ING. E. MORRONE

All'Onorevole Commend.re Profess.e Giovanni Cuomo — in segno di omaggio e di immensa gratitudine. —

CIRCA LA DETERMINAZIONE

DEL

PRIMO ED ULTIMO ANGOLO DI UNA POLIGONALE TOPOGRAFICA

SVOLTA TRA DUE PUNTI TRIGONOMETRICI

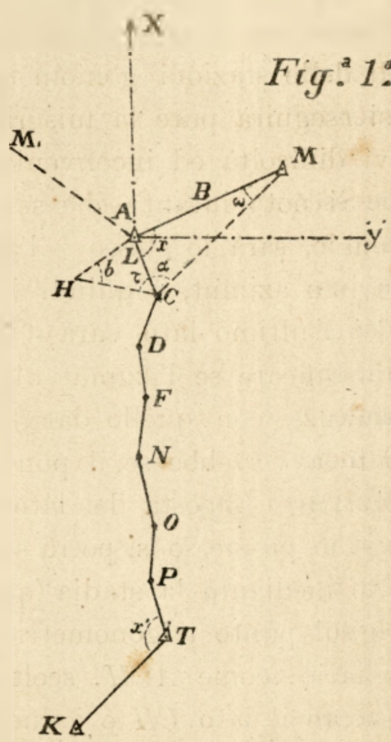
(Nota pubblicata sul *Monitore Tecnico* del 30 agosto 1899)

SALERNO
STAB. TIP. FRATELLI JOVANE
1900

CIRCA LA DETERMINAZIONE

del primo ed ultimo angolo di una poligonale topografica svolta tra due punti trigonometrici.

Se tra due punti trigonometrici A, T voglia svilupparsi una poligonale topografica, è necessario determinare l'angolo x (fig. 1), compreso tra le rette congiungenti il punto A con un altro punto trigonometrico qualunque M, e col punto poligonometrico C, allo scopo di ottenere lo azimut di A su C, dal quale dipendono le coordinate dello stesso C, riferite agli assi X, Y. Analogamente occorre poi misurare l'angolo x' al punto trigonometrico d'arrivo, T, per conoscere se l'azimut di T su K risulta in tolleranza con quello dato dalla triangolazione. Per azimut va inteso l'angolo che l'asse delle X, diretta al nord, forma con una retta qualunque passante pel punto trigonometrico.



Nell'eseguire però in generale una poligonazione topografica, alcune volte può verificarsi che riesca impossibile accedere sul punto trigonometrico A, a meno che non si vogliano adoperare mezzi straordinari, che esigono molto tempo e molto lavoro. Altre volte può accadere che vi si riuscirà a giungere, ma solo dopo gravi difficoltà e dopo molta perdita di tempo a danno dell'economia e speditezza delle operazioni; specialmente quando, trattandosi di eseguire la poligonazione di vaste zone, come nei lavori catastali, è indispensabile determinare un numero considerevole di angoli analoghi ad x. E può infine ancora verificarsi che sia facile adattarsi la sola stadia sul punto A, ma non il tacheometro.

Da ciò segue che o non potrà addirittura misurarsi il detto angolo x direttamente, mediante gli ordinari metodi delle stazioni goniometriche in centro ed ex centro, o si eseguirà pure la misura, ma solo in seguito a non lievi difficoltà ed inconvenienti.

Si nota intanto che se $A\ C$ è il primo lato della poligonale, sarà lo stesso x l'angolo occorrente per ottenere il primo azimut, e quindi le coordinate di C; se invece AC è l'ultimo lato, sarà 4 retti — x l'angolo necessario per verificare se l'azimut di A su M è in una accettabile tolleranza con quello dato dalla triangolazione. Inversamente avverrebbe se il punto d'orientamento sia collocato dalla parte opposta del lato AC, per esempio in M_1.

Ciò premesso, si potrà sempre determinare la distanza AC o mediante la stadia (quando con essa si possa accedere sul punto trigonometrico) o mediante un triangolo ausiliario, come ACH, scelto in modo che riesca facile misurare il lato CH e i due angoli adiacenti b, τ.

D'altra parte la distanza AM è data dalla triangolazione, perchè lato di un triangolo trigonometrico, e l'angolo ACM (α) si potrà misurare col tacheometro, eseguendo la stazione sul punto C. Con tali dati quindi (ponendo $AC = L$; $AM = B$), dal triangolo AMC si avrà:

$$\text{sen}\ \omega = \text{sen}\ \alpha\ \frac{L}{B} \qquad (1)$$

Ottenuto l'angolo ω, si otterrà pure

$$x = 2\ \text{retti} - \alpha - \omega \qquad (2)$$

e l'errore di ω si riporterà su x, ma col segno contrario.

Per ottenere quindi l'angolo x non è necessario accedere sul punto A; resterà invece determinato dalle (1) e (2), dopo misurati solamente l'angolo α e la distanza AC, essendo AM, come si è notato, compreso tra i dati della triangolazione.

Si osservi che nei casi ordinari la distanza L è molto più piccola della AM (lato di un triangolo trigonometrico). Risulterà, per conseguenza, l'angolo ω sempre acuto; e, ponendo mente che il rapporto dei lati è uguale a quello dei seni degli angoli opposti, risulterà pure molto minore di α o del suo supplemento a due retti, secondo che α è acuto o ottuso, qualunque sia la posizione di M. Per α = un retto, ω assumerà il massimo valore, diventando sempre più acuto a misura che α cresce o diminuisce rispetto all'angolo retto. Il valore di ω quindi dato dalla (1) sarà, per conseguenza, l'angolo acuto corrispondente a sen ω, e non l'ottuso supplementare. Si ottengono due triangoli pei due valori supplementari di ω, solamente quando per questo risulti un angolo acuto maggiore di α, il che può avvenire solo quando L sia maggiore di B. Ma tale ipotesi, non potendo verificarsi nel caso in esame, resta affatto esclusa anche dalle altre considerazioni che si espongono.

Se α, L e B sono variabili indipendenti, differenziando la (1), si ottiene:

$$d \operatorname{sen} \omega = \frac{L}{B} \cos \alpha \, d \, \alpha + \operatorname{sen} \alpha \, . \frac{B \, d \, L - L \, d \, B}{B^2} \qquad (3)$$

Da questa equazione si vede in generale che per dati valori di α, L e B e per dati errori commessi, d sen ω in valore assoluto sarà il maggiore possibile quando i termini del 2.° membro risultino tutti dello stesso segno; e perchè ciò possa avvenire è necessario che il segno di $d \, L$ sia contrario a quello di $d \, B$.

Occorre però innanzi tutto considerare che se $\frac{L}{B} = \frac{1}{10}$ circa, ω sarà sempre molto acuto, e giungerà al massimo a 5°,43' sessagesimali circa, solo nel caso che α sia di un retto: di più in un angolo molto acuto, come ω, le piccole quantità di cui si fa variare il seno costituiscono quasi i seni dei piccoli angoli, dei quali varia l'arco. Or il 1.° termine del 2.° membro della (3), è trascurabile quando su α siasi commesso un errore piccolo, giacchè esso diventa al massimo $\frac{L}{B} \, d \, \alpha$ $\left(\frac{1}{10} \, d \, \alpha \text{ nell'ipotesi ammessa}\right)$ per $\alpha =$ zero o a due retti, tendendo invece ad annullarsi quando α si approssima all'angolo retto. E se su α si commette l'errore di 2 minuti primi, il detto 1.° termine, al massimo, diverrà una quantità corrispondente circa al seno di 12", e quindi anche di 12" circa sarà l'errore dell'angolo ω, per quanto più sopra si è notato. Se si considera però che α può misurarsi con sufficiente approssimazione, a causa delle notevoli distanze dei punti A ed M da C, e che è bene eseguire con molta accuratezza la misura di tale angolo affinchè il suo errore, anche che ω risulti esatto, non ricada sul valore di x, si è indotti a conchiudere che la piccola inesattezza di α influirà solo insensibilmente sulla determinazione del vero valore di ω. Anche che su α si commetta l'errore di un minuto primo sessagesimale, quello di ω al massimo sarà di $6''$, quantità affatto trascurabile per gli angoli di una poligonale topografica.

Di maniera che, per esaminare quale errore valutabile perverrà a sen ω, e quindi ad ω, basta tener conto solamente di quella dipendente dalla quantità costituente l'altra parte del 2.° membro della (3), alla quale espressione si riduce d sen ω quando, per ciò che si è esposto, α si considera costante. Tale quantità, per dati valori di L e B e per dati errori commessi su di esse, in valore assoluto sarà la maggiore possibile quando $\alpha =$ un retto e $d\,B$, $d\,L$ sieno di segno contrario. Ma diverrà molto minore se invece cresce la sola distanza B. Si osservi ancora che qualunque siano i valori di L, B ed α, verificandosi $B\,d\,L - L\,d\,B = o$, ossia $\frac{B}{L} = \frac{d\,B}{d\,L}$ l'errore di ω si annulla. Ciò è possibile solo quando $d\,B$, $d\,L$ siano dello stesso segno o uguali a zero.

Intanto la (3) diventa

$$d \text{ sen } \omega = \text{sen } \alpha \, \frac{B\,d\,L - L\,d\,B}{B^2} \tag{4}$$

Qualora gli errori $d\,L$, $d\,B$ siano quantità non infinitesime, si avrebbe effettivamente (indicando con $\Delta\,L$, $\Delta\,B$ tali quantità):

$$\Delta \text{ sen } \omega = \text{sen } \alpha \, \frac{B\,\Delta\,L - L\,\Delta\,B}{B\,(B + \Delta\,B)} \tag{5}$$

Si consideri, p. es., il caso in cui α sia di gradi sessagesimali 60, 10', 19''; $L =$ m. 198.90, $B = 2048,50$ $\left(\frac{L}{B} = \frac{1}{10} \text{ circa}\right)$.

Si avrà, calcolando ω con la (1):

$$\begin{array}{r} 9,93828 \\ 2,29863 \\ 6,68856 \\ \hline \log : \text{sen}\ \omega = 8,92547 \\ \omega = 4°,49',55''. \end{array}$$

Suppongasi che sulle vere distanze indicate di L e B siansi commessi gli errori di m. 0,70 e m. 2,00 rispettivamente. Come deducesi dalla (5) l'errore massimo di sen ω, e quindi di ω, si otterrà, restando costante α, quando i dinotati errori lineari siano di segno contrario, e dalla stessa (5) risulta che il detto errore di ω, coi dati supposti, sarà positivo per $d\,L$ positivo e $d\,B$ negativo, sarà invece negativo nell'ipotesi inversa. Se si assume perciò:

$$\alpha = 60°\ 10'\ 19''$$
$$L = 198,90 + 0,70 = 199,60$$
$$B = 2048,50 - 2,00 = 2046,50$$

l'errore dovrà essere positivo.

Infatti [applicando l'equazione (1)]:

$$\begin{array}{r} 9,93828 \\ 2,30016 \\ 6,68899 \\ \hline \log\ \text{sen}\ \omega_1 = 8,92743 \\ \omega_1 = 4°\ 51'\ 14'' \\ \omega = 4°\ 49'\ 55'' \\ \hline \Delta\,\omega = 0°\ 1'\ 19''. \end{array}$$

Se nel 2.° membro della (4) si sostituiscono alle lettere i valori numerici, e a $d\,L$, $d\,B$ rispettivamente 0,70; 2, ne risulterebbe un valore lineare quasi uguale alla differenza dei seni dei due valori determinati di ω ed ω_1 (con un errore di 2 milionesimi). Ciò perchè i supposti errori sono molto piccoli rispetto alle lunghezze L e B. Inoltre il detto valore lineare riesce eguale a sen 1,19″ (cioè Δ sen ω), in conseguenza di quanto più sopra si è osservato circa la variazione dei seni degli angoli molto acuti.

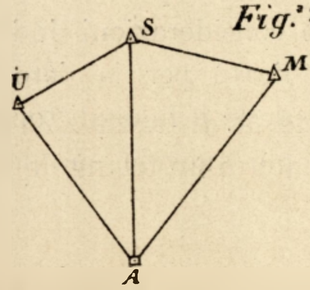
L'errore angolare negativo dipendente dagli stessi dati in valore assoluto risulta anche di 1′ 19″ circa, sia perchè ω è molto acuto, sia perchè gli errori sulle lunghezze L e B sono molto piccoli.

Posto $\alpha =$ un retto (ipotesi più sfavorevole, come si è notato) lasciando invariati gli altri dati, l'errore di ω diventa di 1′ 30″ circa.

Per conseguenza quando i valori di L e B non si allontanino molto da quelli indicati, conservando il rapporto di circa $^1/_{10}$ (tanto meglio però se la B sia maggiore), l'errore di ω raggiungerà il valore massimo di 1′ 30″ circa, solo nell'ipotesi più sfavorevole, cioè quando gli errori lineari sieno di segno contrario, ed α si approssimi all'angolo retto.

È necessario ora osservare come possa verificarsi che il punto A, derivato in generale da punti trigonometrici d'ordine superiore, come M, S, U (fig. 2), risulti dai dati

Fig.ª 2.ª



della triangolazione ugualmente spostato, non già nel senso della retta MA, ma in un senso qualunque, secondo le rette SA, UA. È manifesto che in tale ipotesi lo spostamento potrà produrre un errore sensibile sull'azimut di A su M; e se la AM si avvicina ad uno dei due assi coordinati, mentre lo spostamento di due metri risulti quasi normale ad essa, l'errore assoluto angolare dell'azimut di A su M avrà per tangente il valore $\frac{2}{2048,50}$, cui corrisponde un angolo di 3' 20" sessagesimali circa.

Si vede quindi che qualora sulle lunghezze L e B si fossero commessi i supposti errori, l'angolo x, e per conseguenza il 1.° azimut della poligonale, avrebbe un errore molto minore di quello dipendente dalla triangolazione per analoga ipotesi di spostamento dei soli punti trigonometrici.

Ma se, d'altronde, si considera che una triangolazione bene eseguita non ammette l'errore supposto su B, e che quello ritenuto su L è anche esagerato, potendosi al massimo concedere una tolleranza di 30 cm. su 100 metri, si deduce che l' errore di ω, ossia di x, si manterrà sensibilmente inferiore ad un minuto primo sessagesimale, quando B si avvicini a due chilometri, L non superi i 200 metri, ed α si allontani alquanto dall' angolo retto. Si noti pure che se dB, dL siano dello stesso segno, una maggiore lunghezza per L, come appare dalla (4), influirebbe a scemare l'errore di ω; ma è impossibile conoscere il segno degli errori che possono commettersi.

Le suesposte considerazioni inducono a conchiudere che il metodo indicato per la determinazione del primo ed ultimo angolo delle poligonali topografiche spesso potrà riuscire non solo più agevole, ma pure più esatto, a causa delle speciali condizioni in cui trovansi taluni punti trigonometrici. Anzi è forse il caso di esaminare se non sia più conveniente seguire quasi sempre tale metodo, specialmente nei rilevamenti catastali, ove, come si è notato, per ogni poligonale occorre determinare due angoli analoghi ad x.

Si crede utile però aggiungere un' ultima osservazione.

Nell' ipotesi ammessa relativamente ai valori di L e B, ω risulta sempre molto acuto, e, qualunque sia il grado di acutezza, il suo errore dipendente da quello di α non può mai eccedere $^1/_{10}$ dell' errore di α; si è pure notato come tale errore di ω è trascurabile. D'altra parte la (4) mostra che quanto più acuto o più ottuso è α, tanto minore diventa l'errore di ω dipendente da quelli commessi sulle lunghezze L e B; quindi il caso in esame, in cui si tratta di determinare un valore angolare, richiede criteri diversi da quelli che è necessario seguire nella determinazione dei lati dei triangoli trigonometrici, pei quali occorre evitare che l'angolo opposto ad una data base risulti molto acuto o molto ottuso.

*Ing. **Enrico Morrone**.*

Ing. E. MORRONE

SULLA DETERMINAZIONE

DELLE

COORDINATE DI ALCUNI SPECIALI PUNTI DI STAZIONE

NEI RILEVAMENTI TACHEOMETRICI

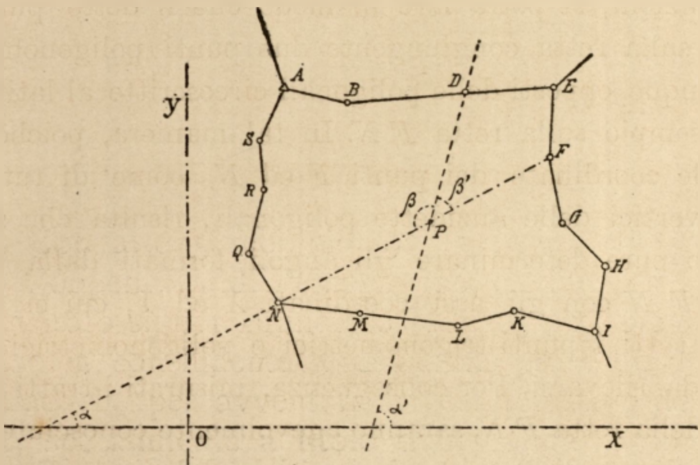
(Nota pubblicata sul *Monitore Tecnico* del 20 gennaio 1900)

SALERNO
Stab. Tip. Fratelli Jovane
1900

SULLA DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE

di alcuni speciali punti di stazione nei rilevamenti tacheometrici

Alcune volte, nell'eseguire un rilevamento topografico mediante il tacheometro, può avvenire che sia utile determinare un punto *P* (fig. 1), situato nella parte cen-



trale della superficie circoscritta dalle poligonali *A*...... *N; N*..... *I; I*..... *E; A*..... *E*. — Ed infatti, trattandosi di un latifondo della stessa coltura, supposto che, oltre i confini, debbansi solamente rilevare dei particolari siti nelle prossimità del centro di esso, o altri, i quali, cominciando dalle vicinanze di *P* e seguendo una direzione qualunque, si prolunghino sino alla periferia, riuscirà superfluo allo scopo di sviluppare completamente una linea tra due punti opposti delle poligonali, come *S, G; R, H*, ecc. Nella prima delle due indicate ipotesi evidentemente saranno inutili tutti i punti poligonometrici situati da entrambi i versi del punto P; nell'altra ipotesi invece saranno utili i punti situati da un verso solo, e cioè quelli che seguono le linee da rilevare. — Quindi P, o sarà da solo sufficiente con l'eseguirvi una semplice stazione tacheometrica, o potrà essere punto d'attacco d'una delle poligonali, come P..... D; P..... H; P..... M, ecc.

In ogni caso sarà indispensabile conoscere le coordinate, e qualora vogliasi evitare di determinarle mediante il metodo di Pothenot, il quale richiede sempre lunghe calcolazioni, si potrà fare in modo che il detto punto P cada sulla retta congiungente due punti poligonometrici qualunque opposti delle poligonali circoscritte al latifondo, per esempio sulla retta $F\,N$. In tal maniera, poichè sono note le coordinate dei punti F ed N, come di tutti gli altri vertici delle anzidette poligonali, risulta che si potranno pure determinare gli angoli formati dalla stessa retta $F\,N$ con gli assi coordinati X ed Y, cui si riferiscono tutti i punti trigonometrici e poligonometrici della zona da rilevarsi. Per conseguenza, misurati i tratti $F\,P$, $P\,N$ della retta $F\,N$, saranno agevolmente conosciute pure le coordinate di P, tanto derivandole dal punto F, quanto dal punto N. In generale tali due coppie di coordinate differiranno di una piccola quantità; onde potrà per esse assumersi la media dei due risultati.

Se dinotasi quindi con α l'angolo che la retta $F\,N$ fa con l'asse X, si avrà evidentemente:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y_f - y_n}{x_f - x_n} \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

e pei valori delle coordinate di P:

$$X_p = x_f - \overline{FP} \cos \alpha = x_n + \overline{NP} \cos \alpha \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$Y_p = y_f - \overline{FP} \operatorname{sen} \alpha = y_n + \overline{NP} \operatorname{sen} \alpha, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

in cui x_f, y_f, X_p, Y_p; x_n; y_n, sono ordinatamente le coordinate dei punti F, P, N.

Per riscontro delle operazioni occorre che risulti pure:

$$\overline{FP} + \overline{PN} = \frac{x_f - x_n}{\cos \alpha} = \frac{y_f - y_n}{\operatorname{sen} \alpha} \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ammettendo però sempre un errore tollerabile.

Ma può inoltre accadere che per cause diverse riesca molto disagevole misurare i tratti FP, PN, ciascuno dei quali potrà anche superare i 500 o 600 metri. Infatti è facile considerare come si vada incontro a molteplici inconvenienti nell'eseguire la misura dei detti tratti, sia con le canne o pertiche o nastro d'acciaio, sia col tacheometro e stadia, qualora la superficie circoscritta dalle poligonali si trovi, per esempio, ingombra di folte piante erbacee o da altri ostacoli.

In tal caso però potrà sempre misurarsi col tacheometro l'angolo che la retta NF forma con un'altra, che passi anche per P e per un vertice qualunque di dette poligonali, per esempio PD. D'altronde la NF, riferita ai suindicati assi XY, può indicarsi con un'equazione, della quale una forma è:

$$y = k\,x + h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Di questa retta fanno parte i punti F ed N di coordinate note; per conseguenza deve anche verificarsi:

$$\left. \begin{array}{l} y_f = k\,x_f + h \\ y_n = k\,x_n + h \end{array} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Le due ultime equazioni (6) offriranno i valori delle costanti k ed h: il valore di k, che è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta con l'asse X (tg α), risulta, come deve avvenire, identico a quello dato innanzi dalla (1); e per h si ha:

$$h = y_f - \text{tang } \alpha \; x_f = y_n - \text{tang } \alpha \; x_n, \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

che è la parte intersecata dalla retta sull'asse Y.

Inoltre, qualunque sia la posizione delle rette $F\,P\,N$ e $P\,D$, si avrà sempre, come può agevolmente dedursi dalla figura 1:

$$\alpha' = \alpha + 2 \text{ retti} - \beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

indicando con α' l'angolo formato dalla $P\,D$ con l'asse X, e con β l'angolo $N\,P\,D$. Dell'angolo α si conosce la tangente trigonometrica data dalla (1), l'angolo β potrà misurarsi col tacheometrico; per conseguenza α' resta determinata da quest'ultima equazione (8).

Di maniera che l'equazione della retta $P\,D$ riferita agli stessi assi, potendo essere di forma identica alla (5), avrà per k un valore corrispondente a tag α', che può indicarsi con k'; e siccome il punto D, di coordinate note, x_d, y_d, trovasi sulla retta $P\,D$, la nuova h, ossia h', resterà determinata dalla stessa (5), quando a k si sostituisce tang α', e ad x ed y le coordinate conosciute x_d, y_d del punto D. Sarà quindi:

$$h' = y_d - \text{tg. } \alpha' \; x_d ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

e conseguentemente l'equazione della $P\,D$ potrà scriversi:

$$y = k' \; x + h' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Dalle due equazioni (5) e (10), in cui, per quanto si è esposto, risultano agevolmente determinate le quantità k, h, k', h', considerate coi convenienti segni, resteranno conosciute le coordinate del punto P, intersezione delle due rette. Se infatti s' indicano con X_p ed Y_p le coordinate di P, risulta:

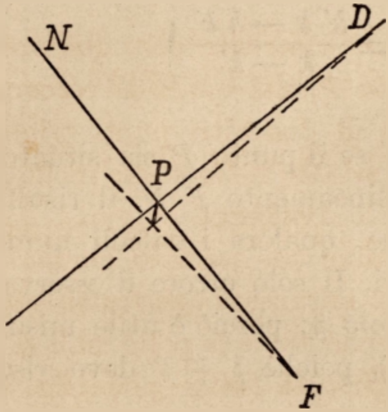
$$\left.\begin{aligned} X_p &= \frac{h' - h}{k - k'} \\ Y_p &= \frac{h'\,k - h\,k'}{k - k'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Si noti che, se il punto P sia situato con sufficiente esattezza sull'allineamento $F\,N$, il risultato non ha bisogno di verifiche, qualora i calcoli numerici siano eseguiti senza errori. Il solo errore d'osservazione può commettersi sull'angolo β; perciò è utile misurare anche l'angolo $D\,P\,F$ (β'), poichè $\beta + \beta'$ deve risultare uguale a due angoli retti.

È evidente poi, come può dedursi anche dal calcolo, che la condizione migliore perchè il punto P riesca meglio determinato è la perpendicolarità delle due rette $F\,N$, $D\,P$; ed, in ogni caso, una inesattezza sul valore delle coordinate dei punti F, N ed un errore commesso nella misura dell'angolo β possono produrre uno spostamento angolare in ciascuna delle due indicate rette. Segue che per quanto più distante dai vertici degli spostamenti angolari avviene l' intersezione, tanto maggiore diventa lo spostamento lineare del punto P; ma nel caso in esame, qualora le due rette siano quasi ad angolo retto, tale spostamento di P (fig. 2) non potrà superare il valore indicato da circa:

$$\sqrt{\overline{P\,D \times n \text{ sen } 1''}^{\,2} + \overline{P\,F \times n' \text{ sen } 1''}^{\,2}} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Si sono indicati con n sen 1'' e n' sen 1'' i valori dei seni dei due piccoli errori angolari, dei quali uno s'immagina costituito da un numero n e l'altro da un numero n'



di minuti secondi. Supposti $P\,D$ e $P\,F$ uguali rispettivamente a 600 e 500 metri, e lo spostamento angolare di ciascuna delle due rette uguale circa ad 1',30'' sessagesimali, la (12) dà un valore di circa m. 0,35, errore quasi inevitabile anche per punti trigonometrici determinati con un teodolite, che dia i 10 minuti secondi d'approssimazione. Gli errori inevitabili, di cui si è accennato, sui rispettivi valori dalle coordinate di F, N e D possono produrre in ciascuna delle due rette anche un piccolo spostamento parallelo, il quale, secondo l'ampiezza ed il segno diverso, influirà ad aumentare o diminuire lo spostamento di P dato dalla (12).

È superfluo aggiungere che si ottengono analoghi risultati e le stesse considerazioni valgono sempre, qualunque sia la posizione delle poligonali e delle rette PD, PN, rispetto agli assi coordinati X, Y. — Però è sempre utile pel calcolo, trattandosi di rilevare zone molto estese, lo scegliere gli assi coordinati in maniera che le x ed y dei punti trigonometrici e poligonometrici compresi nella zona risultino tutte positive; e ciò è anche prescritto dalle istruzioni vigenti per la formazione del nuovo Catasto in Italia.

Occorre altresì osservare che, qualora riesca agevole adattare un punto P, del quale si cercano le coordinate, sull'allineamento di due altri punti trigonometrici, esso potrà essere determinato nello stesso modo su esposto senza ricorrere al metodo Pothenot.

Si riporta infine un esempio numerico, nell'ipotesi che non si possano misurare i due tratti rettilinei FP, PN, ed immaginando che tutte le poligonali si trovino nell'angolo nord-est degli assi (come nella fig. 1); poichè così, secondo si è notato innanzi, riusciranno positive le x ed y di tutti i punti. Sia quindi:

$$x_f = 941,7 \qquad x_n = 237,4 \qquad x_d = 734,8$$
$$y_f = 712,3 \qquad y_n = 329,9 \qquad y_d = 884,5$$

$$\begin{aligned} \beta &= 134^\circ\ 51'\ 30'' \\ \beta' &= \ \ 45^\circ\ 08'\ 30'' \\ \hline \beta + \beta' &= 180^\circ\ 00'\ 00'' \end{aligned}$$

Con tali dati, dalla (1) si ha:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{712{,}3 - 329{,}9}{941{,}7 - 237{,}4} = 0{,}54295;$$

$$\log k = \log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}73476 - 10$$
$$\alpha = 28^\circ\, 30'\, 00'';$$

e per la (7):

$$h = 712{,}3 - 0{,}54295 \times 941{,}7 =$$
$$329{,}9 - 0{,}54295 \times 237{,}4 = 201{,}01.$$

Sicchè l'equazione della retta $F\,N$ per la (5) diviene:

$$y = 0{,}54295\; x + 201{,}01 \;.\;.\;.\;.\;.\; (f)$$

D'altra parte la (8) dà:

$$\alpha' = 28^\circ\, 30'\, 00'' + 180^\circ - 134^\circ, 51' ,30'' = 73^\circ\, 38'\, 30'';$$
$$k' = \operatorname{tg} \alpha' = 3{,}40685.$$

Quindi dalla (9):

$$h' = 884{,}5 - 3{,}40685 \times 734{,}8 = - 1618{,}86;$$

e l'equazione della $P\ D$ per la (10) diviene:

$$y = 3{,}40685\; x - 1618{,}86 \;.\;.\;.\;.\;.\; (g).$$

Risolvendo le due equazioni (f), (g), si ottiene in fine:

$$x = X_p = 635{,}45$$
$$y = Y_p = 546{,}03$$

che sono le coordinate richieste del punto P.

— x —

È importante notare, a scopo di brevità delle operazioni, che riesce superfluo impiantare le equazioni (f), (g) per trarne i valori di X_p, Y_p: questi si otterranno immediatamente dalle formole (11) quando si saranno conosciute le quantità k, h, k', h', nel modo indicato innanzi.

Nell'esempio, esposto per semplice chiarezza di quanto si è svolto, è stata assunta una posizione qualunque per le due rette $F\,P$, $P\,D$. Convien sempre però che queste sieno disposte ad angolo retto quanto più è possibile: perchè in tal modo, come di sopra si è accennato, riusciranno più esatti i valori delle coordinate di P.

Ing. ***Enrico Morrone***

Ing. E. MORRONE

ALCUNE CONSIDERAZIONI

SULLA

RIDUZIONE DEGLI ANGOLI AL CENTRO DI STAZIONE GONIOMETRICA

(Nota pubblicata sul *Monitore Tecnico* del 30 aprile 1900)

SALERNO
Stab. Tip. Fratelli Jovane
1900

ALCUNE CONSIDERAZIONI

sulla riduzione degli angoli al centro di stazione goniometrica.

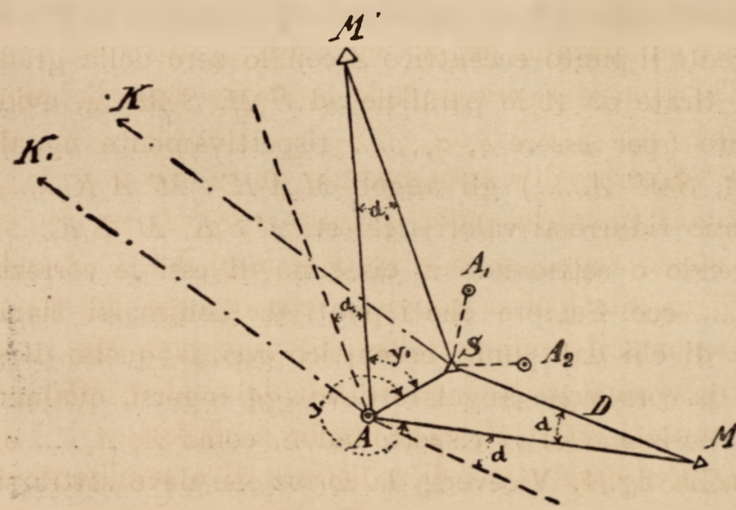
Nelle operazioni geodetiche e topografiche è necessario conoscere gli angoli compresi (fig. 1) tra le rette $S\ M$, $S\ M'$..... e simili (congiungenti il punto di stazione S con gli altri M, M'.....) e la direzione $S\ K$, passante per lo stesso punto di stazione S e per la linea iniziale della graduazione angolare costituente il lembo dello strumento. Or se dal punto S si collimano con l'asse ottico del cannocchiale di un goniometro (teodolite, tacheometro, ecc.) i detti punti ceme M, M'....., le rette $S\ M$, $S'\ M'$...... comprenderanno con la direzione $S\ K$ angoli indicati dall'istrumento con la semplice lettura dei nonî. Ma, ove non possa eseguirsi la stazione su S, si potrà collocare il goniometro in un punto A, prossimo ad S; ed allora, immaginando che $S\ K$ sia parallela alla direzione $A\ K'$, congiungente il punto eccentrico A con lo zero della graduazione, tirate da A le parallele ad $S\ M$, $S\ M'$..... evidentemente (per essere α, α_1,...... rispettivamente uguali a $S\ M\ A$, $S\ M'\ A$......) gli angoli $M\ A\ K'$, $M'\ A\ K'$....., si potranno ridurre ai valori richiesti $M\ S\ K$, $M'\ S\ K$..... aggiungendo o sottraendo a ciascuno di essi le correzioni α, α_1,..... ecc. Sempre che i punti da collimarsi siano a destra di chi dal punto eccentrico guardi quello di stazione, la correzione angolare deve aggiungersi, qualunque sia la posizione di A rispetto ad S, come $A_1\ A_2$..... e simili nella fig. 1. Viceversa la correzione deve sottrarsi se i punti da essere collimati si trovino invece a sinistra. In altri termini, se la graduazione angolare segue il senso degl' indici di un orologio, la correzione sarà positiva o negativa secondo che, partendo dalle direzioni AM, AM'....., gli angoli MAS, $M'AS$..... risultano maggiori o minori di due retti. Nella figura (1) è $y > 2$ retti; $y' < 2$ retti; perciò la correzione α è positiva, α_1 negativa.

Il triangolo AMS dà:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{r}{D}\ \text{sen}\ y \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

posto $AS = r$; $SM = D$; $\wedge\ MAS = y$; $\wedge\ SMA = \alpha$.

Occorre osservare che α è sempre un angolo piccolissimo, tanto che il suo arco si può confondere col seno. Infatti il rapporto $\frac{r}{D}$, anche nelle operazioni poligonometriche, in cui D è molto inferiore al chilometro, al massimo assume il valore di $^1/_{60}$ o $^1/_{50}$ circa; nel qual caso l'angolo α eccederà di poco il grado sessagesimale, ammessa



— IV —

pure la condizione del massimo valore assoluto di sen y, cioè y uguale ad un retto o a tre retti. Segue da ciò che, dividendo il 2.° membro della (1) per sen 1'', si otterrà il numero dei minuti secondi costituenti l'angolo α. La (1), cioè, diverrà:

$$\alpha'' = \frac{r \text{ sen } y}{D \text{ sen } 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

che è facilmente calcolabile in logaritmi.

Considerate ora le quantità r, D, y come variabili indipendenti, differenziando la (1) si ottiene:

$$d \text{ sen } \alpha = \frac{r \cos y}{D} dy + \frac{\text{sen } y}{D} dr - \frac{r \text{ sen } y}{D^2} d\,D \ldots . (3)$$

Il secondo membro di quest'ultima eguaglianza (3), essendo costituito di piccolissime quantità lineari, il piccolo angolo corrispondente a d sen α risulterà uguale (ammesso un errore infinitesimo) alla somma algebrica dei tre valori angolari, dei quali i seni sono rispettivamente indicati dai termini del 2.° membro.

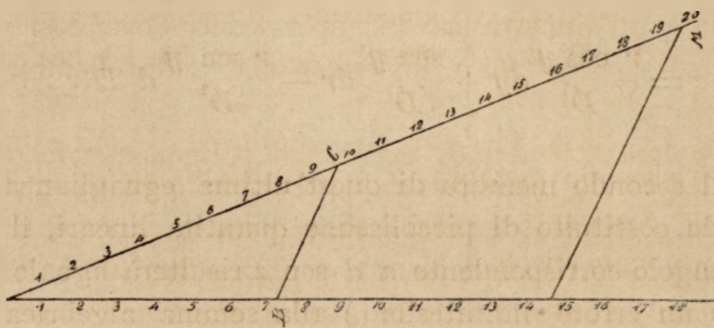
Ciò premesso, esaminando la stessa eguaglianza (3), si nota:

1.° L'errore di α sarà massimo in valore assoluto, per dati errori commessi sulle quantità r, y, D, se risultano dello stesso segno tutti e tre i termini del 2.° membro. Quindi in tale ipotesi conviene che ognuno dei tre termini assuma il minimo valore. Si vede pure che i segni dei tre termini possono essere tali da rendere affatto insignificante l'errore di α, ed anche annullarlo.

2.° Per dati valori di y l'errore di α sarà tanto minore per quanto maggiore è la distanza D e per quanto minore è r.

3.° L'angolo y, non conoscendo l'entità nè il segno di ciascun errore commesso su di esso e su r e D, può indifferentemente assumere qualunque valore compreso tra zero a 4 retti; giacchè il 1.° termine ha il suo coseno per fattore, mentre gli altri due contengono il seno.

4.° Considerati i diversi valori che può assumere $\frac{r}{D}$, secondo che si tratti di poligonazioni o di operazioni trigonometriche differentemente importanti, e posto mente



all'errore che nei diversi casi può tollerarsi sull'angolo α, si scorge dal 1.° termine che non è necessario misurare esattamente l'angolo y, il quale, come facilmente potrebbe verificarsi, può ammettere anche un errore di 10 minuti primi sessagesimali. (Nelle ordinarie triangolazioni topografiche e poligonazioni, possono verificarsi errori anche superiori al grado sessagesimale).

5.° In ogni caso si tratti di poligonazioni o triangolazioni, e quindi qualunque sia il valore di D, è necessario, come risulta dal 2.° termine, che l'errore $d\ r$ dell' eccentricità sia molto piccolo; e ciò quanto più y si avvicina ad uno o a tre retti. Generalmente è tollerabile per r un errore inferiore al centimetro.

6.° Non è necessario, per essere $\frac{r}{D}$ una frazione molto piccola, conoscere esattamente la distanza D, massime quando questa supera il chilometro. Se poi D è compresa tra 100 a 300 metri circa, come nelle operazioni poligonometriche, occorre conoscerla tanto più esattamente per quanto maggiore è l'eccentricità r ed anche per quanto più y si avvicina all'angolo retto o a tre retti. Ciò risulta del 3.° termine.

Del resto l'esattezza delle tre quantità r, y D è subordinata all'importanza dell'operazione, dovendosi principalmente porre mente all'errore che può tollerarsi sull'angolo α.

Qualora si tratti di operazioni poligonometriche per rilevamenti topografici, ove gli angoli si valutano con un'approssimazione non inferiore ai 30 secondi sessagesimali, può ottenersi il valore di α, dato dalla (2), in unità di minuti primi, dividendo il 2.° membro per 60. Si avrà, cioè:

$$\alpha' = \frac{r \text{ sen } y}{D \text{ sen } 1'' \times 60} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Siccome il seno di un minuto secondo sessagesimale è circa uguale a 0,000005, trovato pure mediante le tavole logaritmiche il valore di sen y, si potrà approssimativamente vedere se il 2.° membro della (4) sia inferiore o superiore ad $^1/_2$. Nel 1.° caso la riduzione è affatto trascurabile, poichè essa risulta inferiore a 30" sessagesimali (ove occorra, si potrebbe sempre calcolare); nel 2.° caso si potrà determinare α' coi logaritmi, nello stesso modo che α'' della (2).

Siffatta determinazione di α' risulta molto spedita: ma, ove mai voglia usarsi un procedimento grafico, si osservi che la (4) può anche scriversi:

$$\frac{D \text{ sen } 1'' \times 60}{\text{sen } y} = \frac{r}{\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Segue che α' è la quarta proporzionale in ordine alle quantità D sen 1'' $\times$ 60, sen y, r. Quindi, tracciati i due lati di un angolo come nella figura (2), assunta ad arbitrio una unità lineare, staccando $AB = D$ sen 1'' $\times$ 60; $AC =$ sen y; $AL = r$, congiunto B con C e tirando da L la parallela a BC, sino ad incontrare in M il prolungamento di AC, risulterà $AM = \alpha'$ in unità di minuti primi, positiva o negativa, secondo che, giusta si è avvertito innanzi, y è maggiore o minore di 2 retti. Essendo sen 1'' $\times$ 60 una costante uguale a 0,0002908 circa, si potrà calcolare agevolmente, secondo i casi, la quantità D sen 1'' $\times$ 60. Si osserva che, assumendo per tale operazione il centimetro come unità di lunghezza, evidentemente il chiesto valore di α' potrebbe in alcuni casi non esser compreso sul foglio di carta, di cui si dispone; e d'altra parte la quantità sen y, e massime l'altra D sen 1'' $\times$ 60 potrebbero, al contrario, diventare sì piccole da rendere praticamente difficilissima, se non impossibile, la indicata costruzione grafica. Ad evitare tale inconveniente, assunto pure il centimetro per unità di misura, conviene, come può farsi con facilità, mentalmente, moltiplicare per 100 la quantità D sen 1'' $\times$ 60, per 10 il valore di sen y e per 5 il valore di r. È facile vedere che in tal modo si avrà per α', in valore assoluto, un segmento ridotto a metà del vero: ossia per ottenere α' in numero di minuti primi, basterà raddoppiare il numoro dei centimetri di cui risulta il detto segmento. In tale segmento verrà quindi a rappresentare un minuto primo ogni mezzo centimetro, lunghezza sufficiente a non risentire gli errori di graficismo, come potrebbe avvenire se l'unità lineare fosse molto piccola, per esempio il millimetro. Ed ancho la intersezione (v. fig. 2) nel punto M risulta pure con rette non molto obblique fra loro (altra causa d'errore).

Come esempio si abbia:

$$r = \text{m. } 2{,}94 \qquad y = 76^\circ{,}25' \qquad D = \text{m. } 249{,}80.$$

Calcolando α' con la (4), ponendo mente che $\log \dfrac{1}{\text{sen } 1'' \times 60}$ è costante ed eguale circa a 3.5363, si ottiene:

$$\begin{array}{rr} & 0{,}4683 \\ & 9{,}9877 \\ & 7{,}6024 \\ & 3{,}5363 \\ \hline \log \alpha' = & 1{,}5947 \end{array}$$

$\alpha' = -39'{,}33 = -39'{,}20''$. Il segno di α' è negativo perchè $y < 2$ retti.

Volendo applicare il metodo grafico, si ponga:

$$\begin{array}{rcrcr} D \text{ sen } 1'' \times 60 \times 100 = & 249{,}8 \text{ sen } 1'' & \times 60 \times 100 = & 7{,}27 = AB \\ \text{sen } y \times 10 = & \text{sen } 76^\circ{,}25' & \times 10 = & 9{,}72 = AC \\ r \times 5 = & 2{,}94 & \times 5 = & 14{,}70 = AL \end{array}$$

Staccati gl' indicati valori di AB, AC, AL (fig. 2), assumendo il centimetro per unità grafica, congiunto B con C, tirata LM parallela a BC, risulterà AM (che è di centimetri 19,65) metà di α'; quindi α' (da considerarsi col segno negativo) $= 2 \times -19,65 = -39',30 = -39',18''$, valore differente da quello trovato con la risoluzione numerica per soli due secondi. È interessante notare che non occorre molta accuratezza nell'eseguire la indicata costruzione grafica; giacchè, quantunque si commetta un millimetro di errore sul segmento *AM*, α' si allontanerebbe dal vero di non oltre 12 secondi, (cioè $^1/_5$ di un minuto primo) trascurabili per gli angoli di una poligonale topografica.

Il prodotto D sen $1'' \times 60 \times 100$ potrebbe pure determinarsi con la seguente tabella, in cui sono indicati i diversi valori di tali prodotti supponendo $D = 1$; $D = 2$;. . $D = 10$:

Valori di D	1	2	3	4	5
Valori D sen $1'' \times 60 \times 100$	0,029088	0,058176	0,087264	0,116352	0,145440

Valori di D	6	7	8	9	10
Valori D sen $1'' \times 60 \times 100$	0,174528	0,203616	0,232704	0,261792	0,290880

È evidente che si otterranno così tutti i valori delle nove cifre significative moltiplicate o divise per 10, 100.... ecc., mediante semplici spostamenti di virgola. Per un numero qualunque, come quello dell'esempio indicato, si tratta in conseguenza di eseguire una somma. Infatti si ha:

Per	200	. . . . . .	5,818
»	40	. . . . . .	1,163
»	9	. . . . . .	0,262
»	0,8	. . . . . .	0,023
Per	249,8	. . . . . .	7,266

Si aggiunge infine che, trattandosi di angoli misurati con teodolite o tacheometro a graduazione centesimale, la (4) diventa:

$$\alpha_1{}' = \frac{r \text{ sen } y}{D \text{ sen } 1'' \times 100} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5) \textit{ bis};$$

in cui i valori angolari y ed 1'' sono centesimali, ed α'_1 risulterà in minuti primi centesimali. Anche α_1', potrà quindi determinarsi con identico procedimento grafico, ponendo mente però che y ed 1'' della formola (5) *bis*, essendo angoli centesimali, occorrerebbe una nuova tabella pei valori di D sen 1'' × 100 × 100.

Ing. ***Enrico Morrone***

Ing. E. MORRONE

SULLA TRASFORMAZIONE

DELLE

COORDINATE PIANE ORTOGONALI

(Nota pubblicata sul *Monitore Tecnico* del 20 luglio 1900)

SALERNO
Stab. Tip. Fratelli Jovane

1900

SULLA TRASFORMAZIONE

DELLE COORDINATE PIANE ORTOGONALI

I punti stabiliti su di un piano per una ragione qualsiasi sogliono generalmente individuarsi mediante una coppia di coordinate riferite a due assi ortogonali situati nello stesso piano. Or se i punti A, B, C .... e simili (fig. 1), date per coordinate rispetto agli assi ortogonali OX, OY, di origine O, vogliano, per una causa qualunque, riferirsi invece ad un'altra coppia di assi paralleli ai primi, come $O'\ X'$, $O'\ Y'$, di origine O', è necessario che di uno qualunque fra essi punti, per esempio A, siano conosciute le coordinate rispetto ad entrambe le coppie di assi. In tale ipotesi si vede come restano così subito conosciute pure le coordinate della nuova origine O' rispetto agli assi di origine O, e siano x_{o_1}, y_{o_1}.

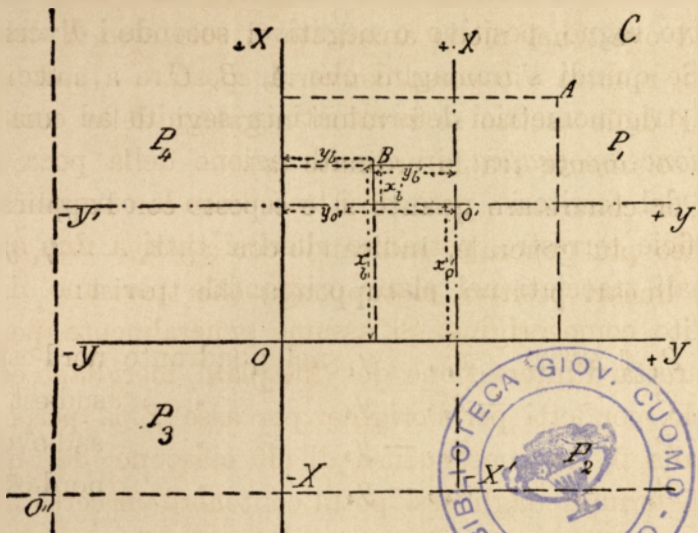
Se in oltre si dinotano con x_b, y_b le coordinate note del punto B rispetto agli assi di origine O, e con x'_b, y'_b le coordinate da determinarsi delle stesso B rispetto ai nuovi assi di origine O', si otterrà agevolmente dalla fig. (1).

$$\left.\begin{aligned} x'_b &= x_b - x_{o'} \\ -y'_b &= y_b - y_{o'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dall'esame della stessa fig. (1) si scorge che, comunque si trovi disposta la nuova origine O' rispetto ad OX ed OY, le formole (1) sono atte a determinare le coordinate di qualunque punto riferite ai nuovi assi $O'\ X'$, $O'\ Y'$, purchè ciascun termine a 2.° membro sia considerato col relativo segno, positivo o negativo, secondo i diversi casi.

Se quindi s' immagini che A, B, C . . . . . ecc., siano punti trigonometrici determinati in seguito ad una *triangolazione topografica*, in considerazione della poca estensione del territorio, potendosi trascurare la curvatura della superficie terrestre, potranno riferirsi tutti a due assi ortogonali tracciati nel piano orizzontale per uno di essi, stabilito come origine. Si assume generalmente per asse X la retta d'intersezione dei due piani, meridiano ed orizzontale, condotti per l'origine: per asse Y la perpendicolare alla X. In conseguenza di ciò ciascuno dei quattro angoli formati dagli assi potrà contenere un certo numero degli stabiliti punti trigonometrici; e se il senso positivo dei due assi (X, Y) va dall'origine rispettivamente a nord e ad est, come nella fig. (1), solo i punti compresi nel quadrante nord-est resteranno individuati da coordinate positive, mentre quelli situati negli altri quadranti risulteranno con coordinate o entrambe negative (quadrante sud-ovest), o una positiva e l' altra negativa (quadrante sud-est e nord-ovest).

Nell'eseguire però il rilevamento topografico di un territorio, per cui occorre svolgere delle poligonali tra i diversi punti trigonometrici, torna utile evitare che questi risultino determinati da coordinate negative. A tal fine basterà assumere per nuovi assi (v. fig. 1) altri paralleli ai primi, aventi per origine il punto (per es. O''), che sia più a sud e più ad ovest di tutti gli altri. Così i punti della rete trigonometrica, restando tutti compresi nel quadrante nord-est dei nuovi assi, risulteranno individuati da nuove coordinate positive. È facile vedere che tale trasformazione potrà eseguirsi mediante le formole (1), ponendo mente, come pure si è notato innanzi, al segno



(*Fig. 1ª*)

che, secondo i diversi punti, assume ciascun termine dei secondi membri.

A semplificare tale trasformazione delle coordinate e a renderla facile, il più delle volte è conveniente assumere per origine dei nuovi assi un punto qualunque, anche non trigonometrico, affatto ideale, che sia distante dagli assi originarî per un numero di unità lineari costituito da una cifra significativa seguita da zeri. In tal modo il calcolo delle nuove coordinate mediante le formole (1) riuscirà speditissimo, come si può esaminare con un esempio numerico. Di ciò è fatta pure speciale menzione nelle istruzioni vigenti per la formazione del nuovo Catasto nel Regno.

Anzi si osserva a questo proposito che un simile spostamento riesce utile per entrambi gli assi nel solo caso, in cui esistano ascisse ed ordinate negative tra tutte quelle del sistema. Ma se invece le coordinate negative sono solamente costituite da ascisse (y), converrà spostare più ad ovest nel modo anzidetto il solo asse X delle ordinate, mentre viceversa converrà spostare a sud il solo asse Y delle ascisse se i valori negativi delle coordinate siano solamente tra le ordinate (x).

Per concretare quanto si è esposto con l'applicazione del caso più generale, indicando con x_1, x_2 .... y_1 y_2 .... valori lineari positivi, si supponga che trovisi:

un punto	P_1	di coordinate	x_1, y_1	nel quadrante	nord-est
»	P_2	»	$-x_2$, y_2	»	sud-est
»	P_3	»	x_3, $-y_3$	»	sud-ovest
»	P_4	»	x_4, $-y_4$	»	nord-ovest

Affinchè il quadrante nord-est dei nuovi assi comprenda tutti i punti del sistema, è evidente che la sua origine deve essere di coordinate non solo negative rispetto alla prima coppia di assi, ma anche in valore assoluto non inferiori, ad una certa quantità dipendente dal punto trigonometrico più a sud-ovest fra tutti gli altri. Indicando

(Fig 2a)

con O'' l'origine dei nuovi assi, suppongasi che, per lo scopo anzidetto, le sue coordinate rispetto ai primi possano essere:

$$x_{o''} = -5000; \qquad y_{o''} = -6000.$$

Applicando le formole (1) risulta:

$$
\begin{array}{ll}
X_1 = x_1 + 5000 & Y_1 = y_1 + 6000 \\
X_2 = -x_2 + 5000 & Y_2 = y_2 + 6000 \\
X_3 = -x_3 + 5000 & Y_3 = -y_3 + 6000 \\
X_4 = x_4 + 5000 & Y_4 = -y_4 + 6000.
\end{array}
$$

nelle quali X_1, Y_1 ...... X_4, Y_4 indicheranno in valore e segno le coordinate di P_1 ...... P_4, riferite ai nuovi assi di origine O''.

Qualora poi di un certo numero di punti trigonometrici riferiti agli assi ortogonali OX, OY (fig. 2) si voglia determinare le coordinate piane rispetto ad un altro sistema di assi d'origine O', situato lontano dall'asse X tanto da non potersi trascurare la convergenza angolare al polo terrestre degli assi meridiani OX, $O'X'$, è necessario conoscere non solo l'angolo di detta convergenza (α), ma anche, come nel caso precedente, le due coppie di coordinate di un punto qualunque (p. es. A) rispetto ad entrambi i sistemi di assi ortogonali. Per tanto, indicando, come innanzi, con x_a, y_a; x_b, y_b ...... e simili valori lineari positivi, siano: x_a, y_a; x'_a, $-y'_a$ le due coppie di coordinate note del punto A rispetto agli assi di origine O ed O'; e x_b, y_b le coordinate anche note del punto B rispetto agli assi di origine O. Sia in oltre u l'intersezione del prolungamento di y_b con la retta che misura x_a; e v il piede della perpendicolare condotta da u sulla ordinata x'_a. Dall'esame della fig. 2 si vede agevolmente che per le nuove coordinate di B riferite ai nuovi assi di origine O', risulta:

$$\left.\begin{aligned} x'_b &= x'_a - \Delta_x \cos\alpha + \Delta_y \operatorname{sen}\alpha \\ -y'_b &= -y'_a - \Delta_x \operatorname{sen}\alpha - \Delta_y \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2);$$

in cui

$$\Delta_x = x_a - x_b;\ \Delta_y = y_a - y_b.$$

Le formole (2), analogamente a quanto si è notato per l'altra specie di trasformazione già esaminata, valgono a determinare, come può verificarsi, le coordinate di qualunque punto riferite ai nuovi assi d'origine O' quando si tenga conto del segno da attribuirsi a ciascun termine dei secondi membri. E ciò qualunque sia la posizione dei nuovi assi rispetto ai primi. Si osserva pure che Δ_x e Δ_y possono indicare, secondo i casi, la somma o la differenza delle due coppie di numeri positivi x_a, x_b e y_a, y_b.

Occorre ora notare che nei casi della pratica l'angolo di convergenza α è molto piccolo, tanto che nelle latitudini delle regioni nostrali esso non può eccedere i 15 o 20 minuti primi sessagesimali, quando le origini O ed O' si trovino quasi sullo stesso parallelo, ad una distanza di 30 o 40 chilometri circa. In conseguenza di sì piccolo valore di α, essendo il suo coseno molto prossimo all'unità, è evidente che le quantità assolute Δ_x e Δ_y saranno quasi sempre uguali rispettivamente a circa $\Delta_x \cos\alpha$ e $\Delta_y \cos\alpha$, e per qualche punto potranno essere di poca lunghezza e tali da potersi ritenere $\Delta_x \operatorname{sen}\alpha$ e $_y \operatorname{sen}\alpha$ trascurabili. Verificandosi tale ipotesi, le (2) divengono:

$$\left.\begin{aligned} (+x'_b) &= x'_a - y_x \\ (-y'_b) &= -y'_a - y_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Si sono chiusi in parentesi i primi membri di queste ultime equazioni semplicemente per distinguerli da quelli delle (2), dai quali differiscono di una piccola quantità.

Sicchè le differenze assolute tra i secondi membri delle (2) e (3) saranno in generale rispettivamente della forma:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \Delta_x(1-\cos\alpha)\pm\Delta_y \operatorname{sen}\alpha\\ \varepsilon_y &= \Delta_y(1-\cos\alpha)\pm\Delta_x \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ammesso che nella trasformazione delle coordinate voglia su ciascuna di esse tollerarsi un errore non eccedente una certa quantità assoluta q, si potrà sempre esaminare tra quali limiti debbono essere compresi Δ_x e Δ_y affinchè si verifichi che ε_x ed ε_y calcolate con le (4) non superino la detta quantità q. Allora per un certo gruppo di punti la calcolazione delle nuove coordinate potrà in conseguenza eseguirsi più speditamente mediante le (3), anzichè mediante le (2). Si abbia, per esempio, tra tutti i punti del sistema:

massimo valore assoluto di $\Delta_x = 7000$ m.
» » » » $\Delta_y = 8000$ m.
$\wedge\ \alpha = 15$ minuti primi sessagesimali;

ed in oltre debba essere al massimo:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = q = \text{m. } 0{,}50.$$

In tale ipotesi le quantità $\Delta_x(1-\cos\alpha)$ e $\Delta_y(1-\cos\alpha)$ non possono assumere valori superiori a m. 0,07 e m. 0,08 rispettivamente, mentre per Δ_x e Δ_y di poco superiori ai 100 m. le quantità Δ_x sen α e Δ_y sen α eccedono sempre più il valore $q =$ m. 0,50, sino a raggiungere alquante diecine di metri. Quindi i valori uguali o inferiori a quelli di Δ_x e Δ_y (assoluti), che soddisfano le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}50 &= 0{,}07 + \Delta_y \operatorname{sen} 15' \\ 0{,}50 &= 0{,}08 + \Delta_x \operatorname{sen} 15' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

indicheranno, qualunque siano i valori e segni dei coefficienti di $(1 - \cos \alpha)$ nelle (4), di quali punti del sistema potranno senza alcun' altra considerazione calcolarsi entrambe le coordinate mediante le (3). — Poichè sen 15' $= 0{,}004363$ circa risulta:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_y &\overset{=}{<} \frac{0{,}50 - 0{,}07}{0{,}00436} = \text{m. } 99 \text{ circa} \\ \Delta_x &\overset{=}{<} \frac{0{,}50 - 0{,}08}{0{,}00436} = \text{m. } 97 \text{ circa} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Di tutti i punti, pei quali si verifica solamente la prima delle (6) si potranno determinare le sole nuove ordinate (x) mediante la prima delle equazioni (3), mentre per le nuove ascisse (y) dovrà applicarsi la 2.ª delle (2). Viceversa accade per le coordinate dai punti, pei quali verificasi solamente la 2.ª delle (6).

Avviene in pratica che ordinariamente le quantità $\Delta_x\,(1 - \cos \alpha)$ e $\Delta_y\,(1 - \cos \alpha)$ sono affatto trascurabili, nel qual caso le condizioni (6) divengono in generale:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_y &\overset{=}{<} \frac{q}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \Delta_x &\overset{=}{<} \frac{q}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Le quali espressioni (7) mostrano che, tranne per qualche punto eccezionale, basterà sempre trovare il quoziente tra l' errore q da potersi tollerare sulle coordinate ed il seno della convergenza α per vedere se e quali punti si trovino nella rete trigonometrica, per cui, qualunque siano i segni di Δ_x e Δ_y, le nuove coordinate potranno calcolarsi, entrambe o una sola, mediante le (3), più semplici delle (2).

Ing. E. Morrone.

Ing. E. MORRONE

SU DI UN CASO DI RISOLUZIONE

DEI TRIANGOLI

NELLE OPERAZIONI TOPOGRAFICHE

(Nota pubblicata sul *Monitore Tecnico* del 10 ottobre 1900)

SALERNO
Stab. Tip. Fratelli Jovane

1900

SU DI UN CASO DI RISOLUZIONE

dei triangoli nelle operazioni topografiche

Nell'eseguire una poligonale topografica può accadere che tra due punti poligonometrici consecutivi, quali siansi, non possa misurarsi coi mezzi ordinari (nastro d'acciaio, canne o congegno a stadia) la distanza tra essi. E ciò più facilmente potrà verificarsi per il primo o ultimo lato di una poligonale, come $B\,A$, $F\,A_1$ (fig. 1), se essa si svolge tra due punti trigonometrici A, A_1 inaccessibili o quasi. In tale ipotesi, scelto e misurato nel modo più conveniente un lato ausiliario $B\,C = a$, misurati pure gli angoli adiacenti β γ, dalla risoluzione del triangolo $A\ B\ C$, resterà determinato non solo il lato $A\,B = c$, ma anche l'altro $A\,C = b$, il quale potrà poi essere utilizzato a far parte di un'altra poligonale, ove occorra, come A, C, Q..., ecc.

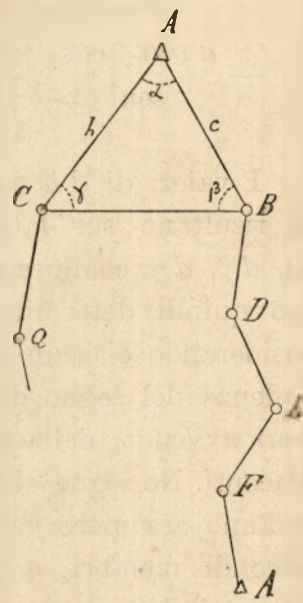


Fig. 1.

Si noti poi che su questo caso di risoluzione di triangoli è fondato il metodo più in uso per la determinazione dei punti trigonometrici d'ultimo ordine nelle triangolazioni topografiche.

Dal triangolo $A\ B\ C$, posto mente che sen $\alpha =$ sen $(\beta + \gamma)$, risulta:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)} \\ b &= \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

Se le quantita a, β, γ sieno variabili indipendenti, differenziando le (1), si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} d\,c &= \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}\,da + \frac{a \cos \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}\,d\gamma - \\ &- \frac{a \operatorname{sen} \gamma \cos (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen}^2 (\beta + \gamma)}\,(d\beta + d\gamma) \ldots \\ d\,b &= \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}\,d\,a + \frac{a \cos \beta}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}\,d\beta - \\ &- \frac{a \operatorname{sen} \beta \cos (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen}^2 (\beta + \gamma)}\,(d\beta + d\gamma) \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

I valori di $d\,b$ e $d\,c$ delle (2) (costituenti gli errori che risultano sui lati b e c in conseguenza degli altri $d\,a$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$ commessi sulla base e sugli angoli β e γ) sono quindi determinati da quelli dei secondi membri, considerando ciascun termine positivo o negativo in dipendenza del segno da attribuirsi ad ognuno dei piccoli errori avvenuti nella misura della base e degli angoli adiacenti. Ne segue che tali termini per un dato triangolo potranno assumere valori e segni tali da annullare o quasi i secondi membri, e quindi anche $d\,b$ e $d\,c$. Ma poichè è impossibile conoscere di valore e segno gli errori che possono commettersi nella misura delle diverse quantità a, β, γ, nell'ipotesi peggiore che a 2.° membro risultino dello stesso segno tutti i termini, occorre che ciascuno di questi si riduca al minimo, affinchè i valori assoluti di $d\,b$ e $d\,c$ riescano pure i più piccoli possibili. I valori poi di β e γ che rendono minimi tali termini, quando la base a e gli errori commessi nelle misure si considerino come conosciuti, indicheranno la forma del triangolo preferibile a ridurre gli errori sui lati.

Per tanto dall'esame dei secondi membri delle (2) si scorge principalmente che i due angoli β e γ (dei quali nessuno può esser eguale a zero, altrimenti non si avrebbe più un triangolo) non possono mai assumere valori tali da annullare quasi tutti i termini compresi da essi. Infatti non è possibile che siffatta condizione avvenga, quando in alcuni termini comparisce il seno come fattore, ed in altri il coseno dello stesso arco. Inoltre se l'angolo $(\beta + \gamma)$ sia retto, i denominatori delle frazioni costituenti i diversi termini divengono massimi; ed anzi i numeratori dei termini a terzo posto per tale valore di $(\beta + \gamma)$ addirittura si annullano. Certamente quindi una delle condizioni atte a rendere minimi i valori assoluti di $d\,b$ e $d\,c$ (quando tutti gli errori commessi nelle misure facciano assumere lo stesso segno a tutti i termini) è che l'angolo $(\beta + \gamma)$ od, anche, quello opposto alla base, risulti retto.

Ora è facile vedere che il 2.° membro della prima tra le (2), quali siano i valori di a e degli errori commessi sulle misure, si annullerebbe quasi se si verificasse:

(pel 1.° e 3.° termine) γ prossimo a zero;
(pel 2.° termine) $\gamma =$ un retto.

E il 2.° membro della seconda tra le stesse (2) si annullerebbe quasi se fosse:

(pel 1.° e 3.° termine) β, prossimo a zero;
(pel 2.° termine) $\beta =$ un retto.

Ma tali condizioni sono assurde (il che conferma quanto innanzi si è notato), perchè nello stesso triangolo non può simultaneamente accadere:

$\gamma = 0$ circa	$\beta =$ un retto
$\gamma =$ un retto	$\beta = 0$ circa
media 45°	media 45°

Conviene in conseguenza assumere un valore medio per β e per γ; cioè che ognuno sia di mezzo retto, condizione da cui segue anche l'altra $\beta + \gamma =$ un retto.

La forma quindi più conveniente del triangolo costruito su di una data base, affinchè si riducano al minimo gli errori sui lati, dipendenti dagli altri commessi sulla base stessa e sugli angoli, è quello dell' isoscele inscritto in una semicirconferenza di cerchio (v. fig. 2).

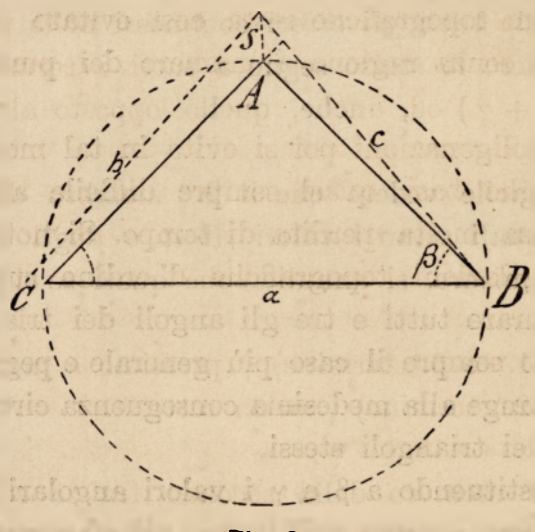


Fig. 2.

Per siffatto triangolo, se gli errori angolari sieno quasi uguali (non essendovi ragione di supporre uno maggiore dell' altro) e tali da dare lo stesso segno a tutti i termini a 2.° membro (ipotesi peggiore) le (2) per essere $\cos(\beta + \gamma) = 0$, e $\mathrm{sen}\,(\beta + \gamma) = 1$, divengono:

$$d\,c = d\,b = \mathrm{sen}\,45^\circ\,(d\,a + a\,d\,\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

e avverrà uno spostamento s del punto A, quasi normale alla base, dato da circa:

$$s = \frac{\mathrm{sen}\,45^\circ\,(d\,a + a\,d\,\gamma)}{\mathrm{sen}\,45^\circ} = a\,d\gamma + d\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In seguito i valori di $d\,b$, $d\,c$, diversi secondo i casi, si indicheranno tra parentesi distinte da apici.

Ciò nonostante in pratica si preferisce la forma del triangolo equilatero, col quale, mentre si riducono gli errori sui lati quasi come nel triangolo isoscele rettangolo, si viene a comprendere maggior superficie; e quindi nelle triangolazioni topografiche resta così evitato che si aumenti, forse senza ragione, il numero dei punti trigonometrici.

Nelle poligonazioni poi si evita in tal modo la misura di lunghe basi, quasi sempre difficile ad eseguirsi bene e senza molta perdita di tempo. Si noti pure che nelle triangolazioni topografiche d' ordine superiore sogliosi misurare tutti e tre gli angoli dei triangoli; ma considerando sempre il caso più generale e peggiore sugli errori, si giunge alla medesima conseguenza circa la forma preferibile dei triangoli stessi.

Ora, sostituendo a β e γ i valori angolari del triangolo equilatero, sempre nell' ipotesi più sfavorevole che gli errori $d\,a$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$, facciano divenire tutti dello stesso segno i termini a 2.° membro, ammesso pure $d\,\beta = d\,\gamma$ circa in valore assoluto, le (2) risultano (posto mente che cotg 120° = — cotg 60°):

$$(d\,b) = (d\,c) = d\,a + a \operatorname{cotg} 60^\circ d\gamma + a \operatorname{cotg} 60^\circ \times 2\,d\gamma =$$
$$= 3\,a \operatorname{cotg} 60^\circ d\,\gamma + d\,a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

e avverrà uno spostamento s', quasi normale alla base ed eguale a circa:

$$s' = \frac{3\,a \operatorname{cotg} 60^\circ d\,\gamma + d\,a}{\operatorname{sen} 60^\circ} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Poichè sen 45° = 0,707 circa, cotg 60° = 0,58 circa, sen 60° = 0,87 circa, dopo tali sostituzioni le (3), (4), (5) e (6) divengono rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned} d\,b = d\,c = 0{,}707\,a\,d\,\gamma + 0{,}707\,d\,a \;.\; . \\ s = a\,d\,\gamma + d\,a \;.\; . \end{aligned}\right\} (7) \text{ (pel } \Delta \text{ rettang. isoscele)}$$

$$\left.\begin{aligned} (d\,b) = (d\,c) = 1{,}74\,a\,d\,\gamma + d\,a \;.\; . \\ s' = 2\,a\,d\,\gamma + 1{,}15\,d\,a \;.\; . \end{aligned}\right\} (8) \text{ (pel } \Delta \text{ equilatero)}$$

Si vede che ciascun 2.° membro delle (7) è inferiore a ciascun 2.° membro delle (8). Ciò dimostra ancora e riconferma che, nell'ipotesi più contraria per gli errori commessi su a, β, γ, la forma teorica del triangolo preferibile per ridurre al minimo lo spostamento del vertice opposto alla base è quella dell'isoscele rettangolo, avente per ipotenusa la base stessa misurata.

Nelle formole (2), supponendo anche il triangolo equilatero, sia:

$$d\,\gamma = -\,d\,\beta - d\,\gamma\,,$$

d'onde: $$d\beta = -2\,d\gamma$$
$$d\beta + d\gamma = -d\gamma\,.$$

Per tale ipotesi, ricordando che cotg 60° = — cotg 120°, esse divengono:

$$\left.\begin{aligned}(dc)' &= da + d\gamma\,[a \operatorname{cotg} 60° + a \operatorname{cotg} 120°] = da \\ (db)' &= da + d\gamma\,[a \operatorname{cotg} 120° - 2\,a \operatorname{cotg} 60°]\end{aligned}\right\} \;.\;(9)$$

Analogamente, supposto: —

$$d\beta = -d\gamma - d\beta$$
$$d\gamma = -2\,d\beta$$
$$d\beta + d\gamma = -d\beta\,, \quad \text{si ottiene:}$$

$$\left.\begin{aligned}(dc)'' &= da + d\beta\,[a \operatorname{cotg} 120° - 2\,a \operatorname{cotg} 60° \\ (db)'' &= da + d\beta\,[a \operatorname{cotg} 60° + a \operatorname{cotg} 120°] = da\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

I valori $d\gamma$ [a cotg 120' — 2 a cotg 60°] e $d\beta$ [a cotg 120° — 2 a cotg 60°] sono negativi, e se $d\,a$ risultasse anche di segno negativo, la 2.ª delle (9) e la 1.ª delle (10) diverrebbero in valore assoluto:

$$\left.\begin{aligned}(db)' &= da + 3\,a \operatorname{cotg} 60°\, d\gamma \\ (dc)'' &= da + 3\,a \operatorname{cotg} 60°\, d\beta\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;(11);$$

in cui, ponendo cotg 60° = 0,58, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}(db)' &= da + 1{,}74\,a\,d\gamma \;.\;.\;. \\ (dc)'' &= da + 1{,}74\,a\,d\beta \;.\;.\;.\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;(12)$$

Se quindi si verificasse uno di tali due casi speciali sugli errori nel triangolo equilatero, le (9), (10) e (12) mostrano che su di uno dei lati si riporterebbe il solo errore $d\,a$; ma l' altro invece risulterebbe con un errore sempre superiore in valore assoluto a ciascuno dei due dati dalle (7) pel caso del triangolo isoscele rettangolo al vertice A, il quale quindi rimane sempre preferibile come forma teorica.

Qualora inoltre gli errori angolari $d\,\beta$, $d\,\gamma$ sieno uguali a zero o quasi, le (2) divengono:

$$\left.\begin{aligned}(d\,c)''' &= \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,a\\ (d\,b)''' &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,a\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(13)$$

Le quali indicano che gli errori assoluti sui lati b e c sono rispettivamente le quantità $\frac{b}{a}\,d\,a$ $\frac{c}{a}\,d\,a$: ossia ciascun lato del triangolo risulterà con un errore tante volte più piccolo o più grande di quello commesso sulla base a per quanto ciascun lato è minore o maggiore della base stessa. Segue che in tale ipotesi è conveniente che l' angolo opposto alla base sia retto, riuscendo così massimo il denominatore a 2.° membro delle (13).

Dovrebbe poi essere $\gamma = 0$ circa, ed in conseguenza $\beta =$ un retto circa, affinchè si annulli quasi $d\,c$: e d'altra parte: $\gamma =$ un retto circa, $\beta = 0$ circa affinchè possa ritenersi nullo invece $d\,b$. Ancorchè quindi l'errore sia solo sulla base a, conviene assumere anche in questo caso $\beta = \gamma =$ mezzo retto (triangolo isoscele rettangolo, come nel caso generale già esaminato); perchè in tal modo lo errore che ne consegne sui lati si distribuisce ugualmente su ciascuno di essi. Valgano però le stesse considerazioni svolte innanzi per conchiudere che in pratica è ordinariamente preferibile la forma del triangolo equilatero. Ed anche nell' ipotesi che, annullandosi l'errore sulla base a, restino solo quelli sugli angoli β e γ, con ragionamento identico a quello del caso generale, si giunge alla stessa conclusione; benchè le formole innanzi indicate mostrino sempre che la forma teorica preferibile ad evitare lo spostamento del vertice del triangolo, nel caso più sfavorevole sul segno degli errori nelle misure fatte, è quella dell' isoscele rettangolo al vertice stesso.

Appare poi dalle formole (2) quanto sia da evitare che il triangolo risulti come uno di quelli indicati nella fig. 3, con l'angolo, cioè, opposto alla base molto acuto. Infatti per quanto piccoli sieno gli errori commessi su a, β, γ, è facile vedere come almeno due termini a 2.° membro delle (2) tendono a crescere in valore assoluto per quanto più l'angolo in A si avvicina a zero. E se il supplemento possa ritenersi quasi uguale a due retti, i secondi membri divengono in generale quasi infiniti. Quindi conviene sempre evitare, per quanto è possibile, tali triangoli nelle triangolazioni topografiche, sempre perchè gli errori possono essere tali da far divenire tutti dello stesso segno i termini a 2.° membro delle (2). E, ove nelle poligonazioni riescono qualche volta inevitabili per la speciale condizione della località, è necessario essere esattissimi tanto nella misura della base, quanto in quella degli angoli β e γ.

Se invece il triangolo sia come $A\ B\ C$, $A'\ B\ C$ e simili della fig. 4, in cui gli angoli opposti alla base sieno molto ottusi, e molto acuti quelli adiacenti alla base stessa, le formole (2) mostrano che i termini a 1.° posto del 2.° membro assumono in ogni caso rispettivamente i valori assoluti $\frac{c}{a}\,d\,a$, $\frac{b}{a}\,d\,a$; quelli a 2.° posto tendono a crescere a misura che β e γ tendono a zero, e gli altri a terzo posto appariscono sotto forma indeterminata. Anche

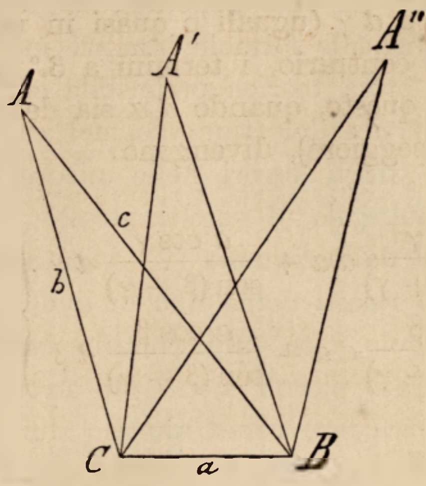


Fig. 3.

per questa specie di triangoli valgono quindi le stesse osservazioni fatte pel caso precedente; perchè se si riduce sui lati l'errore della base, quello dipendente dagli angoli può risultare molto rilevante.

Qualora β e γ sieno addirittura uguali a zero, il triangolo evidentemente si ridurrà ad una retta.

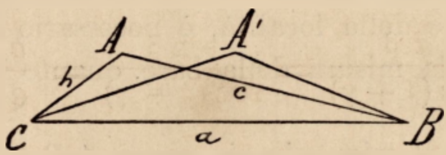


Fig. 4.

Ciò non ostante è facile vedere come i secondi membri delle (2), nell' ipotesi che i detti angoli sieno prossimi a zero, convergono ad un valore determinato. Infatti dalle condizioni del triangolo (per quanto piccoli sieno β e γ) dovrà sempre verificarsi:

$$\beta + \gamma > \beta$$
$$\beta + \gamma > \gamma$$

Ora se $d\,\beta$ e $d\,\gamma$ (uguali o quasi in valore assoluto) sieno di segno contrario, i termini a 3.° posto delle (2) si annullano, e queste, quando $d\,a$ sia dello stesso segno di $d\,\gamma$ (ipòtesi peggiore), divengono:

$$\left.\begin{aligned}(d\,c)^{\text{IV}} &= \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,a + \frac{a\cos\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,\gamma \\ (d\,b)^{\text{IV}} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,a + \frac{a\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}\,d\,\beta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

Ma $$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{c}{a}\,; \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{b}{a}\,;$$

e, dacchè β e γ sono prossimi a zero, tanto da confondersi coi differenziali di essi, sarà pure $\cos\gamma = \cos\beta = 1$ circa, ed anche:

$$\frac{d\,\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{d\,\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{b}{a}$$

Quindi le (14) divengono:

$$\left.\begin{aligned}(d\,c)^{\text{IV}} &= \frac{c}{a}\,d\,a + c \\ (d\,b)^{\text{IV}} &= \frac{b}{a}\,d\,a + b\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Se invece $d\beta$ e $d\gamma$ sieno dello stesso segno (p. es. positivi), i termini a 1.° e 2.° posto delle (2) convergono rispettivamente allo stesso valore indicato nei secondi membri delle (15), ammesso pure $d\,a$ positivo; e ciascuno dei termini a 3.° posto tende al valore $-c$, $-b$; perchè $\cos(\beta+\gamma)=1$ circa (positivo) nel caso in esame;

$$\frac{d\beta + d\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = 1 \text{ e } \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{c}{a}$$

Per conseguenza, dietro siffatte sostituzioni, in questa ultima ipotesi, le (2) si cambiano nelle (15), ma col sopprimere nei membri a 2.° posto i termini c e b. In altre parole rimarranno i soli termini a primo posto nei secondi membri delle (2), e si otterrà:

$$\left.\begin{aligned} (d\,c)^{v} &= \frac{c}{a}\,d\,a \\ (d\,b)^{v} &= \frac{b}{a}\,d\,a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

Alle stesse (16) si giunge, come è facile vedere, se $d\beta$ e $d\gamma$ sieno invece entrambi negativi.

Tali risultati possono anche dedursi in seguito a considerazioni geometriche.

È superfluo notare che triangoli, i quali abbiano β e γ prossimi a zero sono affatto ideali, ed in pratica quelli, in cui gli angoli alla base sieno molto acuti si dovrebbero assolutamente evitare.

Si osserva in ultimo che le formole (2) indicano come, supposti sempre gli stessi errori sulla base e sugli angoli in triangoli simili, i valori assoluti di $d\,b$ e $d\,c$ crescono insieme alla base a. E per conseguenza, per quanto maggiore è la lunghezza della base, e quindi degli altri lati dei triangoli trigonometrici, altrettanto più precisi istrumenti dovranno adoperarsi nella misura degli angoli. Ciò conferma la regola pratica di adoperare teodoliti di tanta maggiore approssimazione nell' indicazione dei nonii, per quanto maggiore è l' importanza dell'ordine delle diverse triangolazioni.

Ing. E. Morrone