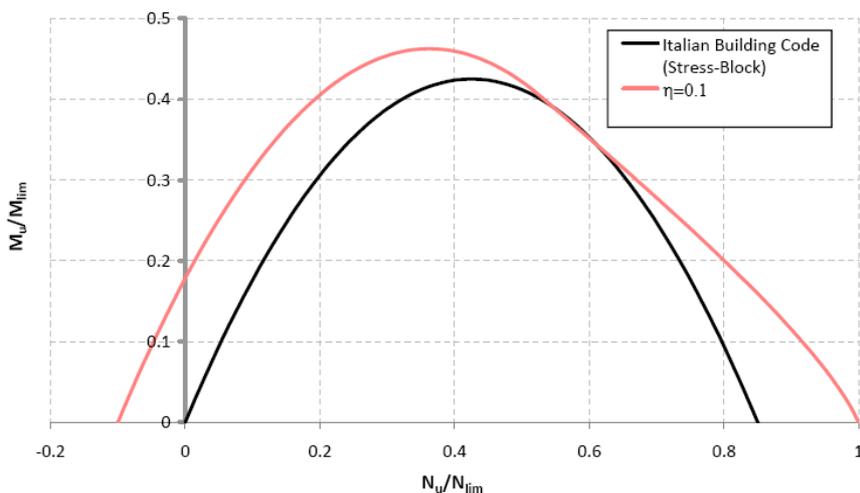


Figura 4.26 – Dominio di resistenza della fascia di piano: confronto tra la proposta della NTC 2008 e il modello di Cattari & Lagomarsino (2008)

4.8.3 Costruzione del legame taglio-scorrimento

La resistenza a taglio della fascia viene espressa con criteri simili a quelli utilizzati per l’elemento maschio, tenendo conto però della diversa giacitura dei letti di malta rispetto alla linea d’asse

dell'elemento e considerando che la compressione normale ai letti di malta al di sotto delle aperture è praticamente nulla.

Nell'implementazione corrente la resistenza a taglio è definita in accordo alla NTC 2008, attraverso la relazione:

$$V_u = htc \quad (4.63)$$

essendo c la coesione, h e t l'altezza della fascia e lo spessore rispettivamente.

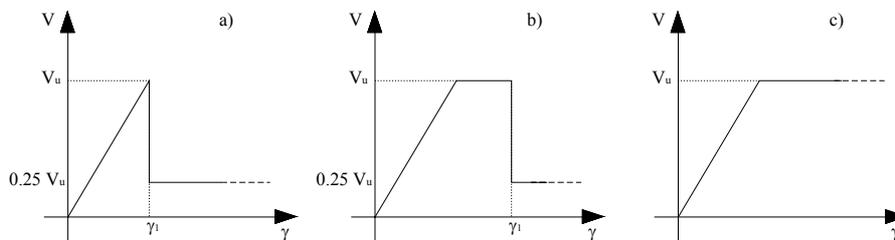


Figura 4.27 – Modellazione delle fasce: a) fasce elasto-fragili; b) fasce elasto-plastiche-fragili; c) fasce elasto-plastiche

Al fine di tener conto della possibilità di un comportamento maggiormente fragile delle fasce, la soglia di resistenza massima può essere mantenuta per un intervallo limitato di deformazione angolare anelastica (fino a γ_1), a cui segue un degrado della resistenza al valore $0.25V_u$, in accordo a quanto suggerito in (Magenes, 2000). A tale degrado segue poi il mantenimento della resistenza residua per valori indefiniti dello scorrimento, Figura 4.27 (a).

La possibilità di assegnare in ingresso il valore del parametro γ_1 consente di riprodurre comportamenti più o meno marcatamente fragili (Gattesco et al., 2010), Figura 4.27 (b), oppure più duttili Figura 4.27 (c).

4.9 BIBLIOGRAFIA

ACI 530-05 (2005). Building Code Requirements for Masonry Structures and Commentary, American Concrete Institute, Farmington Hills.

Benedetti D., Tomaževic M. (1984). Sulla verifica sismica di costruzioni in muratura, *Ingegneria sismica*, **1**:9–16.

Borchelt J. G. (1970). Analysis of brick walls subject to axial compression and in-plane shear, *Proceedings of the 2nd International Brick Masonry Conference*, Stoke-on-Trent.

Cattari, S., Lagomarsino S. (2008). A strength criterion for the flexural behaviour of spandrels in un-reinforced masonry walls, *Proc. of 14th World Conference on Earthquake Engineering*, Beijing, China.

DIN 1053-100 (2004). Masonry: Design on the Basis of Semi-Probabilistic Safety Concept, NABau: Berlin.

D.M. 14.01.2008 (2008). Norme Tecniche per le Costruzioni, Ministero Infrastrutture e Trasporti, Rome, Italy.

ENV 1996-1-1 (2006). Eurocode 6. Design of Masonry Structures. Part 1-1: General Rules for Buildings. Rules for Reinforced and Unreinforced Masonry, CEN: Brussels.

ENV 1998-1 (2005). Eurocode 8. Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures. Part 1-1: General Rules—Seismic Actions and General Requirements for Structures. CEN: Brussels.

FEMA 306 (1998). Evaluation of Earthquake Damaged Concrete and Masonry Wall Buildings—Basic Procedures Manual. ATC: Washington.

FEMA 356 (2000). Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings. ATC: Washington.

Gattesco N., Macorini L., Clemente I., Noè S. (2010). Shear resistance of spandrels in brick masonry buildings, *Proc. of 8th International Masonry Conference*, pp. 2119-2130, Dresden, Germany.

Hendry A. W. (1998). *Structural Masonry* (2nd Ed.), New York: Macmillan.

Kasten D., Schubert P. (1985). Verblendschalen aus Kalksandsteinen: Beanspruchung, rissfreie Wändlänge, Hinweise zur Ausführung, *Bautechnik*, **3**, 86-94.

Magenes G., Calvi G. M. (1997). In-plane seismic response of brick masonry walls, *Earthquake engineering and structural dynamics*, Vol. **26**, 1091-1112.

Magenes G., Bolognini D., Braggio C. (2000). Metodi semplificati per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura, GNDT Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti, Rome, Italy.

Mann W., Müller H. (1980). Failure of shear stressed masonry – An enlarged theory, tests and application to shear-walls, *Proceedings of the International Symposium on Load-Bearing Brickwork*, pp. 223-235, London, UK.

Schubert P., Weschke K. (1986). Verformung und Rissicherheit von Mauerwerk, *Mauerwerk-Kalender*, Ernst & Sohn Ed., 145-159, Berlin, Germany.

Turnšek V., Cacovic F. (1970). Some experimental results on the strength of brick masonry walls, *Proc. of the 2nd International Brick Masonry Conference*, 149-156, Stoke on Trent, UK.

Turnšek V., Sheppard P. (1980). The shear and flexural resistance of masonry walls, *Proc. of the International Research Conference on Earthquake Engineering*, 517-573, Skopje, Macedonia.

5

CALCOLO MATRICIALE DELLE STRUTTURE

Il capitolo 5 analizza le tecniche di analisi matriciale delle strutture intelaiate. Si illustra dapprima la formulazione del problema matriciale dell'asta singola, e successivamente, formulato il problema in forma matriciale per un sistema di aste, si evidenziano le modalità operative di risoluzione del sistema di equazioni attraverso opportune tecniche di fattorizzazione (con particolare riferimento alla fattorizzazione di Wilkinson). A chiusura del capitolo viene presentata la tecnica adottata in sede di programmazione per la realizzazione di un'analisi in controllo di spostamento.

5.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DELL'ANALISI NON LINEARE

In termini generali una struttura soggetta ai carichi distribuiti sulle aste raccolte nel vettore \mathbf{q} , ed alle azioni nodali concentrate \mathbf{t} , è soggetta agli spostamenti nodali \mathbf{s} , che possono essere desunti da una relazione del tipo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) \quad (5.1)$$

dove \mathbf{R} rappresenta la risposta strutturale e \mathbf{F} è il vettore delle azioni nodali equivalenti nello spirito del metodo degli spostamenti o, più in generale, dei metodi matriciali.

Tale relazione esprime in forma sintetica che la risposta strutturale, intesa come insieme delle azioni (\mathbf{t}, \mathbf{q}) da applicare in condizioni di equilibrio alla struttura sottoposta a spostamenti

nodali \mathbf{s} , assegnata la geometria e le caratteristiche geometriche e meccaniche delle membrature, è funzione oltre che dello stesso vettore \mathbf{s} degli spostamenti, anche dei carichi distribuiti \mathbf{q} e delle azioni nodali \mathbf{t} . Infatti, dal carico distribuito e dagli sforzi assiali nelle aste dipende l'andamento delle sollecitazioni sulle membrature e quindi, in campo non lineare, la distribuzione delle deformazioni e delle rigidità.

Analogamente il vettore \mathbf{F} delle azioni nodali, somma delle forze \mathbf{t} applicate direttamente ai nodi e delle azioni di incastro perfetto, dipende dal carico applicato alle membrature e dalla rigidità delle aste, ancora dipendenti dalla distribuzione del carico \mathbf{q} e dagli sforzi assiali nelle aste, a loro volta dipendenti da \mathbf{t} . Nella relazione (5.1) gli spostamenti, oltre a condizionare l'entità delle sollecitazioni nelle membrature, entrano nelle equazioni di equilibrio dei nodi modificando gli angoli con cui le aste si incontrano.

La relazione (5.1) può essere anche rappresentata graficamente con riferimento ad un sistema ad un solo grado di libertà, ottenendo l'andamento riportato in Figura 5.1.

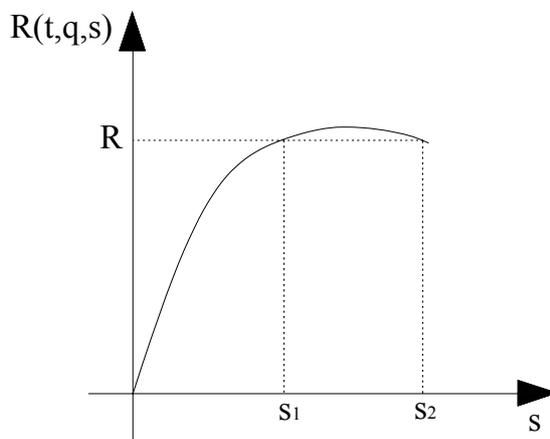


Figura 5.1 – Risposta non lineare di una struttura ad un solo grado di libertà

In tale figura la soluzione $S1$ del problema elastostatico si ottiene quando il valore degli spostamenti \mathbf{s} è tale da corrispondere ad una risposta strutturale $\mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{s})$ sotto i carichi nodali equivalenti $\mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{s})$ che eguagli il valore dei carichi stessi. La figura mette in luce inoltre la possibilità che la soluzione possa, in generale, non essere unica, se non condotta in controllo di spostamenti.

Per ogni passo di carico le operazioni da eseguire hanno natura iterativa dal momento che la determinazione delle sollecitazioni in una struttura iperstatica è legata alla conoscenza delle caratteristiche di rigidità o di deformabilità della struttura stessa, le quali, nel caso di analisi non-lineare, sono connesse alle stesse sollecitazioni che rappresentano le incognite del problema.

In ognuno dei passi corrispondenti ad un incremento di carico si attua un procedimento iterativo che, nella forma di più immediata concezione, è analizzabile nelle seguenti fasi:

- a) soluzione lineare della struttura per il livello di carico relativo al passo corrente (passo i -esimo);
- b) valutazione dei nuovi parametri di deformabilità e di rigidità della struttura per il nuovo campo di sollecitazioni associato al livello di carico corrente, come sarà illustrato nel seguito;
- c) soluzione lineare della struttura sotto i carichi del passo i -esimo con i nuovi parametri di rigidità determinati;
- d) controllo di convergenza degli spostamenti \mathbf{o} , in modo equivalente dei parametri di rigidità, entro limiti preassegnati e, in caso negativo, ritorno alla fase b);
- e) calcolo delle sollecitazioni e delle rotazioni plastiche intervenute e ritorno alla fase a) per un altro incremento di carico (se previsto).

Le fasi a) e c) richiedono la soluzione di problemi lineari consueti con l'unica particolarità che le matrici di rigidezza delle aste sono state calcolate sulla base di deformazioni plastiche più o meno diffuse.

La fase b) è invece caratteristica del procedimento non lineare e permette di associare al campo di sollecitazioni corrente una matrice di rigidezza sempre più coerente fino a che, alla convergenza, nell'asta m si verifica:

$$\mathbf{f}_{m,j}^{(i)} = \mathbf{K}_{m,j-1}^{(i)} \mathbf{s}_{m,j}^{(i)} + \mathbf{f}_{0m,j-1}^{(i)} \cong \mathbf{f}_{m,j-1}^{(i)} \quad (5.2)$$

Essendo $\mathbf{f}_{m,j}^{(i)}$ e $\mathbf{f}_{m,j-1}^{(i)}$ le azioni nodali nelle iterazioni j e $j-1$, sempre all'interno del passo di carico i -esimo e $\mathbf{K}_{m,j-1}^{(i)}$ e $\mathbf{f}_{0m,j-1}^{(i)}$ la matrice di rigidezza e il vettore delle azioni di incastro perfetto nell'iterazione $j-1$, funzioni di $\mathbf{f}_{m,j-1}^{(i)}$ e di $\mathbf{q}_{m,j-1}^{(i)}$ sempre per il passo di carico i -esimo.

La procedura che permette di associare al campo di sollecitazioni del passo i -esimo una nuova matrice di rigidezza ed un nuovo vettore delle azioni di incastro perfetto, parte dalla valutazione dei nuovi coefficienti di deformabilità legati al predetto campo di sollecitazioni.

Pertanto, con riferimento all'asta discretizzata riportata nella Figura 5.2, le caratteristiche della sollecitazione all'ascissa x valgono:

$$V(x) = V_a + q \cdot x \quad (5.3)$$

$$M(x) = -M_a + V_a \cdot x + q_y \cdot \frac{x^2}{2} \quad (5.4)$$

Una volta associato sulla base dei legami costitutivi sezionali ai valori $M(x)_{j+1}$ e $V(x)_{j+1}$ i valori $\gamma(x)_{j+1}$ e $\chi(x)_{j+1}$ delle caratteristiche della deformazione corrispondente, sulla base delle rigidezze

calcolate nell'iterazione j-esima, le nuove rigidezze sezionali relative alla generica sezione considerata diventano:

$$R_V^{(i)}(x)_{j+1} = \frac{V(x)_{j+1}}{\gamma(x)_{j+1}} \quad (5.5)$$

$$R_M^{(i)}(x)_{j+1} = \frac{M(x)_{j+1}}{\chi(x)_{j+1}} \quad (5.6)$$

dove $R_V^{(i)}(x)_{j+1}$ e $R_M^{(i)}(x)_{j+1}$ rappresentano le rigidezze secanti (rispettivamente tagliante e flessionale), rapporto tra le caratteristiche della sollecitazione e corrispondente deformazione ottenuto considerando lo sforzo assiale presente nella medesima membratura.

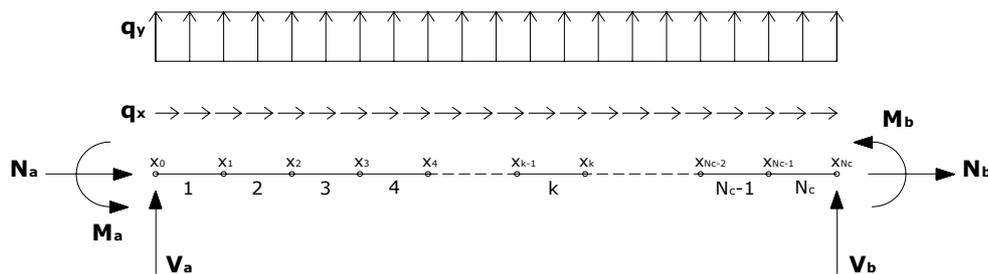


Figura 5.2 - Discretizzazione dell'asta generica

Sulla base delle nuove rigidezze sezionali è allora possibile valutare la matrice di rigidezza ed il vettore delle azioni di incastro perfetto aggiornati.

5.2 COEFFICIENTI DI DEFORMABILITÀ DELL'ASTA SINGOLA

Il calcolo dei coefficienti di deformabilità dell'asta nella generica fase iterativa, prevedendo l'applicazione dei legami

costitutivi non lineari proposti nel Capitolo 3, accompagnati da una variazione generalizzata delle caratteristiche di rigidità flessionale e tagliante lungo l'asse, deve effettuarsi risolvendo gli integrali derivanti dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV nel seguito) sull'asta semplicemente appoggiata e caricata da coppie negli estremi.

In dettaglio occorre definire

- la rotazione $\alpha_{a,b}$ nell'estremo a per una coppia unitaria in a ;
- la rotazione $\alpha_{b,q}$ nell'estremo b per una coppia unitaria in b ;
- la rotazione $\beta_{a,b}$ in a (o in b) per una coppia unitaria in b (o in a);
- le rotazioni $\gamma_{a,b}$ e $\gamma_{b,a}$ prodotte dai carichi e dalle altre azioni esterne.

La valutazione delle deformabilità sopra indicate può effettuarsi, come già detto, con il PLV assumendo come sistema delle forze l'asta caricata da una coppia unitaria nell'estremo in cui si cerca la rotazione, e come sistema delle deformazioni la stessa asta caricata con la coppia unitaria per effetto della quale si cerca la rotazione.

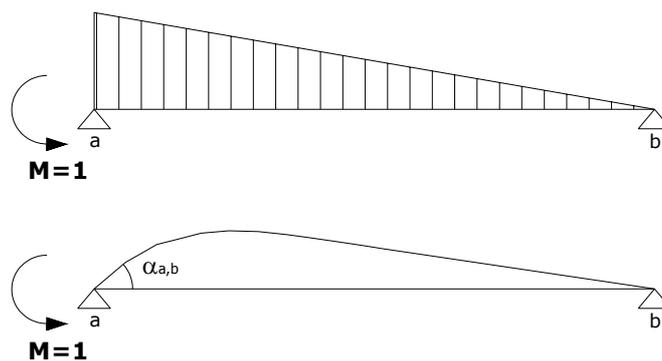


Figura 5.3 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\alpha_{a,b}$

Nel primo caso, ovvero nella valutazione di $\alpha_{a,b}$, i due schemi coincidono (Figura 5.3) e la scrittura dell'equazione $L_e = L_i$ (lavoro esterno = lavoro interno) diventa:

$$\begin{aligned} \alpha_{a,b} \cdot 1 &= \int_0^l \frac{M(x) \cdot M'(x)}{EI(x)} dx + \int_0^l \frac{V(x) \cdot V'(x)}{\frac{GA}{\chi}(x)} dx = \\ &= \int_0^l \frac{(x-l)^2}{l^2 \cdot EI(x)} dx + \int_0^l \frac{1}{l^2 \cdot \frac{GA}{\chi}(x)} dx \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dividendo l'asta in un numero N di conci, caratterizzato ognuno da valori delle rigidezze flessionali e taglianti costanti sulla lunghezza di discretizzazione e pari rispettivamente a $R_{M,k}$ e $R_{V,k}$, con k indice di concio, e calcolate come rigidezze secanti per i valori di sollecitazione corrispondenti all'ascissa $(x_k+x_{k-1})/2$, che individua la mezzeria del concio stesso (si vedano le relazioni (5.5)-(5.6 e la Figura 5.3), $\alpha_{a,b}$ si valuta come:

$$\alpha_{a,b} = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{1}{R_{M,k}} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-l)^2 dx \right) + \frac{1}{l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{1}{R_{V,k}} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \right) \quad (5.8)$$

che con semplici passaggi matematici diventa:

$$\alpha_{a,b} = \frac{1}{3l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{(l-x_{k-1})^3 - (l-x_k)^3}{R_{M,k}} + \frac{1}{l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{x_k - x_{k-1}}{R_{V,k}} \quad (5.9)$$

Con le stesse modalità operative si ricavano gli altri coefficienti di deformabilità del pannello, riportati nelle (5.10) e (5.11).

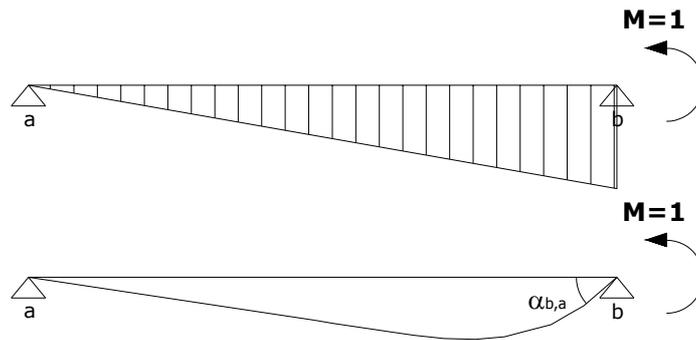


Figura 5.4 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\alpha_{a,b}$

$$\alpha_{b,a} = \int_0^l \frac{x^2}{l^2 \cdot EI(x)} dx + \int_0^l \frac{1}{l^2 \cdot \frac{GA}{\chi}(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{3l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{x_k^3 - x_{k-1}^3}{R_{M,k}} + \frac{1}{l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{x_k - x_{k-1}}{R_{V,k}} \quad (5.10)$$

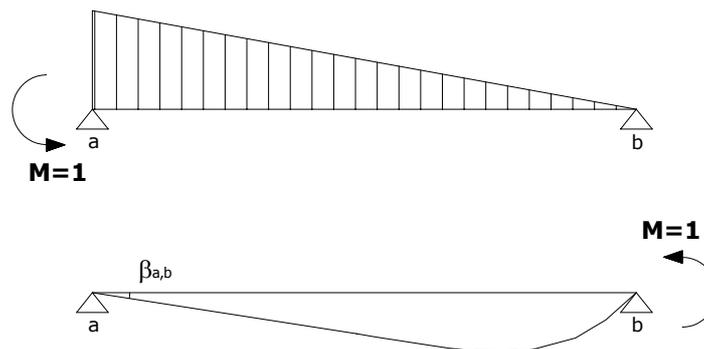


Figura 5.5 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\beta_{a,b}$

$$\beta_{a,b} = \int_0^l \frac{(x-l) \cdot x}{l^2 \cdot EI(x)} dx + \int_0^l \frac{1}{l^2 \cdot \frac{GA}{\chi}(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{6l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{2(x_k^3 - x_{k-1}^3) - 3l(x_k^2 - x_{k-1}^2)}{R_{M,k}} + \frac{1}{l^2} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{x_k - x_{k-1}}{R_{V,k}}$$
(5.11)

Nel seguito, come è d'uso, il coefficiente di deformabilità $\beta_{a,b}$ si assumerà cambiato di segno rispetto al valore calcolato nella (5.11), indicando in forma esplicita il segno negativo, che esprime di fatto che una coppia positiva in a provoca una rotazione negativa in b e viceversa. È altresì evidente, esaminando la forma dell'integrale che vale la relazione $\beta_{a,b} = \beta_{b,a}$.

La valutazione delle rotazioni prodotte da carichi sull'asta si può eseguire sempre utilizzando il PLV, assumendo come schema delle deformazioni l'asta con il diagramma del momento $M_0(x)$, dipendente dalla condizione di carico, e come schema delle forze l'asta caricata da una coppia unitaria nell'estremo in cui si cerca la rotazione.

Indicando con $M'(x)$ il diagramma del momento prodotto dalla coppia unitaria nell'estremo a , il PLV si scrive:

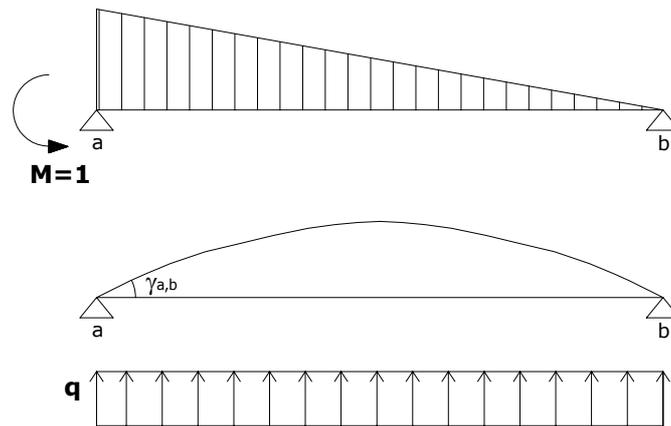


Figura 5.6 – Schemi per il calcolo del coefficiente di deformabilità $\gamma_{a,b}$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{a,b} \cdot 1 &= \int_0^l \frac{M_0(x) \cdot M'(x)}{EI(x)} dx + \int_0^l \frac{V_0(x) \cdot V'(x)}{\frac{GA}{\chi}(x)} dx = \\
 &= \int_0^l \frac{M_0(x) \cdot (x-l)}{l \cdot EI(x)} dx + \int_0^l \frac{V_0(x)}{l \cdot \frac{GA}{\chi}(x)} dx \cong \\
 &\cong \frac{1}{l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{M_{0,k}}{R_{M,k}} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-l) dx \right) + \frac{1}{l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \left(\frac{V_{0,k}}{R_{V,k}} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{M_{0,k} \left[(l-x_k)^2 - (l-x_{k-1})^2 \right]}{R_{M,k}} + \frac{1}{l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{V_{0,k} (x_k - x_{k-1})}{R_{V,k}}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

dove $M_{0,k}$ e $V_{0,k}$ sono i valori del momento e del taglio al centro del concio k -esimo.

Volendo inoltre calcolare la rotazione nell'estremo b , si assume come schema delle forze l'asta caricata da una coppia unitaria in b e si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{b,a} &= \int_0^l \frac{M_0(x) \cdot x}{l \cdot EI(x)} dx + \int_0^l \frac{V_0(x)}{l \cdot \frac{GA}{\chi}(x)} dx \cong \\
 &\cong \frac{1}{2l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{M_{0,k} (x_k^2 - x_{k-1}^2)}{R_{M,k}} + \frac{1}{l} \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \frac{V_{0,k} (x_k - x_{k-1})}{R_{V,k}}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3 COEFFICIENTI DI RIGIDEZZA DELL'ASTA

Per consentire la scrittura della matrice di rigidezza del pannello, è necessario definire preliminarmente i coefficienti di rigidezza a partire da quelli di deformabilità ottenuti al §5.2. Tali coefficienti esprimono le azioni nodali che insorgono per effetto

dell'attivazione di un grado di libertà nodale degli estremi dell'asta. Occorre inoltre valutare le azioni nodali flettenti dipendenti dai carichi applicati lungo l'asta a nodi bloccati alla rotazione (momenti di incastro perfetto).

La finalità sopra evidenziata viene perseguita con la sovrapposizione degli effetti determinando

- il momento $W_{a,b}$ nell'estremo a per effetto di una rotazione unitaria in a ;
- il momento $V_{a,b}$ nell'estremo a per una rotazione unitaria in b ;
- il momento $U_{a,b}$ nell'estremo a per uno spostamento trasversale relativo unitario tra gli estremi a e b .

Le rotazioni e le azioni flettenti corrispondenti si assumono positive se antiorarie, lo spostamento trasversale positivo se ad esso corrisponde una rotazione rigida oraria dell'asta.

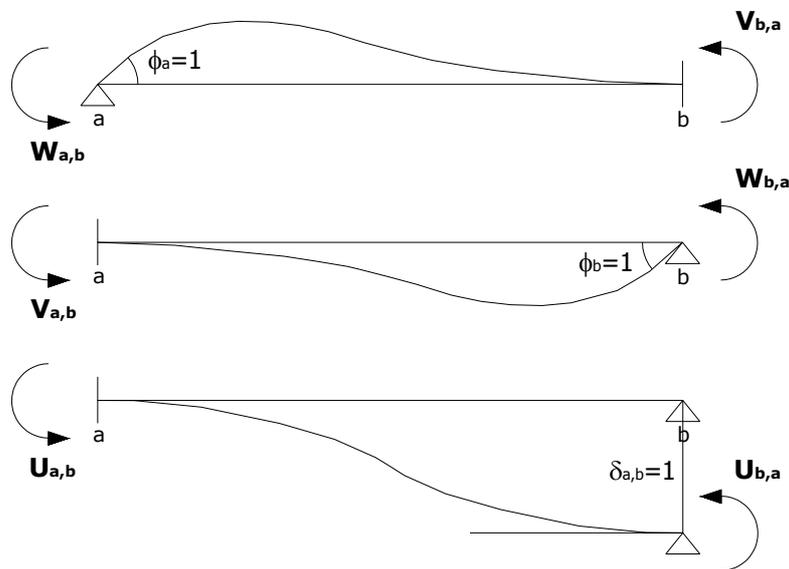


Figura 5.7 - Schemi per il calcolo dei coefficienti di rigidità

Con riferimento alla Figura 5.7, applicando una rotazione unitaria nell'estremo a ed assumendo come schema isostatico equivalente l'asta incernierata negli estremi e caricata con coppie nodali $W_{a,b}$ e $V_{b,a}$, le equazioni di congruenza negli estremi si scrivono:

$$\begin{cases} \alpha_{a,b} \cdot W_{a,b} - \beta_{a,b} \cdot V_{b,a} = 1 \\ -\beta_{a,b} \cdot W_{a,b} + \alpha_{b,a} \cdot V_{b,a} = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

da cui si ricavano i momenti $W_{a,b}$ e $V_{b,a}$ associati alla rotazione unitaria in a :

$$W_{a,b} = \frac{\alpha_{b,a}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.15)$$

$$V_{b,a} = \frac{\beta_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.16)$$

In modo analogo in presenza di una rotazione unitaria nell'estremo b , i momenti in b ($W_{b,a}$) ed in a ($V_{a,b}$) si ricavano dalle equazioni di congruenza seguenti:

$$\begin{cases} \alpha_{a,b} \cdot V_{a,b} - \beta_{a,b} \cdot W_{b,a} = 0 \\ -\beta_{a,b} \cdot V_{b,a} + \alpha_{b,a} \cdot W_{b,a} = 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

I momenti associati alla rotazione unitaria in b risultano pertanto:

$$W_{b,a} = \frac{\alpha_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.18)$$

$$V_{a,b} = \frac{\beta_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.19)$$

Ai fini dell'applicazione dei legami costitutivi definiti nel Capitolo 3, poiché in generale risulterà $\alpha_{a,b} \neq \alpha_{b,a}$, si osserva che:

$$\begin{aligned} W_{a,b} &\neq W_{b,a} \\ V_{a,b} &= V_{b,a} \end{aligned} \quad (5.20)$$

In presenza di uno spostamento trasversale relativo unitario tra i nodi a e b (Figura 5.7), i momenti $U_{a,b}$ ed $U_{b,a}$ si ricavano dalle equazioni di congruenza seguenti, scritte sullo schema isostatico a due appoggi, imponendo rotazioni nulle agli estremi:

$$\begin{cases} \alpha_{a,b} \cdot U_{a,b} - \beta_{a,b} \cdot U_{b,a} - \frac{1}{l} = 0 \\ -\beta_{a,b} \cdot U_{a,b} + \alpha_{b,a} \cdot U_{b,a} - \frac{1}{l} = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

I momenti associati allo spostamento trasversale unitario tra a e b risultano:

$$U_{a,b} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_{b,a} + \beta_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} = \frac{W_{a,b} + V_{a,b}}{l} \quad (5.22)$$

$$U_{b,a} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} = \frac{W_{b,a} + V_{a,b}}{l} \quad (5.23)$$

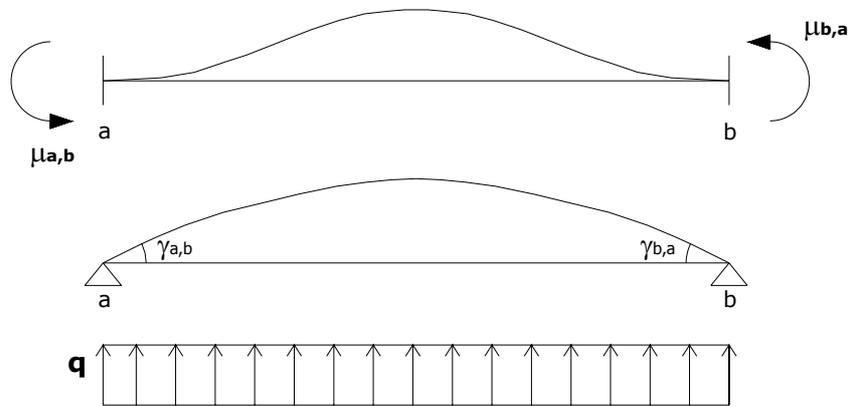


Figura 5.8 – Momenti d'incastro perfetto

Per la valutazione dei momenti di incastro perfetto $\mu_{a,b}$ e $\mu_{b,a}$ (Figura 5.8), conoscendo le azioni prodotte sull'asta incernierata dalle azioni esterne, si può scrivere:

$$\begin{cases} \alpha_{a,b} \cdot \mu_{a,b} - \beta_{a,b} \cdot \mu_{b,a} + \gamma_{a,b} = 0 \\ -\beta_{a,b} \cdot \mu_{a,b} + \alpha_{b,a} \cdot \mu_{b,a} + \gamma_{b,a} = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

I momenti derivanti dalla soluzione del sistema precedente risultano:

$$\mu_{a,b} = -\frac{\alpha_{b,a} \cdot \gamma_{a,b} + \beta_{a,b} \cdot \gamma_{b,a}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.25)$$

$$\mu_{b,a} = -\frac{\alpha_{a,b} \cdot \gamma_{b,a} + \beta_{a,b} \cdot \gamma_{a,b}}{\alpha_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - \beta_{a,b}^2} \quad (5.26)$$

5.4 MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ASTA LIBERA NEL PIANO

Si prenda in considerazione un'asta scarica lungo l'asse. Il suo stato tensionale e deformativo è individuato da sei parametri di

spostamento, tre per ciascun estremo. Con riferimento agli assi x' e y' , di cui il primo in direzione $a-b$, tali parametri di spostamento sono $u_a, v_a, \phi_a, u_b, v_b, \phi_b$ (Figura 5.9).

I sei parametri di forza corrispondenti ai suddetti parametri di spostamento sono nell'ordine: $N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b$ (Figura 5.10).

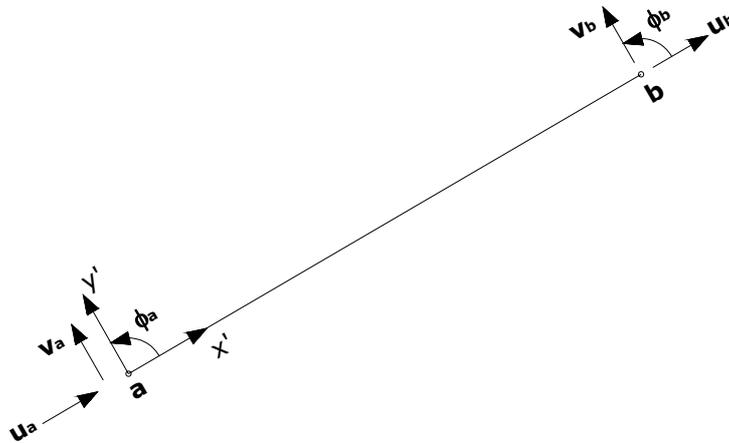


Figura 5.9 – Parametri di spostamento dell'asta libera nel piano

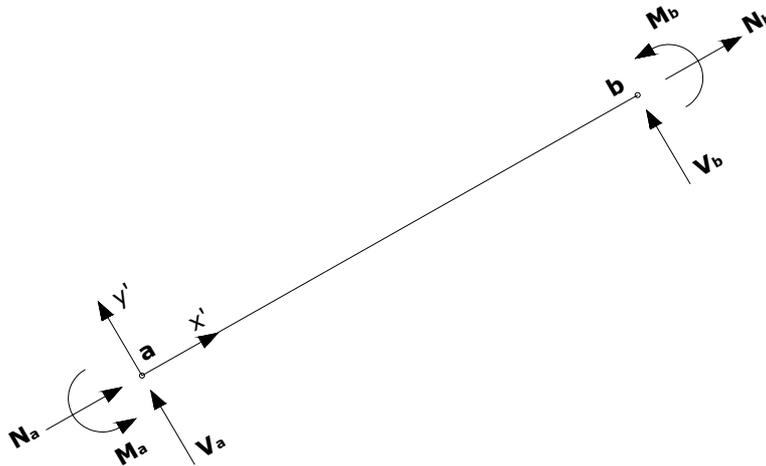


Figura 5.10 – Parametri di forza dell'asta libera nel piano

Allo scopo di instaurare una relazione tra i citati parametri di spostamento ed i corrispondenti parametri di forza, è possibile sfruttare la sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente l'effetto di ciascuno degli spostamenti elementari.

A tal fine si utilizzano le espressioni dei parametri di rigidezza dell'asta dedotti in §5.3, che permettono di portare in conto agevolmente la variazione delle rigidezze lungo l'asse della membratura. Peraltro, considerando anche l'estensibilità assiale delle aste, occorre determinare i parametri di rigidezza assiale $A_{a,b}$, associati ai gradi di libertà u_a e u_b .

La valutazione della deformabilità assiale $\Delta_{a,b}$ di aste a sezione variabile può eseguirsi applicando ancora il PLV. Assumendo come sistema delle forze l'asta caricata con un'azione assiale unitaria nell'estremo a , di cui si cerca lo spostamento, e come sistema delle deformazioni l'asta caricata dall'azione assiale unitaria che produce lo spostamento cercato, si ottiene:

$$\Delta_{a,b} \cdot 1 = \int_0^l \frac{N \cdot N'}{EA(x)} dx = \int_0^l \frac{1}{EA(x)} dx \quad (5.27)$$

da cui si ricava, per inversione, la rigidezza assiale $A_{a,b} = 1/\Delta_{a,b}$.

Trascurando la variazione di rigidezza assiale lungo l'asse, si ha semplicemente $A_{a,b} = EA/l$.

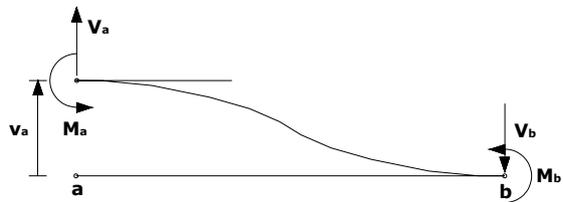
Si riassumono a questo punto le sollecitazioni agenti sull'asta all'attivazione dei sei diversi gradi di libertà:

1. Per $u_a = 1$ e $v_a = \phi_a = u_b = v_b = \phi_b = 0$, si ottiene:



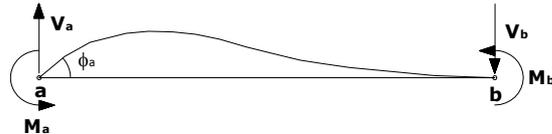
$$\begin{aligned}
 N_a &= A_{a,b} \\
 V_a &= 0 \\
 M_a &= 0 \\
 N_b &= -A_{a,b} \\
 V_b &= 0 \\
 M_b &= 0
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

2. Per $v_a = 1$ e $u_a = \phi_a = u_b = v_b = \phi_b = 0$, si ottiene:



$$\begin{aligned}
 N_a &= 0 \\
 V_a &= \frac{U_{a,b} + U_{b,a}}{l} \\
 M_a &= U_{a,b} \\
 N_b &= 0 \\
 V_b &= -\frac{U_{a,b} + U_{b,a}}{l} \\
 M_b &= U_{b,a}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

3. Per $\phi_a = 1$ e $u_a = v_a = u_b = v_b = \phi_b = 0$, si ottiene:



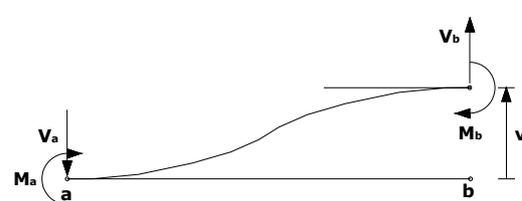
$$\begin{aligned}
 N_a &= 0 \\
 V_a &= U_{a,b} \\
 M_a &= W_{a,b} \\
 N_b &= 0 \\
 V_b &= -U_{a,b} \\
 M_b &= V_{a,b}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

4. Per $u_b = 1$ e $u_a = v_a = \phi_a = v_b = \phi_b = 0$, si ottiene:



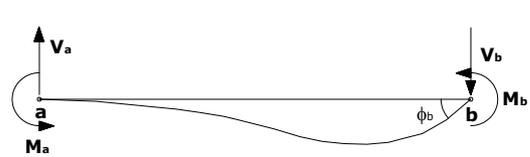
$$\begin{aligned}
 N_a &= -A_{a,b} \\
 V_a &= 0 \\
 M_a &= 0 \\
 N_b &= A_{a,b} \\
 V_b &= 0 \\
 M_b &= 0
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

5. Per $v_b = 1$ e $u_a = v_a = \phi_a = u_b = \phi_b = 0$, si ottiene:



$$\begin{aligned}
 N_a &= 0 \\
 V_a &= -\frac{U_{a,b} + U_{b,a}}{l} \\
 M_a &= -U_{a,b} \\
 N_b &= 0 \\
 V_b &= \frac{U_{a,b} + U_{b,a}}{l} \\
 M_b &= -U_{b,a}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

6. Per $\phi_b = 1$ e $u_a = v_a = \phi_a = u_b = v_b = 0$, si ottiene:



$$\begin{aligned}
 N_a &= 0 \\
 V_a &= U_{b,a} \\
 M_a &= V_{a,b} \\
 N_b &= 0 \\
 V_b &= -U_{b,a} \\
 M_b &= W_{b,a}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Un qualunque stato deformativo dei nodi di estremità espresso dal vettore $\mathbf{s}' = \{u_a, v_a, \phi_a, u_b, v_b, \phi_b\}^T$ produce uno stato di sollecitazione dell'asta ottenibile come combinazione delle espressioni (5.28)-(5.33), ciascuna moltiplicata per il valore dello spostamento cui fa riferimento.

Se si indica con $\mathbf{f}' = \{N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b\}^T$ il vettore delle azioni nodali corrispondenti agli spostamenti \mathbf{s}' , la relazione cercata si esprime in forma sintetica nel seguente modo:

$$\mathbf{K}'\mathbf{s}' = \mathbf{f}' \quad (5.34)$$

con \mathbf{K}' matrice di rigidezza dell'asta libera nel piano:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} A_{a,b} & 0 & 0 & -A_{a,b} & 0 & 0 \\ 0 & (U_{a,b} + U_{b,a})/l & U_{a,b} & 0 & -(U_{a,b} + U_{b,a})/l & U_{b,a} \\ 0 & U_{a,b} & W_{a,b} & 0 & -U_{a,b} & V_{a,b} \\ -A_{a,b} & 0 & 0 & A_{a,b} & 0 & 0 \\ 0 & -(U_{a,b} + U_{b,a})/l & -U_{a,b} & 0 & (U_{a,b} + U_{b,a})/l & -U_{b,a} \\ 0 & U_{b,a} & V_{a,b} & 0 & -U_{b,a} & W_{b,a} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

5.5 MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ASTA CON TRATTI RIGIDI DI ESTREMITÀ

La presenza delle zone di nodo, schematizzate come tratti rigidi di estremità, porta ad una modifica della matrice di rigidezza definita nella (5.35) che in generale rappresenterà la matrice di rigidezza del solo tronco deformabile dell'asta.

Con riferimento alla Figura 5.11, si indicano con l_a e l_b rispettivamente la lunghezza dei due tratti rigidi adiacenti ai nodi a e b dell'asta. Inoltre si rinominano il vettore $\mathbf{s}' = \{u_a, v_a, \phi_a, u_b, v_b, \phi_b\}^T$ in $\mathbf{s}_d' = \{u_a^{(d)}, v_a^{(d)}, \phi_a^{(d)}, u_b^{(d)}, v_b^{(d)}, \phi_b^{(d)}\}^T$, in quanto raccoglie gli spostamenti nodali del solo tratto deformabile di lunghezza l_d , e in modo analogo si rinomina il vettore delle azioni nodali $\mathbf{f}' = \{N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b\}^T$ in $\mathbf{f}_d' = \{N_a^{(d)}, V_a^{(d)}, M_a^{(d)}, N_b^{(d)}, V_b^{(d)}, M_b^{(d)}\}^T$ e \mathbf{K}' come \mathbf{K}_d' .

La (5.34) diviene allora:

$$\mathbf{K}_d'\mathbf{s}_d' = \mathbf{f}_d' \quad (5.36)$$

mentre l'equazione:

$$\mathbf{K}'\mathbf{s}' = \mathbf{f}' \quad (5.37)$$

farà riferimento all'asta di estremi a e b comprensiva dei tratti rigidi.

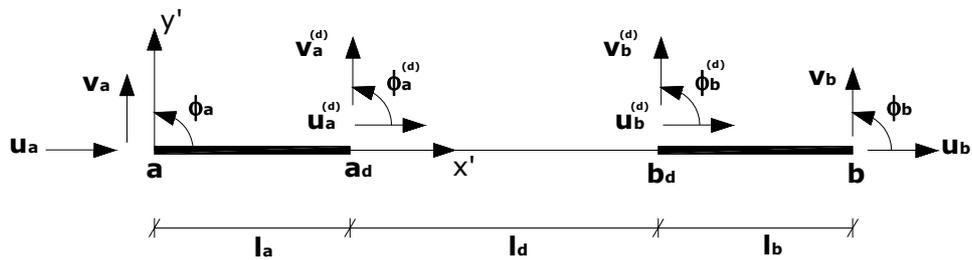


Figura 5.11 - Parametri di spostamento dell'asta con tratti rigidi

Data l'infinita rigidezza dei due tratti terminali, è possibile esprimere facilmente gli spostamenti dei nodi a_d e b_d , che delimitano la sola parte deformabile dell'asta, in funzione degli spostamenti dei nodi a e b :

$$\begin{aligned} u_a^{(d)} &= u_a \\ v_a^{(d)} &= v_a + \varphi_a \cdot l_a \\ \varphi_a^{(d)} &= \varphi_a \\ u_b^{(d)} &= u_b \\ v_b^{(d)} &= v_b - \varphi_b \cdot l_b \\ \varphi_b^{(d)} &= \varphi_b \end{aligned} \quad (5.38)$$

ed in forma matriciale:

$$\mathbf{s}'_d = \mathbf{R}\mathbf{s}' \quad (5.39)$$

dove la matrice \mathbf{R} vale:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Seguendo lo stesso procedimento si esprimono le azioni ai nodi a e b in funzione di quelle ai nodi a_d e b_d (Figura 5.12):

$$\begin{aligned} N_a &= N_a^{(d)} \\ V_a &= V_a^{(d)} \\ M_a &= M_a^{(d)} + V_a^{(d)} \cdot l_a \\ N_b &= N_b^{(d)} \\ V_b &= V_b^{(d)} \\ M_b &= M_b^{(d)} - V_b^{(d)} \cdot l_b \end{aligned} \quad (5.41)$$

ed in forma matriciale:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R}^T \mathbf{f}'_d \quad (5.42)$$

essendo \mathbf{R}^T la matrice trasposta di \mathbf{R} .

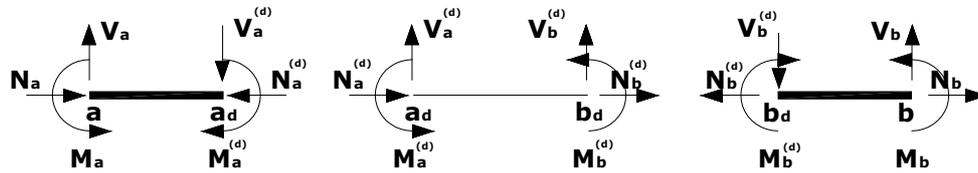


Figura 5.12 – Parametri di forza dell'asta con tratti rigidi

Sostituendo la (5.36) nella (5.42) si ottiene:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_d' \mathbf{s}_d' \quad (5.43)$$

e quindi poi la (5.39) nella (5.43):

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_d' \mathbf{R} \mathbf{s}' \quad (5.44)$$

e confrontando con la (5.37), si ha che la matrice di rigidezza dell'asta con tratti rigidi \mathbf{K}' è ottenibile da quella per il solo tratto deformabile \mathbf{K}_d' , ricavata in §5.4, per il tramite della relazione:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_d' \mathbf{R} \quad (5.45)$$

È importante rilevare che la matrice \mathbf{K}' non è invertibile, ovvero, assegnato un qualunque sistema di forze \mathbf{f}' , non è possibile determinare un unico sistema \mathbf{s}' di spostamenti nodali corrispondenti.

Infatti se \mathbf{K}' fosse invertibile, il sistema $\mathbf{K}' \mathbf{s}' = \mathbf{0}$ dovrebbe avere la sola soluzione banale $\mathbf{s}' = \mathbf{0}$. Al contrario tale sistema ha tutte le soluzioni cui non corrisponde deformazione dell'asta, cioè le soluzioni che individuano i moti rigidi dell'asta.

Per ottenere una matrice invertibile, che consenta di determinare gli spostamenti nodali a partire dalle forze applicate,

occorre considerare un'asta in cui siano impediti i moti rigidi (asta non labile) e pertanto sia applicabile un qualsiasi sistema di forze. Dell'introduzione delle condizioni vincolari si parlerà nel seguito, dove si presenta l'impostazione matriciale dell'algoritmo per la risoluzione lineare di una struttura piana intelaiata.

5.6 VETTORE DELLE AZIONI DI INCASTRO PERFETTO DELL'ASTA

La presenza di carichi applicati all'asta modifica la relazione tra azioni esterne e spostamenti nel modo seguente:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\mathbf{s}' + \mathbf{f}_0' \quad (5.46)$$

dove \mathbf{f}_0' rappresenta il vettore delle azioni di incastro perfetto (ovvero per spostamenti nodali nulli) dovute ai carichi applicati.

Considerando, come già evidenziato in precedenza, solo distribuzioni di carico costanti, sia in direzione parallela all'asse del pannello (q_x), sia in direzione ortogonale allo stesso (q_y) (Figura 5.13), si ha:

$$\mathbf{f}_0' = \begin{Bmatrix} N_{0,a} \\ V_{0,a} \\ M_{0,a} \\ N_{0,b} \\ V_{0,b} \\ M_{0,b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{0,a}^{(d)} \\ V_{0,a}^{(d)} \\ \mu_{a,b}^{(d)} \\ N_{0,b}^{(d)} \\ V_{0,b}^{(d)} \\ \mu_{b,a}^{(d)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -q_x \cdot l_a \\ -q_y \cdot l_a \\ V_{0,a}^{(d)} \cdot l_a - \frac{q_y \cdot l_a^2}{2} \\ -q_x \cdot l_b \\ -q_y \cdot l_b \\ -V_{0,b}^{(d)} \cdot l_b + \frac{q \cdot l_b^2}{2} \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

dove il primo addendo del vettore \mathbf{f}_0' riporta le azioni di incastro perfetto sul solo tratto deformabile, ovvero agli estremi a_d e b_d ,

mentre il secondo aggiunge il contributo a tali azioni per la presenza dei tronchi rigidi e dei carichi agenti su di essi.

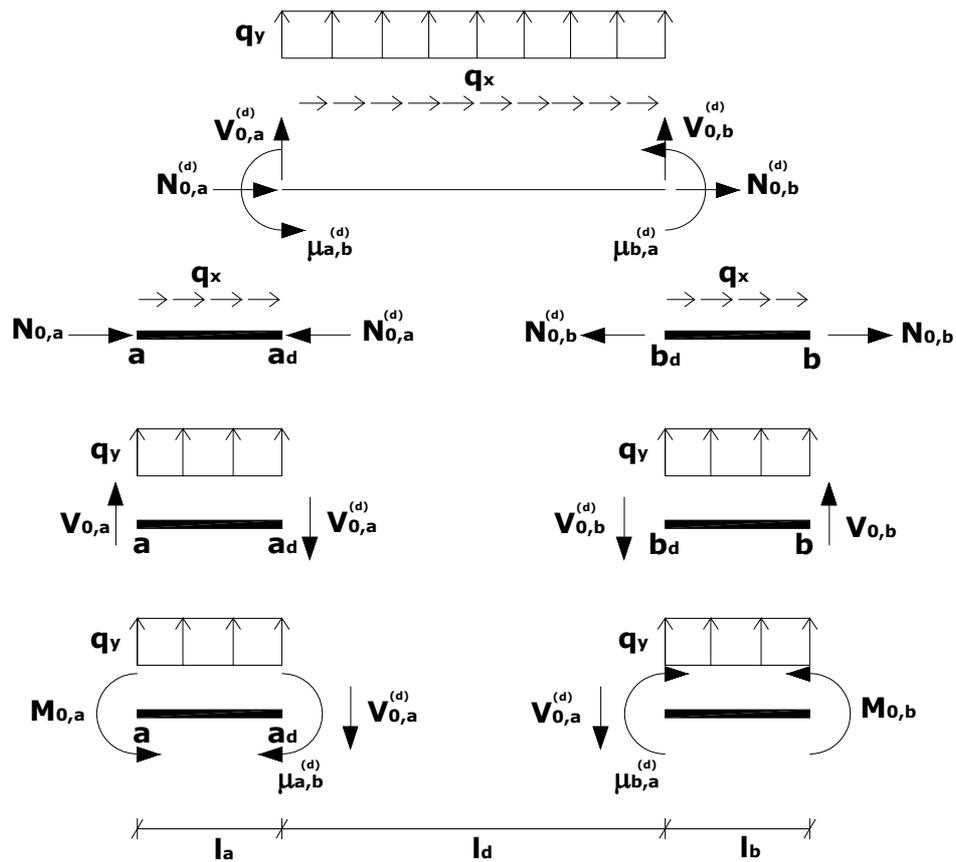


Figura 5.13 – Schemi di equilibrio per il calcolo delle azioni di incastro perfetto

Esplicitando tutti i contributi, il vettore \mathbf{f}_0 delle azioni di incastro perfetto per l'asta con tratti rigidi si calcola come:

$$\mathbf{f}_0' = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{p \cdot l_d}{2} \\ -\frac{q \cdot l_d}{2} + \frac{\mu_{a,b}^{(d)} + \mu_{b,a}^{(d)}}{l_d} \\ \mu_{a,b}^{(d)} \\ -\frac{p \cdot l_d}{2} \\ -\frac{q \cdot l_d}{2} - \frac{\mu_{a,b}^{(d)} + \mu_{b,a}^{(d)}}{l_d} \\ \mu_{b,a}^{(d)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} -p \cdot l_a \\ -q \cdot l_a \\ \left(-\frac{q \cdot l_d}{2} + \frac{\mu_{a,b}^{(d)} + \mu_{b,a}^{(d)}}{l_d} \right) \cdot l_a - \frac{q \cdot l_a^2}{2} \\ -p \cdot l_b \\ -q \cdot l_b \\ \left(\frac{q \cdot l_d}{2} + \frac{\mu_{a,b}^{(d)} + \mu_{b,a}^{(d)}}{l_d} \right) \cdot l_b + \frac{q \cdot l_b^2}{2} \end{array} \right\} \quad (5.48)$$

5.7 ANALISI MATRICIALE DI STRUTTURE INTELAIATE

L'algoritmo di calcolo del singolo pannello fin qui definito ha condotto alla scrittura dell'equazione:

$$\mathbf{f}_m' = \mathbf{K}_m' \mathbf{s}_m' + \mathbf{f}_{0,m}' \quad (5.49)$$

dove il pedice m indica che la relazione è scritta per l' m -esima asta.

Al fine di giungere alla stessa relazione, ma per l'intero modello del telaio, è necessario innanzitutto riportare la (5.49) al sistema di riferimento globale, in quanto in questa fase essa risulta definita per il sistema di riferimento locale, diverso per ogni asta. Questo può farsi con considerazione puramente geometriche. Infatti, se si indica con γ l'angolo di rotazione del riferimento locale rispetto a quello globale (Figura 5.14), risulta:

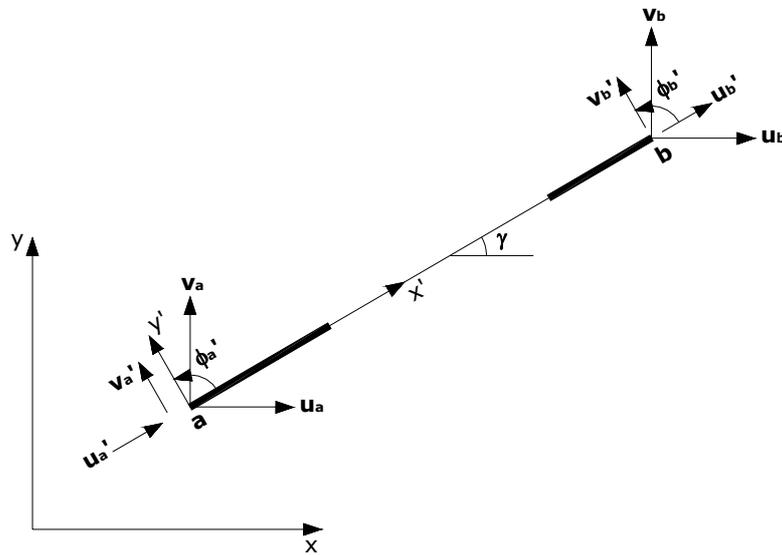


Figura 5.14 - Riferimento globale e riferimento locale.

$$\begin{aligned}
 u_a' &= u_a \cdot \cos \gamma + v_a \cdot \sin \gamma \\
 v_a' &= -u_a \cdot \sin \gamma + v_a \cdot \cos \gamma \\
 \varphi_a' &= \varphi_a \\
 u_b' &= u_b \cdot \cos \gamma + v_b \cdot \sin \gamma \\
 v_b' &= -u_b \cdot \sin \gamma + v_b \cdot \cos \gamma \\
 \varphi_b' &= \varphi_b
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

Pertanto la matrice \mathbf{T}_m , che permette di ottenere gli spostamenti locali \mathbf{s}'_m in funzione di quelli espressi nel riferimento globale $\mathbf{s}_m = \{u_a, v_a, \varphi_a, u_b, v_b, \varphi_b\}^T$ tramite la relazione:

$$\mathbf{s}'_m = \mathbf{T}_m \mathbf{s}_m
 \tag{5.51}$$

vale:

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Uguagliando il lavoro compiuto dalle forze nei due sistemi, si ottiene:

$$\mathbf{f}_m^T \mathbf{s}_m = \mathbf{f}_m'^T \mathbf{s}_m' \quad (5.53)$$

Sostituendo la (5.51) nella (5.53) si ha:

$$\mathbf{f}_m^T \mathbf{s}_m = \mathbf{f}_m'^T \mathbf{T}_m \mathbf{s}_m \quad (5.54)$$

Eliminando dalla (5.54) il vettore \mathbf{s}_m e trasponendo, il vettore delle forze \mathbf{f}_m nel sistema di riferimento globale si scrive:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{T}_m^T \mathbf{f}_m' \quad (5.55)$$

Per ottenere la matrice di rigidezza \mathbf{K}_m dell'asta m -esima nel sistema di riferimento globale, basta premoltiplicare ambo i membri della (5.49) per \mathbf{T}_m^T e utilizzare la (5.51):

$$\mathbf{T}_m^T \mathbf{f}_m' = \mathbf{T}_m^T \mathbf{K}_m' \mathbf{T}_m \mathbf{s}_m + \mathbf{T}_m^T \mathbf{f}_{0,m}' \quad (5.56)$$

che per la (5.55) diventa:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{s}_m + \mathbf{f}_{0,m} \quad (5.57)$$

avendo indicato con:

- $\mathbf{K}_m = \mathbf{T}_m^T \mathbf{K}'_m \mathbf{T}_m$ la matrice di rigidezza dell'asta nel sistema di riferimento globale;
- $\mathbf{f}_{0,m} = \mathbf{T}_m^T \mathbf{f}'_{0,m}$ il vettore delle azioni di incastro perfetto nel sistema di riferimento globale.

Prima di passare all'assemblaggio della matrice di rigidezza dell'intera struttura, è utile eseguire la seguente partizione della matrice di rigidezza dell'asta:

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^m & \mathbf{K}_{ab}^m \\ \mathbf{K}_{ba}^m & \mathbf{K}_{bb}^m \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

dove $\mathbf{K}_{aa}^m, \mathbf{K}_{ab}^m, \mathbf{K}_{ba}^m, \mathbf{K}_{bb}^m$ sono le sottomatrici di ordine 3 che esprimono la relazione tra gli spostamenti nel primo nodo menzionato e le forze applicate nell'altro, espressi nel sistema di riferimento globale.

Lo stesso può farsi con gli altri termini della (5.57):

$$\mathbf{f}_m^T = \{ \mathbf{f}_a^{mT}, \mathbf{f}_b^{mT} \} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{f}_{0,m}^T = \{ \mathbf{f}_{0,a}^{mT}, \mathbf{f}_{0,b}^{mT} \} \quad (5.60)$$

$$\mathbf{s}_m^T = \{ \mathbf{s}_{0,a}^{mT}, \mathbf{s}_{0,b}^{mT} \} \quad (5.61)$$

essendo i nuovi termini introdotti, con chiaro significato dei simboli, le forze, le azioni di incastro perfetto e gli spostamenti agli estremi a, b dell'asta generica nel riferimento globale.

Ai fini dell'operazione di assemblaggio, si definiscono i vettori espansi delle forze, delle azioni di incastro perfetto e degli spostamenti come vettori di dimensione $3N$ (con N numero di nodi della struttura) e termini tutti nulli ad esclusione di quelli corrispondenti ai nodi dell'asta m :

$$\mathbf{f}_m^e = \{ \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{f}_a^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{f}_b^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T \} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{f}_{0,m}^e = \{ \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{f}_{0,a}^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{f}_{0,b}^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T \} \quad (5.63)$$

$$\mathbf{s}_m^e = \{ \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{s}_a^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, \mathbf{s}_b^{mT}, \mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T \} \quad (5.64)$$

Analogamente si definisce la matrice espansa dell'asta m come la matrice di dimensione $3N \times 3N$ con termini tutti nulli ad esclusione di quelli corrispondenti ai nodi dell'asta m . Indicando con $\mathbf{0}$ la matrice quadrata di ordine 3 con elementi tutti nulli si ottiene:

$$\mathbf{K}_m^e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & \mathbf{K}_{aa}^m & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{K}_{ab}^m & . & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & \mathbf{K}_{ba}^m & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{K}_{bb}^m & . & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Con le posizioni introdotte è possibile scrivere:

$$\mathbf{f}_m^e = \mathbf{K}_m^e \mathbf{s}_m^e + \mathbf{f}_{0,m}^e = \mathbf{K}_m^e \mathbf{s} + \mathbf{f}_{0,m}^e \quad (5.66)$$

La sostituzione effettuata di \mathbf{s}_m^e con \mathbf{s} , vettore degli spostamenti nodali dell'intera struttura nel sistema di riferimento globale, è lecita in quanto i termini non nulli di \mathbf{s} moltiplicano colonne nulle delle matrici.

Sommando le equazioni (5.66) relative a tutte le aste si ottiene:

$$\sum_m \mathbf{f}_m^e = \left(\sum_m \mathbf{K}_m^e \right) \mathbf{s} + \sum_m \mathbf{f}_{0,m}^e \quad (5.67)$$

da cui si ricava la matrice della struttura \mathbf{K} come somma della matrici espanse \mathbf{K}_m^e :

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}_m^e \quad (5.68)$$

Inoltre ponendo:

$$\mathbf{f} = \sum_m \mathbf{f}_m^e \quad (5.69)$$

$$\mathbf{f}_0 = \sum_m \mathbf{f}_{0,m}^e \quad (5.70)$$

si ha:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{f}_0 \quad (5.71)$$

Come si è fatto notare per la singola asta, anche per l'intera struttura la matrice \mathbf{K} non è invertibile, ovvero, assegnato un

qualunque sistema di forze \mathbf{f}^* , non è possibile determinare un unico sistema \mathbf{s}^* di spostamenti nodali corrispondenti.

L'introduzione delle condizioni di vincolo prevede:

- l'azzeramento delle righe e delle colonne della matrice \mathbf{K} corrispondenti ai gradi di libertà impediti;
- la sostituzione con il valore 1 del termine sulla diagonale in corrispondenza dei suddetti gradi di libertà, ottenendo la matrice \mathbf{K}_v ;
- l'azzeramento dei termini del vettore $\mathbf{f}-\mathbf{f}_0$ corrispondenti ai gradi di libertà impediti, ottenendo il vettore \mathbf{f}_v .

Il sistema così modificato

$$\mathbf{K}_v \mathbf{s} = \mathbf{f}_v \quad (5.72)$$

è invertibile, avendo eliminato (ponendoli forzatamente pari a 0) i gradi di libertà che rendevano labile la struttura.

Da un punto di vista operativo, una volta ottenuto il vettore \mathbf{s} degli spostamenti nodali della struttura, si estrapolano da questo, asta per asta, i vettori \mathbf{s}_m di ordine 6 degli spostamenti agli estremi; tramite la (5.51) si riportano al sistema di riferimento locale e, infine, con l'uso della (5.49) si determinano le corrispondenti azioni nodali \mathbf{f}_m .

Il vettore degli spostamenti \mathbf{s} della struttura nel riferimento globale si ricava risolvendo con una tecnica qualsiasi il sistema lineare (5.72). Ai fini dell'implementazione della procedura nel codice di calcolo **FREMA**, si è adoperata la procedura di fattorizzazione di Wilkinson, brevemente descritta nel seguito.

Considerando il sistema:

$$\mathbf{Ks} = \mathbf{f} \quad (5.73)$$

la matrice \mathbf{K} può scriversi come prodotto di più matrici:

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (5.74)$$

dove \mathbf{V} è una opportuna matrice triangolare superiore e \mathbf{D} una matrice diagonale.

La (5.73) diviene allora:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{s} = \mathbf{V}^T \mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (5.75)$$

avendo introdotto il vettore $\mathbf{z} = \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{s}$.

Il pregio della fattorizzazione consiste nel ridurre il sistema di partenza di n equazioni in n incognite in due sistemi della stessa dimensione, ma di rapida risoluzione. Infatti i sistemi:

$$\mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{s} = \mathbf{z} \quad (5.76)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (5.77)$$

per le proprietà della matrice \mathbf{V} , possono risolversi “a cascata”, ovvero, determinata un’incognita, la successiva sarà funzione solo di questa.

I termini della matrice triangolare superiore \mathbf{V} godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= 1, & \text{per } i = j \\ v_{ij} &\neq 0, & \text{per } i < j \\ v_{ij} &= 0, & \text{per } i > j \end{aligned} \quad (5.78)$$

mentre per i termini della matrice diagonale \mathbf{D} si ha:

$$\begin{aligned} d_{ij} &\neq 0, \quad \text{per } i = j \\ d_{ij} &= 0, \quad \text{per } i \neq j \end{aligned} \quad (5.79)$$

Se si indica con $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{V}$ il prodotto tra le due matrici, il generico termine di b_{ij} di \mathbf{B} vale:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik} v_{kj} = d_{ii} v_{ij} \quad (5.80)$$

e, quindi, il generico termine k_{ij} di $\mathbf{K} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}$, ricordando le (5.78) vale:

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^n v_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^i v_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^i v_{ki} d_{kk} v_{kj} = d_{ii} v_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} d_{kk} v_{kj} \quad (5.81)$$

A questo punto i termini non nulli d_{ii} di \mathbf{D} (per i quali risulta $i=j$) si calcolano come:

$$d_{ii} = k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} d_{kk} v_{ki} \quad (5.82)$$

mentre per i termini non nulli o unitari di \mathbf{V} ($i < j$) risulta:

$$v_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} d_{kk} v_{kj}}{d_{ii}} \quad (5.83)$$

Pertanto, dalla (5.82) con valore unitario dell'indice i , si ricava d_{11} e a seguire si derivano dalla (5.83) tutti i termini v_{1j} , con $j>1$; saranno a questo punto disponibili tutte le informazioni per il calcolo di d_{22} , ancora con la (5.82), e quindi dei valori v_{2j} , con $j>2$, tramite la (5.83) e così via per tutti fino a saturazione degli indici i .

Note le matrici \mathbf{D} e \mathbf{V} , la soluzione del sistema (5.76) si scrive:

$$z_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} z_k \quad (5.84)$$

con i variabile da 1 a n , mentre, una volta nota quest'ultima, la soluzione del sistema (5.77), soluzione anche del sistema (5.75), si ricerca come:

$$s_i = \frac{z_i}{d_{ii}} - \sum_{k=i+1}^n v_{ik} s_k \quad (5.85)$$

con i variabile da n a 1.

5.8 ANALISI NON LINEARE IN CONTROLLO DI SPOSTAMENTO

Sia \mathbf{f} il vettore delle forze esterne applicate alla struttura e lo si esprima nella forma:

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{p} + \mathbf{f}_f \quad (5.86)$$

dove:

- \mathbf{f}_f è la parte fissa del vettore delle forze, dovuta ai carichi mantenuti costanti nel corso del processo di deformazione (generalmente i carichi verticali);

- \mathbf{p} è il vettore forma della parte variabile dei carichi agenti sulla struttura, ovvero dei carichi orizzontali applicati ai fini dell'analisi pushover, amplificato dal moltiplicatore α .

Si indichi ora con $\boldsymbol{\delta}$ il vettore degli spostamenti nodali del telaio e con δ la sua n -esima componente, rappresentante lo spostamento orizzontale del nodo di controllo.

L'obiettivo dell'analisi è la determinazione del valore del moltiplicatore α corrispondente al generico valore $\delta = \bar{\delta}$ dello spostamento imposto al nodo di controllo.

Si consideri, dapprima, che il sistema sia lineare. In tal caso, si ha:

$$\alpha \mathbf{p} + \mathbf{f}_f = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (5.87)$$

essendo \mathbf{K} la matrice di rigidezza del sistema non labile (\mathbf{K} è invertibile).

Per $\alpha = 0$, risulta dalla (5.86):

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_0 \quad (5.88)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_f \quad (5.89)$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\delta}_0$ il vettore degli spostamenti determinati da \mathbf{f}_f .

Noto $\boldsymbol{\delta}_0$, la (5.87) può essere riscritta nella forma:

$$\alpha \mathbf{p} + \mathbf{K} \delta_0 = \mathbf{K} \delta \quad (5.90)$$

$$\alpha \mathbf{p} = \mathbf{K} (\delta - \delta_0) \quad (5.91)$$

dove $\delta - \delta_0$ è il vettore degli spostamenti dovuto alla sola parte variabile del vettore delle forze.

Si consideri adesso un altro particolare valore di α e lo si indichi con α_1 (sia ad esempio $\alpha_1 = 1$).

Detto δ_1 il corrispondente vettore degli spostamenti, dalla (5.90) deriva:

$$\alpha_1 \mathbf{p} + \mathbf{K} \delta_0 = \mathbf{K} \delta_1 \quad (5.92)$$

$$\alpha_1 \mathbf{p} = \mathbf{K} (\delta_1 - \delta_0) \quad (5.93)$$

dove $\delta_1 - \delta_0$ è il vettore degli spostamenti dovuto alla sola parte variabile del vettore delle forze.

Per inversione del sistema (5.93) si determina il vettore $\delta_1 - \delta_0$:

$$\delta_1 - \delta_0 = \alpha_1 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (5.94)$$

Siano ora δ_1 e δ_0 le componenti di δ_1 e δ_0 , rispettivamente, corrispondenti allo spostamento controllato. Per la supposta linearità del sistema, il moltiplicatore $\bar{\alpha}$ corrispondente al generico valore $\bar{\delta}$ dello spostamento imposto si può determinare dalla seguente condizione:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_1} \cdot (\delta_1 - \delta_0) + \delta_0 = \bar{\delta} \quad (5.95)$$

ovvero:

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \cdot \frac{\bar{\delta} - \delta_0}{\delta_1 - \delta_0} \quad (5.96)$$

Le relazioni viste in precedenza restano valide in presenza di non linearità geometrica e di non linearità meccanica, a patto che \mathbf{K} sia la matrice di rigidezza secante del sistema.

Pertanto, noto $\bar{\alpha}$ dalla (5.96), il vettore degli spostamenti del telaio, conseguente all'applicazione dello spostamento imposto al nodo di controllo, vale:

$$\bar{\delta} = \delta_0 + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_1} (\delta_1 - \delta_0) \quad (5.97)$$

Tale vettore degli spostamenti consente di aggiornare le coordinate nodali (non linearità geometrica) e di determinare le azioni interne con la procedura vista in §5.1 a valle della risoluzione del sistema (5.72).

Note le azioni interne è immediato aggiornare la matrice di rigidezza dell'intero sistema mediante l'applicazione, asta per asta, dei legami costitutivi descritti nel Capitolo 3, con le modalità operative descritte in questo capitolo.

Con la nuova matrice di rigidezza secante, assemblata con riferimento alla struttura con le coordinate aggiornate, si ricavano un nuovo vettore δ_0 , che al passo i -esimo vale:

$$\delta_{0,i} = \mathbf{K}_{\text{sec},i-1}^{-1} \mathbf{f}_f \quad (5.98)$$

e un nuovo vettore $\delta_1 - \delta_0$, che al passo i -esimo vale:

$$(\delta_1 - \delta_0)_i = \alpha_1 \mathbf{K}_{\text{sec},i-1}^{-1} \mathbf{P} \quad (5.99)$$

Questi consentono il calcolo del corrispondente moltiplicatore delle azioni orizzontali:

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_1 \cdot \frac{(\bar{\delta} - \delta_{0,i})}{\delta_{1,i} - \delta_{0,i}} \quad (5.100)$$

e del nuovo vettore degli spostamenti nodali:

$$\bar{\delta}_i = \delta_{0,i} + \frac{\bar{\alpha}_i}{\alpha_1} (\delta_1 - \delta_0)_i \quad (5.101)$$

che con la procedura già descritta permettono di determinare la matrice di rigidezza secante $\mathbf{K}_{\text{sec},i}$.

La convergenza viene raggiunta quando in due iterazioni successive la matrice di rigidezza secante del sistema risulta praticamente invariata:

$$\left| K_{\text{sec},i} - K_{\text{sec},i-1} \right| < \varepsilon \quad (5.102)$$

con ε valore di tolleranza sulla differenza tra i termini omonimi della matrice di rigidezza secante in due iterazioni successive. Se la (5.102) non è soddisfatta, l'iterazione $i+1$ parte assumendo come matrice di rigidezza del sistema proprio $\mathbf{K}_{\text{sec},i}$.

Raggiunta la convergenza si fissa un nuovo valore $\bar{\delta}$ dello spostamento del nodo di controllo e si assume l'ultima matrice di

rigidezza secante calcolata come punto di partenza. Si fa notare infine che all'inizio dell'intero processo di analisi la matrice di rigidezza secante del sistema coincide con quella elastica.

5.9 BIBLIOGRAFIA

Di seguito sono elencati alcuni riferimenti bibliografici che, pur non richiamati direttamente nel testo del capitolo, vengono indicati quali utili riferimenti alla modellazione matriciale delle strutture e più in generale alla modellazione agli elementi finiti.

Bathe K.J. (1996). *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc.

Brebbia C.A., Connor J.J. (1993). *Fondamenti del metodo agli elementi finiti*, Città Studi Ed.

Capurso M. (1977). *Introduzione al Calcolo Automatico delle Strutture*, Cremonese, Roma.

Cesari F. (1997a). *Calcolo automatico di strutture con comportamento non lineare*, Pitagora Editrice, Bologna.

Cesari F. (1997b). *Introduzione al metodo degli elementi finiti*, Pitagora Editrice, Bologna.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000). *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann.

6

IL CODICE DI CALCOLO FREMA

In questo capitolo il codice di calcolo FREMA viene descritto nelle sue principali caratteristiche, illustrando in particolar modo la modalità di input a disposizione dell'utente. Nella seconda parte del capitolo, il codice di calcolo viene validato attraverso il confronto tra le previsioni del modello e un esteso set di risultati sia sperimentali (prove su singoli pannelli, prove su edifici in scala 1:1) che numerici (modellazioni agli elementi finiti, campagne di simulazione numerica) disponibili in letteratura. Tale validazione costituisce al tempo stesso una prima applicazione del codice, le cui previsioni risultano ben allineate con i modelli di letteratura.

6.1 PREMESSA

Il modello a telaio equivalente **FREMA**, la cui impostazione matriciale è stata presentata nel capitolo 5, e che sfrutta i legami costitutivi non lineari messi a punto nel Capitolo 4, è un software implementato in un foglio elettronico di Microsoft Excel 2007 tramite il linguaggio di programmazione Microsoft Visual Basic 6.3.

L'intuitiva interfaccia grafica presenta all'utente un foglio di input (denominato appunto "input"), e due fogli di output (denominati "risultati dell'analisi" e "curva pushover").

Nei paragrafi successivi sono illustrate le modalità con cui può essere implementata un'analisi statica non lineare di una parete in muratura attraverso il codice **FREMA**, seguendo tutte le procedure di input e la lettura dei risultati.

6.2 L'INPUT

6.2.1 Geometria del telaio equivalente

L'implementazione di un'analisi statica non lineare con il codice **FREMA** richiede preliminarmente la definizione dello schema di telaio sulla parete oggetto dell'analisi. Questo significa che l'utente deve compiere le seguenti operazioni:

1. individuazione delle linee d'asse degli elementi verticali (maschi ed elementi rigidi) ed orizzontali (fasce, cordoli ed elementi rigidi), che delineano lo schema di telaio equivalente;
2. numerazione delle aste e dei nodi d'intersezione, utilizzando due numerazioni distinte;
3. individuazione dei tratti rigidi di estremità delle aste; nel seguito si farà riferimento al criterio proposto da (Dolce, 1989, 1991).

Con queste tre operazioni si conclude la fase preliminare all'inserimento dei dati nel foglio "input" (Figura 6.1). Relativamente a questa fase dello sviluppo, il programma è preimpostato per un numero massimo di 500 nodi e 500 aste.

L'input della geometria prevede pertanto di riportare il numero dei nodi, il numero delle aste e il numero di piani della parete.

Relativamente ai nodi, saranno indicati il codice e le coordinate nel sistema di riferimento globale, costituito da una coppia d'assi levogira con origine scelta a discrezione dell'utente e con l'asse y verticale, e verso opposto a quello della gravità.

Sui nodi si applicano le forze nodali esterne, con versi positivi se concordi con quelli del sistema globale, e i codici di vincolo dei tre gradi di libertà nel piano, con la possibilità di bloccare (introducendo il codice 1) le due traslazioni e la rotazione. È appena il caso di notare

che le aste del telaio non possono essere inserite con connessioni parziali ai nodi della struttura, ovvero non possono essere introdotte cerniere interne.

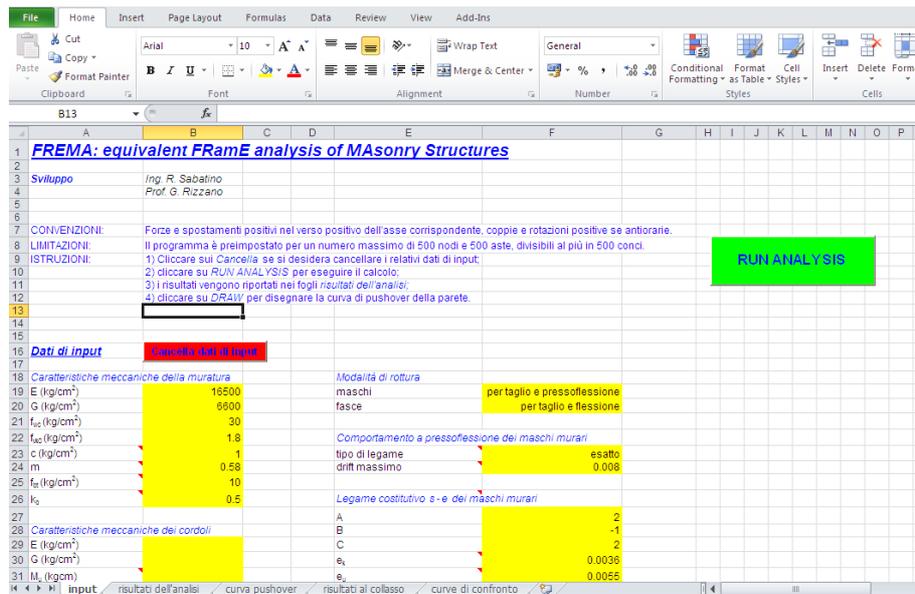


Figura 6.1 – Screenshot del foglio di input

Per quanto riguarda le aste, invece, l'input della geometria prevede di indicare il codice definito nelle operazioni preliminari, il codice dei due nodi di estremità, le caratteristiche sezionali (altezza, spessore, area e modulo d'inerzia), nonché la tipologia delle stesse, avendo la possibilità di scegliere da un menù a tendina tra: "maschio", "fascia", "cordolo" e "rigido", definendo in questo modo come l'asta sarà trattata da un punto di vista del comportamento meccanico (si veda il Capitolo 4).

Solo per i maschi si indicherà anche il numero di piano a cui appartengono: questo è sfruttato per arrestare l'analisi all'attivazione di un meccanismo di piano e per segnalare all'utente le modalità con cui la parete giunge al collasso.

Le lunghezze dei tratti rigidi vanno riportate nelle colonne “a” e “b”, che si riferiscono rispettivamente ai tratti rigidi posizionati in adiacenza ai nodi indicati nelle colonne “nodo i” e “nodo j”.

È possibile l'introduzione di carichi con distribuzione costante lungo l'asse, sia in direzione parallela, sia in direzione ortogonale allo stesso. Tali carichi vanno inseriti con riferimento al sistema di assi locale per ogni singola asta. Tale sistema è ancora levogiro, con l'asse x' coincidente con l'asse della membratura e verso che va dal “nodo i” al “nodo j”.

A questo punto può dirsi conclusa la fase di definizione della geometria del modello a telaio equivalente.

6.2.2 Parametri meccanici

L'altra parte del foglio di input è dedicata agli aspetti meccanici e di analisi. In particolare i parametri da inserire sono raggruppati nelle seguenti categorie:

- caratteristiche meccaniche della muratura;
- caratteristiche meccaniche dei cordoli;
- modalità di rottura;
- comportamento a pressoflessione dei maschi murari;
- legame costitutivo σ - ε dei maschi murari;
- comportamento a taglio dei maschi murari;
- comportamento a taglio delle fasce murarie;
- definizione delle modalità di analisi;
- vettore forma delle azioni variabili orizzontali.

Con riferimento alle caratteristiche meccaniche della muratura, vanno definiti:

- il modulo di Young della muratura E [MPa];

- il modulo di elasticità tangenziale G [MPa];
- la resistenza a compressione della muratura f_{wc} [MPa];
- la resistenza a taglio in assenza di sforzo normale f_{vk0} [MPa];
- la coesione della malta c [MPa], che in mancanza di dati specifici può assumersi uguale a f_{vk0} ;
- il coefficiente di attrito interno μ [-];
- la resistenza a trazione dei blocchi lapidei f_{bt} [MPa], necessaria se per i maschi si sceglie il criterio di resistenza a taglio per fessurazione diagonale di Mann & Müller e/o per le fasce il criterio di resistenza a flessione di Kasten & Schubert;
- il rapporto tra l'altezza e la larghezza del blocco lapideo k_b [-], anch'esso necessario per l'applicazione dei criteri di Mann & Müller e Kasten & Schubert.

Per quanto concerne invece i cordoli, si indicano il modulo elastico E_c [MPa] del calcestruzzo, il modulo di elasticità tangenziale G [MPa] e il momento ultimo M_u [kNm], che si assume indipendente dallo sforzo normale agente nell'elemento. Il valore del momento sarà, in particolare, positivo se i cordoli si modellano con comportamento elastoplastico, nullo se invece si assume per essi un comportamento elastico.

6.2.3 Discretizzazione delle aste e nodo di controllo

Le modalità di analisi sono definite scegliendo il numero di conci con cui discretizzare le parti deformabili delle aste, con un limite massimo di 500 conci, e il passo di carico in termini di incremento di spostamento.

Vanno infine indicati il nodo di controllo, il cui spostamento orizzontale è riportato in ordinata della curva di capacità, e i nodi caricati dalla distribuzione di azioni variabili orizzontali con la relativa componente del vettore forma della distribuzione.

6.3 MODELLAZIONE DI MASCHI E FASCE DI PIANO

Relativamente alle modalità di rottura di maschi e fasce, il programma offre la possibilità di attivare separatamente la rottura per pressoflessione, per taglio oppure entrambe, in modo da poter valutare quanto una determinata modalità di rottura incida sulla valutazione della curva di capacità della parete. Nel caso in cui una delle modalità di rottura non venga considerata, gli elementi del gruppo si assumono con comportamento indefinitamente elastico.

6.3.1 Comportamento a flessione dei maschi

Per i maschi murari è possibile scegliere tra due legami costitutivi differenti a flessione:

- il legame di normativa (NTC 2008) con soglia plastica calcolata con un legame tipo stress-block;
- il legame esatto ottenuto attraverso il calcolo del momento-curvatura accurato che caratterizza il modello FREMA. In questo caso vanno precisati i parametri del legame costitutivo σ - ε , ovvero i coefficienti A , B , C che definiscono la legge polinomiale (4.9), la deformazione ε_u , corrispondente al raggiungimento di σ_u (f_{wc}), e la deformazione a rottura ε_r .

6.3.2 Comportamento a taglio dei maschi

Per la modellazione della rottura a taglio per fessurazione diagonale dei maschi murari è possibile scegliere tra:

- il criterio di resistenza di Mann & Müller, specifico per le murature con tessitura e giunti di malta regolari
- il criterio di Turnšek & Čačovič, più opportuno nel caso in cui la muratura sia irregolare.

In ogni caso il legame taglio-scorrimento sarà elastico-perfettamente plastico, con soglia di resistenza calcolata come valore minimo tra il criterio di taglio con fessurazione diagonale e il criterio per taglio-scorrimento, e controllo della rottura tramite il raggiungimento del drift limite, parimenti indicato dall'utente.

Al criterio scelto è poi possibile abbinare come coefficiente riduttivo la snellezza ("Benedetti and Tomažević") o il fattore di taglio ("Magenes and Calvi"), rimandando al capitolo 4 per maggiori chiarimenti.

6.3.3 Comportamento a flessione delle fasce di piano

Il comportamento a flessione delle fasce è modellato secondo un legame bilineare con soglia di resistenza ultima che può essere fissata secondo tre criteri di resistenza differenti:

- Modello di Kasten & Schubert;
- Modello stress-block;
- Modello a "puntone equivalente".

6.3.4 Comportamento a taglio delle fasce di piano

Il comportamento a taglio delle fasce murarie è, in generale, esprimibile con un legame taglio-scorrimento elastoplastico-fragile illimitato. La resistenza residua è fissata al 25% del taglio resistente; l'utente in fase di input può modificare il legame inserendo la lunghezza del tratto plastico, espressa in termini di scorrimento.

6.4 L'OUTPUT

La fine dell'esecuzione delle istruzioni è segnalata tramite un message box, che riporta anche il tempo impiegato per l'analisi. Cliccando su "OK" è possibile ritornare all'interfaccia di Microsoft Excel e visualizzare i risultati riportati nel foglio ad essi dedicato.

Nel foglio di output (Figura 6.2) sono indicati il taglio massimo alla base (ovvero la somma di tutte le componenti di reazione dei vincoli esterni proiettate lungo la direzione dell'asse x del sistema di riferimento globale), il peso della parete e il rapporto tra le due forze.

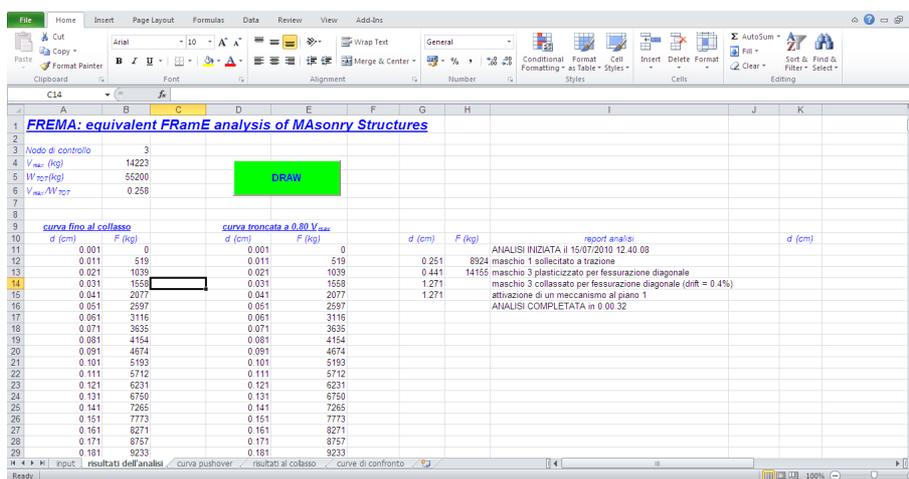


Figura 6.2 – Screenshot del foglio di output

Nelle colonne sottostanti è riportata per punti la curva di capacità della parete, seguita fino all'attivazione di un meccanismo di piano e il report sull'evoluzione dello stato di danneggiamento della stessa, con indicate le plasticizzazioni avvenute elemento per elemento e il meccanismo resistente da cui sono state attivate, e il collasso dei maschi, sempre con indicato il meccanismo resistente che lo ha provocato. Ovviamente è possibile conoscere a che livello di spostamento ognuno di questi eventi si è verificato.

La colonna più a destra riporta una serie di warnings rilasciati allorché in 100 iterazioni (valore preassegnato) non è raggiunta la convergenza delle rigidezze di un numero limitato di conci: in tal caso il programma assume la convergenza come raggiunta e passa all'applicazione dello spostamento successivo, segnalando però all'utente l'anomalia e quindi delegando allo stesso la valutazione della bontà dei risultati ottenuti.

6.5 LA ROUTINE PRINCIPALE

La routine principale del programma è denominata "FREMA_2D" e opera con le modalità riportate schematicamente nel flow chart di Tabella 6.1. Essa è fondata su una serie di subroutine per le quali si rimanda all' Appendice.

Tabella 6.1- Flow chart del codice di calcolo FREMA

- | | |
|--------|---|
| Step 1 | Acquisizione dei dati di input (geometria, carichi fissi, caratteristiche meccaniche dei materiali, legami costitutivi, modalità di rottura, numero dei conci per asta, passo di carico, nodo di controllo, nodi caricati nella distribuzione di azioni variabili orizzontali, vettore forma delle azioni orizzontali). |
| Step 2 | Calcolo delle deformabilità elastiche. |
| Step 3 | Inizializzazione delle rigidezze dei conci a quelle elastiche. |
| Step 4 | Inizio della procedura in controllo di spostamento. |
| | 4-1 Applicazione dello spostamento δ_i . |
| | 4-2 Calcolo elastico della struttura per soli carichi fissi, richiamando la subroutine "FRAME2D". |
| | 4-3 Isolamento del vettore degli spostamenti $\delta_{0,i}$ ed estrazione dello spostamento $\delta_{0,i}$ del nodo di controllo. |
| | 4-4 Applicazione delle forze variabili ai nodi caricati dalla distribuzione con moltiplicatore $\alpha_i=1$. |
| | 4-5 Calcolo elastico della struttura sotto i carichi fissi e variabili, richiamando la subroutine "FRAME2D". |
| | 4-6 Isolamento del vettore degli spostamenti $\delta_{1,i}$ ed estrazione dello spostamento $\delta_{1,i}$ del nodo di controllo. |
| | 4-7 Calcolo del moltiplicatore α_i per il quale il nodo di controllo si sposta di δ (valore assegnato allo Step 4-1) |
| | 4-8 Calcolo dell'intero vettore δ degli spostamenti nodali, corrispondente |

- allo spostamento δ del nodo di controllo.
- 4-9 Aggiornamento delle coordinate nodali e dei carichi distribuiti sulla configurazione deformata.
 - 4-10 Calcolo delle azioni nodali corrispondenti al vettore δ_i degli spostamenti nodali, richiamando la subroutine "*FRAME2D_spostamenti_assegnati*".
 - 4-11 Inizio dell'applicazione dei legami costitutivi per maschi, fasce e cordoli elastoplastici.
 - 4-11-1 Individuazione delle caratteristiche geometriche e di modellazione dell'asta (lunghezza, tratti rigidi, dimensioni della sezione).
 - 4-11-2 Definizione della lunghezza del concio per la discretizzazione del tratto deformabile.
 - 4-11-3 Azzeramento delle deformabilità calcolate al ciclo precedente.
 - 4-11-4 Calcolo delle sollecitazioni agli estremi del tratto deformabile a partire dai risultati ottenuti allo Step 4-10 oppure allo Step 4-20.
 - 4-11-5 Inizio della procedura sui conci.
 - 4-11-5-1 Solo per i maschi, controllo dell'eventuale collasso avvenuto nei cicli precedenti per incrementi di δ , e in caso affermativo: se la sezione è tesa, annullamento delle rigidezze, se la sezione è compressa, annullamento delle rigidezze ad eccezione di quella assiale, passaggio allo Step 4-11-6.
 - 4-11-5-2 Calcolo delle sollecitazioni in mezzeria del concio.
 - 4-11-5-3 Solo per i maschi, in caso di trazione: annullamento delle rigidezze, spostamento dei carichi distribuiti (peso proprio) al nodo inferiore, segnalazione del collasso e passaggio allo Step 4-11-6.
 - 4-11-5-4 Se attivata la modalità di rottura per flessione (per i cordoli elastoplastici lo è sempre) calcolo della curvatura $\chi_i = M_i / (EI)_{i-1}$ e, solo per i maschi, del momento ultimo, in caso si sia selezionato il legame tipo stress-block.
 - 4-11-5-5 Calcolo del valore del momento $M(\chi_i)$ sfruttando il legame costitutivo specifico per l'elemento. Per i maschi è richiamata la subroutine "*M_chi*", se si è selezionato il legame esatto.

- 4-11-5-6 Solo per i maschi, nel caso di raggiungimento della curvatura ultima segnalato dalla subroutine "*M_chi*": annullamento delle rigidzze, ad eccezione di quella assiale, spostamento dei carichi distribuiti (peso proprio) al nodo inferiore, segnalazione del collasso e passaggio allo Step 4-11-6.
- 4-11-5-7 Calcolo del nuovo valore della rigidzza flessionale secante del concio: $(EI)_i = M(\chi_i) / \chi_i$.
- 4-11-5-8 Nel caso di plasticizzazioni per flessione o di raggiungimento della deformazione ϵ_u (solo per i maschi e per il legame esatto) aggiornamento degli indici per la stampa del report.
- 4-11-5-9 Se attivata la modalità di rottura per taglio (per i cordoli elastoplastici non lo è mai) calcolo del taglio ultimo, secondo la tipologia di elemento, e dello scorrimento $\gamma_i = V_i / (GA/\chi)_{i-1}$.
- 4-11-5-10 Calcolo del valore del taglio $V(\gamma)$ sfruttando il legame costitutivo specifico per l'elemento.
- 4-11-5-11 Calcolo del nuovo valore della rigidzza tagliante secante del concio: $(GA/\chi)_i = V(\gamma) / \gamma$.
- 4-11-5-12 Nel caso di plasticizzazioni per taglio aggiornamento degli indici per la stampa del report.
- 4-11-5-13 Aggiunta del contributo del concio alle deformabilità dell'asta.
- 4-11-5-13 Nel caso si sia raggiunto l'ultimo concio passaggio allo Step successivo altrimenti allo Step 4-11-5.
- 4-11-6 Nel caso si sia raggiunta l'ultima asta passaggio allo Step successivo altrimenti allo Step 4-11.
- 4-12 Calcolo elastico della struttura per soli carichi fissi, richiamando la subroutine "*FRAME2D*".
- 4-13 Isolamento del vettore degli spostamenti $\delta_{0,i}$ ed estrazione dello spostamento $\delta_{0,i}$ del nodo di controllo.
- 4-14 Applicazione delle forze variabili ai nodi caricati dalla distribuzione con moltiplicatore $\alpha_i = 1$.
- 4-15 Calcolo elastico della struttura sotto i carichi fissi e variabili, richiamando la subroutine "*FRAME2D*".
- 4-16 Isolamento del vettore degli spostamenti $\delta_{1,i}$ ed estrazione dello spostamento $\delta_{1,i}$ del nodo di controllo.
- 4-17 Calcolo del moltiplicatore α_i per il quale il nodo di controllo si sposta di δ_i (valore assegnato allo Step 4-1) .

- 4-18 Calcolo dell'intero vettore δ_i degli spostamenti nodali, corrispondente allo spostamento δ_i del nodo di controllo .
- 4-19 Aggiornamento delle coordinate nodali e dei carichi distribuiti sulla configurazione deformata.
- 4-20 Calcolo delle azioni nodali corrispondenti al vettore δ_i degli spostamenti nodali, richiamando la subroutine "*FRAME2D_spostamenti_assegnati*".
- 4-21 Controllo di convergenza delle rigidezze secanti dei conci dei maschi non collassati, delle fasce e dei cordoli elastoplastici (la convergenza si ritiene raggiunta se $|R_i - R_{i-1}| / R_{i-1} < \varepsilon$.
Nel caso in cui siano superati 100 cicli di iterazione, la convergenza si ritiene raggiunta e viene rilasciato un messaggio di warning.
- 4-22 Memorizzazione delle rigidezze calcolate al ciclo corrente.
- 4-22 Nel caso di convergenza non raggiunta, ripristino al valore precedente degli indici per la stampa del report e passaggio allo Step 4-11, altrimenti passaggio allo Step successivo.
- Step 5 Calcolo del taglio alla base.
- Step 6 Stampa del report delle eventuali plasticizzazioni avvenute.
- Step 7 Verifica del collasso per taglio e, nel caso di scelta del legame stress-block, per pressoflessione dei maschi, con controllo del raggiungimento del drift ultimo, e segnalazione dell'eventuale collasso.
- Step 8 Stampa del punto della curva di pushover.
- Step 9 Verifica dell'attivazione di un meccanismo di piano. In caso positivo TERMINA L'ANALISI, altrimenti passaggio allo Step successivo.
- Step 10 Ripristino delle coordinate nodali e dei carichi distribuiti ai valori iniziali.
- Step 11 Nuovo valore di δ e passaggio allo Step 4.

6.6 VALIDAZIONE E APPLICAZIONI DEL CODICE DI CALCOLO

Il codice di calcolo FREMA è stato validato attraverso numerosi confronti con i risultati di prove sperimentali e con simulazioni numeriche disponibili in letteratura.

La validazione del codice di calcolo, che come si illustrerà risulta del tutto soddisfacente, costituisce al tempo stesso un utile ed interessante primo utilizzo del software FREMA, illustrando le potenziali applicazioni del codice nella previsione del comportamento di pareti in muratura sollecitate nel proprio piano.

6.6.1 Prove su pannelli murari singoli: la sperimentazione dell'ISPRA

In primo luogo si cercherà di valutare la rispondenza dei risultati numerici forniti dal modello FREMA con la risposta di singoli pannelli murari sottoposti a sperimentazione, soffermandosi in particolare sul comportamento dei maschi murari.

Si farà riferimento alla già citata sperimentazione condotta da Anthoine et al. (1995) al Joint Research Centre di Ispra, su provini di maschi murari di differente snellezza, costruiti con tessitura all'inglese, cioè con file alternate di mattoni disposti secondo la lunghezza e file in cui i mattoni fungono da diatoni (Figura 2.41).

In tale sperimentazione, per studiare i differenti meccanismi di rottura, sono state realizzate due tipologie di pannelli, differenti soltanto per l'altezza, in modo tale da realizzare un collasso governato dalla pressoflessione (*high panel*) ed un collasso a fessurazione diagonale (*low panel*). Nella prova in esame, il cui setup sperimentale è stato già descritto al §2.3.1 (si veda in particolare la Figura 2.40) entrambi i pannelli sono soggetti ad un carico verticale di 150 [kN], tale da produrre una tensione media di compressione $p=0.60$ [MPa].

L'obiettivo della sperimentazione era la valutazione del comportamento sismico dei maschi, pertanto il test è stato eseguito imponendo lo spostamento alla sommità del pannello in direzione orizzontale, secondo cicli di ampiezza crescente.

Le prove sono state simulate adottando i parametri meccanici riportati in Tabella 6.2, che riprende i contenuti della Tabella 2.3 aggiungendo i parametri meccanici di effettivo interesse ai fini della modellazione attraverso il codice FREMA.

Tabella 6.2 – Parametri meccanici e geometrici della sperimentazione riportata in (Anthoine et al., 1995)

Panels			
Low Panel height	H	[cm]	135
High Panel height	H	[cm]	200
Base	b	[cm]	100
Panel thickness	t_p	[cm]	25
Bricks			
Dimensions	-	[mm ³]	55 x 120 x 250
Young's modulus	E_b	[MPa]	14700
Poisson's ratio	ν_b	[-]	0.22
Tensile strength	f_{bt}	[MPa]	1.22
Mortar			
Thickness	t_m	[mm]	10
Elastic modulus	E_m	[MPa]	210
Poisson's ratio	ν_m	[-]	0.05
Shear modulus	G_m	[MPa]	100
Cohesion	c	[MPa]	0.23
Friction coefficient	μ	[-]	0.58
Masonry			
Elastic modulus	E	[MPa]	1270
Shear modulus	G	[MPa]	605
Compressive strength	f_{wc}	[MPa]	6.2

I risultati ottenuti dalle due prove mettono in luce l'influenza del rapporto altezza/larghezza sul comportamento dei pannelli. I carichi e gli spostamenti ultimi, l'andamento del danno e i meccanismi di rottura differiscono marcatamente: il pannello tozzo ha mostrato una rottura per taglio diagonale in corrispondenza di un drift dello 0.2% per un carico di 84 [kN]; contrariamente nel caso del pannello snello non è stato registrato alcun danno da stress apparente per un drift dello 0.6% e un carico pari a 72 [kN] (Figura 6.3).

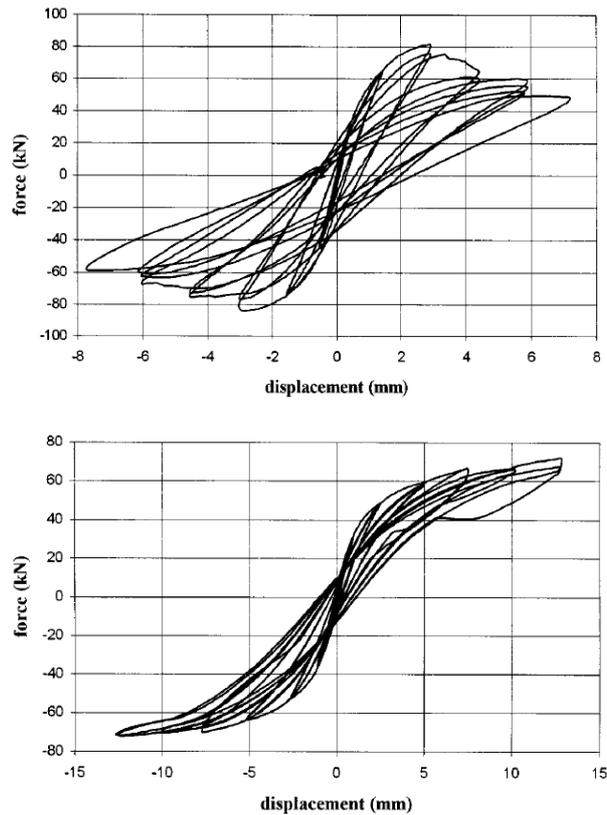


Figura 6.3 – Prove sperimentali eseguite da Anthoine et al. (1995): a sinistra Low Panel, a destra High panel

In Figura 6.4 è riportato il confronto tra l'involuppo monotono della prova sperimentale e la simulazione col modello FREMA.

Dall'analisi del confronto emerge che la previsione del codice FREMA è del tutto aderente al risultato sperimentale sia in termini di soglia di resistenza che di rigidità iniziale; è inoltre pienamente colta dal modello la modalità di rottura per fessurazione diagonale secondo il criterio di Mann e Müller.

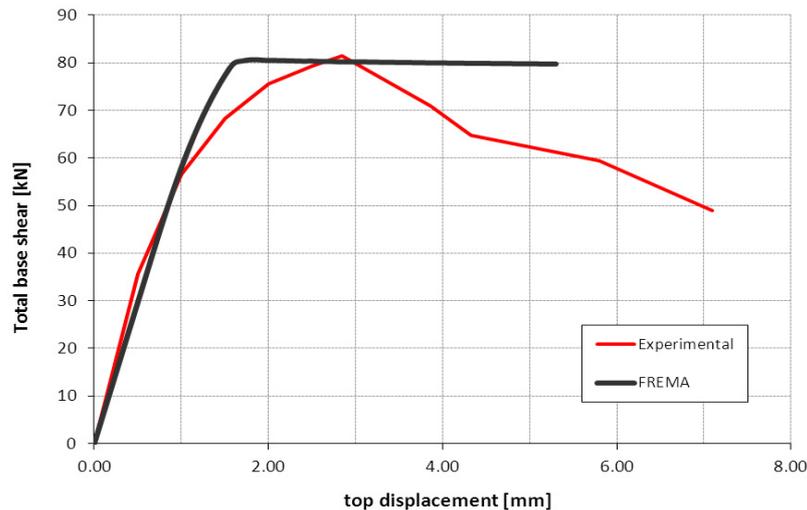


Figura 6.4 – Low panel: confronto tra risultato sperimentale e previsione del codice FREMA

Ovviamente poiché il modello implementato in FREMA per il comportamento a taglio dei maschi prevede semplicemente una schematizzazione bilineare, la risposta fornita dal codice è per l'appunto semplicemente bilineare (trattandosi dell'analisi di un singolo maschio).

A questo proposito, è di grande interesse la Figura 6.5, che illustra il confronto tra l'inviluppo monotono sperimentale e la simulazione numerica per il pannello snello. I vantaggi dell'adottare un legame accurato momento-curvatura, capace di seguire l'evoluzione della sezione, portando in conto la perdita di rigidità flessionale per la progressiva fessurazione, è ben evidente nel gomito ben definito ottenuto dalla simulazione numerica, del tutto in linea con i risultati sperimentali.

Va inoltre rimarcata l'ottima rispondenza del modello anche in termini di deformazione ultima. Come si è avuto modo di discutere in sede di modellazione, infatti, per il meccanismo di collasso di pressoflessione nessun limite viene prefissato in termini di drift, ma

il collasso è raggiunto all'attingimento della deformazione ultima definita al § 4.7.3.

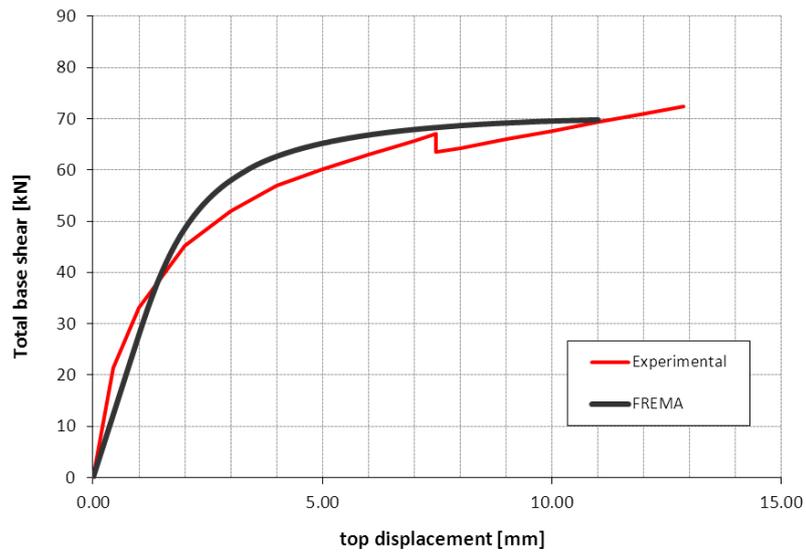


Figura 6.5 – High panel: confronto tra risultato sperimentale e previsione del codice FREMA

Un'ultima ma fondamentale osservazione è relativa ai tempi di elaborazione del calcolo: su un personal computer di performance medie, dotato di sistema operativo Windows XP (version 2002), con 2.00 GB di memoria RAM e con pacchetto Microsoft Office 2003, le simulazioni presentate hanno richiesto un tempo di elaborazione di circa 10 [s].

Si tratta in effetti di tempi di elaborazione rapidissimi, soprattutto se confrontati con quelli relativi a modellazioni accurate (del tipo descritto al capitolo 2) di assemblaggi murari paragonabili per tipologia e dimensione.

Senza entrare nel dettaglio, le modellazioni delle pareti presentate al § 2.2.4 richiedono, su computer dotati di caratteristiche

hardware analoghe (se non migliori) tempi di elaborazione dell'ordine della decina di giorni.

Tali modellazioni sono state infatti realizzate servendosi di specifici server prettamente dedicati al calcolo, e destinati all'elaborazione dati 24 ore su 24.

Ovviamente il confronto tra le due tipologie di modellazione è per certi versi improponibile, atteso l'enorme divario in termini di qualità e quantità di informazioni fornite, tuttavia sembra comunque utile sottolineare quanto possa essere alto il costo in termini di tempo di elaborazione nel caso delle modellazioni accurate.

6.6.2 Prove sperimentali su prototipi in scala 1:1: la sperimentazione di Pavia

Un fondamentale riferimento di letteratura nell'ambito del comportamento sismico di strutture in muratura è rappresentato dalla sperimentazione eseguita presso l'Università di Pavia da Calvi e Magenes (Magenes et al., 1995).

Oggetto dell'esperimento è un edificio-prototipo scatolare (pianta rettangolare, due piani, quattro pareti perimetrali) in muratura in scala reale, testato mediante una prova ciclica quasi-statica (Figura 6.6).

La struttura tridimensionale è concepita in maniera tale da cogliere separatamente il comportamento delle due pareti esterne: una parete, denominata "door wall", contenente due aperture per piano, ed una parete, denominata "window wall", contenente tre finestre per piano e ben ammorsata ai due muri trasversali.

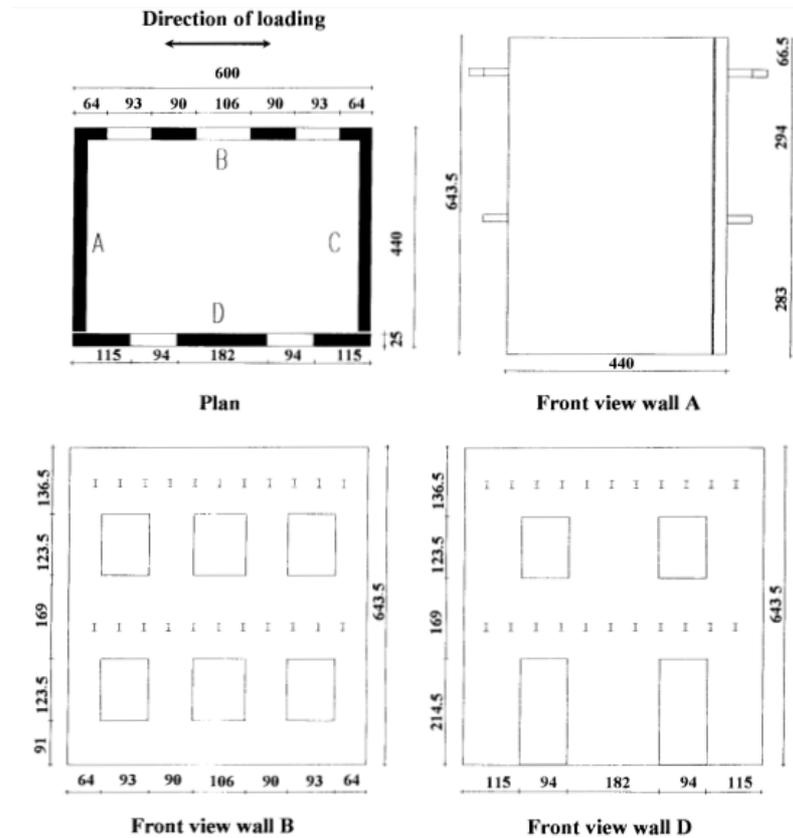


Figura 6.6 – Sperimentazione di Pavia: in alto a sinistra pianta dell'edificio; in alto a destra prospetto della parete A; in basso a sinistra prospetto della parete B (Window Wall); in basso a destra prospetto della parete D (Door Wall)

Le due pareti si sviluppano su una larghezza di base di 6 [m] per un'altezza di 6.4 [m] ed uno spessore murario di 25 [cm]; l'unica connessione tra le due è costituita dai solai, orditi perpendicolarmente ad esse e realizzati mediante profili metallici isolati (impalcato flessibile). Si è prevista inoltre la presenza di un carico aggiuntivo di 248.4 [kN] sul primo solaio e di 236.8 [kN] sul secondo, corrispondenti ad un carico distribuito di 10 [kN/m²] per piano.

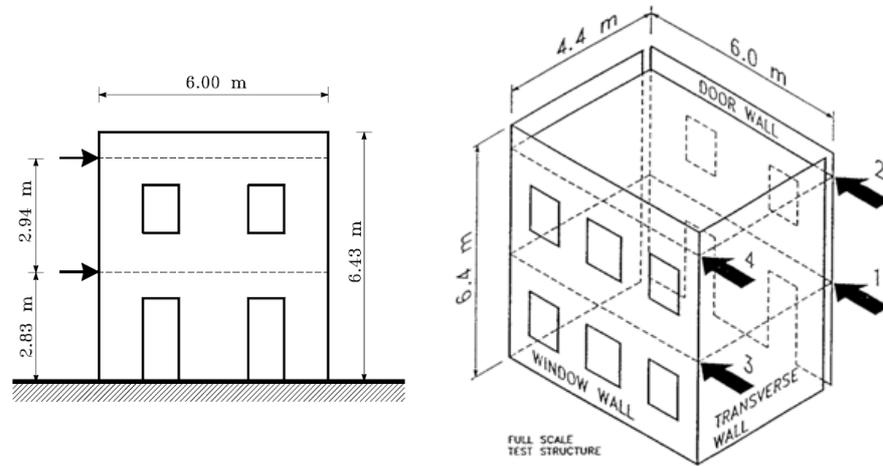


Figura 6.7 – Sperimentazione di Pavia: schema della prova

Le forze orizzontali, applicate mediante profili metallici di elevata rigidità assiale (Figura 6.7), sono uguali ai due piani; si era infatti stabilito, mediante opportune considerazioni, che tale distribuzione potesse simulare effetti dinamici con sufficiente approssimazione (la massa sui due piani era molto simile e l'altezza complessiva modesta, pertanto una distribuzione di forza proporzionale a quella modale non sarebbe risultata particolarmente differente).

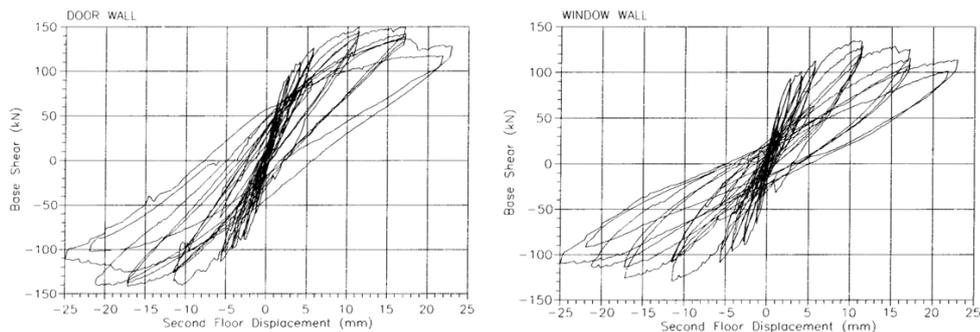


Figura 6.8 – Sperimentazione di Pavia: curve taglio alla base vs. spostamento della Door Wall (a sinistra) e della Window Wall (a destra)

Sul modello si sono, quindi, eseguiti più cicli di carico (Figura 6.8) in corrispondenza di differenti valori dello spostamento del secondo piano: ciascun ciclo è stato ripetuto più volte per garantire un danneggiamento più uniforme nell'insieme.

Al termine della sperimentazione, la door wall presentava un danneggiamento diffuso con l'attivazione di un meccanismo di piano debole, a seguito del danno riportato dai maschi alla base, e in particolare di quello centrale per meccanismo prevalente di taglio; gli stessi meccanismi interessavano la window wall, con i maschi centrali del primo piano rotti per taglio e quelli laterali per pressoflessione. Le fasce erano interessate da un quadro fessurativo riconducibile a meccanismi di taglio (Figura 6.9).

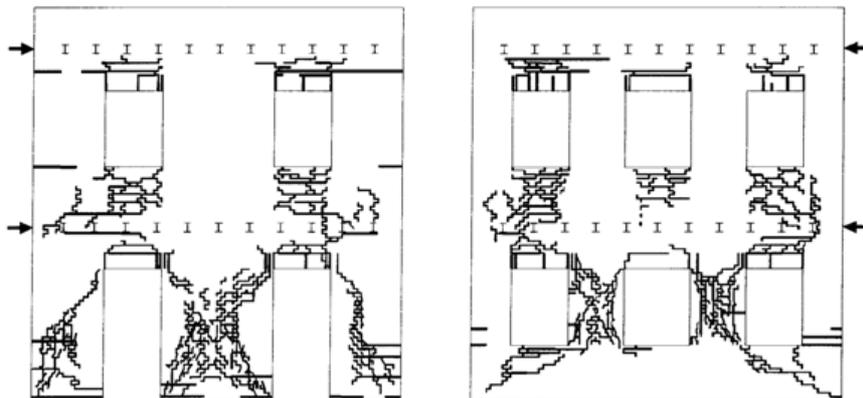


Figura 6.9 – Quadri fessurativi al termine della prova: Door Wall (a sinistra), Window Wall (a destra)

La simulazione con il codice FREMA ha interessato la parete door wall che, attesa la mancanza di connessioni con i muri trasversali, ben si prestava all'interpretazione del comportamento di una parete puramente caricata nel piano.

Il modello a telaio equivalente è stato definito a partire dalla geometria della parete, individuando 9 nodi (3 alla base con vincoli

incastro e 6 interni, in cui convergono le zone rigide dei pannelli), 6 maschi e 4 fasce. Per i materiali si sono presi in considerazione i valori riportati in Tabella 6.3.

In Figura 6.10 sono messi a confronto i risultati della modellazione FREMA con i dati forniti dalla sperimentazione. Si è ritenuto utile riportare anche i risultati che derivano dalla modellazione con codici di calcolo differenti disponibili in letteratura, ed in particolare i già citati SAM (Magenes et al., 2000), il TREMURI (Galasco et al., 2002) e un modello accurato agli elementi finiti sviluppato dall'Università di Genova (Calderini et al., 2009), al fine di valutare non soltanto il confronto tra il codice FREMA e la prova sperimentale, ma di valutare anche il trend generale delle più accreditate simulazioni disponibili in letteratura.

Tabella 6.3 – Parametri meccanici della sperimentazione di Pavia

Bricks			
Tensile strength	f_{bt}	[MPa]	1.22
Mortar Joints			
Cohesion	c	[MPa]	0.23
Friction coefficient	μ	[-]	0.58
Masonry			
Elastic modulus	E	[MPa]	1400
Shear modulus	G	[MPa]	480
Compressive strength	f_{wc}	[MPa]	6.2
Shear strength	f_{vk0}	[MPa]	0.18

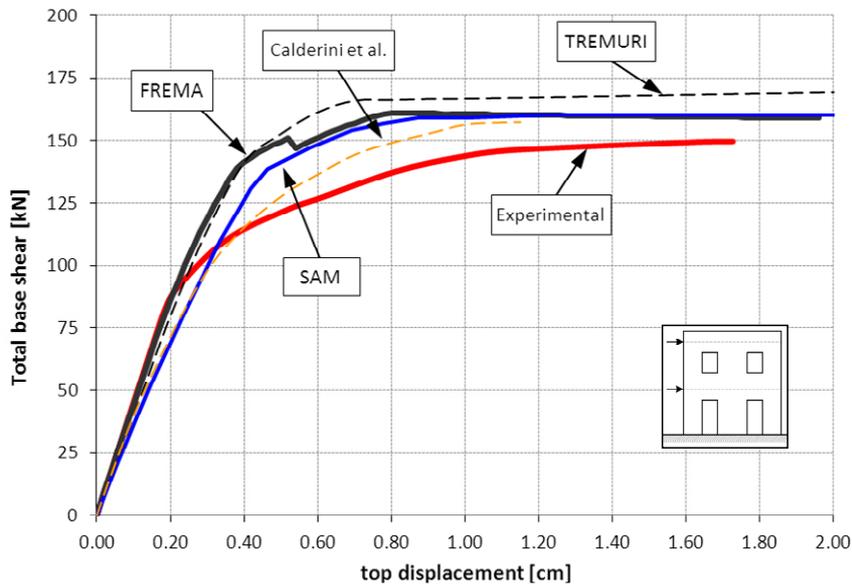


Figura 6.10 – Pavia Door Wall: confronto tra risultato sperimentale e simulazioni numeriche

Dall'analisi della Figura 6.10 emerge anzitutto che i modelli tendono apparentemente a sovrastimare la risposta della parete in termini di resistenza ultima. Tale risultato è ovviamente atteso dal momento che la curva di capacità è ottenuta come involucro monotono dei risultati di una prova ciclica e non di un processo di carico monotono, pertanto essa è il limite inferiore della presunta risposta monotona.

La simulazione FEM si arresta al raggiungimento della resistenza della parete, per problemi di convergenza nella fase post-picco, mentre nel modello FREMA è possibile notare, intorno ai 5 mm di spostamento in sommità, la perdita del contributo offerto dal maschio al piano terra sul lato caricato perché sollecitato a trazione (Figura 6.11): tale perdita è comunque minima per la dipendenza dei

legami costitutivi dallo stato di compressione agente, diminuito nel corso del processo di carico.

L'aderenza tra i risultati si ha anche in termini di rigidezza. Essa è in pieno accordo con quella ottenibile con il modello TREMURI, mentre la discrepanza col FEM è legata sostanzialmente all'introduzione dei tratti rigidi nel modello a telaio equivalente. Il confronto con il modello SAM in termini di rigidezza è invece poco significativo in quanto non sono noti i valori dei moduli di elasticità che gli autori utilizzano nella modellazione.

Per quanto riguarda la duttilità non si è fissato un drift ultimo per i maschi (nel FREMA definibile solo per la rottura a taglio), in accordo con gli altri modelli. Tutti i modelli cioè prescindono dalla corretta valutazione della duttilità ultima della parete.

Come si è avuto già modo di sottolineare, la modellazione della fasce di piano risulta di fondamentale importanza ai fini della risposta complessiva della parete.

Nell'ambito delle simulazioni qui presentate, nel modello SAM è stata considerata la sola modalità di rottura per taglio, mentre nel TREMURI è implementato il modello a puntone equivalente, che offre una resistenza indipendente dall'azione normale agente, così come stabilito dall'eq. (4.36).

Nel FREMA, pur persistendo tale dipendenza, le fasce presentano un livello minimo di resistenza anche in assenza di compressione, ma sufficiente ad inibirne la rottura prematura.

In Figura 6.11 è riportato il quadro di danneggiamento fornito dal modello FREMA per la door wall, messo ancora a confronto con i risultati degli altri modelli. Tutti gli approcci considerati riportano un quadro fessurativo in sostanziale accordo con quello sperimentale (Figura 6.9).

Si possono osservare, in particolare, le differenti modalità di rottura che interessano i due maschi laterali del piano terra: sebbene caratterizzati dalla stessa snellezza, il comportamento a flessione prevale in quello a sinistra (lato su cui sono applicate le forze) mentre la fessurazione diagonale prevale in quello a destra. Ciò è

dovuto al diverso stato di sforzo normale a cui sono soggetti, associato alla rotazione globale della parete (il maschio a sinistra si scarica, quello a destra si carica). Il maschio centrale, essendo più tozzo, si rompe per fessurazione diagonale.

Si sottolinea, a proposito del FREMA, che portando in conto un legame costitutivo momento-curvatura continuo, e non bilineare, per la modellazione della flessione nei maschi, non è individuabile una soglia ben definita di plasticizzazione: per questo motivo, quindi solo apparentemente, il quadro di danneggiamento fornito non riporta cerniere plastiche flessionali.

Chiude l'analisi dell'esperienza di Pavia l'analisi della Figura 6.12, in cui sono riportati i confronti tra diverse simulazioni numeriche al variare del modello adottato per le fasce di piano. Ciò che emerge chiaramente è soprattutto la modellazione estremamente semplificata e cautelativa adottata dalla Norme Tecniche per le Costruzioni, che per il modello in esame fornisce una stima della resistenza della parete decisamente sottostimato rispetto all'evidenza sperimentale.

Questa circostanza induce ancora una volta a sottolineare come il comportamento delle fasce di piano rappresenti uno dei punti critici nella modellazione a telaio equivalente, e che un più intensivo programma di ricerca sul comportamento sperimentale delle fasce di piano rappresenti un urgente quanto prorogabile bisogno della comunità scientifica.

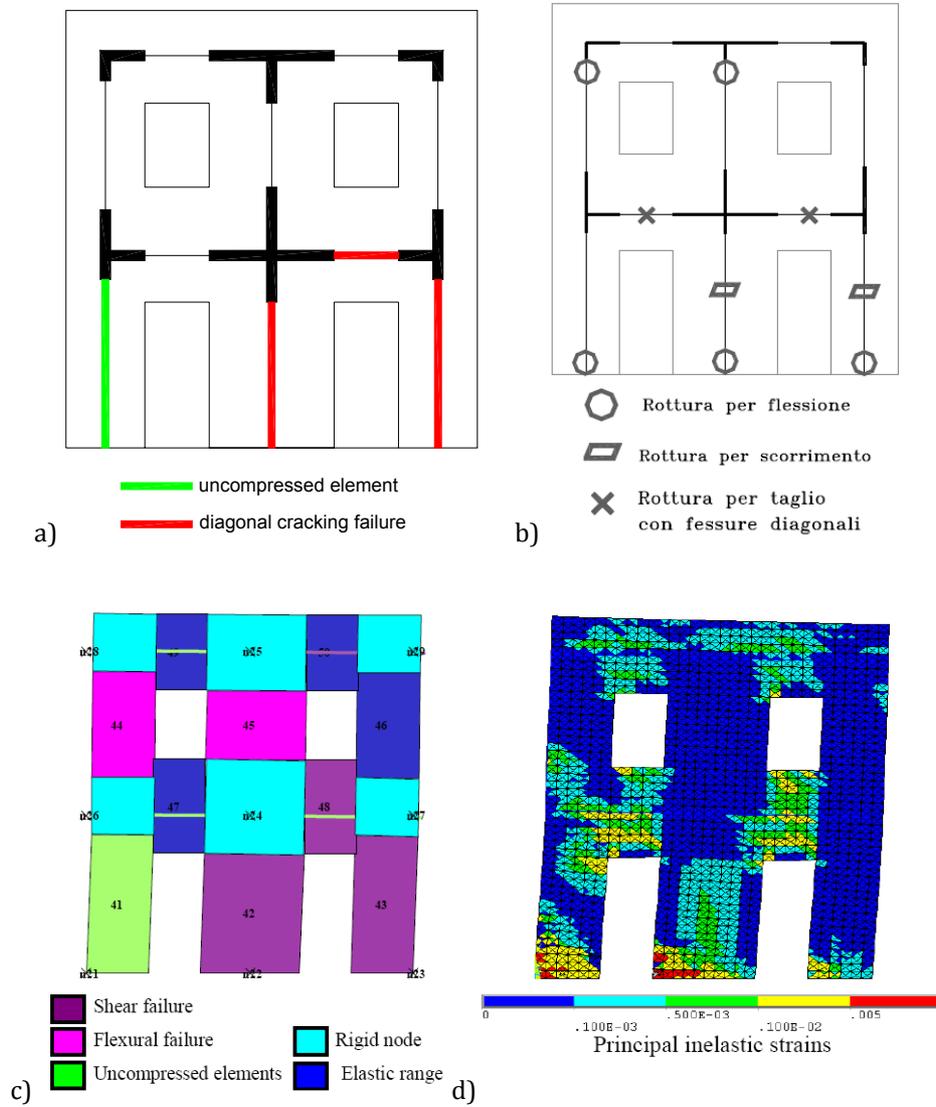


Figura 6.11 – Pavia Door Wall: confronto tra i quadri fessurativi e le modalità di collasso previste dai diversi modelli: a) FREMA; b) SAM; c) TREMURI; d) Modello FEM

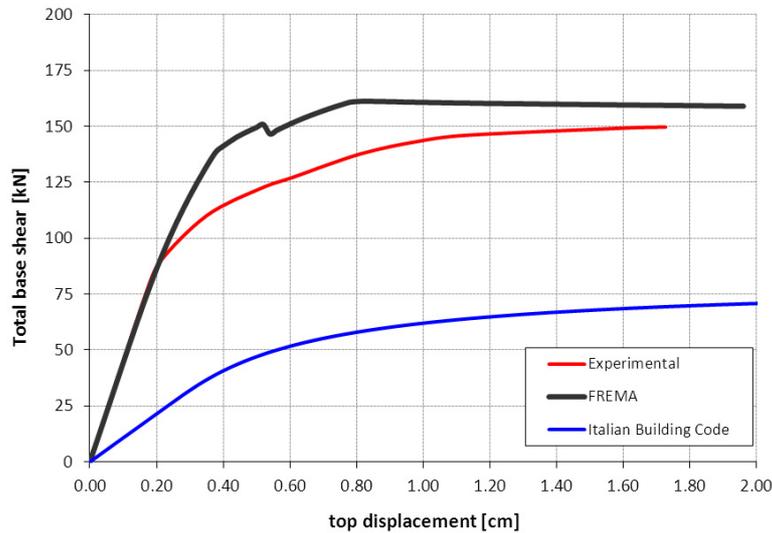


Figura 6.12 – Pavia Door Wall: confronto tra simulazioni numeriche fornite dal codice FREMA al variare del meccanismo di collasso delle fasce di piano

6.6.3 Simulazioni numeriche: Il “Progetto Catania”

Il “Progetto Catania” (Liberatore, 2000) è uno studio condotto dal Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti sulle performances sismiche di due edifici in muratura della città di Catania, valutate tramite lo studio congiunto di numerose gruppi di ricerca delle principali università italiane.

Il primo edificio (edificio di Via Martoglio) è stato costruito nel dopoguerra e ha solai latero-cementizi collegati alla muratura tramite cordoli. Il rischio di ribaltamento può ritenersi trascurabile. Una parete interna in muratura di mattoni (a cui nel seguito ci si riferirà come “Parete di Via Martoglio”) è stata analizzata con diversi modelli statici: modelli a macroelementi, modelli a elementi finiti a piani di danneggiamento, modelli semplificati tipo POR.

L’accoppiamento tra i diversi montanti murari esercitato dai cordoli in c.a. viene indagato adottando per i cordoli sia un modello a

trave elastica lineare, sia un modello a trave elasto-plastica. La parete interna viene studiata anche in campo dinamico con un modello a macroelementi.

Il secondo edificio (edificio di Via Verdi) è stato costruito nell'ottocento, ha orizzontamenti a volta ed è sprovvisto di catene. Il modo di collasso più probabile è rappresentato dal ribaltamento delle pareti. Al fine di determinare la vulnerabilità al ribaltamento, si determina la risposta dinamica di due montanti murari soggetti a un moto sismico alla base. Il ribaltamento si verifica per entrambi i montanti sotto l'azione combinata dei carichi verticali, della spinta delle volte e del moto sismico alla base. Successivamente, assumendo di impedire il ribaltamento, ad esempio attraverso l'inserimento di catene, si studia, con l'ausilio di modelli statici, la risposta di quattro pareti estratte dall'edificio per sollecitazioni complanari.

Gli obiettivi dello studio sono stati molteplici, ma in particolare ha offerto l'importante occasione per applicare a casi reali alcuni dei modelli di calcolo che in anni recenti sono stati messi a punto per l'analisi delle costruzioni in muratura, ed effettuare dei confronti tra i modelli stessi.

Come già accennato, sugli edifici descritti sono state eseguite analisi con i seguenti modelli:

- modelli semplificati tipo POR, utilizzati nella progettazione corrente (Università dell'Aquila);
- modelli statici a macroelementi; in particolare sono stati utilizzati il modello non reagente a trazione con controllo sulle rotture a schiacciamento e a taglio (MAS 3D - Università della Basilicata) e il modello a telaio equivalente con meccanismi di rottura a schiacciamento, taglio e scorrimento (SAM - Università di Pavia);
- modelli statici a elementi finiti a piani di danneggiamento (Università di Genova);

- modelli dinamici a macroelementi con meccanismi di ribaltamento e rotture a taglio (Università di Genova).

Edificio di Via Martoglio

Per quanto riguarda l'edificio in via Martoglio è stata analizzata una parete interna in mattoni parallela al lato maggiore (Figura 6.13).

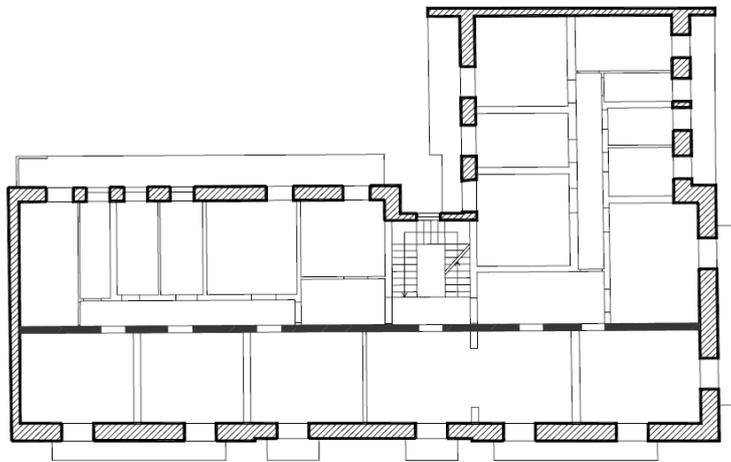


Figura 6.13 – Edificio di Via Martoglio: pianta e indicazione della parete interna oggetto di analisi

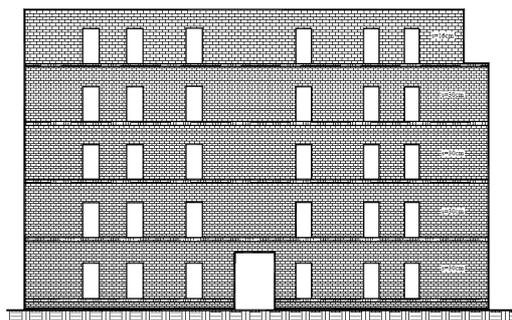


Figura 6.14 – Modello geometrico della parete di Via Martoglio

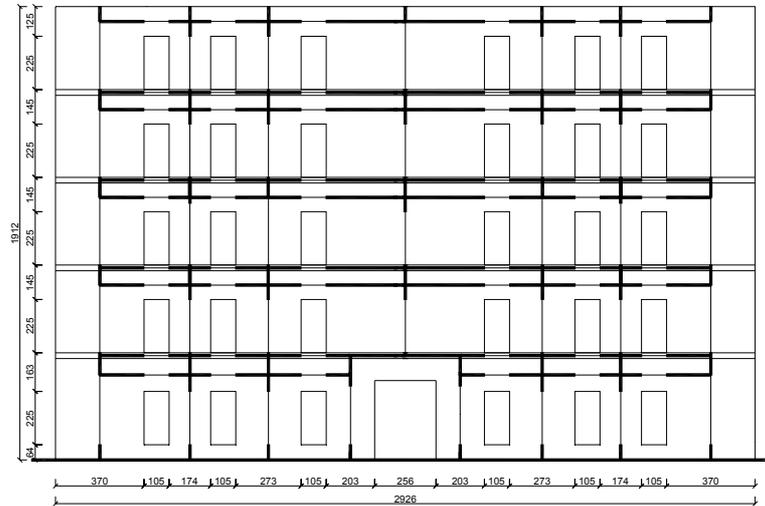


Figura 6.15 – Modello a telaio equivalente della parete di Via Martoglio

Poiché i solai sono in c.a. e laterizio con cordoli di spessore uguale alla muratura, si sono introdotti nel modello degli elementi cordolo.

La parete (Figura 6.14) ha uno spessore costante di 30 [cm] per i primi quattro piani (muro a due teste), e uno spessore di 16 [cm] (muro a una testa) all'ultimo piano.

L'irregolarità geometrica costituita dal vano del portone al piano terra è stata modellata in modo da trasferire le azioni provenienti dai maschi centrali sovrastanti l'apertura ai maschi laterali mediante due bracci rigidi. Al di sopra dell'apertura è infatti presente una trave in c.a. (le cui dimensioni non sono note dal rilievo) che comunque deve ragionevolmente essere in grado di sopportare il carico verticale sovrastante e riportarlo sui maschi laterali.

La sezione degli elementi cordolo ha un'altezza pari allo spessore del solaio (24 [cm]) e una base di 30 [cm]. Nel modello a telaio equivalente i cordoli sono dotati di offsets rigidi, e hanno lunghezza efficace pari alla luce libera delle aperture.

In accordo alle analisi sviluppate nel lavoro in esame, sono stati sviluppati tre diversi scenari di comportamento:

- modello 1: assenza dei cordoli di piano;
- modello 2: cordoli elastici flessibili e infinitamente resistenti (con modulo di Young $E_c=4000$ [MPa], $\nu=0.2$);
- modello con cordoli elastici rigidi e infinitamente resistenti ($E_c=20000$ [MPa], $\nu=0.2$).

I parametri meccanici adottati nelle simulazioni sono riportati in Tabella 6.4.

Tabella 6.4 – Parametri meccanici della parete di Via Martoglio

Bricks			
Tensile strength	f_{bt}	[MPa]	1.0
Mortar Joints			
Cohesion	c	[MPa]	0.15
Friction coefficient	μ	[-]	0.50
Masonry			
Elastic modulus	E	[MPa]	1600
Shear modulus	G	[MPa]	300
Compressive strength	f_{wc}	[MPa]	6.0
Shear strength	f_{vk0}	[MPa]	0.15

Il telaio equivalente implementato nel FREMA (Figura 6.15) risulta composto da 128 aste (36 maschi, 30 fasce, 24 cordoli elastici, 38 offsets rigidi) e da 81 nodi, per 219 gradi di libertà totali. Le forze verticali associate ai pesi propri e ai sovraccarichi sono state applicate in corrispondenza dei nodi all'altezza dei solai, secondo quanto definito in Tabella 6.5.

Tabella 6.5 – Carichi verticali e distribuzione delle forze sismiche sulla parete di Via Martoglio

Livello	1	2	3	4	5
Peso della muratura [kN]	504	470	470	365	128
Carico del solaio [kN]	286	353	353	345	53
Totale carichi verticali [kN]	790	823	823	710	181
$F_{h,i}/F_h$	0.101	0.194	0.283	0.320	0.101

Come già accennato, lo scopo delle analisi effettuate è un confronto parametrico tra i diversi modelli, e pertanto non è stata definita una deformazione angolare ultima dei maschi. Tutti i modelli proposti, cioè, presentano l'obiettivo di valutare essenzialmente la rigidità iniziale, la soglia di resistenza e l'attivazione dei principali meccanismi di collasso che caratterizzano la parete, rinunciando ad una precisa valutazione dello spostamento ultimo. I modelli adottati per i maschi, quindi, sono generalmente caratterizzati da duttilità infinita.

In Figura 6.16 è riportato il confronto tra diverse simulazioni numeriche e il codice FREMA per la parete priva di cordoli in c.a. (modello 1).

Dall'analisi della figura, si osserva che il comportamento della parete vede il susseguirsi di tre fasi significative: la prima fase presenta un andamento pressoché elastico-lineare fino al brusco calo di resistenza in corrispondenza della rottura per taglio delle prime fasce di piano (Figura 6.17).

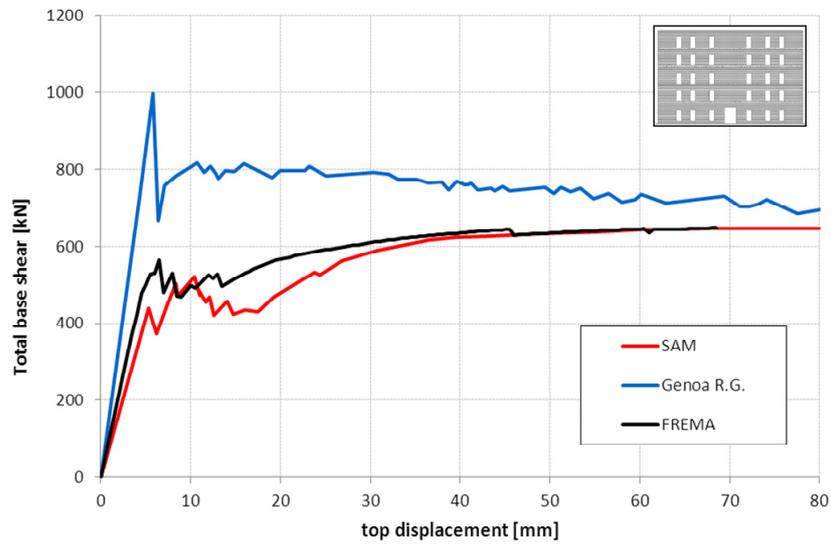


Figura 6.16 – Parete di Via Martoglio (modello 1): confronto tra le simulazioni numeriche

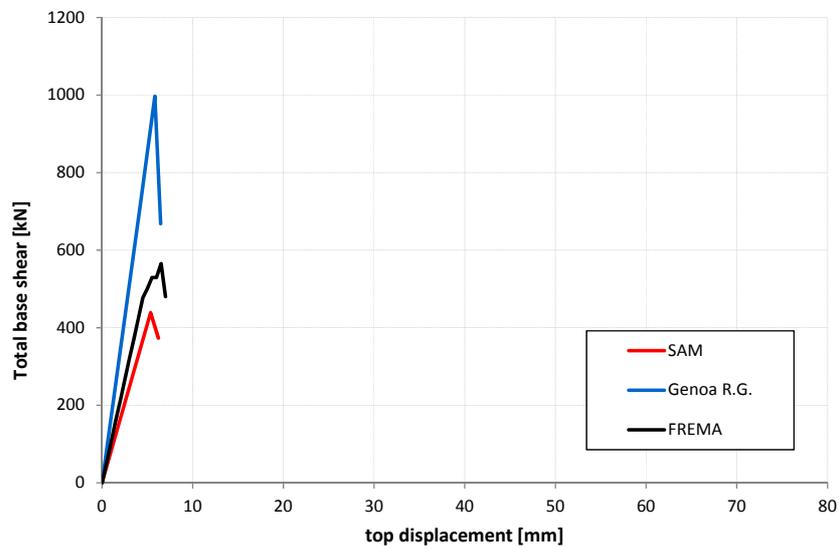


Figura 6.17 – Parete di Via Martoglio (modello 1): termine della fase 1

Superata questa fase, il taglio resistente cresce leggermente oscillando fino a che non si innesca una rottura in cascata di quasi tutte le fasce, che genera un significativo cambiamento della rigidezza complessiva della parete ed una stabilizzazione del taglio resistente (Figura 6.18).

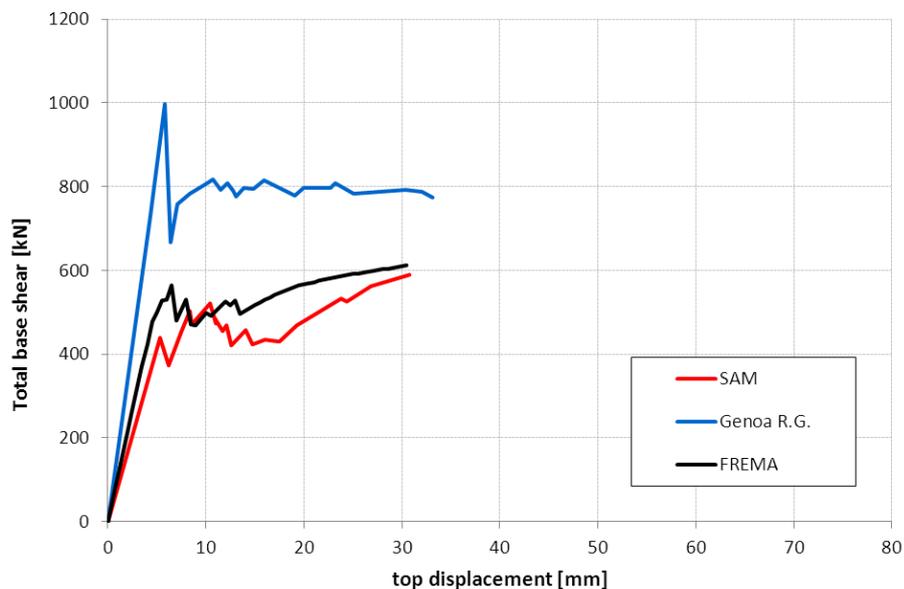


Figura 6.18 – Parete di Via Martoglio (modello 1): termine della fase 2

Successivamente il taglio resistente riprende a crescere fino a che non si viene a realizzare un meccanismo di ribaltamento globale dei montanti del quinto piano debolmente accoppiati (Figura 6.16)

È interessante notare che i tre modelli riportati in Figura 6.16 concordino nel susseguirsi di tali fasi, sia pure con degli scostamenti in termini di resistenza.

Per grandi spostamenti, la resistenza residua della parete tende a coincidere nei tre modelli.

In linea di principio, i modelli a telaio equivalente (sia il SAM che il codice FREMA) tendono a collocarsi al di sotto delle curve forza-spostamento predette da modelli più accurati agli elementi finiti. Tale tendenza si osserverà anche nelle successive modellazioni ed è spiegabile tenendo presente due effetti: da un lato, la presenza di una leggera ma fondamentale resistenza a trazione della muratura normalmente introdotta nei modelli agli elementi finiti; dall'altro l'effetto di accoppiamento dei maschi murari più pronunciato nei modelli agli elementi finiti.

Soprattutto con riferimento ai modelli in cui sono presenti cordoli, l'effetto di espansione in direzione orizzontale degli elementi fascia, a causa della formazione di bielle compresse inclinate, risulta impedito dall'elevata rigidità assiale dei cordoli, inducendo una compressione delle fasce in direzione orizzontale. La resistenza a taglio delle fasce che ne deriva determina un significativo accoppiamento tra i montanti murari, e dunque un comportamento d'insieme decisamente più favorevole.

Passando quindi all'analisi dei modelli 2 e 3, riportati in Figura 6.19 e in Figura 6.20, si osserva, come atteso, che la parete presenta valori di resistenza superiori. Il modello agli elementi finiti, per gli effetti già illustrati tende a collocarsi decisamente al di sopra dei modelli a telaio equivalente (SAM e FREMA) i quali d'altro canto risultano piuttosto in accordo.

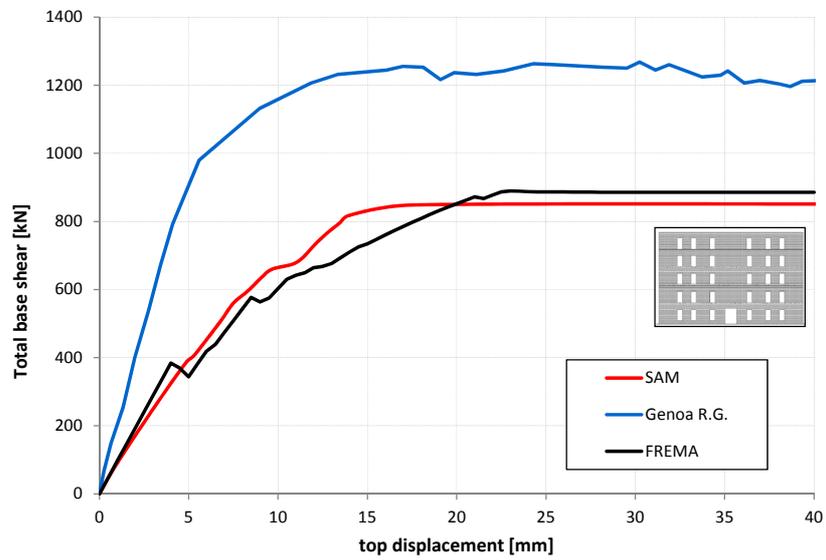


Figura 6.19 – Parete di Via Martoglio (modello 2): confronto tra le simulazioni numeriche

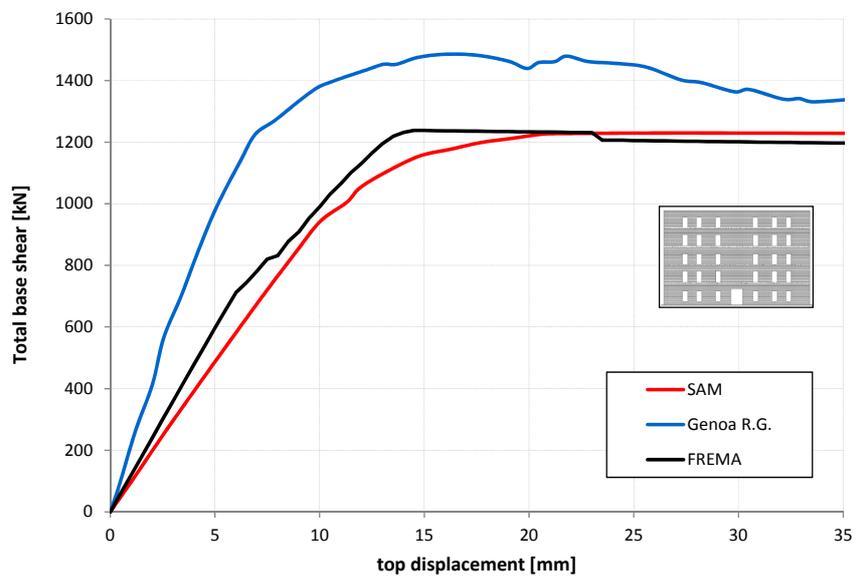


Figura 6.20 – Parete di Via Martoglio (modello 3): confronto tra le simulazioni numeriche

Edificio di Via Verdi

Per quanto attiene all'edificio in via Verdi sono state prese in esame più pareti con caratteristiche geometriche piuttosto diverse (Figura 6.21). Su tutte le pareti non sono presenti i cordoli in c.a. che caratterizzano la parete dell'edificio in via Martoglio.

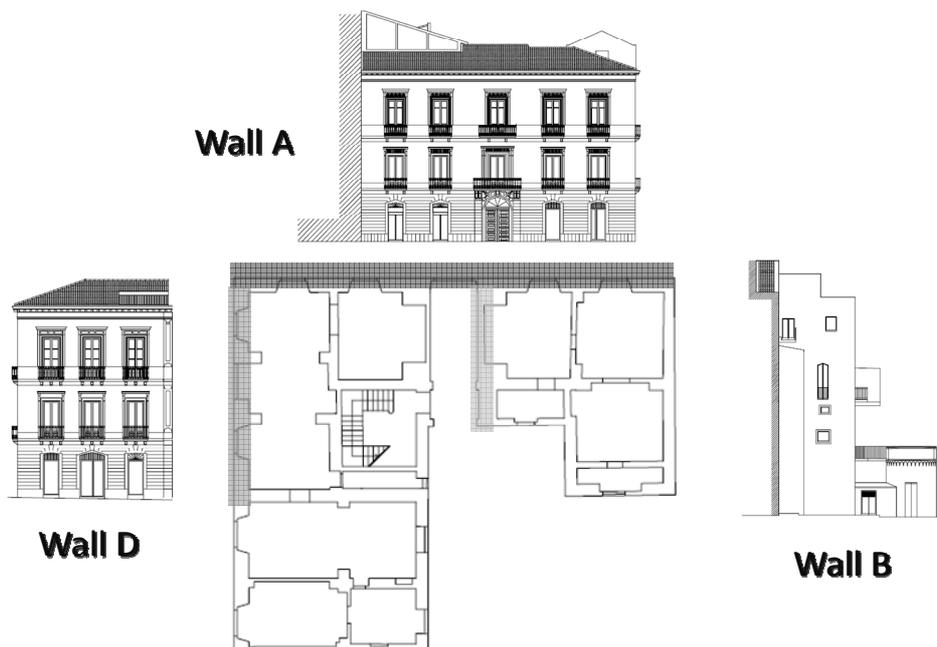


Figura 6.21 – Edificio di Via Verdi: pianta ed indicazione delle pareti oggetto di analisi

La parete A è una parete di facciata dell'edificio, approssimativamente simmetrica rispetto ad un asse verticale centrale. La geometria delle aperture, molto regolare, fa sì che ben si presti ad una schematizzazione a telaio equivalente. L'unico elemento di debole irregolarità è costituito dall'apertura centrale al piano terra, più larga e più alta delle altre.

Lo spessore della muratura è di 86 [cm] al primo livello e di [57] cm ai livelli superiori. Il peso totale della parete è di 3766 [kN].

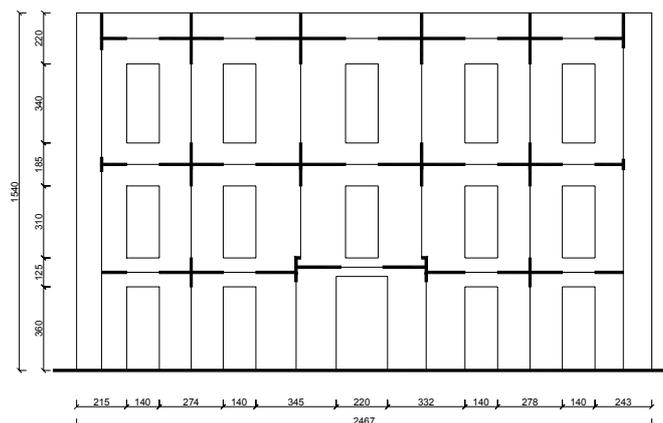


Figura 6.22 – Modello geometrico della parete A di Via Verdi

Tabella 6.6 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete A di Via Verdi

Livello	1	2	3
h_i [m]	4.85	9.80	15.40
$F_{h,i}/F_h$	0.220	0.403	0.377

La distribuzione delle azioni orizzontali è riportata in Tabella 6.6, mentre le caratteristiche dei materiali adottate nella modellazione sono riassunte in Tabella 6.7.

Il modello a telaio equivalente è costituito da 55 aste (18 maschi, 15 fasce, 22 offsets rigidi) e 46 nodi, per 120 gradi di libertà totali.

In Figura 6.23 si confrontano i risultati delle diverse modellazioni. A quelle proprie del “Progetto Catania”, si sono aggiunte le simulazioni sviluppate in (Pasticier et al., 2007), che

hanno sviluppato in SAP2000® un modello a telaio equivalente per la Parete A e la Parete D dell'edificio di via Verdi.

Tabella 6.7 – Parametri meccanici della parete di Via Martoglio

Bricks			
Tensile strength	f_{bt}	[MPa]	1.0
Mortar Joints			
Cohesion	c	[MPa]	0.15
Friction coefficient	μ	[-]	0.50
Masonry			
Elastic modulus	E	[MPa]	1600
Shear modulus	G	[MPa]	300
Compressive strength	f_{wc}	[MPa]	6.0
Shear strength	f_{vk0}	[MPa]	0.15

In particolare le due curve SPO1 e SPO2 (dove SPO è l'acronimo di Standard PushOver) sono ottenute per diversi valori dell'azione assiale agente nelle membrature in cui sono state inserite le cerniere plastiche, dal momento che SAP2000® non è in grado di aggiornare la resistenza ultima delle cerniere in funzione dello sforzo normale agente.

Come si può notare dalla disamina della Figura 6.23 , la previsione del modello FREMA si pone in buon rapporto con le altre simulazioni, raggiungendo un picco di resistenza di 1132 [kN], con uno scarto modestissimo rispetto ai risultati del modello SAM, e una rigidezza mediamente in accordo con le altre.

Particolarmente interessante è invece l'analisi del comportamento post-picco, dovuto alla plasticizzazione per taglio delle fasce del primo e secondo piano, per le quali si è assunto, in mancanza di cordoli, un comportamento elastofragile.

È evidente che il comportamento delle fasce governa la risposta sismica globale: i modelli agli elementi finiti (Università di Genova) e il modello Mas3D (Università della Basilicata), presentando un maggior abbinamento tra i montanti murari, prevedono una risposta priva di cadute di resistenza. Analogamente, in mancanza di una accurata modellazione per le fasce, i modelli a telaio equivalente SAM e SPO prevedono un comportamento globale di tipo elasto-plastico.

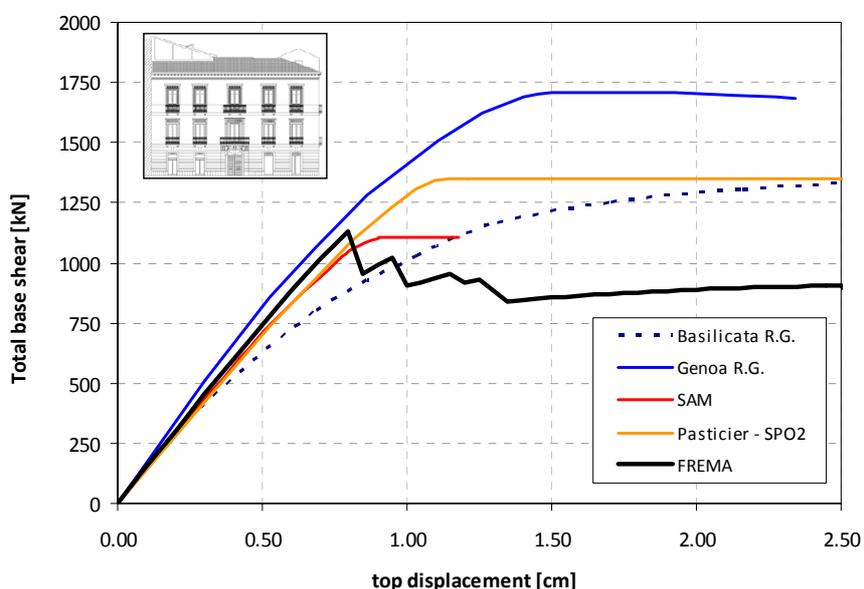


Figura 6.23 – Parete A di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche

La parete B è una parete di snellezza elevata (Figura 6.24), con due sole aperture. Lo spessore della muratura è di 36 [cm] al piano terra e 30 [cm] ai piani superiori. La presenza di un soppalco a quota 7.25 [m] richiede l'introduzione dei relativi carichi verticali e della relativa forza sismica. Il peso totale della parete è di 780 [kN].

La distribuzione delle forze sismiche alla quota degli impalcati è riassunta in Tabella 6.8, mentre i parametri meccanici sono gli

stessi adottati per la simulazione della parete A. Il modello a telaio equivalente porta in conto 39 gradi di libertà nodali.

Tabella 6.8 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete B di Via Verdi

Livello	1	2	3	4
h_i [m]	4.85	7.25	9.80	15.86
$F_{h,i}/F_h$	0.155	0.112	0.351	0.382

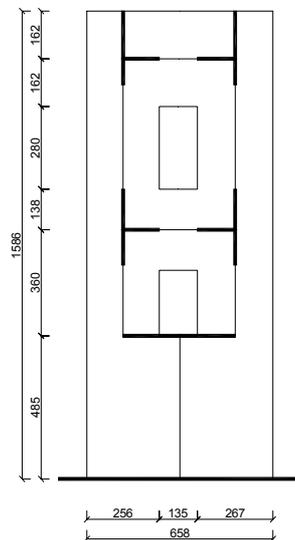


Figura 6.24 – Modello geometrico della parete B di Via Verdi

Il confronto tra le diverse simulazioni numeriche è riportato in Figura 6.25; si evince che la risposta predetta dal codice FREMA è in pieno accordo con i risultati ottenuti dagli altri gruppi di ricerca, raggiungendo una resistenza ultima di 199 [kN], esattamente come il SAM e il Mas3D.

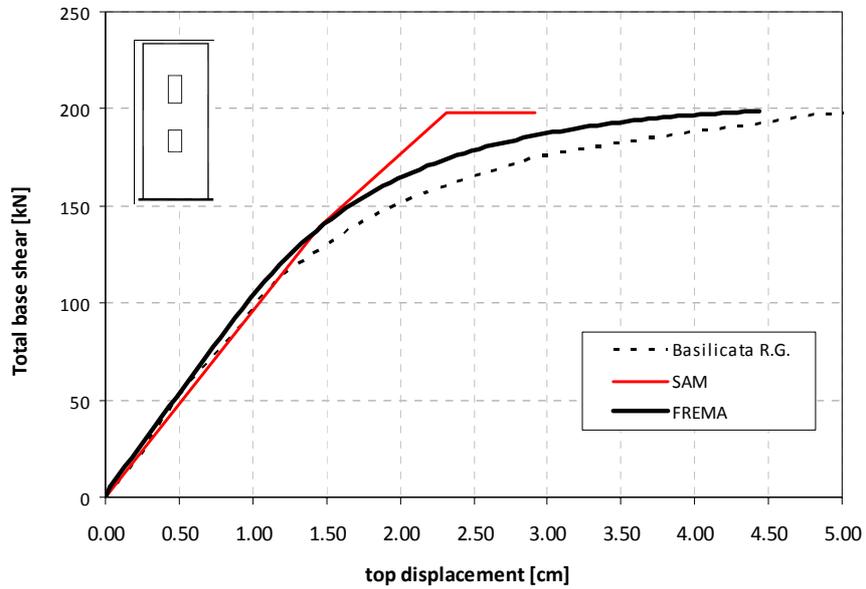


Figura 6.25 – Parete B di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche

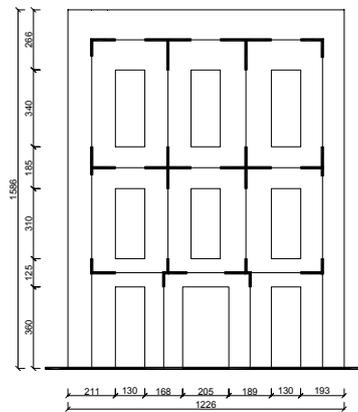


Figura 6.26 – Modello geometrico della parete D di Via Verdi

Si nota inoltre che, essendo il comportamento della parete legato sostanzialmente a quello del maschio alla base

(funzionamento a mensola della parete), è evidente l'incidenza del legame esatto momento-curvatura sulla risposta globale, che per il SAM è invece marcatamente bilineare.

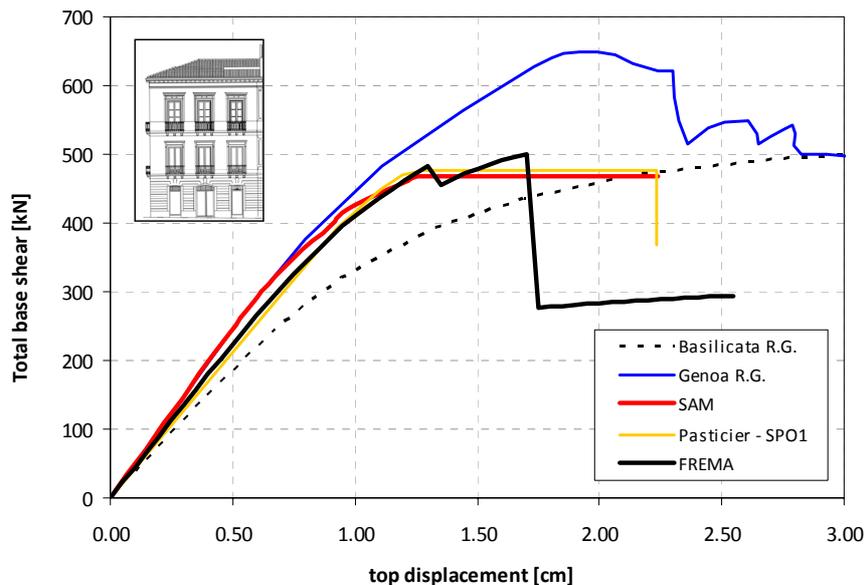


Figura 6.27 – Parete D di Via Verdi: confronto tra le simulazioni numeriche

La parete D (Figura 6.26) è una parete di facciata con geometria regolare e con spessori analoghi a quelli della parete A, ma con snellezza complessiva più elevata e montanti murari più snelli. Le distribuzioni di forze sismiche ai piani sono riportate in Tabella 6.9

Il peso totale della parete è di 1903 [kN], i parametri meccanici sono gli stessi adottati per la parete A.

Il modello a telaio equivalente della parete è composto da 35 aste e 30 nodi, per 78 gradi di libertà totali.

L'analisi dei risultati (Figura 6.27) suggerisce l'ottima rispondenza delle previsioni del FREMA con quelle ottenute dalle altre unità di ricerca, e in special modo con quella di Pavia, sia in termini di resistenza ultima sia in termini di rigidezza.

Tabella 6.9 – Distribuzione delle forze sismiche sulla parete D di Via Verdi

Livello	1	2	3
h_i [m]	4.85	9.80	15.86
$F_{h,i}/F_h$	0.224	0.369	0.407

6.6.4 Simulazioni numeriche: Salonikios et al. (2003)

Un'ulteriore applicazione del codice di calcolo FREMA è stata ottenuta simulando il comportamento delle pareti analizzate in (Salonikios et al., 2003).

Nel citato lavoro, viene analizzata la risposta sismica di una parete a sette campate (da cui il nome delle pareti, 7B) e a due piani, dalla geometria piuttosto regolare (Figura 6.28) soggetta a diverse configurazioni di carico laterale: una distribuzione proporzionale ai pesi sismici (LOAD case) ed una distribuzione triangolare inverse (ACC case) (Tabella 6.10).

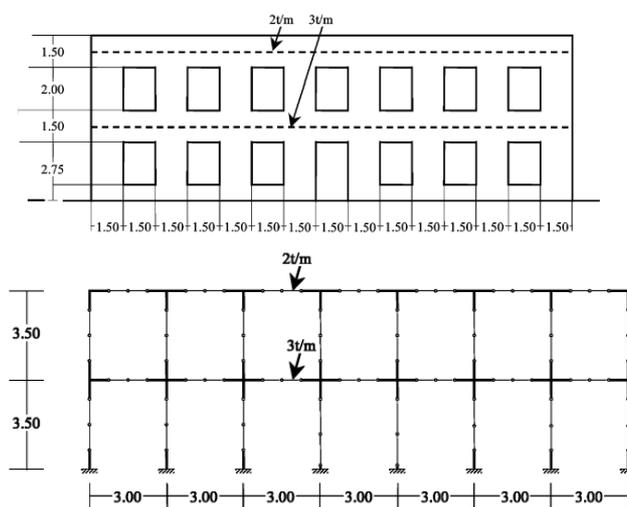


Figura 6.28 – Pareti estratte dal lavoro di Salonikios et al. (2003): geometria della parete (in alto) e modello a telaio equivalente (in basso)

La parete viene quindi modellata sia in termini accurati attraverso un codice di calcolo agli elementi finiti (CAST3M®) che attraverso una modello a telaio equivalente (SAP2000®).

Tabella 6.10 – Distribuzione delle forze sismiche nei modelli di Salonikios et al.

Livello	1	2
h_i [m]	3.50	7.00
LOAD Case $F_{h,i}/F_h$	1.00	1.19
ACC Case $F_{h,i}/F_h$	1.00	0.59

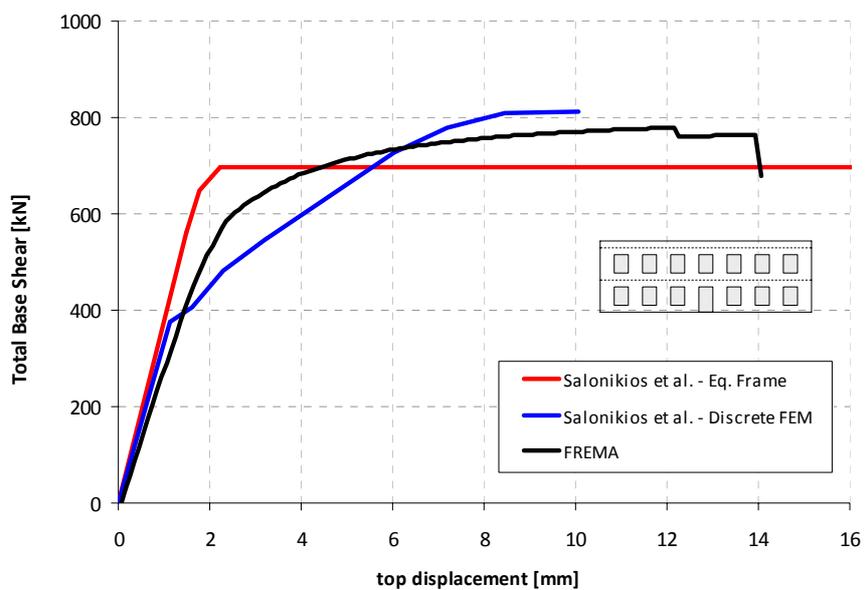


Figura 6.29 – Parete 7B_LOAD: confronto tra le simulazioni numeriche

I risultati dei confronti tra i tre diversi modelli sono illustrati in Figura 6.29 per la distribuzione di carichi laterali di tipo LOAD e in Figura 6.30 per la distribuzione triangolare inversa.

L'analisi delle due figure suggerisce un'ottima previsione da parte del codice FREMA, che si attesta su livelli di resistenza e rigidità intermedi tra il modello a telaio equivalente e quello agli elementi finiti. Ciò che assume una grandissima rilevanza, invece, è la capacità del modello FREMA di tenere conto della diversa distribuzione delle forze laterali. Si può infatti osservare che la risposta suggerita dal modello SAP2000® risulta identica nei due casi, mentre FREMA risente della diversa forma del vettore delle azioni laterali, e la curva della configurazione ACC risulta al di sopra di quella LOAD.

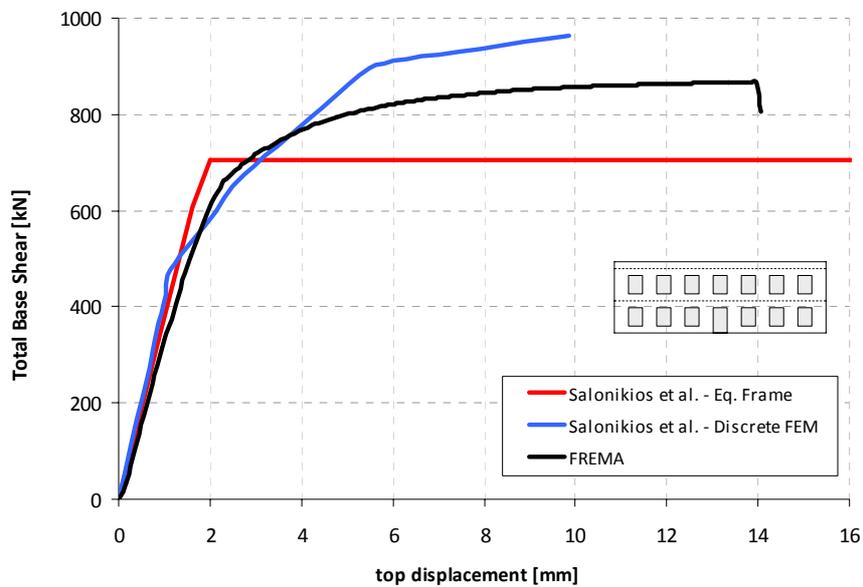


Figura 6.30 – Parete 7B_ACC: confronto tra le simulazioni numeriche

Tale circostanza è in effetti del tutto attesa, poiché nei due casi di carico i maschi del primo piano sperimentano le medesime forze di piano, mentre i maschi del secondo piano sperimentano forze molto inferiori nella distribuzione triangolare inversa, e pertanto a parità di condizioni di carico del primo piano, la parete nel caso ACC risulta più rigida.

6.7 DIPENDENZA DEI RISULTATI DALL'ACCURATEZZA DELLA MODELLAZIONE E RELATIVO COSTO DI ELABORAZIONE

La validazione del codice FREMA, condotta ai paragrafi precedenti, viene conclusa attraverso la valutazione della dipendenza dei risultati dell'analisi in funzione dell'accuratezza del modello di calcolo.

Il modello di calcolo implementabile in FREMA, infatti, può essere raffinato a piacere agendo su due parametri: il numero di conci N_c in cui viene discretizzata ogni singola asta e l'ampiezza del passo di carico Δx dell'analisi (che, si ricorda, è condotta in controllo di spostamento).

Nelle analisi sviluppate in questo lavoro generalmente ci si è orientati su un numero di conci variabile tra 50 e 100 e su un passo di carico di circa 0.1 [cm].

Si intende fornire adesso la valutazione dell'influenza di tali parametri sul risultato finale, ossia quella che con riferimento agli elementi finiti viene definita *mesh dependency*.

Allo scopo, le pareti illustrate al precedente § 6.6.4 sono state analizzate secondo diverse configurazioni dei valori di N_c e Δx valutando i risultati ottenuti.

Tutti i modelli analizzati sono caratterizzati da una modellazione accurata dei maschi in termini di momento-curvatura, e da un modello a taglio secondo Mann e Müller. Le fasce di piano sono state modellate con legame elasto-plastico a taglio e con il modello di Kasten & Schubert a flessione.

È stata presa in considerazione la parete del lavoro di Salonikios et al. (2003) nelle due configurazioni di carico ACC e LOAD. Ciascuna analisi è stata lanciata valutando quattro diversi gradi di accuratezza dell'analisi, in accordo a quanto riportato in Tabella 6.11, dove è stato introdotto anche il parametro $\beta = \text{Log}_{10}(N_c/\Delta x)$ (espresso in $[\text{cm}^{-1}]$), concepito in modo tale che a

maggiori valori di β corrispondesse una maggiore accuratezza dell'analisi.

In particolare, attesi gli alti valori assunti dal succitato rapporto $N_c/\Delta x$, il parametro β è stato fissato quale logaritmo e pertanto è tale che a una variazione di un'unità del parametro corrisponda una variazione di un ordine di grandezza del rapporto $N_c/\Delta x$.

Tabella 6.11 – Modelli analizzati nella stima del mesh dependency

LOAD Case Models	N_c	Δx [cm]	$N_c/\Delta x$	β [cm-1]
1	100	0.10	10000	4.0
2	10	0.10	1000	3.0
3	10	0.50	200	2.3
4	50	0.50	1000	3.0
ACC Case Models	N_c	Δx [cm]	$N_c/\Delta x$	β [cm-1]
1	100	0.10	10000	4.0
2	10	0.10	1000	3.0
3	10	0.50	200	2.3
4	50	0.50	1000	3.0

In Figura 6.31 e in Figura 6.32 sono illustrate le risposte fornite dal codice FREMA al variare dell'accuratezza di calcolo richiesta.

È evidente dall'analisi che i risultati convergono ottimamente per tutti e quattro i casi analizzati per ciascuna parete; soltanto con riferimento al modello 4 del caso ACC la curva si discosta leggermente dalle altre, sia pure conservando la stessa rigidità iniziale e soglia di resistenza.

Attesa l'ottima convergenza dei risultati al variare dell'accuratezza richiesta al modello, si riportano in Tabella 6.12 i

tempi di elaborazione riscontrati per i modelli analizzati. I tempi fanno riferimento all'esecuzione del codice FREMA in ambiente Excel 2007, su un personal computer dotato di sistema operativo Windows XP, con 2.00 GB di memoria RAM.

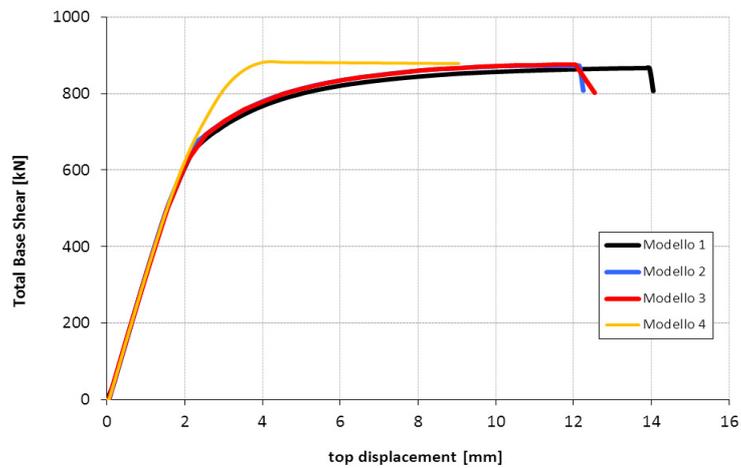


Figura 6.31 – Parete 7B_ACC: dipendenza dei risultati dall'accuratezza dell'analisi

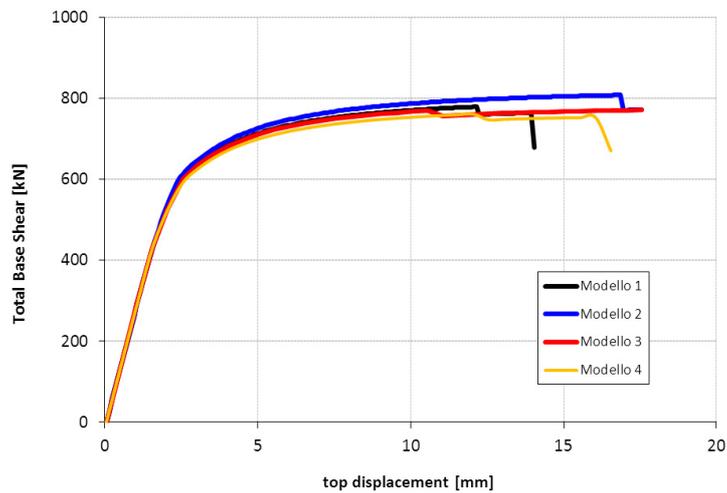


Figura 6.32 – Parete 7B_LOAD: dipendenza dei risultati dall'accuratezza dell'analisi

È evidente anzitutto che i tempi di elaborazione crescano al crescere di β : passando dal modello 2 al modello 1 (con β che passa da 3.0 a 4.0) i tempi tendono grosso modo a raddoppiarsi. Ma è parimenti utile osservare che il parametro β da solo non riesca a condensare la “difficoltà” riscontrata dal calcolatore nell’eseguire l’analisi: i modelli 2 e 4, infatti, pur presentando lo stesso valore di β presentano tempi l’uno il doppio dell’altro rispettivamente. Tale circostanza induce quindi a concludere senza dubbio che il principale parametro responsabile dell’allungamento dei tempi di calcolo sia il passo di carico Δx più che il numero di concii.

Tabella 6.12 – Tempi di calcolo in funzione dell’accuratezza dell’analisi

ACC Case Models	N_c	Δx [cm]	β [cm ⁻¹]	t [min]
1	100	0.10	4.0	16.80
2	10	0.10	3.0	6.50
3	10	0.50	2.3	1.87
4	50	0.50	3.0	2.62

LOAD Case Models	N_c	Δx [cm]	β [cm ⁻¹]	t [min]
1	100	0.10	4.0	21.43
2	10	0.10	3.0	12.90
3	10	0.50	2.3	3.00
4	50	0.50	3.0	6.37

In Figura 6.33 è illustrato il plot dei tempi di calcolo vs. il parametro di accuratezza β . Dall’analisi della figura emerge quanto poc’anzi osservato, ossia il generale trend di proporzionalità diretta tra β e il tempo di elaborazione. Risulta inoltre che le rette che esprimono i trend sono sostanzialmente parallele, a conferma del fatto che la forma del vettore dei carichi laterali non incide sul

proporzionale aumento di tempo di calcolo all'aumentare della accuratezza richiesta.

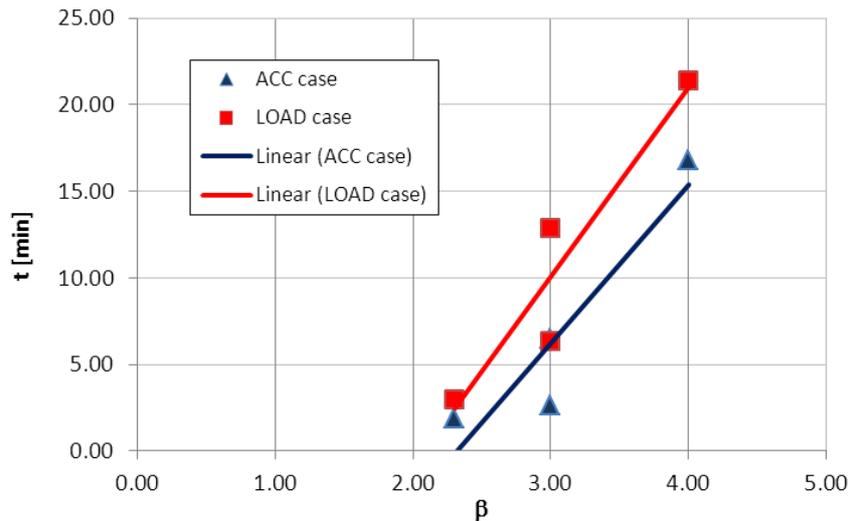


Figura 6.33 – Parametro di accuratezza β vs. tempo di elaborazione dati

6.8 CONCLUSIONI E PROSPETTIVE

Il presente lavoro di tesi ha avuto l'obiettivo di analizzare il comportamento di sub-assemblaggi e di pareti in muratura caricate nel piano.

Lo scopo di tale analisi era in prima battuta la comprensione fenomenologica dei meccanismi di collasso di elementi strutturali in muratura, ripercorrendo le principali formulazioni sviluppate in ambito accademico a partire dagli anni '70.

Successivamente il lavoro si è focalizzato sulla modellazione agli elementi finiti a livello di meso-scala di elementi in muratura caricate nel piano. Si è quindi illustrato come la modellazione accurata gli elementi finiti rappresenti uno strumento di assoluta efficacia e precisione, capace di cogliere, se opportunamente

calibrato, non soltanto i principali parametri oggetto di interesse ingegneristico (rigidezza, resistenza, duttilità), ma persino l'evolversi del quadro di danneggiamento con precisione estremamente soddisfacente. L'utilizzo degli elementi finiti, anche attraverso formulazioni più semplificate, quali i modelli omogenei adottati al capitolo 2, hanno consentito di valutare l'influenza di interventi di consolidamento sulla resistenza nel piano di pareti in muratura di geometria varia.

Il lavoro di tesi è giunto quindi al suo *core* con la creazione del codice di calcolo FREMA, strumento capace di realizzare l'analisi statica non lineare in controllo di spostamento di pareti in muratura caricate nel piano (Rizzano & Sabatino, 2010a, 2010b; Sabatino & Rizzano, 2010).

Il FREMA si iscrive nell'alveo delle modellazioni a telaio equivalente, particolarmente apprezzata in ambito ingegneristico sia per la sua semplicità di utilizzo che per la tipologia di modellazione, molto vicina al classico calcolo strutturale normalmente adottato per gli elementi in acciaio o in cemento armato.

La principale caratteristica del FREMA, che pur non rappresenta una novità assoluta nel panorama della modellazione di strutture in muratura, è rappresentata anzitutto dall'analisi in controllo di spostamento, requisito indispensabile nell'ambito delle analisi statiche non lineare.

La capacità di discretizzare gli elementi costituenti il telaio in un numero variabile di conci consente l'adozione di un approccio a plasticità diffusa, rinunciando quindi al classico utilizzo a cerniere plastiche normalmente adottato in letteratura per problematiche analoghe.

L'adozione di legami costitutivi accurati per la pressoflessione per simulare il comportamento dei maschi murari permette di cogliere con maggior aderenza la progressiva fessurazione e variazione di rigidezza flessionale di tali elementi strutturali, allontanandosi quindi dalla classica modellazione elasto-plastica normalmente adottata in letteratura.

Le peculiarità del codice FREMA sono infine rappresentate dall'adozione di un legame per il comportamento flessionale della fasce di piano suggerito da Kasten & Schubert, che seppur valida solo per fasce di piano realizzate in muratura regolare, ha senza dubbio il grande vantaggio di dotare le fasce di piano di una maggiore resistenza flessionale pur in presenza di bassi sforzi normali, circostanza tipica nell'ambito di un'analisi a telaio equivalente.

Il codice FREMA è stato validato ed applicato su prove sperimentali, simulazioni numeriche e modellazioni accurate agli elementi finiti, dimostrando di prevedere con soddisfacente previsione il comportamento di pannelli e pareti in muratura sollecitati nel piano.

Particolarmente rilevante risulta essere la velocità di elaborazione, normalmente molto contenuta, che rappresenta senza dubbio uno dei principali vantaggi attesi dall'adozione di un modello semplificato.

La modellazione a telaio equivalente, infatti, trova il suo punto di forza proprio nel compromesso tra velocità di elaborazione e precisione dei risultati ottenuti. Un simile modello non sarà mai preciso quanto un modello agli elementi finiti, ma ha il grande pregio di offrire risultati speditivi ma ingegneristicamente molto validi sul comportamento strutturali di edifici in muratura.

Ed è con questa considerazione quindi che si chiude il cerchio tracciato al capitolo 1 di questo lavoro di tesi: le costruzioni in muratura rappresentano un punto complesso della pratica ingegneristica, e troppo spesso gli ingegneri non dispongono di strumenti agili e affidabili. Troppo spesso si affidano a software complessi senza la dovuta perizia, fidandosi ad occhi chiusi dei risultati dell'elaborazione talvolta senza spirito critico.

I modelli agli elementi finiti rappresentano il presente e il futuro dell'ingegneria, e senza dubbio gli attuali problemi in termini di costo di elaborazione saranno superati negli anni. Il tempo di calcolo, prima o poi, non sarà un vero problema.

Allo scopo è interessante ed utile citare la cosiddetta “Legge di Moore” (co-fondatore di Intel) secondo la quale (nel 1965) “*Le prestazioni dei processori raddoppiano ogni 24 mesi*” (ovviamente non si tratta di una legge in senso stretto, piuttosto di un’osservazione sul trend tecnico-economico dell’industria informatica degli anni ‘70; la stima peraltro è stata corretta da David House in termini recenti assumendo la velocità di raddoppio pari 18 mesi).

Il trend storico, in effetti, ci ha dimostrato esattamente questo: la potenza di calcolo raddoppia e raddoppierà ancora nei prossimi anni, e i software agli elementi finiti ne trarranno ovvio beneficio.

Tuttavia, nonostante queste considerazioni, è doveroso riconoscere che gli elementi finiti non sono necessariamente la panacea per ogni problema.

L’ingegnere è una figura dalla poliedrica professionalità, e come tale deve disporre di tutti i giusti “attrezzi” del mestiere: da un lato le conoscenze, la teoria e la pratica, dall’altro sia gli strumenti semplici ma di provata affidabilità, sia gli strumenti complessi da sfoderare nella giusta occasione.

Il lavoro di tesi ha avuto lo scopo di fornire un contributo alla definizione di uno degli strumenti “semplici”, ma comunque necessari, alla pratica ingegneristica. Ovviamente il modello presentato in questa tesi deve intendersi come un punto di partenza e non come un punto di arrivo.

Non v’è dubbio infatti che il lavoro andrebbe anzitutto ampliato all’analisi tridimensionale. Un programma sperimentale di ampia portata sul comportamento delle fasce di piano andrebbe pianificato e urgentemente realizzato, attesa l’incidenza del comportamento delle fasce di piano sulla risposta strutturale delle pareti. E numerosi altri punti meritano senz’altro ulteriori approfondimenti.

D’altra parte, tutto è *perfettibile*, e lo stimolo al miglioramento è quanto di meglio possa animare la comunità tecnico-scientifica.

6.9 BIBLIOGRAFIA

Anthoine A., Magonette G. and Magenes G.(1995). Shear-compression testing and analysis of brick masonry walls, in G. Duma (ed.), *Proc. 10th European Conference on earthquake engineering*, Rotterdam.

Calderini C., Cattari S., Lagomarsino S. (2009). In-plane strength of unreinforced masonry piers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **38**, 243-267.

D.M. 14.01.2008 (2008). Norme Tecniche per le Costruzioni, Ministero Infrastrutture e Trasporti, Rome, Italy.

Dolce M. (1989). Schematizzazione e modellazione per azioni nel piano delle pareti, *Corso sul consolidamento degli edifici in muratura in zona sismica*, Ordine degli Ingegneri, Potenza.

Dolce M. (1991). Schematizzazione e modellazione degli edifici in muratura soggetti ad azioni sismiche, *L'Industria delle Costruzioni*, **242**, 44-57.

Galasco A., Lagomarsino S., Penna, A. (2002). TREMURI Program: Seismic Analyser of 3D Masonry Buildings, University of Genoa, Italy.

Liberatore, D. (A cura di) (2000). *Progetto Catania: indagine sulla risposta sismica di due edifici in muratura*, CNR - Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti, Roma.

Magenes G., Calvi G. M., Kingsley G. R. (1995). Seismic Testing of a Full-Scale, Two-Story Masonry Building: Test Procedure and Measured Experimental Response, in *Experimental and Numerical Investigation on a brick Masonry Building Prototype - Numerical Prediction of the Experiment*, Report 3.0 - G.N.D.T., Pavia, Italy.

Magenes G., Bolognini D., Braggio C. (2000). *Metodi semplificati per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura*, GNDT - Gruppo Nazionale Difesa Terremoti, Roma.

Pasticier L., Amadio C., Fragiaco M. (2008). Non-linear seismic analysis and vulnerability evaluation of a masonry building by means of the SAP2000 v.10 Code, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **37**, 467-485.

Rizzano G., Sabatino R. (2010a). Non-Linear Static Analysis of Masonry Structures by means of Equivalent Frames simplified approach, *Proceedings of 8th International Masonry Conference*, Dresden, Germany, pp. 1211-1220.

Rizzano G., Sabatino R. (2010b). An equivalent frame model for the seismic analysis of masonry structures, *Proceedings of SISMICA 2010, 8th Conference on Seismology and Earthquake Engineering*, Aveiro, Portugal.

Sabatino R., Rizzano G. (2010). Non-Linear Static Analysis Of Masonry Structures. Simplified Equivalent Frames and accurate models, *Proceedings of 14th ECEE, European Conference on Earthquake Engineering*, Ohrid, Macedonia.

Salonikios T., Karakostas C., Leikidis V., Anthoine, A. (2003). Comparative inelastic pushover analysis of masonry frames, *Engineering Structures*, 25, 1515-1523.

APPENDICE

L'appendice che segue riporta il listato del codice di calcolo FREMA, sviluppato in ambiente Visual Basic 6.3 e implementato in Microsoft Excel 2007.

```
Sub FREMA_2D()  
,  
' Analisi pushover in controllo di spostamento di pareti  
' in muratura mediante un modello a telaio equivalente  
,  
,  
,  
' CONVENZIONI:  
' forze e spostamenti positivi nel verso positivo dell'asse corrispondente  
' coppie e rotazioni positive se antiorarie  
,  
Const NMAX = 500 ' numero massimo di nodi e/o di aste  
Const errore_max = 0.01 ' errore massimo accettabile per la convergenza delle deformabilità  
Const ciclo_max = 200 ' numero massimo di iterazioni oltre il quale la convergenza è ritenuta non raggiunta  
Const Delta_max = 1000 ' spostamento massimo  
,  
Dim I, J, C As Integer  
,  
Dim E, L As Double  
,  
Dim NN As Integer  
Dim NA As Integer  
Dim NP As Integer  
Dim NC As Integer  
Dim NNC As Integer  
,  
Dim X(NMAX), Y(NMAX) ' coordinate nodali correnti
```

Dim X_0(NMAX), Y_0(NMAX) ' coordinate nodali della struttura indeformata
 Dim FX(NMAX), FY(NMAX), M(NMAX) ' forze e coppie nodali esterne
 Dim FX_f(NMAX) ' forze nodali esterne fisse dirette lungo x
 Dim V(NMAX, 3) As Integer ' codici di vincolo
 ,
 Dim E1(NMAX) As Integer ' numeri di nodo primo estremo
 Dim E2(NMAX) As Integer ' numeri di nodo secondo estremo
 Dim JA(NMAX) As Double ' momenti d'inerzia
 Dim A(NMAX) As Double ' area delle sezioni
 Dim A_0(NMAX) As Double ' area integra
 Dim QX(NMAX), QY(NMAX) ' carichi distribuiti
 Dim QX_0(NMAX), QY_0(NMAX)
 Dim AA(NMAX), BB(NMAX) ' tratti rigidi
 Dim H(NMAX), B(NMAX) ' altezza e base della sezione
 Dim tipo(NMAX) As String ' tipo di elemento
 ,
 Dim F0L(6) ' vettore azioni di incastro perfetto
 Dim F0(6) ' vettore azioni di incastro perfetto nel rif. globale
 Dim SG(6) ' vettore degli spostamenti degli estremi della
 ' singola asta nel rif. globale
 Dim SL(6) ' vettore degli spostamenti degli estremi della
 ' singola asta nel rif. locale
 Dim K1(6, 6) ' matrice di rigidezza singola asta
 Dim T(6, 6) ' matrice di trasformazione
 Dim NTM(NMAX, 6) ' matrice delle caratteristiche della sollecitazione
 ' N = sforzo normale J=1,J=4
 ' T = taglio J=2,J=5
 ' M = momento flettente J=3,J=6
 ,
 Dim K(3 * NMAX, 3 * NMAX) ' matrice di rigidezza
 Dim F(3 * NMAX) ' vettore delle forze
 Dim ALFAij(NMAX), ALFAji(NMAX), BETAij(NMAX), GAMMAij(NMAX), GAMMAji(NMAX)
 Dim J1, J2 As Integer
 Dim X1, X2, Y1, Y2 As Double
 Dim N(NMAX) As Double ' vettore che raccoglie i nodi caricati nell'analisi pushover
 Dim vettore_pushover(NMAX) ' distribuzione delle forze orizzontali definita dall'utente
 ,
 Dim EI(NMAX, NMAX), GAsuCHI(NMAX, NMAX)
 Dim SP(3 * NMAX) As Double
 Dim p_EI(NMAX, NMAX), p_GAsuCHI(NMAX, NMAX)
 Dim A_, B_, C_, eps_max, eps_u, curv, Mom, CSI
 Dim tipo_rottura_maschi As String
 Dim tipo_rottura_fasce As String
 Dim legame_pf As String
 Dim criterio_taglio As String
 Dim fattore_rid_taglio As String
 Dim criterio_fl_fasce As String
 Dim rottura_J1(NMAX) As Integer
 Dim rottura_J2(NMAX) As Integer

```

Dim rottura_taglio(NMAX) As Integer
Dim collasso(NMAX) As Integer
Dim piano(NMAX) As Integer
Dim meccanismo(NMAX, 2) As Integer ' matrice che consente la determinazione dell'attivazione di un
meccanismo di piano
'
' pulizia dei risultati dell'analisi
'
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("A11:B65536").clear
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("D11:E65536").clear
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:H65536").clear
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:J65536").clear
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("K11:L65536").clear
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("B5").clear
'
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:J65536").Cells(1) = "ANALISI INIZIATA il " & Now()
ORA_INIZIO = Time()
'
*****
' acquisizione dell'input
*****
'
NN = Worksheets("input").Range("S3") ' numero di nodi
NA = Worksheets("input").Range("S4") ' numero di aste
NP = Worksheets("input").Range("S5") ' numero di piani
'
E = Worksheets("input").Range("B19") ' modulo elasticità normale
G = Worksheets("input").Range("B20") ' modulo elasticità tangenziale
Gm = G
fvc = Worksheets("input").Range("B21") ' tensione di progetto a compressione
fvk0 = Worksheets("input").Range("B22") ' resistenza a taglio in assenza di sforzo normale
coesione = Worksheets("input").Range("B23") ' coesione della malta
coeff_attr = Worksheets("input").Range("B24") ' coefficiente di attrito della malta
fbt = Worksheets("input").Range("B25") ' resistenza a trazione dei mattoni
kb = Worksheets("input").Range("B26") ' rapporto tra l'altezza e la larghezza del singolo mattone
kbf = 1 / kb / 2
kb = 1 / (1 + coeff_attr * 2 * kb) ' fattore riduttivo secondo Mann and Muller
CHI = 1.2 ' fattore di taglio
'
E_cordolo = Worksheets("input").Range("B29") ' modulo di elasticità normale dei cordoli
G_cordolo = Worksheets("input").Range("B30") ' modulo di elasticità tangenziale dei cordoli
Mu_cordolo = Worksheets("input").Range("B31") ' momento ultimo dei cordoli elastoplastici
'
NC = Worksheets("input").Range("B34") ' numero di conci discretizzanti il tratto deformabile
passo = Worksheets("input").Range("B35") ' passo di incremento della forza
Ncontr = Worksheets("input").Range("B36") ' nodo di monitoraggio dello spostamento
'
tipo_rottura_maschi = Worksheets("input").Range("F19") ' modalità di rottura dei maschi
tipo_rottura_fasce = Worksheets("input").Range("F20") ' modalità di rottura delle fasce

```

```

'
legame_pf = Worksheets("input").Range("F23") ' legame a pressoflessione dei maschi
drift_max_flessione = Worksheets("input").Range("F24") ' drift limite per collasso a pressoflessione (solo
per stress-block)
'
A_ = Worksheets("input").Range("F27") ' legame costitutivo esatto dei maschi murari
B_ = Worksheets("input").Range("F28")
C_ = Worksheets("input").Range("F29")
eps_max = Worksheets("input").Range("F30")
eps_u = Worksheets("input").Range("F31")
'
criterio_taglio = Worksheets("input").Range("F35") ' criterio di resistenza per fessurazione diagonale dei
maschi
fattore_rid_taglio = Worksheets("input").Range("F36") ' fattore di riduzione del taglio ultimo
drift_max_taglio = Worksheets("input").Range("F37") ' drift limite per collasso a taglio
'
criterio_fl_fasce = Worksheets("input").Range("F40") ' criterio di resistenza per flessione delle fasce
HP = Worksheets("input").Range("F41") ' resistenza a trazione del puntone
scorr_pl = Worksheets("input").Range("F44") ' estensione del tratto plastico delle fasce
'
For I = 1 To NN
N(I) = Worksheets("input").Range("A40:A65536").Cells(I) ' nodi caricati nella distribuzione di forze
orizzontali
If N(I) > 0 Then NNC = NNC + 1
Next I
'
For I = 1 To NNC ' forma del vettore pushover
vettore_pushover(N(I)) = Worksheets("input").Range("B40:B65536").Cells(I)
Next I
'
For I = 1 To NN
X_0(I) = Worksheets("input").Range("R9:R65536").Cells(I) ' ascissa
Y_0(I) = Worksheets("input").Range("S9:S65536").Cells(I) ' ordinata
X(I) = X_0(I)
Y(I) = Y_0(I)
FX(I) = Worksheets("input").Range("V9:V65536").Cells(I) ' forza nodale secondo x
FX_f(I) = FX(I)
FY(I) = Worksheets("input").Range("W9:W65536").Cells(I) ' forza nodale secondo y
M(I) = Worksheets("input").Range("X9:X65536").Cells(I) ' coppia nodale
For J = 1 To 3
V(I, J) = Worksheets("input").Range("AA9:AC65536").Cells(I, J) ' codice di vincolo (secondo x, secondo y,
alla rotazione)
Next J
Next I
'
For I = 1 To NA
E1(I) = Worksheets("input").Range("AF9:AF65536").Cells(I) ' numero di nodo primo estremo
E2(I) = Worksheets("input").Range("AG9:AG65536").Cells(I) ' numero di nodo secondo estremo
A(I) = Worksheets("input").Range("AJ9:AJ65536").Cells(I) ' area della sezione

```

```

A_0(I) = A(I)
JA(I) = Worksheets("input").Range("AK9:AK65536").Cells(I) ' momento di inerzia della sezione
QX(I) = Worksheets("input").Range("AP9:AP65536").Cells(I) ' carico distribuito direzione x
QX_0(I) = QX(I)
QY(I) = Worksheets("input").Range("AQ9:AQ65536").Cells(I) ' carico distribuito direzione y
QY_0(I) = QY(I)
AA(I) = Worksheets("input").Range("AT9:AT65536").Cells(I) ' tratto rigido primo estremo "a"
BB(I) = Worksheets("input").Range("AU9:AU65536").Cells(I) ' tratto rigido secondo estremo "b"
H(I) = Worksheets("input").Range("AH9:AH65536").Cells(I) ' altezza della sezione
B(I) = Worksheets("input").Range("AI9:AI65536").Cells(I) ' spessore della sezione
tipo(I) = Worksheets("input").Range("AL9:AL65536").Cells(I) ' tipo di elemento
piano(I) = Worksheets("input").Range("AM9:AM65536").Cells(I) ' piano a cui appartiene il maschio
'
'calcolo delle deformabilità
'
If tipo(I) = "rigido" Then
JA(I) = 10000 ^ 4
A(I) = 10000 ^ 2
Elseif tipo(I) = "cordolo" Then
If Mu_cordolo = 0 Then tipo(I) = "cordolo_pl"
JA(I) = JA(I) * E_cordolo / E
A(I) = A(I) * E_cordolo / E
G = G_cordolo * E / E_cordolo
End If
'
' calcolo delle deformabilità elastiche
DX = X(E2(I)) - X(E1(I))
DY = Y(E2(I)) - Y(E1(I))
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
LT = L - AA(I) - BB(I)
ALFAij(I) = LT / (3 * E * JA(I)) + 1 / LT * CHI / (G * A(I))
ALFAji(I) = LT / (3 * E * JA(I)) + 1 / LT * CHI / (G * A(I))
BETAij(I) = LT / (6 * E * JA(I)) - 1 / LT * CHI / (G * A(I))
GAMMAij(I) = QY(I) * LT ^ 3 / (24 * E * JA(I))
GAMMAji(I) = -QY(I) * LT ^ 3 / (24 * E * JA(I))
'
If tipo(I) = "cordolo" Or tipo(I) = "cordolo_pl" Then G = Gm
Next I
'
*****
' implementazione dell'analisi
*****
'
For I = 1 To NA ' inizializzazione ai valori elastici delle rigidezze al passo precedente
If tipo(I) = "maschio" Or tipo(I) = "fascia" Or tipo(I) = "cordolo_pl" Then
If tipo(I) = "cordolo_pl" Then G = G_cordolo * E / E_cordolo
For C = 1 To NC
EI(I, C) = E * JA(I)
GAsuCHI(I, C) = G * A(I) / CHI
p_GAsuCHI(I, C) = GAsuCHI(I, C)

```

```

p_EI(I, C) = EI(I, C)
Next C
If tipo(I) = "cordolo_pl" Then G = Gm
End If
Next I
'
For I = 1 To NP
meccanismo(I, 1) = NP ' la prima colonna contiene il numero di piano
Next I
For I = 1 To NA
If tipo(I) = "maschio" Then
J = piano(I)
meccanismo(J, 2) = meccanismo(J, 2) + 1 ' la seconda colonna contiene i maschi appartenenti al piano
End If
Next I
'
' ciclo con incremento dello spostamento assegnato
'
cont_stampa = 0 ' conta il numero di passi di carico per la stampa della curva
stampa_report = 1 ' conta il numero di eventi da stampare nel report
stampa_warnings = 0 ' conta il numero di warnings
ripristina_roture = 0 ' conta il numero di eventi occorsi durante il singolo ciclo prima che sia raggiunta la
convergenza
'
For Delta = 0 To Delta_max Step passo ' spostamento imposto
'
For I = 1 To NN
FX(I) = FX_f(I) ' forza nodale secondo x
Next I
'
Call FRAME2D(ALFAij(), ALFAji(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAji(), NN, NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(),
V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), F0L(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K(), F())
'
Delta_0 = F(3 * (Ncontr - 1) + 1) ' spostamento del nodo di controllo dovuto ai carichi fissi per la matrice
di rigidezza secante assegnata
'
For I = 1 To 3 * NN
SP(I) = F(I)
Next I
'
' calcolo del peso della parete
'
If cont_stampa = 0 Then
peso = 0
For I = 1 To NA
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
X1 = X(J1)
X2 = X(J2)

```

```

Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca = DX / L
SA = DY / L
If V(J1, 2) = 1 Then peso = peso + NTM(I, 2) * ca + NTM(I, 1) * SA
If V(J2, 2) = 1 Then peso = peso + NTM(I, 5) * ca + NTM(I, 4) * SA
Next I
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("B5") = Round(peso, 0)
End If
'
' risoluzione del telaio assumendo molt = 1
'
For I = 1 To NNC
FX(N(I)) = FX(N(I)) + vettore_pushover(N(I))
Next I
'
Call FRAME2D(ALFAij(), ALFAji(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAji(), NN, NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(),
V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), F0L(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K(), F())
'
Delta_1 = F(3 * (Ncontr - 1) + 1) ' spostamento del nodo di controllo dovuto ai carichi variabili per la
matrice di rigidezza secante assegnata
'
If cont_stampa = 0 Then Delta = Delta_0 ' al primo passo di carico la procedura deve restituire lo
spostamento per carichi verticali
'
molt = 1 * (Delta - Delta_0) / (Delta_1 - Delta_0) ' moltiplicatore degli spostamenti da carichi variabili per i
quali si raggiunge Delta sul nodo di controllo
'
For I = 1 To 3 * NN
SP(I) = SP(I) + molt / 1 * (F(I) - SP(I))
Next I
'
' aggiornamento delle coordinate nodali
'
For I = 1 To NN
X(I) = X_0(I) + SP(3 * (I - 1) + 1)
Y(I) = Y_0(I) + SP(3 * (I - 1) + 2)
Next I
'
' aggiornamento dei carichi distribuiti affinché agiscano sulla configurazione deformata
'
For I = 1 To NA
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
'
X1 = X(J1)

```

```

X2 = X(J2)
Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca_1 = DX / L
SA_1 = DY / L
'
X1 = X_0(J1)
X2 = X_0(J2)
Y1 = Y_0(J1)
Y2 = Y_0(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca_0 = DX / L
SA_0 = DY / L
'
ca = ca_1 * ca_0 + SA_1 * SA_0
SA = SA_1 * ca_0 - ca_1 * SA_0
QX(I) = QX_0(I) * ca + QY_0(I) * SA
QY(I) = -QX_0(I) * SA + QY_0(I) * ca
'
If collasso(I) = 1 Then
QX(I) = 0
QY(I) = 0
End If
Next I
'
' determinazione delle sollecitazioni corrispondenti al vettore degli spostamenti calcolato tramite molt
'
Call FRAME2D_spostamenti_assegnati(SP(), ALFAij(), ALFAij(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAij(), NN, NA,
E, X(), Y(), FX(), FY(), M(), V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), FOL(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(),
NTM(), K())
'
' divisione dell'asta in conci e applicazione dei legami costitutivi
'
ciclo = 0 ' contatore numero cicli
Do
ciclo = ciclo + 1
For I = 1 To NA
If tipo(I) = "cordolo" Or tipo(I) = "rigido" Then GoTo next_asta
'
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
'
X1 = X(J1)
X2 = X(J2)

```

```

Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
'
hs = H(l)
ts = B(l)
A1 = AA(l)
B2 = BB(l)
'
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2) ' lunghezza dell'asta
LT = L - A1 - B2 ' lunghezza tratto deformabile
Ld = LT / NC ' lunghezza del concio
'
ALFAij(l) = 0
ALFAji(l) = 0
BETAij(l) = 0
GAMMAij(l) = 0
GAMMAji(l) = 0
'
' calcolo di N, T e M all'estremità del tratto rigido
'
NTM1 = NTM(l, 1) + A1 * QX(l)
NTM2 = NTM(l, 2) + A1 * QY(l)
NTM3 = NTM(l, 3) - NTM(l, 2) * A1 - QY(l) * A1 ^ 2 / 2
NTM5 = NTM(l, 5) + B2 * QY(l)
NTM6 = NTM(l, 6) + NTM(l, 5) * B2 + QY(l) * B2 ^ 2 / 2
'
*****
' modellazione dei cordoli elastoplastici
*****
'
If tipo(l) = "cordolo_pl" Then
For C = 1 To NC
'
' calcolo delle sollecitazioni nel punto medio dei conci della discretizzazione
'
zi = (C - 1) * Ld
zf = C * Ld
Zc = 0.5 * (zf + zi)
Tc = NTM2 + Zc * QY(l) ' positivo se genera una coppia oraria
Mc = -NTM3 + NTM2 * Zc + QY(l) * Zc ^ 2 / 2 ' positivo se tende le fibre inferiori
'
curv = Abs(Mc) / EI(l, C)
curv_y = Mu_cordolo / (E * JA(l))
If curv <= curv_y Then
EI(l, C) = E * JA(l) ' rigidezza elastica
Else
EI(l, C) = Mu_cordolo * EI(l, C) / Abs(Mc) ' rigidezza secante

```

```

End If
'
If (C = 1 And rottura_J1(l) = 0) Or (C = NC And rottura_J2(l) = 0) Then
If C = 1 And curv > curv_y Then
ripristina_rottura = ripristina_rottura + 1
rottura_J1(l) = 1
Elseif C = NC And curv > curv_y Then
ripristina_rottura = ripristina_rottura + 1
rottura_J2(l) = 1
End If
Elseif C = 1 And rottura_J1(l) = 1 Then
rottura_J1(l) = 2
Elseif C = NC And rottura_J2(l) = 1 Then
rottura_J2(l) = 2
End If
'
' *** coefficienti di deformibilità del tratto deformabile dell'asta ***
'
ALFAij(l) = ALFAij(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 3 - (LT - zf) ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
ALFAji(l) = ALFAji(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (zf ^ 3 - zi ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
BETAij(l) = BETAij(l) - 1 / 6 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (2 * (zf ^ 3 - zi ^ 3) - 3 * LT * (zf ^ 2 - zi ^ 2)) - 1 / LT ^ 2 /
GAsuCHI(l, C) * (zf - zi) ' il segno negativo di beta è esplicitato nelle equazioni di congruenza
'
TQY = -QY(l) * LT / 2 + Zc * QY(l)
MQY = -QY(l) * LT * Zc / 2 + QY(l) * Zc ^ 2 / 2
GAMMAij(l) = GAMMAij(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 2 - (LT - zf) ^ 2) + 1 / LT * TQY /
GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
GAMMAji(l) = GAMMAji(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * (zi ^ 2 - zf ^ 2) + 1 / LT * TQY / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
'
Next C
End If
'
*****
' fine modellazione cordoli elastoplastici
*****
'
*****
' modellazione delle fasce di piano
*****
'
If tipo(l) = "fascia" Then
If (tipo_rottura_fasce = "per taglio e flessione" Or tipo_rottura_fasce = "solo per flessione") And
criterio_fl_fasce = "Kasten and Schubert" Then 'Cattari and Lagomarsino per muratura di mattoni regolare
sigma_y_1 = 0
sigma_y_2 = 0
For Q = 1 To NA ' individuazione del maschio del piano superiore adiacente agli estermi della fascia

```

```

Q1 = E1(Q)
Q2 = E2(Q)
If (tipo(Q) = "maschio" Or tipo(Q) = "rigido") And (Q1 = J1 Or Q2 = J1) And (Y(Q1) > Y1 Or Y(Q2) > Y1)
Then
  If Q1 = J1 Then sigma_y_1 = NTM(Q, 1) / A_0(Q)
  If Q2 = J1 Then sigma_y_1 = -NTM(Q, 4) / A_0(Q)
  If sigma_y_1 < 0 Then sigma_y_1 = 0
  GoTo estremo_2
End If
estremo_2:
If (tipo(Q) = "maschio" Or tipo(Q) = "rigido") And (Q1 = J2 Or Q2 = J2) And (Y(Q1) > Y2 Or Y(Q2) > Y2)
Then
  If Q1 = J2 Then sigma_y_2 = NTM(Q, 1) / A_0(Q)
  If Q2 = J2 Then sigma_y_2 = -NTM(Q, 4) / A_0(Q)
  If sigma_y_2 < 0 Then sigma_y_2 = 0
  GoTo continua
End If
Next Q
End If
continua:
If tipo_rottura_fasce = "per taglio e flessione" Or tipo_rottura_fasce = "solo per taglio" Then Vu = A_0(l) *
fvk0 ' taglio ultimo
,
For C = 1 To NC
,
' calcolo delle sollecitazioni nel punto medio dei conci della discretizzazione
,
zi = (C - 1) * Ld
zf = C * Ld
Zc = 0.5 * (zf + zi)
Pc = NTM1 + Zc * QX(l) ' positivo di compressione
Tc = NTM2 + Zc * QY(l) ' positivo se genera una coppia oraria
Mc = -NTM3 + NTM2 * Zc + QY(l) * Zc ^ 2 / 2 ' positivo se tende le fibre inferiori
,
' *** comportamento a flessione ***
,
If tipo_rottura_fasce = "per taglio e flessione" Or tipo_rottura_fasce = "solo per flessione" Then
,
' calcolo del momento ultimo
,
If criterio_fl_fasce = "stress-block" Then
If Pc <= 0 Or Pc >= 0.85 * fwc * hs * ts Then
  Mu = 0.01
  GoTo legame
End If
yc = Pc / 0.85 / fwc / ts ' criterio NTC2008
Mu = Pc * (hs / 2 - yc / 2)
Elseif criterio_fl_fasce = "puntone equivalente" Then
If HP > 0.4 * fwc * hs * ts Or HP = -1 Then HP = 0.4 * fwc * hs * ts

```

```

Mu = HP * hs / 2 * (1 - HP / 0.85 / fwc / hs / ts)
Elseif criterio_fl_fasce = "Kasten and Schubert" Then
If C < NC / 2 Then
sigma_y = sigma_y_1
Else
sigma_y = sigma_y_2
End If
'
sigma_traz = (0.65 * sigma_y * coeff_attr + coesione) * kbf
If Pc <= -sigma_traz * hs * ts Or Pc >= fwc * hs * ts Then
Mu = 0.01
GoTo legame
End If
If sigma_traz > fbt / 2 Then sigma_traz = fbt / 2
ni = Pc / fwc / hs / ts
lb = 1.18 ' duttilità in compressione
eta = sigma_traz / fwc
af = 1 / lb
bt = eta / lb
ni_lim = (1 - af / 2 - eta * bt / 2) / (1 + bt)
If ni < ni_lim Then
CSI = (ni + eta) / (1 - af / 2 + eta * (1 + bt / 2))
Mu = (CSI / 4 * (2 - af + eta * (2 + bt)) - CSI ^ 2 / 6 * (3 - 3 * af + 3 * af ^ 2 + eta * (3 + 3 * bt + 3 * bt ^ 2)))
* hs ^ 2 * ts * fwc
Else
CSI = (ni - lb + Sqr((ni - lb) ^ 2 + lb * (2 - af - lb))) / (2 - af - lb)
Mu = (CSI / 2 * (1 - af) * (1 - CSI * (1 - af)) + af * CSI / 2 * (0.5 - CSI * (1 - 2 / 3 * af)) + (1 - CSI) ^ 2 / CSI
* lb / 6 * (0.5 + CSI)) * hs ^ 2 * ts * fwc
End If
End If
'
legame:
curv = Abs(Mc) / EI(I, C)
curv_y = Mu / (E * JA(I))
If curv <= curv_y Then
EI(I, C) = E * JA(I) ' rigidezza elastica
Else
EI(I, C) = Mu * EI(I, C) / Abs(Mc) ' rigidezza secante
End If
'
' aggiornamento indici per stampa plasticizzazioni
'
If (C = 1 And rottura_J1(I) = 0) Or (C = NC And rottura_J2(I) = 0) Then
If C = 1 And curv > curv_y Then
ripristina_rotture = ripristina_rotture + 1
rottura_J1(I) = 1
Elseif C = NC And curv > curv_y Then
ripristina_rotture = ripristina_rotture + 1
rottura_J2(I) = 1

```

```

End If
Elseif C = 1 And rottura_J1(l) = 1 Then
    rottura_J1(l) = 2
Elseif C = NC And rottura_J2(l) = 1 Then
    rottura_J2(l) = 2
End If
End If
'
' *** comportamento a taglio ***
'
If tipo_rottura_fasce = "per taglio e flessione" Or tipo_rottura_fasce = "solo per taglio" Then
'
' applicazione del legame costitutivo
'
scorr = Abs(Tc) / GAsuCHI(l, C)
scorr_y = Vu / (G * A(l) / CHI)
If scorr <= scorr_y Then
    GAsuCHI(l, C) = G * A(l) / CHI ' rigidezza elastica
Elseif scorr <= scorr_y + scorr_pl Or scorr_pl = -1 Then
    GAsuCHI(l, C) = Vu * GAsuCHI(l, C) / Abs(Tc) ' rigidezza secante pre-degrado
Else
    GAsuCHI(l, C) = 0.25 * Vu * GAsuCHI(l, C) / Abs(Tc) ' rigidezza secante post-degrado
End If
'
' aggiornamento indici per stampa plasticizzazioni
'
If rottura_taglio(l) = 0 And scorr > scorr_y Then
    ripristina_rotture = ripristina_rotture + 1
    rottura_taglio(l) = C
Elseif C = rottura_taglio(l) Then
    rottura_taglio(l) = 1000
End If
End If
'
ALFAij(l) = ALFAij(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 3 - (LT - zf) ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
ALFAij(l) = ALFAij(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (zf ^ 3 - zi ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
BETAij(l) = BETAij(l) - 1 / 6 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (2 * (zf ^ 3 - zi ^ 3) - 3 * LT * (zf ^ 2 - zi ^ 2)) - 1 / LT ^ 2 /
GAsuCHI(l, C) * (zf - zi) ' il segno negativo di beta è esplicitato nelle equazioni di congruenza
'
TQY = -QY(l) * LT / 2 + Zc * QY(l)
MQY = -QY(l) * LT * Zc / 2 + QY(l) * Zc ^ 2 / 2
GAMMAij(l) = GAMMAij(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 2 - (LT - zf) ^ 2) + 1 / LT * TQY /
GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
GAMMAij(l) = GAMMAij(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * (zi ^ 2 - zf ^ 2) + 1 / LT * TQY / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
'
Next C
'

```

```

End If
'
*****
' fine modellazione delle fasce di piano
*****
'
'
*****
' modellazione dei maschi murari
*****
'
If tipo(l) = "maschio" Then
'
If collasso(l) > 0 Then
If NTM(l, 1) > 0 Then A(l) = A_0(l)
If NTM(l, 1) < 0 Then A(l) = 0.0001
ALFAij(l) = 10000
ALFAji(l) = 10000
BETAij(l) = 5000
GAMMAij(l) = 10000 * QY(l)
GAMMAji(l) = -10000 * QY(l)
GoTo next_asta
End If
'
If fattore_rid_taglio = "Benedetti and Tomazevic" Then
If LT / hs < 1 Then      ' coefficiente di Benedetti-Tomazevic per la modellazione della fessurazione
diagonale
coeff_b = 1
Elseif LT / hs < 1.5 Then
coeff_b = LT / hs
Else
coeff_b = 1.5
End If
Elseif fattore_rid_taglio = "Magenes and Calvi" Then
If Y(J1) < Y(J2) Then      ' coefficiente di Magenes-Calvi per la modellazione della fessurazione diagonale
If NTM2 = 0 Then
coeff_b = 1
Else
coeff_b = 1 + Abs(NTM3 / NTM2) / hs
End If
Else
If NTM5 = 0 Then
coeff_b = 1
Else
coeff_b = 1 + Abs(NTM6 / NTM5) / hs
End If
End If
If coeff_b > 2 Then coeff_b = 2
End If

```

```

'
For C = 1 To NC
'
' calcolo delle sollecitazioni nel punto medio dei conci della discretizzazione
'
zi = (C - 1) * Ld
zf = C * Ld
Zc = 0.5 * (zf + zi)
Pc = NTM1 + Zc * QX(I) ' positivo di compressione
Tc = NTM2 + Zc * QY(I) ' positivo se genera una coppia oraria
Mc = -NTM3 + NTM2 * Zc + QY(I) * Zc ^ 2 / 2 ' positivo se tende le fibre inferiori
'
' *** rottura per trazione ***
'
If Pc <= 0 Then
collasso(I) = 1
A(I) = 0.0001
ALFAij(I) = 10000
ALFAji(I) = 10000
BETAij(I) = 5000
GAMMAij(I) = 10000 * QY(I)
GAMMAji(I) = -10000 * QY(I)
QX(I) = 0
QY(I) = 0
DX = X_0(J2) - X_0(J1)
DY = Y_0(J2) - Y_0(J1)
L_0 = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
If Y(J1) < Y(J2) Then ' il peso del maschio è applicato al nodo inferiore come forza concentrata
FY(J1) = FY(J1) - L_0 * Abs(QX_0(I))
Else
FY(J2) = FY(J2) - L_0 * Abs(QX_0(I))
End If
'
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
sollecitato a trazione"
GoTo next_asta
End If
'
' *** comportamento a pressoflessione ***
'
If tipo_rottura_maschi = "per taglio e pressoflessione" Or tipo_rottura_maschi = "solo per pressoflessione"
Then
'
' applicazione del legame costitutivo
'
curv = Abs(Mc) / EI(I, C)
'

```

```

If legame_pf = "esatto" Then
Call M_chi(A_, B_, C_, fwc, eps_max, eps_u, hs, ts, Pc, curv, Mom, CSI)
,

If Mom = 0 Then
EI(I, C) = E * JA(I)
Elseif Mom = -1 Then
collasso(I) = 1
A(I) = A_0(I)
ALFAij(I) = 10000
ALFAji(I) = 10000
BETAij(I) = 5000
GAMMAij(I) = 10000 * QY(I)
GAMMAji(I) = -10000 * QY(I)
QX(I) = 0
QY(I) = 0
DX = X_0(J2) - X_0(J1)
DY = Y_0(J2) - Y_0(J1)
L_0 = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
If Y(J1) < Y(J2) Then ' il peso del maschio è applicato al nodo inferiore come forza concentrata
FY(J1) = FY(J1) - L_0 * Abs(QX_0(I))
Else
FY(J2) = FY(J2) - L_0 * Abs(QX_0(I))
End If
,

stampa_report = stampa_report + 1
I1 = 3 * (J1 - 1) + 1
R1 = 3 * (J1 - 1) + 3
I2 = 3 * (J2 - 1) + 1
R2 = 3 * (J2 - 1) + 3
SP1 = SP(I1) - A1 * SP(R1)
SP2 = SP(I2) + B2 * SP(R2)
drift = Abs(SP1 - SP2) / LT
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
collassato per pressoflessione (drift = " & Round(drift * 100, 2) & "%)"
GoTo next_asta
Else
EI(I, C) = Mom / curv
End If
Else
yc = Pc / 0.85 / fwc / ts
Mu = Pc * (hs / 2 - yc / 2)
curv_y = Mu / (E * JA(I))
If curv <= curv_y Then
EI(I, C) = E * JA(I) ' rigidezza elastica
Else
EI(I, C) = Mu * EI(I, C) / Abs(Mc) ' rigidezza secante
CSI = yc / hs
End If

```

```

End If
'
' aggiornamento indici per stampa plasticizzazioni
'
If (C = 1 And rottura_J1(l) = 0) Or (C = NC And rottura_J2(l) = 0) Then
  If legame_pf = "esatto" Then
    ni = Pc / fwc / hs / ts
    csi_y = ni * (A_ / 2 * (eps_max / eps_max) + B_ / (C_ + 1) * (eps_max / eps_max) ^ C_) ^ -1
    curv_y = eps_max / csi_y / hs      ' curvatura al raggiungimento di eps_max
  End If
  If C = 1 And curv > curv_y Then
    ripristina_rotture = ripristina_rotture + 1
    rottura_J1(l) = 1
  ElseIf C = NC And curv > curv_y Then
    ripristina_rotture = ripristina_rotture + 1
    rottura_J2(l) = 1
  End If
  ElseIf C = 1 And rottura_J1(l) = 1 Then
    rottura_J1(l) = 2
  ElseIf C = NC And rottura_J2(l) = 1 Then
    rottura_J2(l) = 2
  End If
End If
'
' *** comportamento a taglio ***
'
If tipo_rottura_maschi = "per taglio e pressoflessione" Or tipo_rottura_maschi = "solo per taglio" Then
'
' taglio ultimo per fessurazione diagonale
'
Pm = NTM1 + LT / 2 * QX(l)      ' sforzo normale in mezzeria del maschio
If criterio_taglio = "Turnsek and Cacovic" Then
  Vu_f = A_0(l) * 1.5 / coeff_b * fvk0 * Sqr(1 + Pm / A_0(l) / 1.5 / fvk0)
Elseif criterio_taglio = "Mann and Muller" Then
  Vu_f = A_0(l) * fbt / 2.3 / coeff_b * Sqr(1 + Pm / A_0(l) / fbt) ' Vu per rottura dei blocchi
  Vu_f_m = (coesione * A_0(l) + coeff_attr * Pm) * kb / coeff_b ' Vu per scorrimento lungo i corsi di malta
  If Vu_f_m < Vu_f Then Vu_f = Vu_f_m
End If
'
' taglio ultimo per scorrimento
'
If tipo_rottura_maschi = "per taglio e pressoflessione" And CSI > 1 Then CSI = 1
If tipo_rottura_maschi = "solo per taglio" Or (legame_pf = "stress-block" And curv <= curv_y) Then
  ecsuh = Abs(Mc / Pc) / hs
  If ecsuh <= 1 / 6 Then
    CSI = 1
  Else
    CSI = 3 * (0.5 - ecsuh)
  End If
End If

```

```

End If
Vu_s = coesione * CSI * A_0(l) + coeff_attr * Pc
'
' taglio ultimo minimo
'
Vu = Vu_f
If Vu_s < Vu_f Then Vu = Vu_s
'
' applicazione del legame costitutivo
'
scorr = Abs(Tc) / GAsuCHI(l, C)
scorr_y = Vu / (G * A_0(l) / CHI)
If scorr <= scorr_y Then
  GAsuCHI(l, C) = G * A_0(l) / CHI ' rigidezza elastica
Else
  GAsuCHI(l, C) = Vu * GAsuCHI(l, C) / Abs(Tc) ' rigidezza secante
End If
'
' aggiornamento indici per stampa plasticizzazioni
'
If rottura_taglio(l) = 0 And scorr > scorr_y And Vu = Vu_s Then
  ripristina_roture = ripristina_roture + 1
  rottura_taglio(l) = C
  V_min = Vu
ElseIf rottura_taglio(l) = 0 And scorr > scorr_y And Vu = Vu_f Then
  ripristina_roture = ripristina_roture + 1
  rottura_taglio(l) = -C
  V_min = Vu
ElseIf Vu < V_min Then ' verifica che la rottura non avvenga prima in altri conci secondo un diverso
meccanismo
  If Vu = Vu_s Then rottura_taglio(l) = C
  If Vu = Vu_f Then rottura_taglio(l) = -C
  ElseIf C = rottura_taglio(l) Then
    rottura_taglio(l) = 1000 ' il numero massimo di conci è 500
  ElseIf C = -rottura_taglio(l) Then
    rottura_taglio(l) = -1000
  End If
End If
'
' *** coefficienti di deformibilità del tratto deformabile dell'asta ***
'
ALFAij(l) = ALFAij(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 3 - (LT - zf) ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
ALFAij(l) = ALFAij(l) + 1 / 3 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (zf ^ 3 - zi ^ 3) + 1 / LT ^ 2 / GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
BETAij(l) = BETAij(l) - 1 / 6 / LT ^ 2 / EI(l, C) * (2 * (zf ^ 3 - zi ^ 3) - 3 * LT * (zf ^ 2 - zi ^ 2)) - 1 / LT ^ 2 /
GAsuCHI(l, C) * (zf - zi) ' il segno negativo di beta è esplicitato nelle equazioni di congruenza
'
TQY = -QY(l) * LT / 2 + Zc * QY(l)
MQY = -QY(l) * LT * Zc / 2 + QY(l) * Zc ^ 2 / 2

```

```

    GAMMAij(l) = GAMMAij(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * ((LT - zi) ^ 2 - (LT - zf) ^ 2) + 1 / LT * TQY /
    GAsuCHI(l, C) * (zf - zi)
    GAMMAij(l) = GAMMAij(l) - 1 / 2 / LT * MQY / EI(l, C) * (zi ^ 2 - zf ^ 2) + 1 / LT * TQY / GAsuCHI(l, C) * (zf
- zi)
    ,
    Next C
    V_min = 0
    End If
    ,
    *****
    ' fine modellazione dei maschi murari
    *****
    ,
next_asta:
    Next l
    ,
    *****
    ' blocco dell'analisi
    *****
    ,
    ' controllo dell'attivazione di un meccanismo di piano
    ,
    For l = 1 To NA
    If tipo(l) = "maschio" And collasso(l) = 1 Then
    collasso(l) = 2
    J = piano(l)
    meccanismo(J, 2) = meccanismo(J, 2) - 1
    If meccanismo(J, 2) = 0 Then
    stampa_report = stampa_report + 1
    Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
    Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "attivazione di un
meccanismo al piano " & J
    GoTo termina
    End If
    End If
    Next l
    ,
    *****
    ' risoluzione del telaio con l'ultima matrice di rigidezza calcolata
    *****
    ,
    ' risoluzione del telaio con i soli carichi fissi assegnati (molt = 0)
    ,
    For l = 1 To NN
    FX(l) = FX_f(l) ' forza nodale secondo x
    Next l
    ,
    Call FRAME2D(ALFAij(), ALFAij(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAij(), NN, NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(),
V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), F0L(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K(), F())

```

```

'
Delta_0 = F(3 * (Ncontr - 1) + 1) ' spostamento del nodo di controllo dovuto ai carichi fissi per la matrice
di rigidezza secante assegnata
'
For I = 1 To 3 * NN
SP(I) = F(I)
Next I
'
' risoluzione del telaio assumendo molt = 1
'
For I = 1 To NNC
FX(N(I)) = FX(N(I)) + vettore_pushover(N(I))
Next I
'
Call FRAME2D(ALFAij(), ALFAji(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAji(), NN, NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(),
V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), FOL(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K(), F())
'
Delta_1 = F(3 * (Ncontr - 1) + 1) ' spostamento del nodo di controllo dovuto ai carichi variabili per la
matrice di rigidezza secante assegnata
'
If cont_stampa = 0 Then Delta = Delta_0 ' al primo passo di carico la procedura deve restituire lo
spostamento per carichi verticali
'
molt = 1 * (Delta - Delta_0) / (Delta_1 - Delta_0) ' moltiplicatore degli spostamenti da carichi variabili per i
quali si raggiunge Delta sul nodo di controllo
'
For I = 1 To 3 * NN
SP(I) = SP(I) + molt / 1 * (F(I) - SP(I))
Next I
'
' aggiornamento delle coordinate nodali
'
For I = 1 To NN
X(I) = X_0(I) + SP(3 * (I - 1) + 1)
Y(I) = Y_0(I) + SP(3 * (I - 1) + 2)
Next I
'
' aggiornamento dei carichi distribuiti affinché agiscano sulla configurazione deformata
'
For I = 1 To NA
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
'
X1 = X(J1)
X2 = X(J2)
Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1

```

```

L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca_1 = DX / L
SA_1 = DY / L
'
X1 = X_0(J1)
X2 = X_0(J2)
Y1 = Y_0(J1)
Y2 = Y_0(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca_0 = DX / L
SA_0 = DY / L
'
ca = ca_1 * ca_0 + SA_1 * SA_0
SA = SA_1 * ca_0 - ca_1 * SA_0
QX(I) = QX_0(I) * ca + QY_0(I) * SA
QY(I) = -QX_0(I) * SA + QY_0(I) * ca
'
If collasso(I) = 1 Then
  QX(I) = 0
  QY(I) = 0
End If
Next I
'
' determinazione delle sollecitazioni corrispondenti al vettore degli spostamenti calcolato tramite molt
'
Call FRAME2D_spostamenti_assegnati(SP(), ALFAij(), ALFAji(), BETAIij(), GAMMAij(), GAMMAji(), NN,
NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(), V(), E1(), E2(), A(), QX(), QY(), AA(), BB(), F0L(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(),
NTM(), K())
'
*****
' controllo di convergenza delle rigidezze dei conc
*****
'
controllo = 1
For I = 1 To NA
If (tipo(I) = "maschio" And collasso(I) = 0) Or tipo(I) = "fascia" Or tipo(I) = "cordolo_pl" Then
For C = 1 To NC
delta_EI = Abs((EI(I, C) - p_EI(I, C)) / p_EI(I, C))
delta_GAsuCHI = Abs((GAsuCHI(I, C) - p_GAsuCHI(I, C)) / p_GAsuCHI(I, C))
If (delta_EI > errore_max Or delta_GAsuCHI > errore_max) And ciclo <= ciclo_max Then
controllo = 0
GoTo convergenza
Elseif (delta_EI > errore_max Or delta_GAsuCHI > errore_max) And ciclo > ciclo_max Then
conci_non_convergenti = conc_i_non_convergenti + 1
If delta_EI > errore Then errore = delta_EI
If delta_GAsuCHI > errore Then errore = delta_GAsuCHI
End If

```

```

Next C
End If
'
If conc_i_non_convergenti > 0 Then
    stampa_warnings = stampa_warnings + 1
    Worksheets("risultati dell'analisi").Range("K11:K65536").Cells(stampa_warnings) = Round(Delta, 3)
    If tipo(I) = "maschio" Then
        Worksheets("risultati dell'analisi").Range("L11:L65536").Cells(stampa_warnings) = "maschio " & I & ":
convergenza non raggiunta su " & conc_i_non_convergenti & " conc_i (errore massimo commesso = " &
Round(errore * 100, 2) & "%)"
    ElseIf tipo(I) = "fascia" Then
        Worksheets("risultati dell'analisi").Range("L11:L65536").Cells(stampa_warnings) = "fascia " & I & ":
convergenza non raggiunta su " & conc_i_non_convergenti & " conc_i (errore massimo commesso = " &
Round(errore * 100, 2) & "%)"
    Else
        Worksheets("risultati dell'analisi").Range("L11:L65536").Cells(stampa_warnings) = "cordolo " & I & ":
convergenza non raggiunta su " & conc_i_non_convergenti & " conc_i (errore massimo commesso = " &
Round(errore * 100, 2) & "%)"
    End If
    conc_i_non_convergenti = 0
    errore = 0
End If
Next I
'
convergenza:
'
' azzeramento degli eventi occorsi prima che sia raggiunta la convergenza
'
If controllo = 0 And ripristina_rotture > 0 Then
    For I = 1 To NA
        If rottura_J1(I) = 1 Then rottura_J1(I) = 0
        If rottura_J2(I) = 1 Then rottura_J2(I) = 0
        If rottura_taglio(I) < 1000 And rottura_taglio(I) > -1000 Then rottura_taglio(I) = 0
    Next I
End If
'
ripristina_rotture = 0
'
' memorizzazione delle ultime rigidezze dei conc_i calcolate
'
For I = 1 To NA
    If (tipo(I) = "maschio" And collasso(I) = 0) Or tipo(I) = "fascia" Or tipo(I) = "cordolo_pl" Then
        For C = 1 To NC
            p_GAsuCHI(I, C) = GAsuCHI(I, C)
            p_EI(I, C) = EI(I, C)
        Next C
    End If
Next I
'

```

```

Loop While controllo = 0
'
' calcolo del tagliante
'
tagliante = 0
For I = 1 To NA
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
X1 = X(J1)
X2 = X(J2)
Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca = DX / L
SA = DY / L
If V(J1, 1) = 1 Then tagliante = tagliante + NTM(I, 2) * SA - NTM(I, 1) * ca
If V(J2, 1) = 1 Then tagliante = tagliante + NTM(I, 5) * SA - NTM(I, 4) * ca
Next I
'
' stampa report rotture
'
For I = 1 To NA
If tipo(I) = "cordolo_pl" And rottura_J1(I) = 1 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "cordolo " & I & "
plasticizzato per flessione all'estremo " & E1(I)
End If
If tipo(I) = "cordolo_pl" And rottura_J2(I) = 1 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "cordolo " & I & "
plasticizzato per flessione all'estremo " & E2(I)
End If
If tipo(I) = "fascia" And rottura_J1(I) = 1 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "fascia " & I & " plasticizzata
per flessione all'estremo " & E1(I)
End If
If tipo(I) = "fascia" And rottura_J2(I) = 1 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "fascia " & I & " plasticizzata
per flessione all'estremo " & E2(I)
End If
If tipo(I) = "fascia" And rottura_taglio(I) > 0 And rottura_taglio(I) < 1000 Then

```

```

stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "fascia " & I & " plasticizzata
per taglio"
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_J1(I) = 1 And collasso(I) = 0 And legame_pf = "esatto" Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & " ha
raggiunto la deformazione ek all'estremo " & E1(I)
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_J2(I) = 1 And collasso(I) = 0 And legame_pf = "esatto" Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & " ha
raggiunto la deformazione ek all'estremo " & E2(I)
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_J1(I) = 1 And collasso(I) = 0 And legame_pf = "stress-block" Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
plasticizzato per pressoflessione all'estremo " & E1(I)
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_J2(I) = 1 And collasso(I) = 0 And legame_pf = "stress-block" Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
plasticizzato per pressoflessione all'estremo " & E2(I)
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_taglio(I) > 0 And rottura_taglio(I) < 1000 And collasso(I) = 0 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
plasticizzato per taglio-scorrimento"
End If
If tipo(I) = "maschio" And rottura_taglio(I) > -1000 And rottura_taglio(I) < 0 And collasso(I) = 0 Then
stampa_report = stampa_report + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
plasticizzato per fessurazione diagonale"
End If
Next I
'
' controllo del collasso per taglio
'
For I = 1 To NA
If tipo(I) = "maschio" And collasso(I) = 0 Then
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)

```

```

X1 = X(J1)
X2 = X(J2)
Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
A1 = AA(I)
B2 = BB(I)
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
LT = L - A1 - B2
I1 = 3 * (J1 - 1) + 1
R1 = 3 * (J1 - 1) + 3
I2 = 3 * (J2 - 1) + 1
R2 = 3 * (J2 - 1) + 3
SP1 = SP(I1) - A1 * SP(R1)
SP2 = SP(I2) + B2 * SP(R2)
drift = Abs(SP1 - SP2) / LT      ' drift calcolato sulla parte deformabile del maschio
If rottura_taglio(I) > 0 And drift >= drift_max_taglio Then
  collasso(I) = 1
  stampa_report = stampa_report + 1
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
  collassato per taglio-scorrimento (drift = " & Round(drift * 100, 2) & "%)"
Elseif rottura_taglio(I) < 0 And drift >= drift_max_taglio Then
  collasso(I) = 1
  stampa_report = stampa_report + 1
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
  collassato per fessurazione diagonale (drift = " & Round(drift * 100, 2) & "%)"
Elseif legame_pf = "stress-block" And (rottura_J1(I) > 0 Or rottura_J2(I) > 0) And drift >=
drift_max_flessione Then
  collasso(I) = 1
  stampa_report = stampa_report + 1
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
  Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "maschio " & I & "
  collassato per pressoflessione (drift = " & Round(drift * 100, 2) & "%)"
End If
If collasso(I) = 1 Then
  A(I) = A_0(I)
  ALFAij(I) = 10000
  ALFAji(I) = 10000
  BETAij(I) = 5000
  GAMMAij(I) = 10000 * QY(I)
  GAMMAji(I) = -10000 * QY(I)
  QX(I) = 0
  QY(I) = 0
  DX = X_0(J2) - X_0(J1)
  DY = Y_0(J2) - Y_0(J1)
  L_0 = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)

```

```

If Y(J1) < Y(J2) Then      ' il peso del maschio è applicato al nodo inferiore come forza concentrata
  FY(J1) = FY(J1) - L_0 * Abs(QX_0(I))
Else
  FY(J2) = FY(J2) - L_0 * Abs(QX_0(I))
End If
End If
End If
Next I
,
*****
' blocco dell'analisi
*****
,
' controllo dell'attivazione di un meccanismo di piano
,
For I = 1 To NA
If tipo(I) = "maschio" And collasso(I) = 1 Then
  collasso(I) = 2
  J = piano(I)
  meccanismo(J, 2) = meccanismo(J, 2) - 1
  If meccanismo(J, 2) = 0 Then
    stampa_report = stampa_report + 1
    Worksheets("risultati dell'analisi").Range("G11:G65536").Cells(stampa_report) = Round(Delta, 3)
    Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "attivazione di un
meccanismo al piano " & J
    GoTo termina
  End If
End If
Next I
,
' stampa del punto della curva pushover
,
cont_stampa = cont_stampa + 1
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("A11:A65536").Cells(cont_stampa) = Round(Delta, 3) ' stampa lo
spostamento del nodo controllato
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("B11:B65536").Cells(cont_stampa) = Round(tagliante, 0) ' stampa
il tagliante alla base
,
' ripristino delle coordinate nodali
,
For I = 1 To NN
  X(I) = X_0(I)
  Y(I) = Y_0(I)
Next I
,
' ripristino dei carichi distribuiti
,
For I = 1 To NA
,

```

```

QX(I) = QX_0(I)
QY(I) = -QX_0(I)
'
If collasso(I) = 1 Then
QX(I) = 0
QY(I) = 0
End If
Next I
'
Next Delta
'
termina:
'
stampa_report = stampa_report + 1
ORA_FINE = Time()
DURATA = CDate(ORA_FINE - ORA_INIZIO)
MsgBox "ANALISI COMPLETATA in " & DURATA
Worksheets("risultati dell'analisi").Range("I11:I65536").Cells(stampa_report) = "ANALISI COMPLETATA in "
& DURATA
esci:
End Sub

Public Sub FRAME2D(ALFAij(), ALFAji(), BETAij(), GAMMAij(), GAMMAji(), NN As Integer, NA, E, X(), Y(),
FX(), FY(), M(), V() As Integer, E1() As Integer, E2() As Integer, A() As Double, QX(), QY(), AA(), BB(),
FOL(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K(), F())

For I = 1 To 3 * NN
For J = 1 To 3 * NN
K(I, J) = 0
Next J
Next I
'
For I = 1 To 3 * NN
F(I) = 0
Next I
'
For I = 1 To NA
J1 = E1(I)
J2 = E2(I)
X1 = X(J1)
X2 = X(J2)
Y1 = Y(J1)
Y2 = Y(J2)
A1 = AA(I)
B2 = BB(I)
AFij = ALFAij(I)
AFji = ALFAji(I)
BTij = BETAij(I)
GMij = GAMMAij(I)

```

```

GMji = GAMMAji(I)
'
' Calcolo del vettore azioni di incastro perfetto
'
Call FL(X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, AFij, AFji, BTij, GMij, GMji, QX(I), QY(I), FOL())
'
' Calcolo della matrice di rigidezza nel riferimento locale
'
Call STIFF(E, A(I), AFij, AFji, BTij, X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, K1())
'
' Calcolo della matrice di trasformazione
'
Call MATT(X1, Y1, X2, Y2, T())
'
' Calcolo della matrice di rigidezza nel riferimento globale
'
Call TKT(K1(), T())
'
' Calcolo del vettore delle azioni di incastro perfetto nel
' riferimento globale
'
Call TF0(T(), FOL(), F0())
'
' Assemblaggio della matrice di rigidezza nella configurazione
' di base
'
Call STIFFK(J1, J2, K1(), K())
'
' Assemblaggio del vettore delle forze
'
Call F0F(J1, J2, F0(), F())
Next I
'
' Introduzione delle forze nodali esterne
'
Call FORCE(NN, FX(), FY(), M(), F())
'
' Introduzione delle condizioni di vincolo
'
For I = 1 To NN
  For J1 = 1 To 3
    If V(I, J1) = 1 Then
      I1 = 3 * (I - 1) + J1
      For J = 1 To 3 * NN
        K(I1, J) = 0
        K(J, I1) = 0
      Next J
      K(I1, I1) = 1
      F(I1) = 0
    End If
  Next J1
Next I

```

```

End If
Next J1
Next I
'
' Soluzione del sistema F=K*S
'
Call WILKINSON1(3 * NN, K(), F())
'
' in F è ora memorizzato il vettore spostamenti
'
For I = 1 To NA
I1 = E1(I)
I2 = E2(I)
A1 = AA(I)
B2 = BB(I)
AFij = ALFAij(I)
AFji = ALFAji(I)
BTij = BETAij(I)
GMij = GAMMAij(I)
GMji = GAMMAji(I)
For J = 1 To 3
J1 = 3 * (I1 - 1) + J
J2 = 3 * (I2 - 1) + J
SG(J) = F(J1)
SG(J + 3) = F(J2)
Next J
'
' Calcolo della matrice di trasformazione
'
X1 = X(I1)
X2 = X(I2)
Y1 = Y(I1)
Y2 = Y(I2)
Call MATT(X1, Y1, X2, Y2, T())
'
' Trasforma il vettore degli spostamenti degli estremi dell'asta
' dal rif. globale a quello locale
'
For J = 1 To 6
SL(J) = 0
For J1 = 1 To 6
SL(J) = SL(J) + T(J, J1) * SG(J1)
Next J1
Next J
'
' Calcolo del vettore azioni di incastro perfetto
'
Call FL(X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, AFij, AFji, BTij, GMij, GMji, QX(I), QY(I), F0L())
'

```

```

' Calcolo della matrice di rigidezza nel riferimento locale
,
Call STIFF(E, A(I), AFij, AFji, BTij, X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, K1())
,
' Calcola le sollecitazioni alle estremità delle aste
,
For J = 1 To 6
  NTM(I, J) = 0
  For J1 = 1 To 6
    NTM(I, J) = NTM(I, J) + K1(J, J1) * SL(J1)
  Next J1
  NTM(I, J) = NTM(I, J) + FOL(J)
Next J
Next I
End Sub

Public Sub FRAME2D_spostamenti_assegnati(SP() As Double, ALFAij(), ALFAji(), BETAij(), GAMMAij(),
GAMMAji(), NN As Integer, NA, E, X(), Y(), FX(), FY(), M(), V() As Integer, E1() As Integer, E2() As Integer,
A() As Double, QX(), QY(), AA(), BB(), FOL(), F0(), SG(), SL(), K1(), T(), NTM(), K())
,
' in F è ora memorizzato il vettore spostamenti
,
For I = 1 To NA
  I1 = E1(I)
  I2 = E2(I)
  A1 = AA(I)
  B2 = BB(I)
  AFij = ALFAij(I)
  AFji = ALFAji(I)
  BTij = BETAij(I)
  GMij = GAMMAij(I)
  GMji = GAMMAji(I)
  For J = 1 To 3
    J1 = 3 * (I1 - 1) + J
    J2 = 3 * (I2 - 1) + J
    SG(J) = SP(J1)
    SG(J + 3) = SP(J2)
  Next J
,
' Calcolo della matrice di trasformazione
,
X1 = X(I1)
X2 = X(I2)
Y1 = Y(I1)
Y2 = Y(I2)
Call MATT(X1, Y1, X2, Y2, T())
,
' Trasforma il vettore degli spostamenti degli estremi dell'asta
' dal rif. globale a quello locale

```

```

'
For J = 1 To 6
  SL(J) = 0
  For J1 = 1 To 6
    SL(J) = SL(J) + T(J, J1) * SG(J1)
  Next J1
Next J
'
' Calcolo del vettore azioni di incastro perfetto
'
Call FL(X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, AFij, AFji, BTij, GMij, GMji, QX(I), QY(I), F0L())
'
' Calcolo della matrice di rigidezza nel riferimento locale
'
Call STIFF(E, A(I), AFij, AFji, BTij, X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, K1())
'
' Calcola le sollecitazioni alle estremità delle aste
'
For J = 1 To 6
  NTM(I, J) = 0
  For J1 = 1 To 6
    NTM(I, J) = NTM(I, J) + K1(J, J1) * SL(J1)
  Next J1
  NTM(I, J) = NTM(I, J) + F0L(J)
Next J
Next I
End Sub

Public Sub F0F(E1, E2, F0(), F())
'
' Assembla il vettore delle azioni di incastro perfetto, cambiate
' di segno, nel riferimento globale
'
For I = 1 To 3
  I2 = 3 * (E1 - 1) + I
  F(I2) = F(I2) - F0(I)
Next I
For I = 4 To 6
  I2 = 3 * (E2 - 1) + I - 3
  F(I2) = F(I2) - F0(I)
Next I
End Sub

Public Sub FL(X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, AFij, AFji, BTij, GMij, GMji, QX, QY, F0L())
'
' assembla per la generica asta il vettore delle azioni di incastro
' perfetto a partire dalle deformabilità
'
DX = X2 - X1

```

Appendice

```
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
LT = L - A1 - B2
'
' vettore per il solo tratto deformabile
'
F0L(1) = -QX * LT / 2
F0L(4) = -QX * LT / 2
F0L(3) = -(AFji * GMij + BTij * GMij) / (AFij * AFji - BTij ^ 2)
F0L(6) = -(AFij * GMji + BTij * GMij) / (AFij * AFji - BTij ^ 2)
F0L(2) = -QY * LT / 2 + (F0L(3) + F0L(6)) / LT
F0L(5) = -QY * LT / 2 - (F0L(3) + F0L(6)) / LT
'
' vettore per l'asta con tratti rigidi
'
F0L(1) = F0L(1) - QX * A1
F0L(4) = F0L(4) - QX * B2
F0L(3) = F0L(3) + F0L(2) * A1 - QY * A1 ^ 2 / 2
F0L(6) = F0L(6) - F0L(5) * B2 + QY * B2 ^ 2 / 2
F0L(2) = F0L(2) - QY * A1
F0L(5) = F0L(5) - QY * B2
End Sub

Public Sub FORCE(NN As Integer, FX(), FY(), M(), F())
'
' Completa l'assemblaggio del vettore delle forze aggiungendo
' le azioni nodali esterne
'
For I = 1 To NN
I1 = 3 * (I - 1) + 1
I2 = 3 * (I - 1) + 2
I3 = 3 * (I - 1) + 3
F(I1) = F(I1) + FX(I)
F(I2) = F(I2) + FY(I)
F(I3) = F(I3) + M(I)
Next I
End Sub

Public Sub MATT(X1, Y1, X2, Y2, T())
'
' Assembla la matrice di trasformazione
'
For I = 1 To 6
For J = I To 6
T(I, J) = 0
Next J
Next I
DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
```

```

L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
ca = DX / L
SA = DY / L
T(1, 1) = ca
T(1, 2) = SA
T(2, 1) = -SA
T(2, 2) = ca
T(3, 3) = 1
T(4, 4) = ca
T(4, 5) = SA
T(5, 4) = -SA
T(5, 5) = ca
T(6, 6) = 1
End Sub

Public Sub STIFF(E, A As Double, AFij, AFji, BTij, X1, Y1, X2, Y2, A1, B2, K1L())
'
' assemblaggio della matrice di rigidezza a partire dalle deformabilità
'
Dim TP(6, 6), p(6, 6) As Double

DX = X2 - X1
DY = Y2 - Y1
L = Sqr(DX ^ 2 + DY ^ 2)
LT = L - A1 - B2
'
' assemblaggio della matrice di rigidezza del tratto deformabile
'
Wij = AFji / (AFij * AFji - BTij ^ 2)
Wji = AFij / (AFij * AFji - BTij ^ 2)
Vij = BTij / (AFij * AFji - BTij ^ 2)
Uij = (Wij + Vij) / LT
Uji = (Wji + Vji) / LT
'
For I = 1 To 6
For J = 1 To 6
K1L(I, J) = 0
Next J
Next I
'
' K11
'
K1L(1, 1) = E * A / LT
K1L(2, 2) = (Uij + Uji) / LT
K1L(3, 3) = Wij
K1L(2, 3) = Uij
K1L(3, 2) = Uji
'
' K22

```

```

'
K1L(4, 4) = K1L(1, 1)
K1L(5, 5) = K1L(2, 2)
K1L(6, 6) = Wji
K1L(5, 6) = -Uji
K1L(6, 5) = -Uji
'
' K12
'
K1L(1, 4) = -K1L(1, 1)
K1L(2, 5) = -K1L(2, 2)
K1L(3, 6) = Vij
K1L(2, 6) = Uji
K1L(3, 5) = -Uji
'
' K21
'
K1L(4, 1) = K1L(1, 4)
K1L(5, 2) = K1L(2, 5)
K1L(6, 3) = K1L(3, 6)
K1L(5, 3) = K1L(3, 5)
K1L(6, 2) = K1L(2, 6)
'
' assemblaggio della matrice di rigidezza dell'asta con tratti rigidi
'
' matrice di passaggio
'
For I = 1 To 6
  For J = 1 To 6
    If I = J Then
      TP(I, J) = 1
    Else
      TP(I, J) = 0
    End If
  Next J
Next I
'
TP(2, 3) = A1
TP(5, 6) = -B2
'
' K1L' = TP^ K1L TP
'
For I = 1 To 6
  For J = 1 To 6
    p(I, J) = 0
    For I1 = 1 To 6
      p(I, J) = p(I, J) + K1L(I, I1) * TP(I1, J)
    Next I1
  Next J

```

```

Next I
For I = 1 To 6
  For J = 1 To 6
    K1L(I, J) = 0
    For I1 = 1 To 6
      K1L(I, J) = K1L(I, J) + TP(I1, I) * p(I1, J)
    Next I1
  Next J
Next I
End Sub

Public Sub STIFFK(E1, E2, K1(), K())
'
' Assembla la matrice di rigidezza globale nella sua configurazione
' di base
'
' Blocco 11
'
For I = 1 To 3
  For J = 1 To 3
    I2 = 3 * (E1 - 1) + I
    J2 = 3 * (E1 - 1) + J
    K(I2, J2) = K(I2, J2) + K1(I, J)
  Next J
Next I
'
' Blocco 12
'
For I = 1 To 3
  For J = 4 To 6
    I2 = 3 * (E1 - 1) + I
    J2 = 3 * (E2 - 1) + J - 3
    K(I2, J2) = K(I2, J2) + K1(I, J)
  Next J
Next I
'
' Blocco 21
'
For I = 4 To 6
  For J = 1 To 3
    I2 = 3 * (E2 - 1) + I - 3
    J2 = 3 * (E1 - 1) + J
    K(I2, J2) = K(I2, J2) + K1(I, J)
  Next J
Next I
'
' Blocco 22
'
For I = 4 To 6

```

```

For J = 4 To 6
I2 = 3 * (E2 - 1) + I - 3
J2 = 3 * (E2 - 1) + J - 3
K(I2, J2) = K(I2, J2) + K1(I, J)
Next J
Next I
End Sub

```

```

Public Sub TF0(T(), F0L(), F0())
'
' Trasforma il vettore delle azioni di incastro perfetto dal riferimento
' locale a quello globale
'
For I = 1 To 6
F0(I) = 0
For I1 = 1 To 6
F0(I) = F0(I) + T(I1, I) * F0L(I1)
Next I1
Next I
End Sub

```

```

Public Sub TKT(K1(), T())
'
' Trasforma la matrice di rigidezza della singola asta dal riferimento
' locale a quello globale
'
Dim p(6, 6)
For I = 1 To 6
For J = 1 To 6
p(I, J) = 0
For I1 = 1 To 6
p(I, J) = p(I, J) + K1(I, I1) * T(I1, J)
Next I1
Next J
Next I
For I = 1 To 6
For J = 1 To 6
K1(I, J) = 0
For I1 = 1 To 6
K1(I, J) = K1(I, J) + T(I1, I) * p(I1, J)
Next I1
Next J
Next I
End Sub

```

```

Public Sub WILKINSON1(NP, KG(), V())
'
' Fattorizzazione della matrice di rigidezza con il metodo di
' Wilkinson e calcolo del vettore degli spostamenti sotto la

```

```

' azione del vettore delle forze V. Il vettore degli spostamenti
' viene memorizzato nello stesso vettore di input V.
'
' K = V^ D V
'
' INPUT
' NP = ordine della matrice
' KG = matrice da fattorizzare
' V = vettore delle forze
'
' OUTPUT
' V = vettore degli spostamenti
'
'
' fattorizzazione
'
For I = 1 To NP
For J = I To NP
If I <> 1 Then
For J1 = 1 To I - 1
KG(I, J) = KG(I, J) - KG(J1, J1) * KG(J1, I) * KG(J1, J)
Next J1
End If
If J <> I Then
KG(I, J) = KG(I, J) / KG(I, I)
End If
Next J
Next I
'
' soluzione del sistema di equazioni
'
' sistema 1
'
For I = 1 To NP
If I <> 1 Then
For J = 1 To I - 1
V(I) = V(I) - KG(J, I) * V(J)
Next J
End If
Next I
'
' sistema 2
'
For I = NP To 1 Step -1
V(I) = V(I) / KG(I, I)
If I <> NP Then
For J = I + 1 To NP
V(I) = V(I) - KG(I, J) * V(J)

```

```

Next J
End If
Next I
End Sub

Public Sub M_chi(A_, B_, C_, sig_max, eps_max, eps_u, hs, ts, sf_norm, curv, Mom, CSI)
'
If curv < 0.000000000001 Then
Mom = 0
CSI = 1
GoTo fine
End If
'
ni = sf_norm / sig_max / hs / ts
csi_u = ni * (A_ / 2 * (eps_u / eps_max) + B_ / (C_ + 1) * (eps_u / eps_max) ^ C_) ^ -1
CHI_u = eps_u / csi_u / hs
'
If curv >= CHI_u Then ' rottura
Mom = -1
GoTo fine
End If
'
' calcolo della curvatura di prima fessurazione
'
k_1 = A_ / 2 * hs / eps_max
k_2 = B_ / (C_ + 1) * (hs / eps_max) ^ C_
'
CSI = 1
CHI_cr = 0.0000000001
Do
pchi_cr = CHI_cr
CHI_cr = (ni - k_2 * CHI_cr ^ C_ * CSI ^ (C_ + 1)) / (k_1 * CSI ^ 2)
conv = Abs(CHI_cr - pchi_cr) / pchi_cr
Loop Until conv < 0.001
'
' calcolo dell'asse neutro corrispondente alla curvatura in input
'
If curv < CHI_cr Then
CSI = 10 ' posizione di partenza dell'asse neutro nel caso di sezione integra
Else
CSI = 0.01 ' posizione di partenza dell'asse neutro nel caso di sezione fessurata
End If
'
k_1 = k_1 * curv
k_2 = k_2 * curv ^ C_
'
Do
pcsi = CSI
If curv < CHI_cr Then

```

```

CSI = (ni - k_2 * (CSI ^ (C_ + 1) - (CSI - 1) ^ (C_ + 1))) / k_1 / 2 + 1 / 2 ' sezione integra
Else
CSI = Sqr((ni - k_2 * CSI ^ (C_ + 1)) / k_1) ' sezione fessurata
End If
conv = Abs(CSI - pcsi) / pcsi
Loop Until conv < 0.001
'
' calcolo del momento corrispondente alla curvatura in input
'
If curv < CHI_cr Then
Mom = (k_1 / 2 * (CSI ^ 2 + (CSI - 1) ^ 2) - k_1 / 3 * (CSI ^ 3 - (CSI - 1) ^ 3) + k_2 / 2 * (CSI ^ (C_ + 1) +
(CSI - 1) ^ (C_ + 1)) - k_2 / (C_ + 2) * (CSI ^ (C_ + 2) - (CSI - 1) ^ (C_ + 2))) * ts * hs ^ 2 * sig_max ' sezione
integra
Else
Mom = (k_1 / 2 * CSI ^ 2 + k_2 / 2 * CSI ^ (C_ + 1) - k_1 / 3 * CSI ^ 3 - k_2 / (C_ + 2) * CSI ^ (C_ + 2)) * ts *
hs ^ 2 * sig_max ' sezione fessurata
End If
'
If Mom < 0 Then Mom = 0 ' per valori prossimi a zero della curvatura l'errore sulla ricerca di CSI potrebbe
condurre a valori negativi di Mom
fine:
End Sub

```