



Dottorato di Ricerca
in Ingegneria Civile, Edile-architettura, Ambientale e del Territorio

Università degli Studi di Salerno

Giuseppe Teodosio

**TECNOLOGIA, MODELLAZIONE MECCANICA
E RINFORZO STRUTTURALE CON MATERIALI INNOVATIVI
DI STRUTTURE CURVE IN MURATURA**

XXIX Ciclo (a.a. 2015 - 2016)

Giuseppe Teodosio Tecnologia, modellazione meccanica e rinforzo strutturale con materiali innovativi di strutture curve in muratura



*Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca*



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Dipartimento di Ingegneria Civile

Dottorato di Ricerca

in

Ingegneria civile, edile-architettura, ambientale e del territorio
Curriculum in Ingegneria delle strutture

XXIX Ciclo N.S. (2014÷2016)

**TECNOLOGIA, MODELLAZIONE MECCANICA E RINFORZO
STRUTTURALE CON MATERIALI INNOVATIVI
DI STRUTTURE CURVE IN MURATURA**

Giuseppe Teodosio

Il Tutor

Prof. Valentino Paolo Berardi

Il Coordinatore

Prof. Ciro Faella

Sommario

CAPITOLO 1. PREMESSA.....	1
1.1 Obiettivo della tesi.....	1
CAPITOLO 2. CARATTERI FORMALI E COSTRUTTIVI DELLE COPERTURE VOLTATE DALL'ANTICHITÀ ALL'ETÀ MODERNA	3
2.1 Introduzione	3
2.2 Le origini delle strutture voltate	4
2.3 Lo sviluppo delle tecniche costruttive presso i romani	9
2.4 Le volte nell'architettura bizantina	13
2.5 La costruzione delle volte nel periodo Medievale	16
2.6 Sviluppo tecnico e formale a partire dal XV secolo	19
2.7 Le volte in muratura: "La regola d'arte" nella letteratura tecnica tra il XV e il XIX secolo	20
2.8 Accorgimenti per il miglioramento della resistenza	25
CAPITOLO 3. LE VOLTE A PADIGLIONE	31
3.1 Introduzione	31
3.2 Inquadramento storico	31
3.3 Geometrie e tecniche costruttive	39
CAPITOLO 4. EVOLUZIONE STORICA DEI METODI PER L'ANALISI DELLA STATICA DEGLI ARCHI.....	47
4.1 Introduzione	47
4.2 La moderna teoria degli archi e volte in muratura	49
4.2.1 Sintesi dell'evoluzione storica.....	49
4.2.2 Il progetto di archi e volte in muratura.....	51
4.2.3 I due semiarchi: "Una forza formata da due debolezze".	52
4.2.4 L'analogia con la catenaria.....	54
4.3 Il teorema statico.....	54
4.3.1 L'arco limite	55
4.3.2 Il progetto di un arco in muratura: resistenza contro stabilità.	56
4.3.3 Lo stato tensionale in strutture in muratura: forma e resistenza	60

4.4	Il teorema cinematico	61
CAPITOLO 5.	METODI DI CALCOLO NUMERICI PER L'ANALISI DELLE STRUTTURE CURVE.....	63
5.1	Thrust Network Methods (TNM).....	63
5.2	Metodi agli elementi finiti.....	65
5.2.1	Modelli eterogenei	65
5.2.2	Modelli omogenei	66
CAPITOLO 6.	ALGORITMI EVOLUTIVI ED ALGORITMI GENETICI	71
6.1	L'evoluzione naturale come paradigma computazionale.....	71
6.2	Gli algoritmi evolutivi	72
6.3	Gli algoritmi genetici	77
6.4	Il Breeder Genetic Algorithm (BGA)	80
6.4.1	Aspetti generali	80
6.4.2	L'operatore ricombinazione.....	81
6.4.3	L'operatore mutazione	82
CAPITOLO 7.	IL MODELLO PROPOSTO	85
7.1	Introduzione	85
7.2	Il modello numerico	85
7.3	Il caso di studio	87
7.3.1	Peso proprio.....	89
7.3.2	Carichi permanenti e carichi variabili	91
7.3.3	Carichi permanenti e carichi variabili agenti su metà della struttura	92
7.3.4	Carichi sismici e rinforzi localizzati con FRM.....	94
CAPITOLO 8.	CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE	99
	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	101

Indice delle figure

<i>Figura 1: Micene, tesoro di Atreo, veduta del "dromos", XIV secolo a.C. La porta consentiva l'accesso al tholos, ovvero ad una stanza a pianta circolare con una cupola conica.</i>	5
<i>Figura 2: Micene, tesoro di Atreo, veduta dell'interno. La volta è stata ottenuta dalla sporgenza di 33 anelli di blocchi concentrici (diametro: 14,5 m; altezza: 13,2 m).</i>	5
<i>Figura 3: Micene, tesoro di "Clitennestra", particolare dell'interno. Secolo XV a.C. (Buti G, 1972, vol XIII, tav. 40).....</i>	6
<i>Figura 4: Sant'Antine, Sassari, corridoio del Nuraghe, VIII-IX secolo a.C. (Buti G, 1972, vol. XIII, tav. 38)</i>	6
<i>Figura 5: Kerč, tumulo Carskij, ingresso del sepolcro, IV secolo a.C. (Buti G, 1972, vol VI, tav. 352)</i>	7
<i>Figura 6: Kerč, tumulo Carskij, particolare dell'interno, IV secolo a.C. (Buti G, 1972, vol XIII, tav. 40)</i>	7
<i>Figura 7: Volta a botte realizzata con filari inclinati. (Choisy A., 1883, 33).....</i>	8
<i>Figura 8: Porta di Ishtar a Babelonia, secolo VII-VI a.C., ricostruzione di Koldewey,</i>	9
<i>Figura 9: Piattabanda, Kalat Siman. (V secolo d.C.) (Mainstone R., 2001)</i>	10
<i>Figura 10: Piattabanda con arco di scarico, Larario di Pompei, 60 d.C. circa. (Adam J. P., 1998,188)</i>	11
<i>Figura 11: Tempio di Giove Anxur databile intorno alla prima metà del I secolo a.C. (Lancaster L.C., 2005, 5)</i>	11
<i>Figura 12: Volta a botte in opus caementicium con nervature in semilateres. (Lugli G., 1957, 667, tratta da Choisy A, L'art de batir).....</i>	12
<i>Figura 13: Volta con nervature in cui i vuoti vengono sfruttati per realizzare decorazioni a cassettoni. (Lugli G., 1957, 668, tratta da Choisy A, L'art de batir).....</i>	12
<i>Figura 14: Volta realizzata con un manto di mattoni bessali sul quale venivano posati altri mattoni di dimensioni minori posti in piano e bessali di coltello che avevano la funzione di creare un'ammorsatura. (Lugli G., 1957, 681, tratta da Choisy A, L'art de batir).....</i>	12
<i>Figura 15: Pianta e sezione della chiesa di Santa Sofia a Istanbul. (Mango, C., 1978)</i>	15
<i>Figura 16: Particolare delle semicupole poste a contrasto della spinta della cupola centrale nella chiesa di Santa Sofia a Istanbul.</i>	15
<i>Figura 17: A sinistra: pianta della chiesa dei Santi Sergio e Bacco a Istanbul (Mango, C., 1978); a destra: pianta della chiesa di San Vitale a Ravenna (Toman R., 1999).</i>	16
<i>Figura 18: Arcs Doubleaux di una cattedrale del XII secolo. (Viollet le Duc E., 1875).....</i>	18
<i>Figura 19: Forme geometriche delle volte. (G.Guarini, 1989, tav. XVII)</i>	21
<i>Figura 20: Esempi di volte a fasce, a fasce piane e piane. (G.Guarini, 1989, tav. XVII).....</i>	22

<i>Figura 21: Le sei tipologie di volte proposte da Palladio. (Palladio A., 1980, 73).....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 22: Volta a botte</i>	<i>24</i>
<i>Figura 23: Volta a botte con lunette</i>	<i>24</i>
<i>Figura 24: Volta a botte con testedi padiglione</i>	<i>25</i>
<i>Figura 25: Volta a specchio o a schifo</i>	<i>25</i>
<i>Figura 26: Volta a padiglione</i>	<i>25</i>
<i>Figura 27: Volta a crociera</i>	<i>25</i>
<i>Figura 28: Volta a vela</i>	<i>25</i>
<i>Figura 29: Volta a imbuto o a ventaglio su pianta quadrata. (Breyman, 2003, 12).....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 30: Tiranti metallici per volte e cupole: particolari degli ancoraggi con i capichave e i cunei e particolari dei nodi intermedi realizzati nelle catene formate da due o più elementi. (Misuraca, 1916, in De Cesaris, 1996, 101 [38]).....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 31: Catena metallica posizionata in corrispondenza del concio di chiave, con particolare del capochiave. (Cattaneo L., tav 23, in Manuale della Città di Castello).....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 32: Catena metallica estradossale con braghettoni. (Cattaneo L., tav 25, in Manuale della Città di Castello)</i>	<i>29</i>
<i>Figura 33: Catene estradossali. (Valadier, 1992, tav. CCLXVII)</i>	<i>30</i>
<i>Figura 34: Roma, pianta del Tabularium (78 a.C.) con evidenziata la galleria coperta da volte a padiglione impostate su pianta quadrata. (Scurati Manzoni, 1991, 429).....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 35: Assonometria della sala ottagonale situata all'interno della Domus Aurea (64-68 d.C.). (Scurati Manzoni, 1991, 430)</i>	<i>32</i>
<i>Figura 36: Pianta d'insieme delle Terme di Antonino a Cartagine (145-160 d.C.), in cui gli ambienti su pianta ottagonale erano coperti con volte a padiglione. (Gros P., 1996, 459).....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 37: Sezione delle Terme di Antonino a Cartagine eseguita lungo l'asse di simmetria. Da sinistra a destra si possono individuare la natatio, il frigidarium e il calidarium, coperto con una volta a padiglione. (Gros P., 1996, 459).....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 38: Pianta e sezione della Cappella palatina di Aquisgrana costruita verso la fine VIII secolo. (Bonelli R., Bozzoni C., 1997, 69)</i>	<i>34</i>
<i>Figura 39: Milano, Basilica di Sant'Ambrogio, particolare della volta a padiglione all'intersezione tra il transetto e la navata centrale. (Chierici S., 1978).....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 40: Pavia, Basilica di San Michele, particolare della volta a padiglione all'intersezione tra il transetto e la navata centrale. (Chierici S., 1978).....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 41: Proporzioni tra le dimensioni della stanza e la forma delle volte a padiglione e a conca proposte da V. Scamozzi nel suo trattato "L'idea dell'architettura universale". (Scamozzi V., 323)</i>	<i>37</i>

Figura 42: Assonometria di una volta a padiglione su base quadrata. (Casigliano A., 1882, Tav. I).....	38
Figura 43: Assonometria di una volta a botte con indicate le unghie e i fusi.....	39
Figura 44: Volta a botte con teste di padiglione. (Breymann G.A., 1885, 9).....	40
Figura 45: Volta a specchio o a schifo. (Breymann G.A., 1885, 11).....	40
Figura 46: Schema di una volta a specchio lunettata.....	41
Figura 47: Palazzo Vertemate Franchi a Piuro di Chiavenna (XVI secolo); volta a specchio lunettata (detta anche a peducci) della sala di Giove e Mercurio.....	41
Figura 48: Curve utilizzate per la realizzazione delle centine per una volta a padiglione su pianta quadrata. (Levi C., 1932, 300).....	42
Figura 49: Schema di carpenteria fissa per l'armatura di una volta a padiglione. (De Cesaris F., 1996, 86, da Misuraca et al., 1916).....	43
Figura 50: Volta a padiglione su pianta quadrata e ottagonale, con rappresentazione prospettica dei conci per la chiave e gli spigoli. (Rondelet J. B., 1831, tav. XVIII).....	43
Figura 51: Schema dell'apparecchiatura a filari perpendicolari alle diagonali impiegata per le volte a padiglione.	44
Figura 52: Schema dell'apparecchiatura a filari longitudinali impiegata per le volte a padiglione.....	44
Figura 53: Schema dell'apparecchiatura generalmente usata per le volte a botte con teste di padiglione.....	45
Figura 54: Schema delle apparecchiature impiegate per le volte a specchio.....	46
Figura 55: "nella muratura la forma della struttura resistente dipende dai carichi"; Di Pasquale in [94].....	48
Figura 56: Il contributo di Mascheroni.....	50
Figura 57: La curva delle pressioni (linea blu continua) ed i meccanismi di collasso per un arco.....	51
Figura 58: (a) arco etrusco a conci [Durm, 1885]; (b) l'equilibrio dei conci lapidei in un arco: le forze inclinate sono trasmesse all'interno dell'arco ed alle imposte c'è sempre una spinta con una componente orizzontale (di entità uniforme su tutto lo sviluppo dell'arco) che deve essere opportunamente contrastata.....	52
Figura 59: a sinistra, la curva delle pressioni in un semiarco. La componente di spinta orizzontale in chiave è composta (somma vettoriale) con il peso dei conci successivi pervenendo così a definire un "percorso" di trasmissione delle forze [Snell 1846]. Destra, il corrispondente poligono delle forze.....	53
Figura 60: (a) l'arco è una catena o fune, invertita. (b) Il generico concio dell'arco può essere visto come sospeso ad una catena immaginaria che rappresenta la configurazione di equilibrio. Giacché la muratura deve lavorare a compressione, la catena "invertita" deve essere contenuta all'interno dello spessore dell'arco [182].	54

Figura 61: (a) un arco di spessore sufficiente contiene agevolmente infinite curve delle pressioni (lines of Thrust); inter alia quella qui disegnata. (b) Al diminuire dello spessore si raggiunge un cosiddetto "spessore limite" in corrispondenza del quale può essere disegnata all'interno dell'arco solo una curva delle pressioni. (c) Nei punti in cui la curva delle pressioni è tangente alla superficie di intradosso od estradosso dell'arco, si formano delle cerniere e quindi un meccanismo di collasso.	56
Figura 62: progetto di un arco in muratura. (a) L'arco limite. (b) Progetto per "resistenza"; l'incremento di spessore deve garantire che le tensioni non superino quelle ammissibili. (c) Progetto per "stabilità"; l'incremento di spessore deve essere tale da garantire una "sicurezza geometrica" all'arco.....	57
Figura 63: tavola delle resistenze delle pietre e dei mattoni. Nella seconda colonna dalla destra, il valore limite dell'altezza in metri, calcolato in base ai valori di peso specifico e tensioni ammissibili, pure tabellati, espressi rispettivamente in kg/dm^3 e kg/cm^2 – Collignon 1885 [126] -	59
Figura 64: principali caratteristiche degli algoritmi evolutivi (da [169]); il tipo di algoritmo qui di interesse è quello genetico (GA), con formulazione binaria della generica soluzione (elemento della popolazione).....	76
Figura 65: schema esemplificativo degli operatori di crossover e mutazione.....	78
Figura 66: crossover a 5 punti; gli indici alfanumerici indicano porzioni delle due generiche stringhe A e B, appartenenti alla popolazione delle soluzioni al tempo (t), dalle quali generare soluzioni successive (t+1)	79
Figura 67: schema di funzionamento di un algoritmo genetico	80
Figura 68: Modello FEM della volta a padiglione oggetto di studio.....	86
Figura 69: viste assonometrica, frontale ed in pianta del modello FEM della volta a padiglione oggetto di studio	87
Figura 70: pianta e sezione della volta a padiglione oggetto di studio.....	88
Figura 71: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra).....	90
Figura 72: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta per Peso Proprio	90
Figura 73: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra).....	91
Figura 74: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando agenti carichi permanenti e variabili.	92
Figura 75: Vista in pianta del modello FEM con indicazione dell'area – in grigio – di applicazione dei carichi variabili	93
Figura 76: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra).....	93
Figura 77: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando agenti carichi permanenti e variabili solo su metà della superficie	93

<i>Figura 78: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTS (a destra).....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 79: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando la combinazione di carico LC_{dyn} (carichi permanenti, carichi variabili ed azione sismica)</i>	<i>95</i>
<i>Figura 80: Vista assonometrica del modello FEM della volta rinforzata; le strisce di FRCM sono applicate sulle parti evidenziate in blu</i>	<i>96</i>
<i>Figura 81: vista del modello MTTS</i>	<i>96</i>
<i>Figura 82: viste in pianta del modello FEM MTTS rinforzato con FRCM; mappe degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minime</i>	<i>97</i>

Indice delle tabelle

<i>Tabella 1: sforzi principali in alcune delle più grandi strutture in muratura mai realizzate. In quasi tutti i casi la tensione principale è di almeno un ordine di grandezza minore della tensione di rottura delle corrispondente muratura – Huerta [127] -</i>	<i>60</i>
<i>Tabella 2: illustrazione schematica della metafora su cui si basano gli algoritmi evolutivi.</i>	<i>72</i>
<i>Tabella 3: proprietà fisiche e meccaniche dei materiali</i>	<i>88</i>
<i>Tabella 4: proprietà meccaniche del FRCM</i>	<i>96</i>

Publicazioni

I risultati del lavoro di tesi sono stati presentati ai seguenti congressi nazionali ed internazionali:

F. Fraternali, G. Teodosio, M. De Piano, G. Carpentieri; V.P. Berardi – **Advanced numerical models of masonry vaults** - XXII Congresso AIMETA, Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata – Genova, 14-17 settembre 2015 – Università di Genova.

V.P. Berardi, M. De Piano, G. Teodosio, F. Fraternali – **Innovative modeling of unreinforced and FRP/FRCM strengthened vaults** – MIMS16 Multiscale innovative materials and Structures – Cetara Amalfi coast – october 2016 – Università di Salerno.

V.P. Berardi, M. De Piano, G. Teodosio, F. Fraternali – **Evolutionary strategies for the FRP/FRCM-reinforcement of masonry vaults** – ICCS19 19° International Conference on Composite Structures, 5-8 September 2016, Porto, Portugal

Gli sviluppi più recenti sono stati sintetizzati nella memoria:

V.P. Berardi, M. De Piano, G. Teodosio, R. Penna, L. Feo - **Advanced numerical models for the analysis of unreinforced and strengthened masonry vaults** –

accettata per il convegno

COMPADYN 2017 – 6TH ECCOMAS THEMATIC CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN STRUCTURAL DYNAMICS AND EARTHQUAKE ENGINEERING
M. Papadrakakis, M. Fragiadakis (eds.) - Rhodes Island, Greece, 15–17 June 2017

Giuseppe Teodosio

*Tecnologia, modellazione meccanica
e rinforzo strutturale con materiali innovativi
di strutture curve in muratura*

CAPITOLO 1. PREMESSA

1.1 *Obiettivo della tesi*

Le strutture in muratura costituiscono una porzione rilevante del patrimonio culturale e storico internazionale, con particolare riferimento al territorio italiano.

La conservazione di simili testimonianze del passato richiede un'analisi del competente comportamento meccanico, sotto azioni sia statiche che dinamiche, al fine di poterne caratterizzare la vulnerabilità e dunque di poter valutare l'opportunità di intervenire con opere di consolidamento.

Il tema esaminato ha trovato numerosi approfondimenti in letteratura, attesa la particolare complessità nel modellare in maniera efficace e rigorosa il comportamento non resistente a trazione della muratura, in presenza, in particolare, di geometrie curve.

Gli approcci proposti sono basati tipicamente:

- i) sui "*Thrust line methods*", che ricercano la superficie delle pressioni e le isostatiche di compressione;
- ii) sull'analisi FEM, assumendo legami costitutivi per la muratura di tipo elasto-plastico danneggianti o no-tension;
- iii) su tecniche di omogeneizzazione. L'impiego di detti modelli richiede tuttavia l'implementazione di complessi modelli FEM ed oneri computazionali rilevanti.

Di qui l'opportunità di proporre modellazioni alternative che possano essere facilmente implementabili nei codici FEM esistenti e che richiedano un più ridotto onere computazionale.

Il presente lavoro di tesi si propone di offrire un contributo per l'analisi del comportamento meccanico di strutture esistenti in muratura a geometria curva, nonché fornire uno strumento, di semplice implementazione nei codici FEM esistenti, per la progettazione di rinforzi strutturali di tipo selettivo.

Obiettivo dello studio condotto è stato quello di mettere a punto una procedura numerica per l'analisi di strutture voltate esistenti, operando un'estensione al caso tridimensionale del concetto di curva delle pressioni (*thrust line*); quest'ultimo ordinariamente associato allo studio della statica degli archi.

In tale ottica, la procedura proposta si basa sulla ricerca, per via iterativa, di una superficie contenuta entro un dominio tridimensionale di progetto (coincidente con il volume della volta nel caso di muratura non

rinforzata), che, per assegnati carichi sollecitanti l'elemento murario, garantisca la minimizzazione delle tensioni principali di trazione. Ove detta superficie consenta di pervenire ad un regime tensionale caratterizzato da tensioni di trazione nulle, quest'ultima coinciderà con la superficie delle pressioni (*thrust surface*) (cfr. CAPITOLO 7).

È evidente che alla superficie delle pressioni corrisponde una soluzione staticamente ammissibile e, dunque, invocando il teorema statico dell'analisi limite, è garantita la sicurezza della struttura esaminata (cfr. § 4.3).

L'individuazione di soluzioni equilibrate che contemplino uno "sforamento" della superficie delle pressioni oltre la regione involupata dalla curva di intradosso e da quella di estradosso del solido murario in esame, evidenzerebbero la sussistenza di condizioni prodromiche al collasso dando nel contempo una misura dell'impegno statico a cui far fronte con interventi di rinforzo più o meno estesi, la cui collocazione è ben individuata proprio dalla porzione della superficie delle pressioni esterna al solido murario in studio.

Dal punto di vista operativo, la ricerca della superficie delle pressioni è basata sull'impiego di un algoritmo genetico (*Genetic Algorithm; GA*) (cfr. CAPITOLO 6) accoppiato ad un software FEM commerciale (cfr. CAPITOLO 7), nell'ambito di una modellazione elastico lineare della volta mediante elementi *shell* a comportamento prevalentemente membranale.

Il presente elaborato è strutturato in una parte introduttiva relativa tanto alle tecniche costruttive delle strutture voltate (cfr. CAPITOLO 2 e CAPITOLO 3), quanto alla teoria degli archi e all'applicazione del teorema statico (cfr. CAPITOLO 4) –; segue un compendio dei metodi di calcolo per strutture murarie evidenziandone le caratteristiche peculiari e criticità d'uso (cfr. CAPITOLO 5).

Vengono quindi descritti gli algoritmi evolutivi ed in particolare gli algoritmi genetici (cfr. CAPITOLO 6) per poi concludere illustrando il modello proposto con l'applicazione ad un caso studio di volta a padiglione in varie condizioni di carico (cfr. CAPITOLO 7).

Il lavoro si colloca nella più ampia attività di ricerca teorica, coordinata dal prof. Valentino Paolo Berardi, e svolta presso il Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università degli Studi di Salerno, nell'ambito del Progetto di ricerca RELUIS 2014-2018, finanziato dal Dipartimento della Protezione Civile.

CAPITOLO 2. CARATTERI FORMALI E COSTRUTTIVI DELLE COPERTURE VOLTATE DALL'ANTICHITÀ ALL'ETÀ MODERNA

2.1 Introduzione

Nel corso dei secoli le tecniche costruttive e i materiali impiegati per la realizzazione delle volte sono variati in funzione sia delle capacità tecniche dei costruttori sia del risultato formale che si voleva ottenere. Anche il fattore economico ha contribuito allo sviluppo e all'ideazione di nuove tecniche, ma è soprattutto grazie all'esperienza maturata nel corso dei secoli, alle indicazioni dei trattatisti sul dimensionamento in chiave geometrica e alle prime intuizioni statiche che è stato possibile realizzare strutture ardite e di indiscussa suggestione e bellezza. Capimastri, architetti e ingegneri dei tempi antichi ideavano e realizzavano le strutture avvalendosi dei mezzi a loro disposizione, affidandosi spesso all'intuito, all'esperienza pratica, acquisita per lo più in cantiere e, in alcuni casi, a basi matematiche e a conoscenze di geometria pratica.

È quindi importante conoscere come gli originali costruttori concepivano le loro opere, comprendere le fasi di edificazione delle strutture voltate, i materiali impiegati e le soluzioni più frequentemente adottate nel tentativo di migliorarne la resistenza e questo al fine di acquisire un bagaglio di conoscenze indispensabile per un approccio corretto verso lo studio di volte e cupole e verso la progettazione di interventi di consolidamento efficaci e allo stesso tempo compatibili con le strutture storiche.

Questa indagine può essere svolta innanzitutto attraverso l'analisi della letteratura ufficiale, dalla quale si può dedurre un quadro completo delle conoscenze e delle tecniche costruttive impiegate in età moderna.

In questo capitolo, quindi, dopo un excursus storico indispensabile per l'inquadramento dell'evoluzione formale e tecnica che ha accompagnato la costruzione delle volte, sono state raccolte tutte le informazioni, spesso frammentarie e sintetiche, dedotte dai trattati e dai manuali di architettura, cercando di dar loro una veste organica e cercando di ripercorrere, con particolare attenzione alle soluzioni tecniche tese a migliorare la resistenza della struttura, le fasi di edificazione e i principali indirizzi di carattere formale, legati alle proporzioni e alle forme delle volte.

L'analisi qui sviluppata sotto il profilo tecnico e tecnologico troverà quindi suo naturale complemento e completamento, nella trattazione illustrata nel successivo CAPITOLO 4 riguardante l'evoluzione degli studi sulla meccanica delle strutture voltate.

2.2 Le origini delle strutture voltate

Nonostante le coperture voltate siano state utilizzate in tutte le loro forme e in maniera estensiva nell'architettura romana, tanto da divenirne uno degli elementi caratterizzanti, è necessario ricordare che già in Egitto e in Mesopotamia si possono ritrovare primitivi esempi di archi, volte e cupole risalenti al III millennio a.C.

In realtà tali coperture si rifanno al principio del sistema trilitico: sono infatti costituite da blocchi sovrapposti posati progressivamente con una lieve sporgenza e convergenti nel vertice, il quale risulta chiuso con una lastra o un architrave di modeste dimensioni.

A partire dal II millennio a.C. tali coperture vennero impiegate diffusamente nell'architettura micenea (tholoi) e in altre civiltà del Mediterraneo (per esempio i nuraghi sardi, i "sesi" di Pantelleria, le "navetas" delle Baleari e alcuni tumuli nell'area scitica¹) [21] - Figura 1÷Figura 6 -.

Spesso queste coperture vengono definite con il termine di "pseudovolte" o "pseudocupole", in realtà però possono essere considerate delle vere e proprie volte in quanto ogni concio, seppur disposto orizzontalmente, trasferisce ai conci attigui azioni non solo verticali, come accade nel sistema trilitico, ma anche orizzontali, come mostrato in recenti studi sui nuraghe sardi.

Lo studio effettuato da Mirabella Roberti e Spina mostra anche come il riempimento superiore, che in alcuni casi veniva realizzato in terra, sia di estrema importanza, in questo tipo di strutture, per impedire il ribaltamento dei blocchi [68].

Un'altra particolare tecnica costruttiva diffusa soprattutto in Mesopotamia, in Assiria, in Egitto e successivamente nell'Oriente Bizantino è costituita da volte, in genere a botte, formate da una successione di archi inclinati composti da mattoni disposti a coltello. Attraverso tale tecnica era possibile realizzare volte senza l'ausilio di centine, in quanto il primo arco veniva appoggiato al muro di testa del vano da coprire e ogni arco successivo veniva sorretto dal precedente (Figura 7).

¹ Gli Sciti (in latino: *Scythi*) furono una popolazione nomade di origine iranica, quindi indoeuropea, mitologicamente nata o dall'unione tra Eracle ed Echidna, o tra Zeus ed il fiume Boristene, tra l'VIII ed il VII secolo a.C.



Figura 1: Micene, tesoro di Atreo, veduta del "dromos", XIV secolo a.C. La porta consentiva l'accesso al tholos, ovvero ad una stanza a pianta circolare con una cupola conica.

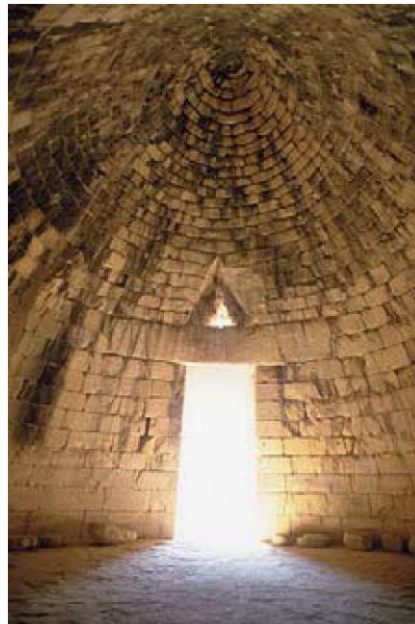


Figura 2: Micene, tesoro di Atreo, veduta dell'interno. La volta è stata ottenuta dalla sporgenza di 33 anelli di blocchi concentrici (diametro: 14,5 m; altezza: 13,2 m).



Figura 3: Micene, tesoro di “Clitennestra”, particolare dell’interno. Secolo XV a.C. (Buti G, 1972, vol XIII, tav. 40)

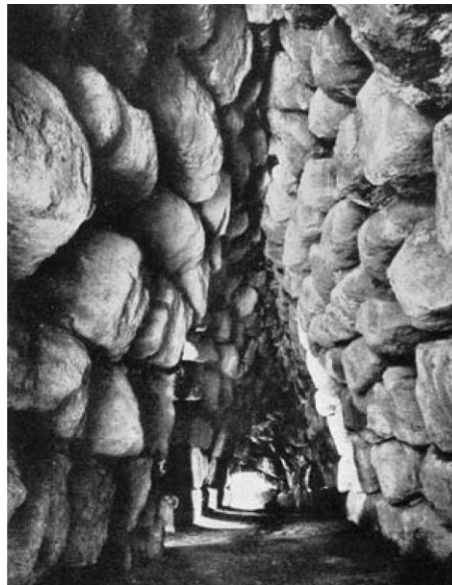


Figura 4: Sant’Antine, Sassari, corridoio del Nuraghe, VIII-IX secolo a.C. (Buti G, 1972, vol. XIII, tav. 38)



Figura 5: Kerč, tumulo Carstij, ingresso del sepolcro, IV secolo a.C. (Buti G, 1972, vol VI, tav. 352)



Figura 6: Kerč, tumulo Carstij, particolare dell'interno, IV secolo a.C. (Buti G, 1972, vol XIII, tav. 40)

Sempre tra le opere degli Assiri e dei Babilonesi si possono individuare i primi esempi di archi a conci radiali, per esempio la porta del palazzo di Sardon II a Dur Sarrukin e la porta di Ishtar a Babilonia[62] - (Figura 8).

Tali archi, che in genere erano posti a copertura delle porte delle città, erano nella maggior parte dei casi archi a tutto sesto ed erano realizzati con conci in mattoni crudi disposti radialmente, ma con i giunti convergenti verso un punto più in alto rispetto al centro di curvatura dell'arco stesso[21].

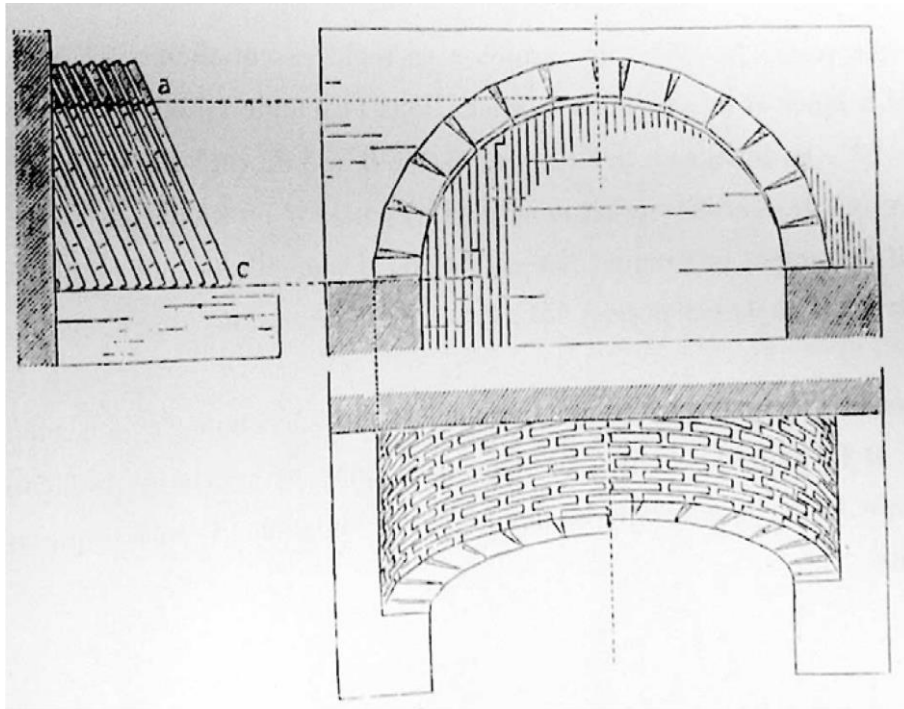


Figura 7: Volta a botte realizzata con filari inclinati. (Choisy A., 1883, 33)



Figura 8: Porta di Ishtar a Babilonia, secolo VII-VI a.C., ricostruzione di Koldewey,

2.3 Lo sviluppo delle tecniche costruttive presso i romani

I romani, pur riprendendo tecniche greche ed etrusche penetrate in Italia, le perfezionarono ed elaborarono al punto da assumerne la completa

padronanza sia per quanto riguarda i materiali impiegati che le modalità realizzative e, sulla base più dell'esperienza maturata in seguito alla grande applicazione delle volte che dell'intuizione statica, mostrarono di aver acquisito la consapevolezza dei problemi legati all'utilizzo delle volte, ossia la necessità di irrigidire la volta e il fatto che questa sia una struttura spingente.

I romani utilizzavano prevalentemente archi a tutto sesto nei quali i mattoni o i conci presentavano giunti tutti convergenti verso il centro di curvatura, andando così a formare opere caratterizzate da una grande regolarità. Inoltre, a partire dal III secolo a.C., le porte delle città vennero costruite con archi perfetti e spesso con mattoni o blocchi di pietra conformati a cuneo per ridurre al minimo gli spessori di malta e per conferire una maggiore robustezza.

I romani utilizzarono raramente archi a sesto ribassato, tuttavia fecero uso di piattabande formate da cunei opportunamente sagomati disposti ad incastro (cfr. Figura 9).

Spesso le piattabande erano sormontate da archi di scarico a tutto sesto, che avevano la funzione di reggere il peso della muratura soprastante, riducendo così il carico gravante sulle piattabande stesse. Gli archi di scarico avevano probabilmente la funzione di andare a sostituire l'arco naturale di scarico che si sarebbe creato nella muratura in seguito al cedimento della piattabanda (Figura 10).

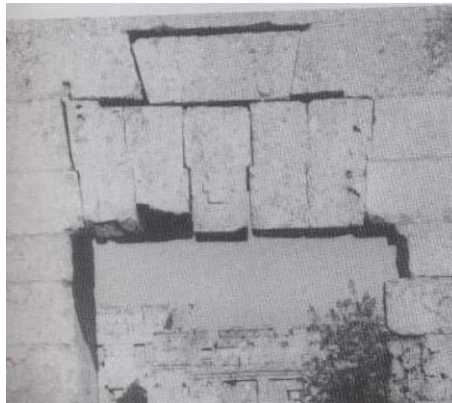


Figura 9: Piattabanda, Kalat Siman. (V secolo d.C.) (Mainstone R., 2001)



Figura 10: Piattabanda con arco di scarico, Larario di Pompei, 60 d.C. circa. (Adam J. P., 1998,188)



Figura 11: Tempio di Giove Anxur databile intorno alla prima metà del I secolo a.C. (Lancaster L.C., 2005, 5)

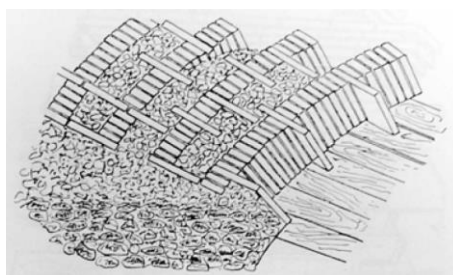


Figura 12: Volta a botte in opus caementicium con nervature in semilateres. (Lugli G., 1957, 667, tratta da Choisy A, L'art de batir)

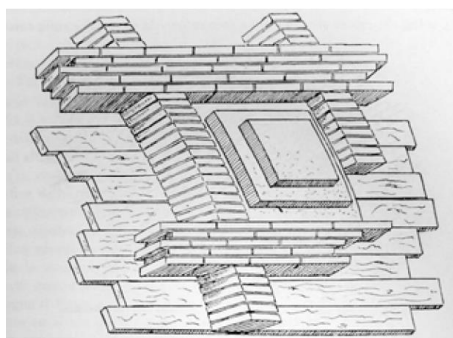


Figura 13: Volta con nervature in cui i vuoti vengono sfruttati per realizzare decorazioni a cassettoni. (Lugli G., 1957, 668, tratta da Choisy A, L'art de batir)

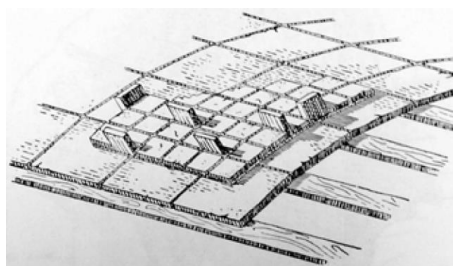


Figura 14: Volta realizzata con un manto di mattoni bessali² sul quale venivano posati altri mattoni di dimensioni minori posti in piano e bessali di coltello che avevano la funzione di creare un'ammorsatura. (Lugli G., 1957, 681, tratta da Choisy A, L'art de batir)

In un primo momento l'architettura romana fece largo uso di archi realizzati con grossi conci di pietra o con mattoni disposti radialmente, inserendo tra questi, all'estradosso, schegge più piccole e malta. Fu con il

² Bessali: laterizi quadrati di due terzi di piede romano di lato, pari a circa 20 cm: venivano utilizzati suddividendoli in due triangoli lungo la diagonale, che restava visibile sulla faccia esterna del paramento (lunghezza poco meno di un piede, 27/26 cm). Interi erano utilizzati come fodera per le volte in cementizio, permettendo l'aderenza del rivestimento ad intonaco con eventuale decorazione a stucco o dipinta.

miglioramento delle tecniche costruttive e soprattutto con l'introduzione di malte pozzolaniche – per loro natura particolarmente resistenti-, miste a inerti di varia pezzatura, che iniziò a diffondersi la tecnica delle volte in *opus caementicium*. Fra i primi esempi di volte in *opus caementicium* si può annoverare il tempio di *Giove Anxur* a Terracina, databile intorno alla prima metà del I secolo a.C. [60] (Figura 11), ma fu nell'età imperiale che questa tecnica, associata a quella a grandi blocchi, si diffuse e si sviluppò in tutto l'impero.

In teoria le volte in *opus caementicium* avrebbero dovuto comportarsi come un monolite, ossia come un unico blocco di pietra che non avrebbe dovuto esercitare spinte orizzontali sui muri di sostegno. Tuttavia queste volte, a causa della limitata resistenza a trazione dell'*opus caementicium*, si fessuravano e tornavano ad agire sulle pareti come se fossero costituite da conci staccati. Fu probabilmente questo il motivo per cui, a partire dal I secolo d.C., i Romani iniziarono a realizzare le volte in *opus caementicium* con nervature meridiane di mattoni *semilateres* che, più avanti, collegarono tra loro con mattoni di bipedali³ disposti ad intervalli regolari [21] (Figura 12).

Il fatto di realizzare volte nervate, infatti, consentiva di frazionare la massa di malta che veniva gettata tra i vuoti lasciati tra le nervature e di assecondare la naturale fessurazione che si sarebbe venuta a creare all'interno della struttura. In alcuni casi venivano sfruttati i vuoti lasciati fra le nervature per realizzare decorazioni a cassettoni (Figura 13).

Nell'età di Domiziano e sotto Traiano, a partire dal II secolo d.C. si diffuse il sistema costituito da un manto di mattoni bessali posti in piano posati sopra la centina tra i quali, in alcuni casi, venivano inseriti altri bessali posti di coltello che avevano la funzione di creare un'ammorsatura. Per volte di piccole dimensioni, spesso il manto di bessali veniva cementato con malta a pronta presa e fungeva direttamente da centina sulla quale venivano poi posati altri mattoni di dimensioni minori (Figura 14).

2.4 Le volte nell'architettura bizantina

Con il trasferimento della capitale da Roma a Bisanzio (330 d.C.) e, poi, con la suddivisione politica in Impero d'Oriente e Impero d'Occidente

³ *Bipedali*: laterizi quadrati di due piedi di lato (59 cm), che potevano essere suddivisi in otto o sedici triangoli, con la faccia a vista lunga nel primo caso 40/39 cm e nel secondo caso 28/26 cm. Erano più comunemente utilizzati interi, come ricorsi per livellare, nell'intero spessore del muro, o come ghiere per gli archi.

(395 d.C.) si aprì un nuovo capitolo nella storia: sorse l'Impero Bizantino, che durò sino al 1453. Con esso si sviluppò anche un nuovo linguaggio figurativo, ricco di influssi ellenistici, della Siria, della Persia e dell'Egitto. L'Italia entrò in contatto con la cultura bizantina quando, nella metà del VI secolo, Ravenna divenne sede dell'esarca (governatore) di Costantinopoli; le forme espressive dell'Oriente arricchirono quindi le tradizioni tardo-imperiali e cristiane della Penisola, dove l'influenza dell'arte bizantina rimase fondamentale fino all'inizio del secolo XIII [58].

Una caratteristica dell'architettura bizantina fu l'ideazione e l'impiego di cupole su piloni liberi. La tipologia di copertura preferita dai bizantini fu infatti la cupola; questa, già impiegata dai romani, aveva però un limite: richiedeva un muro continuo circolare per il suo sostegno. La grande innovazione dei bizantini fu riuscire a impostare cupole, con direttrice circolare, su piante quadrate attraverso l'inserimento dei pennacchi. Questo rese possibile la creazione di spazi aperti, con articolazioni spaziali complesse, grazie alle quali, in seguito anche all'impiego di mosaici colorati, venivano creati suggestivi giochi chiaroscurali. Anche le tecniche costruttive impiegate nell'architettura bizantina rappresentano una novità rispetto al periodo precedente; infatti, le volte non venivano più realizzate in *opus caementicium*, ma interamente in muratura, garantendo così maggiore leggerezza e più elasticità. La complessità degli spazi consentì anche di creare strutture in cui le spinte delle cupole potevano essere contrastate da altre strutture voltate.

L'esempio che più di ogni altro rappresenta l'innovativa svolta sia nello sviluppo formale sia nel sistema statico delle strutture voltate e dei relativi sistemi di sostegno è sicuramente la chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli [63] (532 d.C.), nella quale il sistema costituito dalle semicupole, dai deambulatori coperti con volte a botte e dalle volte a crociera delle navate laterali poste su due piani è stato ideato per contrastare in maniera attiva la spinta dell'enorme cupola centrale (Figura 15 e Figura 16).

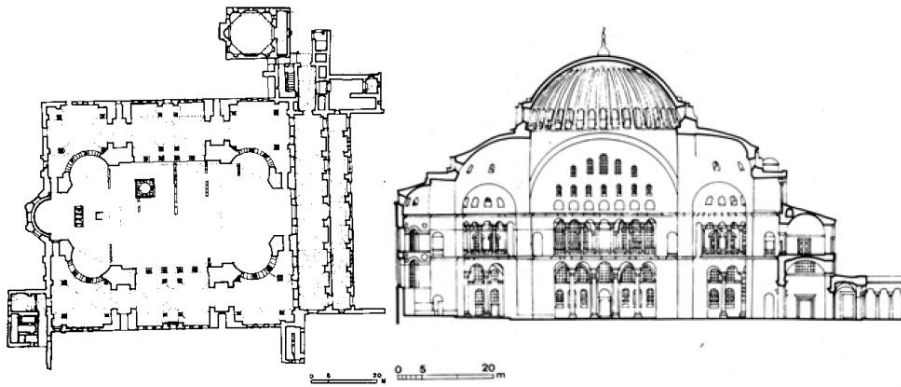


Figura 15: Pianta e sezione della chiesa di Santa Sofia a Istanbul. (Mango, C., 1978)



Figura 16: Particolare delle semicupole poste a contrasto della spinta della cupola centrale nella chiesa di Santa Sofia a Istanbul.

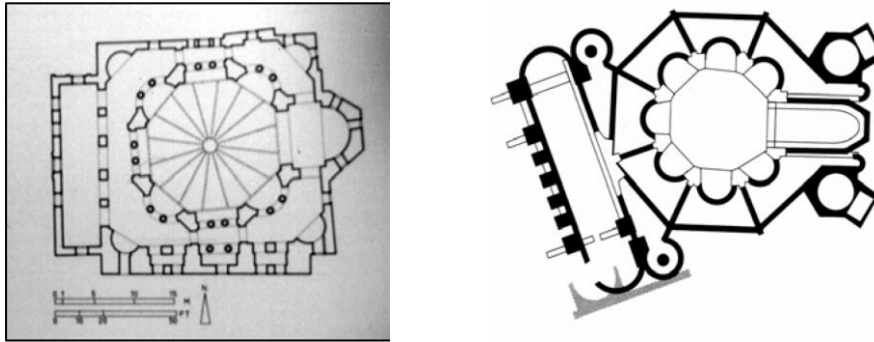


Figura 17: A sinistra: *pianta della chiesa dei Santi Sergio e Bacco a Istanbul (Mango, C., 1978)*; a destra: *pianta della chiesa di San Vitale a Ravenna (Toman R., 1999)*.

Un analogo sistema sviluppato dai bizantini, ma già conosciuto dai romani per gli edifici a pianta poligonale, per contrastare le spinte della cupola centrale e consentire lo sviluppo di spazi aperti e articolati, è stato applicato per esempio nella chiesa dei Santi Sergio e Bacco e poi ripreso in San Vitale a Ravenna (fig. 25). Questa soluzione consiste in una cupola che grava su nicchie con calotta sferica, aperte con un doppio ordine di arcate con colonne, che sono a loro volta sorrette dalle volte dell'ambulacro ottagonale [21].

Infine, un altro espediente utilizzato dai bizantini per contrastare in maniera attiva la spinta della cupola centrale è quello di affiancarle altre cupolette, collegandole con volte a botte o archi a tutto sesto. Questa composizione, tipica degli impianti planimetrici a *quincunx*⁴, si è poi diffuso anche in Italia a partire dall'XI secolo.

2.5 La costruzione delle volte nel periodo Medievale

Il cantiere medievale è, in genere, un cantiere povero, contraddistinto dalla difficoltà di trasporto dei materiali, dalla forte presenza di manodopera poco specializzata, dai tempi dilatati di costruzione. Solo alcune eccezioni, soprattutto costituite dalle grandi fabbriche monastiche e dai principali edifici religiosi e civili, presentano accorgimenti tecnici particolari, indicativi di sofisticati intenti estetici e costruttivi e della presenza di maestranze itineranti e specializzate. Da questo tipo di costruzione è quindi possibile delineare uno sviluppo dell'architettura medievale, in cui il passaggio dalla fase romanica

⁴ La *quincunx* è una pianta che fonde lo schema a croce greca, con bracci di uguale lunghezza, con una base quadrata: si vengono così a creare nove ambienti all'incirca quadrati, di cui quello centrale e i quattro angolari sono coperti con cupola.

al periodo gotico è segnato dall'applicazione di strutture voltate sempre più ardite.

Per quanto riguarda le soluzioni tecniche utilizzate per le coperture voltate delle grandi navate delle basiliche, il principio costruttivo delle volte medievali è molto diverso rispetto a quello impiegato dai romani. Infatti le volte del primo periodo imperiale romano, come già detto, erano un blocco unico, rigidissimo, realizzato in *opus caementicium* con grande capacità legante e con inerti costituiti da materiali leggeri come tufi e pomici. Nell'architettura medievale, invece, i costruttori, pur guardando al repertorio di forme romane, non possedevano i mezzi tecnici per metterle perfettamente in pratica; i loro edifici non offrivano un insieme compatto e i pilastri e i muri, formati da paramenti in pietra con riempimento di malta spesso mediocre, subivano frequentemente assestamenti disuguali che causavano fessurazioni. Le murature a sostegno delle volte e delle cupole non erano tanto solide quanto quelle romane e perciò, a partire dall'XI secolo, le volte iniziarono ad essere realizzate in laterizio o con conci di pietra di dimensioni ridotte affiancati l'un l'altro. La volta diventava così un sistema meno rigido rispetto alle volte romane in *opus caementicium* e in grado di assecondare eventuali movimenti delle murature perimetrali.

Questa prima modifica nella realizzazione delle volte però non era sufficiente a garantire che la struttura non crollasse e quindi, a distanza regolare, in corrispondenza dei punti di appoggio più resistenti, si iniziarono ad inserire degli *arcs-doubleaux* in pietre squadrate, centinati sotto l'intradosso delle volte.

Secondo Viollet le Duc, che, nel suo *Dictionnaire raisonné de l'architecture française* (1875), analizza estensivamente i materiali e le tecniche costruttive medievali e fornisce interessanti interpretazioni statiche sul comportamento delle strutture medievale, gli *arches doubleaux* erano una sorta di centine permanenti elastiche composte da conci che seguivano i movimenti dei piloni e che si prestavano al loro assestamento, al loro divaricamento e sostenevano, come avrebbe fatto una centina in legno, la muratura costruita sopra di esse (Figura 18) [86].

In realtà l'efficacia dei costoloni è stata messa in discussione già qualche anno più tardi da Pol Abraham che, nel suo lavoro *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*, pubblicato nel 1935 [6] contesta l'ipotesi di Viollet le Duc e sostiene che il ruolo strutturale dei costoloni nelle volte medievali sia poco significativo.

Numerosi studi [85] si sono occupati di questo problema, cercando di comprendere, attraverso l'analisi di casi esemplari, il ruolo strutturale delle varie parti delle volte a crociera. Tali studi hanno mostrato le enormi difficoltà legate alla valutazione dell'effettiva efficacia degli elementi strutturali che

costituiscono le volte del periodo medievale, variabili a seconda del periodo storico, delle caratteristiche dei materiali e delle tecniche costruttive impiegate.

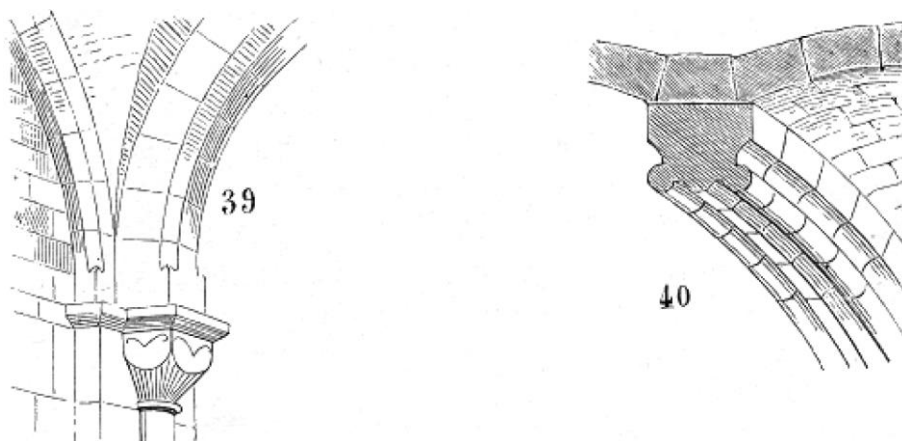


Figura 18: Arcs Doubleaux di una cattedrale del XII secolo. (Viollet le Duc E., 1875)

Ciò che è certo è che le volte a crociera, razionalmente composta da archi di sostegno ogivali, che si intersecano diagonalmente, e da archi perimetrali, due trasversali alla navata e due perpendicolari, scarica il peso non sull'intera muratura perimetrale, ma su punti determinati dei supporti e per questo fu possibile sostituire ai muri finestre o sottili divisori.

Gli architetti gotici cercarono di neutralizzare le spinte con contropinte (per esempio con archi rampanti) o verticalizzando la spinta mediante pesi verticali (pinnacoli), andando così a creare un sistema dinamico, che, seppur in maniera molto più articolata, riprende il sistema di spinte e contropinte già sperimentato dai bizantini.

Il sistema statico elaborato dagli architetti medievali, quindi, si fonda essenzialmente sul concetto di affidare alla struttura portante delle navate laterali il compito di garantire la stabilità della navata maggiore. Le cattedrali gotiche sono perciò caratterizzate da volte a crociera costolonate con archi a sesto acuto, dallo svuotamento della massa muraria e dall'assottigliamento delle strutture, tanto da renderle solo uno scheletro. Le strutture che affiancano la navata centrale si affinano progressivamente e i cambiamenti che coinvolgono la copertura della navata centrale si ripercuotono sulle navate laterali, dove si nota, a partire dal XII secolo, l'introduzione degli archi rampanti, necessari per contrastare la spinta delle volte della navata centrale [69].

Anche dal punto di vista formale, l'architettura medievale introduce alcune innovazioni importanti. A partire dalla fine dell'XI secolo le volte a

crociera iniziarono ad essere costruite non più come intersezione di volte a botte, con archi diagonali ellittici, bensì con archi diagonali ad arco di cerchio, più semplici da realizzare e più stabili in quanto gli archi longitudinali, trasversali e diagonali diventano strutture portanti, messe in risalto da costoloni e membrature. Questo comporta inoltre che le chiavi di incontro delle centine diagonali si trovino ad un livello più alto rispetto agli archi generatori della volta, in questo modo viene svincolata la chiave delle volte a crociera.

L'arco a sesto acuto comincia ad essere utilizzato a partire dal 1120÷1130 nell'Ile de France e, quasi contemporaneamente, si sviluppa anche in Inghilterra [16]. L'introduzione degli archi a sesto acuto come archi trasversali e longitudinali, oltre al vantaggio di tipo statico, porta anche un ulteriore vantaggio formale, in quanto consente di portare la chiave della volta e la chiave degli archi alle quote volute. La pianta non deve più necessariamente essere quadrata, ma può essere anche rettangolare, la chiave può essere alzata e si può superare l'alternanza tra le quote in chiave di archi trasversali, longitudinali e diagonali.

2.6 Sviluppo tecnico e formale a partire dal XV secolo

A partire dal XV secolo, con l'avvio del Rinascimento, nell'architettura vi fu una riscoperta delle forme utilizzate negli edifici romani: le volte a vela, le cupole, le volte a padiglione, per lungo tempo inutilizzate, ritornarono in auge e furono applicate in maniera estensiva, sia nell'architettura religiosa sia in quella civile.

Le tecniche costruttive erano tuttavia definitivamente mutate e le volte venivano realizzate quasi esclusivamente in laterizio o in pietra.

Nel Rinascimento veniva prestata grande attenzione ai collegamenti tra le volte e le murature e i mattoni venivano posizionati secondo apparecchiature differenti a seconda della tipologia di volta e uniti gli uni agli altri mediante l'utilizzo di gesso o di malte di calce con buone caratteristiche meccaniche. Al di sopra della volta veniva poi collocato il materiale di riempimento che poteva essere costituito da pietrisco grossolano o ghiaia e che si opponeva alle deformazioni flessionali della volta stessa, andando tuttavia ad incrementare il carico su di essa. In alternativa venivano utilizzati frenelli o costoloni di rinforzo oppure venivano disposte delle lunette nella regione delle reni: queste aperture avevano il doppio vantaggio di contrastare la flessione nelle volte e ridurre il volume del riempimento e di garantire maggiore illuminazione.

I precedenti tipologici antichi rappresentavano un vasto repertorio di forme e tecniche costruttive a cui ispirarsi e tra il XV e il XVI secolo tali

modelli influenzarono in maniera determinante le scelte formali degli architetti. L'*inventio*, ossia il ritrovamento delle proporzioni nascoste, dà vita ad una nuova architettura e favorisce lo sviluppo di impianti centrici cupolati [90].

La cupola inizia ad assumere un ruolo primario all'interno della concezione degli edifici religiosi e il più celebre esempio di questa nuova tendenza è certamente rappresentato dalla cupola di Santa Maria del Fiore, progettata da Filippo Brunelleschi e realizzata con una tecnica, ideata dallo stesso architetto, in grado di garantire l'autoportanza della cupola stessa in fase costruttiva [13], [45], [46] e [53].

Gli esempi di cupole e volte realizzate a partire dal XV secolo potrebbero essere infiniti, ma ciò che maggiormente può interessare ai fini del presente lavoro è la comprensione delle principali tecniche impiegate per la loro realizzazione, e ciò è reso possibile solo attraverso un'attenta rilettura della trattatistica e della manualistica che si sviluppa a partire dal XV secolo. Per questo, nei capitoli seguenti, verranno presentati i principali orientamenti delineatisi tra il XV e il XIX secolo per la costruzione delle coperture voltate, per il dimensionamento delle parti che le compongono e per la valutazione della loro stabilità.

2.7 Le volte in muratura: “La regola d’arte” nella letteratura tecnica tra il XV e il XIX secolo

Per quanto riguarda il tema delle coperture voltate, l'analisi della trattatistica italiana sembra evidenziare due primi macroscopici problemi: assegnare un'adeguata nomenclatura ai numerosi tipi di volte adottati nella prassi costruttiva, antica e moderna, e stabilire quale sia la curva migliore da assegnare all'intradosso.

Già Leon Battista Alberti (1404-1472), verso la metà del XV secolo, intendendo far maggiore chiarezza sui nomi da assegnare alle volte, nel suo trattato *De re Aedificatoria*, le classifica in volte a botte, volte a crociera, volte sferiche (cupole) e «*altre che sono costituite da una data parte di queste*» [10], ossia le semicupole, le volte a vela e quelle a crociera composte, ossia a creste e vele.

Successivamente, in numerosi altri trattati si ritrova la distinzione tra i vari tipi di volte in base alla forma dell'intradosso, ma vengono considerate anche forme nuove. Francesco di Giorgio Martini 34 (1439-1502) nel terzo volume del suo *Trattato di Architettura Ingegneria e Arte Militare*, cita le volte a vela, con peducci e con lunette, definendole “moderne”, mentre Guarino Guarini (1624 -1683), nel suo trattato *Architettura civile*, servendosi

della geometria descrittiva e della stereotomia⁵, scienze introdotte solo a partire dal XVII secolo, le distingue per la prima volta in semplici e composte, individuando sei forme elementari dalle quali derivano tutte le altre (Figura 19). In particolare egli afferma che dalla volta cilindrica, derivano le volte a crociera e le volte a padiglione, o a conca, e illustra una serie di volte di sua invenzione, come per esempio quelle che nascono dal cono, quelle a fasce o quelle a fasce piane, precisando che tali volte sono state da lui sperimentate con grande successo (Figura 20).

Anche Andrea Palladio (1508-1580) nel primo de *I quattro libri dell'architettura* illustra, attraverso una descrizione molto concisa e una serie di figure, i sei modi per realizzare le volte (Figura 21).

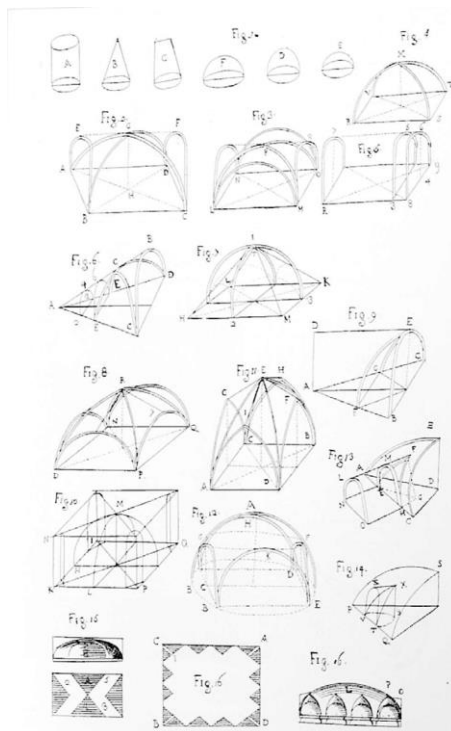


Figura 19: Forme geometriche delle volte. (G.Guarini, 1989, tav. XVII)

⁵ *Stereotomia* (dal greco: *Στερεός* "solido" e *Τομή* "taglio") è l'insieme di conoscenze geometriche e tecniche tradizionali relative alla tracciatura ed al taglio dei blocchi e dei conci in pietra da taglio ed al loro assemblaggio ed impiego in complesse strutture (muro, volta, arco, ecc.) relative a costruzione architettoniche. La stereotomia rappresenta quindi l'alternativa alle tecniche costruttive basate sull'uso di piccoli elementi lapidei o di laterizi che vanno a comporre volte e strutture dalla complessa geometria grazie alle piccole dimensioni ed ai giunti.

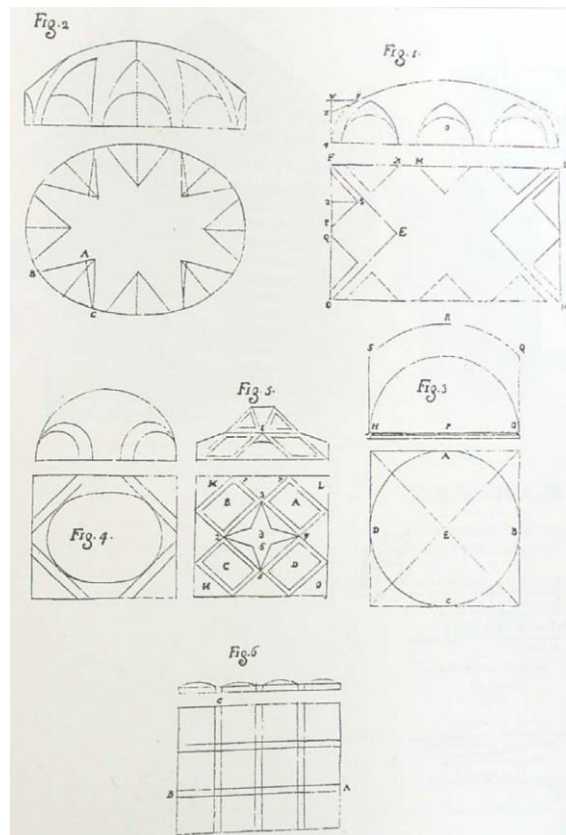


Figura 20: Esempi di volte a fasce, a fasce piane e piane. (G.Guarini, 1989, tav. XVII)

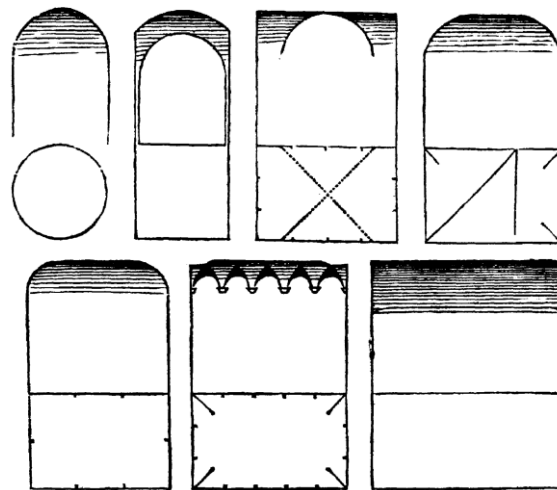


Figura 21: Le sei tipologie di volte proposte da Palladio. (Palladio A., 1980, 73)

L'architetto spiega inoltre che le cupole, le volte a crociera, a fascia, a rimanato sono sempre state usate anche dagli antichi, mentre quelle a lunette e a conca «sono stata ritrovate dai moderni» [70].

La terminologia utilizzata dal Palladio è alquanto ricca di riferimenti linguistici e dialettali veneti, ma osservando le immagini che riporta nel testo (Figura 21) e sfruttando le note al capitolo XIV del Libro III, si può dedurre che l'autore chiama a fascia le volte a botte, a rimanato le volte costituite da porzioni di semicerchio, a conca le volte a botte con teste di padiglione, a lunette le volte a conca lunettate ed infine rotonde le cupole.

A partire poi dal XVIII secolo, le volte iniziano ad essere distinte in base al sesto della loro direttrice o alla forma della generatrice⁶. Francesco Milizia (1725-1798) per esempio specifica che le volte a botte possono essere a pieno centro o a tutto sesto, rialzate o sceme, oppure, in funzione della curva direttrice, rette, rampanti, anulari o a spirale.

Ovviamente la scelta della forma dipende dalla geometria dell'area da coprire, dalla forma degli appoggi e dalla freccia massima di cui si può o si vuole disporre[26]. La forma più comune per le piante da coprire è quella quadrata o rettangolare, alle quali ben si adattano le volte a botte, a botte lunettate, a botte con teste di padiglione, a schifo, a padiglione, a crociera, a vela (Figura 22÷Figura 28). Queste sono ovviamente le più diffuse, citate dalla maggior parte dei trattatisti, tuttavia ne esistono svariati tipi. Il Breyman (1845-1925) descrive per esempio anche le volte a imbuto (anche dette a ventaglio) su pianta quadrata e avente per direttrice un arco a tutto sesto (Figura 28) e la volta ad imbuto su pianta rettangolare, avente per direttrice un arco a sesto acuto (Figura 29).

Per quanto riguarda il sesto delle volte, l'arco a tutto sesto, anche in omaggio all'architettura antica, viene generalmente indicato come il più solido e come un arco che non necessita di incatenamenti, tuttavia, dal punto di vista estetico, vengono preferite le volte con una freccia inferiore alla semiluce, nonostante queste abbiano bisogno di catene metalliche assicurate nei due lati del muro [10]. Le volte policentriche, inoltre, vengono preferite a quelle a sesto ribassato.

Nel XVIII secolo, per le volte realizzate a copertura degli ambienti, la freccia è legata all'altezza degli ambienti stessi, infatti Milizia scrive: «i soffitti a volta sono più dispendiosi de' piani, ma sono anche più belli, e questi sono promiscuamente impiegati nelle grandi, e nelle piccole camere, ed occupano fino da 1/5 fino a 1/3 dell'altezza della camera, secondo essa è più, o meno alta. Se la camera è bassa relativamente alla sua larghezza, la volta

⁶ La generatrice è una linea che si sposta nello spazio parallelamente a se stessa e che, appoggiandosi sulla curva direttrice, genera la superficie di intradosso della volta.

deve parimenti esser bassa; e quando quella è alta, anche la volta deve esserlo: in questa guisa l'eccesso dell'altezza si va a render meno percettibile. Ma dove l'architetto ha la libertà di proporzionare l'altezza della camera alle sue dimensioni superficiali, la proporzione più eligibile per la volta è 1/4 dell'intera altezza. Nelle camere parallelogramme il mezzo del soffitto è generalmente formato di un gran riquadro piano, o dipinto, o adorno di compartimenti, o di altri ornamenti, secondo la decorazione è ricca, o semplice. Questo riquadro, col suo bordo che lo circonda, occupa dalla 1/2 fino ai 3/5 della larghezza della camera. La figura della volta è generalmente un quadrante di circolo, o di una ellissi, che per essere ben veduta dall'estremità del luogo deve nascer un poco sopra la cornice, e finire al bordo, che circonda il gran riquadro nel centro» [67].

Nel XIX secolo sembra essere ormai chiaro che la freccia delle volte non è solo una questione proporzionale, ma è legata anche alla stabilità della volta stessa e infatti Luigi Cattaneo, nella sua *Arte muratoria* (1889), afferma che «la freccia delle volte, quando non dipende dalla forma, è preferibile intera come quella che, a eguale apertura, produce minor spinta. Nelle case d'abitazione ove si deve render minima l'altezza dei piani, si ricorre alle volte sceme. La resistenza alla spinta essendo maggiore nei muri inferiori, sovraccaricati dai superiori, si suole variare la monta delle volte dai piani inferiori ai superiori. Ritenuto 1/12 il limite minimo del rapporto fra saetta e corda, si vuole adottare pel piano terreno questo rapporto fra 1/10 e 1/11, pel primo piano fra 1/9 e 1/10, pel secondo piano fra 1/8 e 1/9, pel terzo piano fra 1/7 e 1/8: nei sotterranei sarà preferibile la volta a tutto sesto, o non al di sotto del rapporto di 1/5» [27].

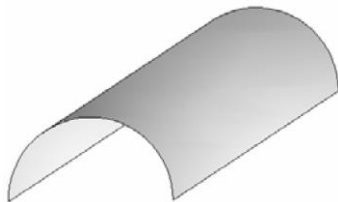


Figura 22: Volta a botte

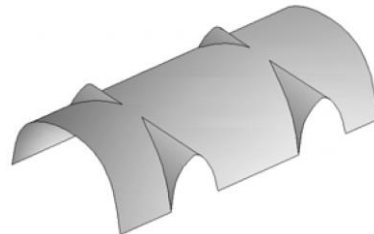


Figura 23: Volta a botte con lunette

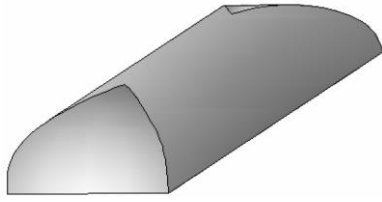


Figura 24: Volta a botte con testedi padiglione

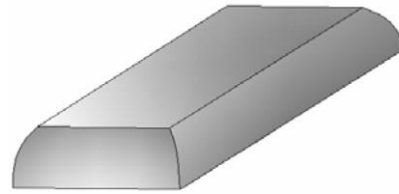


Figura 25: Volta a specchio o a schifo

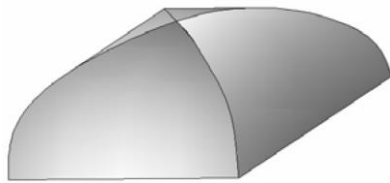


Figura 26: Volta a padiglione

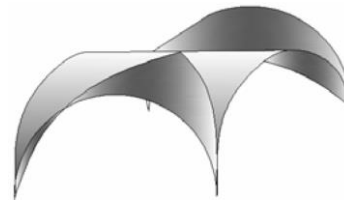


Figura 27: Volta a crociera

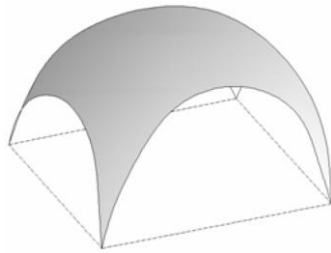


Figura 28: Volta a vela

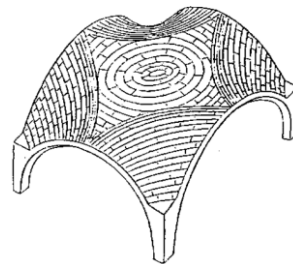


Figura 29: Volta a imbuto o a ventaglio su pianta quadrata. (Breyman, 2003, 12)

2.8 Accorgimenti per il miglioramento della resistenza

Terminata la costruzione della volta e tolta la centina, era consuetudine riempire le reni con rottami murati con malta di calce o in gesso ed eventualmente collocare tiranti in ferro per contenere la spinta della volta. Molto spesso sopra la volta doveva essere realizzato un piano di calpestio e ciò comportava la necessità di creare un piano orizzontale. L'estradosso della volta veniva perciò riempito con materiali di risulta disponibili in cantiere, fra cui calcinacci, sassi e pezzi di mattone. Questo tipo di riempimento poteva però generare un eccessivo aumento di peso sulla volta e quindi influire negativamente sul comportamento della struttura voltata causando eccessive spinte all'imposta. Tuttavia, come noto, il riempimento, pur aumentando il carico verticale sulla volta, consente di limitare lo sviluppo di sforzi

flessionali; in molti trattati, infatti, fin dalla metà del XV secolo, viene consigliato, per le volte in mattoni, l'uso di riempimenti leggeri, che da un lato consentono di sgravare la volta dall'eccessivo carico verticale causato dal materiale incoerente e dall'altro permettono di irrigidire la struttura.

L'Alberti, per esempio, afferma che è buona norma che il completamento delle volte sia fatto in pietra leggerissima, per evitare che le pareti vengano danneggiate da un eccesso di peso; ancora nel XIX secolo, Valadier consiglia di terminare la «*loro grossezza, e rinfianchi con tubi, con olle, e vettine disposte al centro ben murate fra loro, ma lasciando sempre un vacuo vuoto, per ottenere la ricercata leggerezza sempre a vantaggio de' muri*» [84].

Una soluzione per limitare la flessione nelle volte e creare un piano orizzontale garantendo comunque un'adeguata leggerezza, trascurata nella manualistica italiana nel XIX secolo e descritta per la prima volta da Rondelet, anche se probabilmente diffusa nella pratica costruttiva, consiste nella posa in opera di muretti di laterizio, chiamati frenelli, sugli estradossi delle volte. Rondelet descrive questi muriccioli come una sorta di nervatura estradossata, che a volte si portava fino al livello del piano orizzontale superiore e che, all'occasione, poteva sostenere il solaio realizzato superiormente lasciando delle cavità interne. I frenelli erano in grado di assicurare l'aumento della stabilità della volta senza però appesantirla troppo, in quanto andavano a costituire dei diaframmi murari estradossali che irrigidivano la struttura limitandone gli effetti flessionali.

Nella pratica costruttiva la flessione delle volte veniva limitata anche attraverso la realizzazione di costoloni e nervature, anche se la trattatistica e la manualistica d'architettura non fa nessun riferimento a questo tipo di espediente strutturale.

Come si è detto, essendo le volte strutture spingenti, in alcuni casi necessitavano anche di elementi in grado di assorbire la spinta orizzontale e quindi di assicurare la stabilità della spalla. Quando possibile, la stabilità della struttura era affidata ai piedritti stessi, che dovevano avere una sezione sufficientemente ampia. Tuttavia spesso le spalle erano troppo sottili e non erano in grado da soli di reggere il carico orizzontale delle volte; perciò, soprattutto a partire dal XIII-XIV secolo, archi, volte e cupole iniziarono ad essere realizzati inserendo, direttamente in fase costruttiva, elementi di rinforzo lignei o metallici, detti "catene", in grado di contrastare la spinta della struttura voltata, in particolare nel caso di sestri ribassati e murature con sezioni non sufficienti.

Molti architetti, tra cui l'Alberti, Francesco di Giorgio Martini, Serlio, fino a Valadier, ne consigliavano l'impiego durante la costruzione. L'Alberti afferma infatti che le volte a sesto ribassato avevano bisogno «*di catene*

metalliche assicurate nei due lati del muro» [10] mentre Pellegrino Tibaldi (1527-1596), nel trattato l'Architettura, afferma che «a tutti li modi che si facci la volta, convien porvi al dritto de' pilastri o colonne delle facciate le grosse chiavi di ferro intertenuto, che per il proprio peso non posi cadere, con dete chiave di fero che vada alle volte del circolo della volta; e tale chiave di fero scuro è vive e vesibile, et anco morte, che non si vedono».

In molti casi, infatti, al posto delle catene intradossali, dette chiavi “vive”, che rimanevano a vista, per questioni estetiche e per non denunciare la presenza di presidi estranei all'opera muraria, venivano preferite catene non visibili, dette estradossali o chiavi “morte”, annegate nell'apparecchio murario della volta [51] e quindi poste *«infra la grossezza d'essa volta e il pavimento, acciò che nascose e non apparenti sieno» [44].*

L'efficacia delle catene era però messa in discussione da alcuni trattatisti (Cornaro, Vignola, Gallacini) che ne denunciavano la perdita di efficacia nel tempo. Teofilo Gallacini (1564-1641) infatti, nel suo Trattato sopra gli errori degli architetti, afferma che *«avendo a far le fabbriche con volta, non si facciano i fianchi troppo deboli, e specialmente quando si hanno a fare le volte piane, che per cagione del poco sesto, e del molto peso, hanno forza di spinger le muraglie in maniera, che non bastano le catene di ferro a tenerle imbrigliate, e strette in loro stesse, affinché non precipitino, e massime se non vi è chi le fiancheggi. Ma contro la violenza loro non si può fare altra resistenza, che colla grossezza della muraglia; mentre è grandissimo errore il fidarsi nelle catene, che spesse volte si son vedute rotte» [50]*

Nonostante le discussioni sull'efficacia e l'estetica delle catene lignee o metalliche, a partire dal XV secolo, l'inserimento di questi presidi strutturali diventò una prassi costruttiva diffusa e consolidata. Le catene lignee, generalmente di rovere o di larice, venivano ancorate con zanche metalliche al capochiave in ferro inserito nella muratura. I tiranti lignei ricorrono con grande frequenza, tanto da non essere a volte nemmeno citati all'interno dei documenti di cantiere perché la loro messa in opera era ormai una consuetudine consolidata e il loro prezzo incluso in quello del muro [42].

In presenza di muri particolarmente sottili le catene lignee venivano sostituite con quelle metalliche [51]. Approfittando anche del costante miglioramento della qualità di ferro prodotta, le catene più comunemente usate erano quindi formate da tiranti in ferro con sezione rettangolare variabile da mm 40×8 a mm 60×12 [61], con un occhiello alle estremità che andava a formare la testa della chiave. Le catene venivano poste orizzontalmente a circa 1/3 della freccia (catene intradossali) e venivano bloccate con una barra in ferro, detto capochiave, paletto o bolzone, inserito all'interno dell'occhiello, che serviva sia per distribuire lo sforzo sulla

muratura perimetrale, sia per mettere in trazione la catena. Le catene e i paletti erano ottenuti mediante battitura a caldo e, in virtù di tale lavorazione, possedevano una buona resistenza all'ossidazione. I paletti presentavano a volte un profilo cuneiforme, in modo tale da impedirne lo scivolamento e da mettere in trazione la catena in seguito alla sua infissione nell'occhiello, oppure potevano avere sezione rettangolare e venire associati a cunei (o zeppe metalliche) battuti all'interno dell'occhiello prima del disarmo della volta [51] (Figura 31).

La catena doveva essere preventivamente tesata, in quanto solo in questo modo avrebbe potuto esercitare una spinta attiva sulla muratura fin dall'inizio. Una catena non pretesa sarebbe entrata in funzione, e quindi sarebbe stata in grado di assorbire la spinta, solo dopo la deformazione della struttura; in questo modo tale presidio sarebbe risultato utile solo nel caso di un eventuale collasso, ma non avrebbe consentito di limitare le deformazioni della struttura.

Per ottenere quindi un'adeguata tesatura nella catena, la barra orizzontale veniva riscaldata, provocandone quindi un allungamento. A questo punto venivano battuti i cunei nell'occhiello e, in seguito al raffreddamento e al conseguente ritiro della barra metallica, il tirante era in grado di esercitare un'azione orizzontale, sui piedritti e sulla volta, contraria alla spinta della volta stessa.

Poiché i cedimenti viscosi che potevano nascere sia nella muratura sia nel ferro, potevano portare col tempo ad una riduzione della tensione nella catena, poteva rendersi necessario ripetere l'operazione di tesatura ribattendo il paletto. Il paletto, quindi veniva preferibilmente posto all'esterno della muratura o, se nascosto per motivi estetici, veniva incorporato nel muro ricavando apposite sedi, che venivano poi ricoperte dall'intonaco.

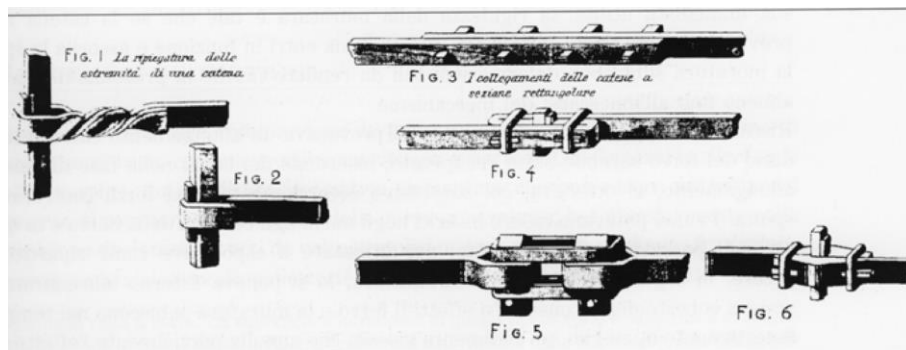


Figura 30: Tiranti metallici per volte e cupole: particolari degli ancoraggi con i capichiave e i cunei e particolari dei nodi intermedi realizzati nelle catene formate da due o più elementi. (Misuraca, 1916, in De Cesaris, 1996, 101 [38])

I paletti all'esterno dell'edificio, apparivano spesso inclinati di 45°; ciò perché in corrispondenza degli spigoli interni, tale posizione consentiva di esercitare il migliore contrasto contemporaneamente sulla volta e sul muro perpendicolare alla facciata. Spesso, come già accennato, le catene potevano essere collocate, sempre per motivi estetici, in corrispondenza della chiave della volta (Figura 31). Tali catene, che prendevano il nome di catene estradossali o catene morte, venivano spesso utilizzate perché non visibili all'intradosso, tuttavia risultavano meno efficaci rispetto a quelle intradossali, in quanto non erano posizionate nel punto in cui agiva effettivamente la spinta dell'arco o della volta, ma leggermente più in alto. Era quindi necessario inserire dei "braghettoni", ossia degli elementi metallici inclinati che, partendo da circa un terzo della catena, si estendevano fino all'imposta della volta [51] (Figura 32). Il capochiave veniva allora allungato fino al piano d'imposta e inserito anche nell'occhiello del braghettone, al fine di diffondere l'effetto della catena anche alla zona delle reni. Ciononostante, spesso le catene estradossali non erano sufficienti, come si può vedere nell'immagine tratta dal Valadier [84] (Figura 33), infatti le catene a braga, seppur più affidabili delle catene morte semplici, non erano in grado di assicurare da sole il contenimento della spinta delle volte.

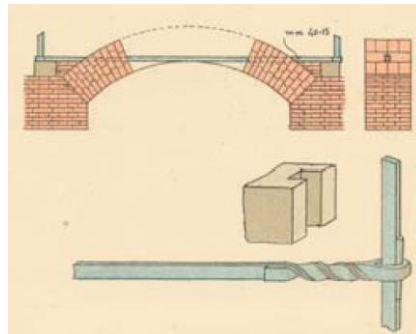


Figura 31: Catena metallica posizionata in corrispondenza del concio di chiave, con particolare del capochiave. (Cattaneo L., tav 23, in *Manuale della Città di Castello*)

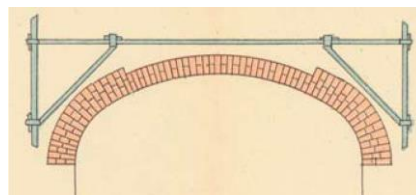


Figura 32: Catena metallica estradossale con braghettoni. (Cattaneo L., tav 25, in *Manuale della Città di Castello*)

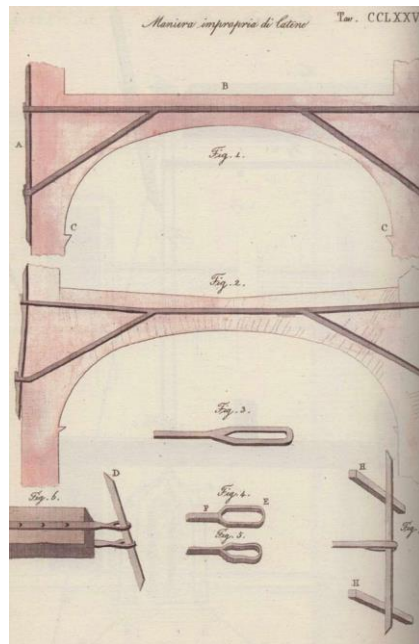


Figura 33: Catene estradossali. (Valadier, 1992, tav. CCLXXVII)

CAPITOLO 3. LE VOLTE A PADIGLIONE

3.1 *Introduzione*

Le volte a padiglione in muratura, seppur impiegate in maniera estensiva già a partire dal XVI secolo come copertura per gli ambienti dell'edilizia più rappresentativa, non sono mai state studiate in maniera approfondita, probabilmente per le evidenti difficoltà incontrate nell'applicare teorie semplificate a questo tipo di volta complessa.

Le volte a padiglione, come tutte le volte, esercitano spinte all'imposta che spesso, soprattutto nel caso di volte di grandi dimensioni con esigui carichi verticali sui piedritti, come per esempio le volte poste ai piani superiori dei palazzi, risultano troppo elevate e causano l'allontanamento dei muri perimetrali. Oltre al problema legato alla spinta all'imposta, le volte a padiglione presentano spesso lesioni importanti lungo le diagonali.

Gli studi sulle coperture voltate si limitano nella maggior parte dei casi a schematizzazioni ad archi non interagenti, nelle quali vengono completamente trascurati gli effetti tridimensionali. Queste approssimazioni, accettabili per alcuni tipi di volte, quali le volte a botte o le cupole, risultano invece troppo superficiali per cogliere il comportamento reale delle volte a padiglione, nelle quali le interazioni fra gli archi sono di fondamentale importanza per la determinazione dello stato di sollecitazione a cui sono sottoposte e per la valutazione della spinta che esse esercitano sui muri perimetrali.

La letteratura scientifica, finora, non è stata in grado di proporre validi modelli che permettano di simulare il comportamento strutturale delle volte a padiglione; questo è probabilmente dovuto ad una scarsa conoscenza dei complessi meccanismi statici che si generano al loro interno e alla mancanza di una teoria semplice e allo stesso tempo rigorosa in grado di cogliere il reale stato di sollecitazione prima e dopo la fessurazione.

Proprio tale complessità ha suggerito di applicare il metodo di calcolo presentato in questo lavoro proprio ad una volta a padiglione – cfr. § CAPITOLO 7 –.

3.2 *Inquadramento storico*

Le volte a padiglione furono impiegate nell'architettura romana già a partire dal I secolo a.C.: si possono infatti ritrovare i primi esempi nel

Tabularium (78 a.C.) e nel tempio di Ercole a Tivoli (80-85 a.C), per giungere a quelli più maturi nella Sala Ottagona all'interno della Domus Aurea (64-68 d.C.), nella Domus Augustana (81-92 d.C.), nella villa Adriana a Tivoli (117 d.C.), nelle terme di Antonino a Cartagine (145-160 d.C) e in quelle di Diocleziano (298-306 d.C.).

Del Tabularium (Figura 34) oggi rimane solo la galleria inferiore aperta verso il foro e coperta da una serie di volte a padiglione impostate su pianta quadrata; un'analoga situazione la si può ritrovare nel Santuario di Ercole a Tivoli.

Nella sala Ottagona della Domus Aurea, la cupola, che copre il vano ottagonale, nasce come una volta a padiglione per poi trasformarsi, nella parte alta, in una cupola sferica vera e propria (Figura 35).

Nelle terme invece la volta a padiglione ricopriva generalmente le sale termali, impostate su sei o otto lati (Figura 36 e Figura 37).

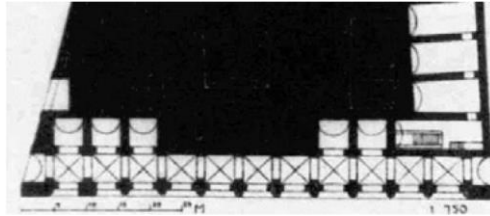


Figura 34: Roma, pianta del Tabularium (78 a.C.) con evidenziata la galleria coperta da volte a padiglione impostate su pianta quadrata. (Scurati Manzoni, 1991, 429)

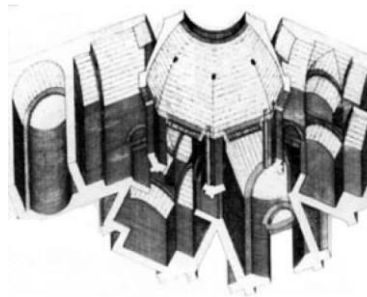


Figura 35: Assonometria della sala ottagonale situata all'interno della Domus Aurea (64-68 d.C.). (Scurati Manzoni, 1991, 430)

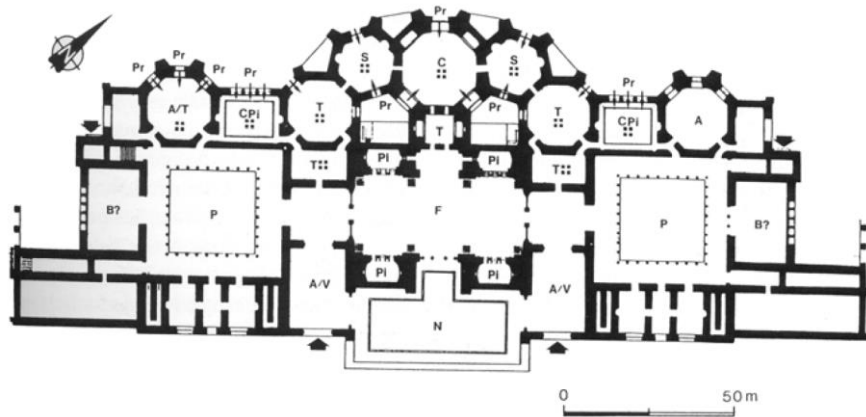


Figura 36: Pianta d'insieme delle Terme di Antonino a Cartagine (145-160 d.C.), in cui gli ambienti su pianta ottagonale erano coperti con volte a padiglione. (Gros P., 1996, 459)

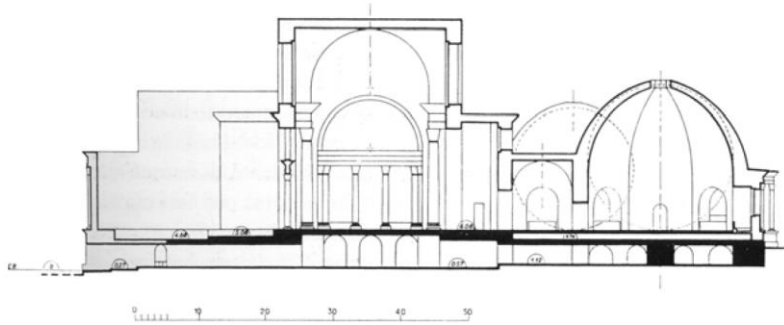


Figura 37: Sezione delle Terme di Antonino a Cartagine eseguita lungo l'asse di simmetria. Da sinistra a destra si possono individuare la natatio, il frigidarium e il calidarium, coperto con una volta a padiglione. (Gros P., 1996, 459)

Come già ampiamente discusso nella prima parte di questo lavoro, il vasto repertorio di forme romane non venne riproposto nella sua interezza nei secoli successivi a causa dei sostanziali cambiamenti dei materiali impiegati e delle tecniche costruttive. Nonostante questo le volte a padiglione, particolarmente indicate per la copertura di vani poligonali, continuarono ad essere utilizzate in particolare nelle cappelle degli edifici religiosi e nei battisteri; tra i numerosi esempi si possono ricordare la cappella di Sant'Aquilino a Milano, risalente ai primi anni del V secolo d.C., il battistero degli Ariani a Ravenna, realizzato nel VI secolo d.C. e la cappella Palatina di Aquisgrana, costruita alla fine dell'VIII secolo (Figura 38).

Anche nei secoli successivi la volta a padiglione trovò vasta applicazione all'interno degli edifici religiosi: tra il X e il XII si diffuse infatti l'impiego, nell'intersezione tra il transetto e la navata centrale, di una volta a

padiglione su pianta ottagonale, coperta da tiburio. Questa soluzione può essere ritrovata per esempio nella chiesa di Sant’Ambrogio a Milano (Figura 39) e in quella di San Michele a Pavia (Figura 40).

Fu però a partire dal XVI secolo che la volta a padiglione e tutte le sue varianti iniziarono ad essere estensivamente utilizzate nell’architettura residenziale per la copertura delle sale dei palazzi, grazie soprattutto alla loro capacità di trasferire completamente il carico sui muri d’ambito, risolvendo così in maniera esemplare il rapporto con le pareti che risultavano tutte d’imposta.

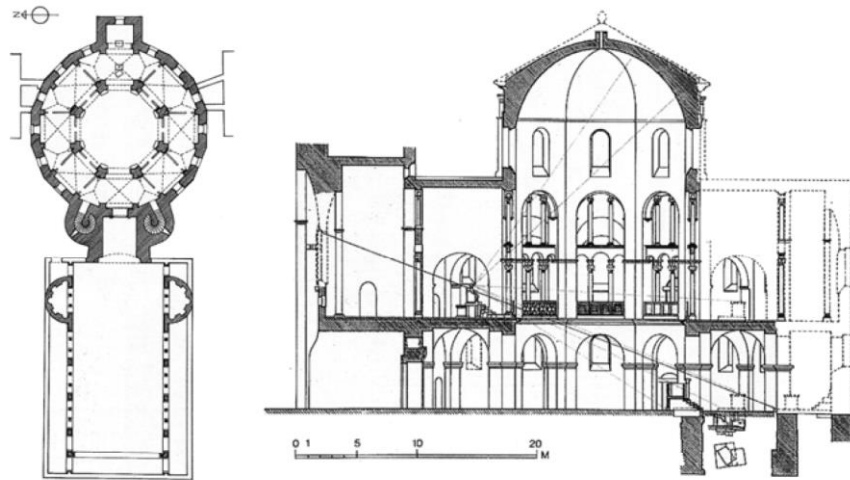


Figura 38: Pianta e sezione della Cappella palatina di Aquisgrana costruita verso la fine VIII secolo. (Bonelli R., Bozzoni C., 1997, 69)



Figura 39: Milano, Basilica di Sant'Ambrogio, particolare della volta a padiglione all'intersezione tra il transetto e la navata centrale. (Chierici S., 1978)



Figura 40: Pavia, Basilica di San Michele, particolare della volta a padiglione all'intersezione tra il transetto e la navata centrale. (Chierici S., 1978)

Nonostante la grande diffusione delle volte a padiglione, nei trattati di architettura tra il XVI e il XIX secolo, le informazioni riguardanti questo tipo di copertura voltata si limitano spesso all'assegnazione di un nome per la loro identificazione o alla semplice descrizione geometrica.

E' il caso di Vitruvio che, nel Libro VII de I dieci libri dell'architettura, accenna solamente ad una variante della volta a padiglione,

puntando invece l'attenzione su aspetti più generali quali ad esempio la realizzazione delle centine in legno, l'intonacatura dell'intradosso delle volte e la realizzazioni di cornici decorative.

Anche Leon Battista Alberti nel *De re Aedificatoria*, pur dedicando ampio spazio alle coperture voltate, si limita a citare le volte a padiglione, chiamandole "a carena" e specificando che si tratta di volte composte costituite da porzioni di volte a botte.

Il primo a illustrare, attraverso una descrizione molto concisa e una serie di figure, i sei modi per realizzare le volte, la cui tipologia va ovviamente scelta in base alla forma della stanza che deve essere coperta, fu Palladio. Egli, nel suo trattato I quattro libri dell'architettura (1570), spiega che le volte a botte con teste di padiglione, dette a conca, «sono stata ritrovate dai moderni» ed è forse questo il motivo per cui gli autori a lui precedenti si sono limitati a citarne il nome nei loro scritti. Palladio, inoltre, riferendosi ai rapporti proporzionali delle stanze, precisa che le volte a conca dovrebbero avere una freccia pari ad un terzo della larghezza della stanza.

Vincenzo Scamozzi, nel trattato *Idea dell'architettura universale* (1615), riprendendo l'importante discorso della proporzionalità fra le dimensioni delle stanze e le volte di copertura, osserva che in passato la volta a conca si usava soprattutto nelle abitazioni private e che veniva impostata su «quadri perfetti, e in quelli d'un quadro e mezzo e anco de duoi quadri» (Figura 41). Nella prima parte del suo trattato lo Scamozzi, come aveva già fatto in precedenza Palladio, illustra, inoltre, molto brevemente e con disegni i sei modi per realizzare le volte, ma nel capitolo XIX del Libro III inserisce un'importante novità, indicando per la prima volta, tra i sei tipi di volte con i quali possono essere coperte le stanze, la volta "a padiglione, ovvero a più facce".

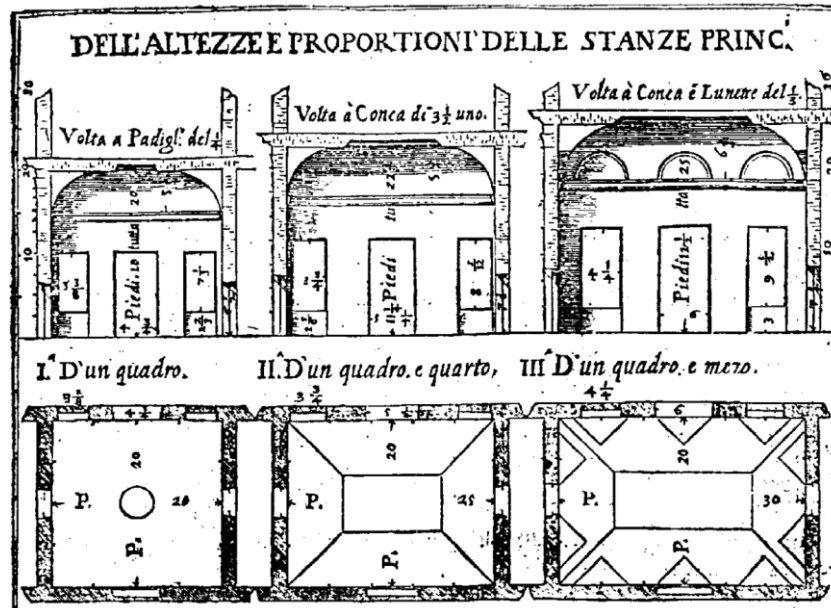


Figura 41: Proporzioni tra le dimensioni della stanza e la forma delle volte a padiglione e a conca proposte da V. Scamozzi nel suo trattato "L'idea dell'architettura universale". (Scamozzi V., 323)

Secondo Scamozzi, le volte a padiglione migliori sono quelle la cui curvatura è pari a un «mezzo cerchio perfetto», e questo non solo per la bellezza che tale curvatura conferisce alla volta, ma anche perché in tal modo risultano più facili da realizzare, continuando comunque ad offrire una sicurezza superiore a quella delle altre volte a padiglione con curvatura diversa. Lo Scamozzi inoltre cerca di illustrare le volte a padiglione utilizzando degli esempi esistenti, ricordando, oltre alle già citate Terme di Diocleziano e la Villa Adriana a Tivoli, la volta a padiglione di «sette faccie alle Galuccie di larghezza di 70 piedi de' nostri; la quale ha solo i spigoli murati de tegoloni di terra cotta, e la faccie sono rimurate de Tuffi, e Cementi; i quali in gran parte sono caduti, e tuttavia la Volta si mantiene».

Lo stesso esempio è ricordato anche da Giuseppe Valadier nel suo trattato L'architettura pratica: la volta delle Galuccie infatti è considerata, con quella del Pantheon, la più grande volta di mattoni che gli antichi furono in grado di costruire.

Nel Trattato di architettura civile, Guarino Guarini afferma che le volte sono la componente più importante di un edificio e, passando in rassegna le varie tipologie di volte, illustra dettagliatamente la geometria di quella a padiglione, specificando che si ricava partendo da un semi cilindro "tagliato per diagonale". Guarini inoltre precisa che la pianta su cui si imposta

la volta a padiglione può essere la più svariata: dalla quadrata si può infatti passare a quella triangolare, esagonale, pentagonale o ottagonale, e l'unica differenza che si riscontra è l'ampiezza dell'angolo al vertice.

Passando a descrivere il modo di disegnare le volte, Guarini afferma che le volte a padiglione saranno tanto più belle tanto meno saranno «*svelte, perché facendosi nelle camere per ordinario che non hanno molta altezza, se si fanno di poca elevazione renderanno la stanza più svelta*». Nonostante ciò però Guarini consiglia di contenere l'altezza della volta fra un quinto e un quarto del diametro e specifica che, per farle apparire piane, basta creare «*la cornice sopra cui si posa nello spiccarsi del volto dal muro dopo essersi principiata la volta*».

Se fin qui gli autori, seppur in maniera defilata si sono interessati alla volta a padiglione, dopo Guarini le informazioni relative a questa particolare tipologia di volta scompaiono o, quanto meno, si fanno molto rade.

Francesco Milizia ad esempio nel trattato Principi di architettura civile del 1791 inserisce una semplice citazione sulla volta a schifo definita come una volta composta.

Solo a partire dalla seconda metà del XIX secolo i manuali di architettura iniziano a riportare informazioni pratiche sulla geometria e sulla realizzazione della volta a padiglione e delle sue principali varianti.

Particolarmente significativo è il contributo di Alberto Castigliano che nel 1882 pubblica il Manuale pratico per gli ingegneri, in cui l'autore definisce la volta a padiglione impostata su pianta quadrata come l'unione di quattro fusi cilindrici che compongono la superficie di intradosso; i fusi hanno per direttrici i due archi di cerchio EVF e GVH, dove E, F, G e H sono i punti medi dei lati del quadrato di base e V è il vertice della volta (Figura 42).

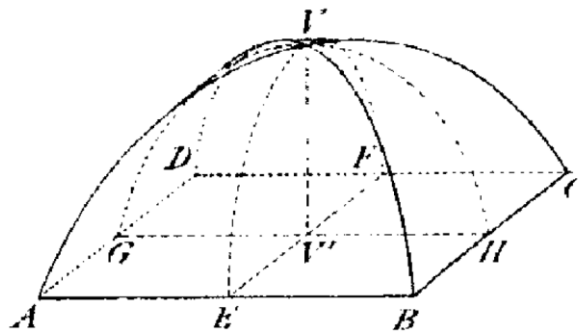


Figura 42: Assonometria di una volta a padiglione su base quadrata. (Castigliano A., 1882, Tav. I)

Fra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, quindi, la volta a padiglione comincia ad attirare l'attenzione dei trattatisti che, nei loro lavori, la presentano dedicandole ampio spazio e mettendola finalmente sullo stesso piano di importanza di tutte le altre tipologie di volte.

E' il caso di Gustav Aldoph Breymann, di Giovanni Curioni, di Carlo Levi e molti altri che, nei loro manuali, riportano importanti indicazioni circa la geometria e le fasi realizzative di questa particolare copertura voltata.

3.3 Geometrie e tecniche costruttive

Dal punto di vista geometrico le volte a padiglione, come è già stato accennato nel paragrafo precedente, sono generate dall'intersezione di due o più volte a botte. Se si suppone di tagliare una volta a botte con due piani diagonali verticali, vengono identificate quattro parti AA' e BB': le parti A e A' sono dette unghie, mentre le parti B e B' sono dette fusi (Figura 43). La differenza principale fra queste due parti sta nel fatto che i fusi hanno per impronta una linea e per chiave un punto, viceversa le unghie hanno per chiave una linea e per impronta due punti.

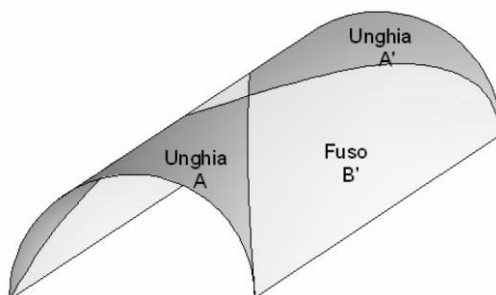


Figura 43: Assonometria di una volta a botte con indicate le unghie e i fusi.

La volta a padiglione è formata da quattro o più fusi e, proprio per la sua conformazione geometrica, ha la capacità di scaricare in maniera uniforme le azioni verticali e orizzontali sulle murature perimetrali; è evidente però che il volume, e quindi anche il peso delle volte a padiglione, risulta maggiore rispetto a quello di volte a botte e a crociera impostate sulla medesima pianta. Per ovviare a questo problema spesso si ricorreva ad alcune varianti più complesse, come le volte a specchio o a schifo, le volte botte con teste di padiglione e le volte lunettate.

La volta a botte con teste di padiglione è stata spesso utilizzata per la copertura di ambienti a pianta rettangolare e allungata ed è costituita da una volta a botte cilindrica raccordata alle teste con due falde semicilindriche (Figura 44).

La volta a specchio o a schifo è, invece, una volta a padiglione con fondo piano costituita da una volta a padiglione oppure da una volta a botte con teste di padiglione sezionata ad una qualunque altezza con un piano orizzontale (fig. 12). Bisogna sottolineare che la parte centrale che forma lo specchio di solito non è completamente piana, ma può presentare una leggera curvatura, al fine di consentire una maggiore stabilità di questa struttura.

Infine, la volta a padiglione con lunette (fig. 13 e 14) non è altro che l'unione di una volta a padiglione con porzioni di volte a botte di dimensioni minori disposte perpendicolarmente all'imposta. Tali porzioni di volte a botte, andando appunto a formare le lunette perimetrali, consentivano l'apertura di finestre collocate ad una quota maggiore di quella delle imposte. Le coperture con questa geometria però finirono per caratterizzare un tipo distinto di volta detto a unghiate o a peducci, in cui l'imposta, a causa della presenza degli archi frontali delle lunette, viene ridotta ad appoggi discontinui e brevi.

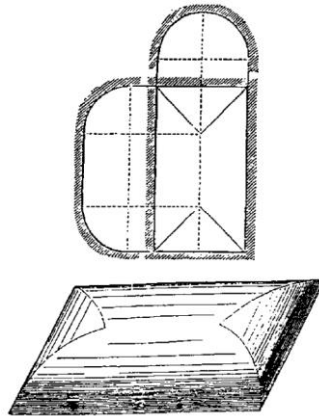


Figura 44: Volta a botte con teste di padiglione. (Breyman G.A., 1885, 9)

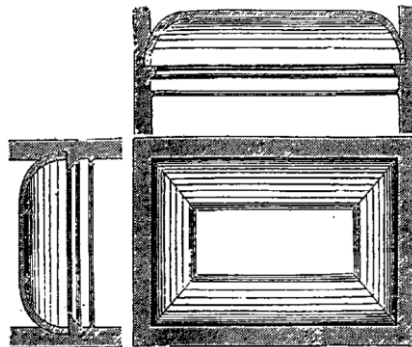


Figura 45: Volta a specchio o a schifo. (Breyman G.A., 1885, 11)

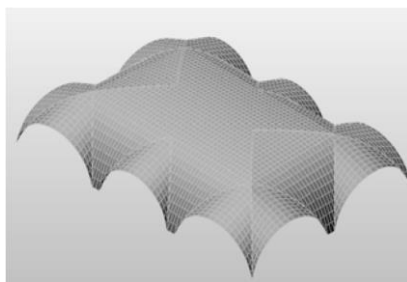


Figura 46: Schema di una volta a specchio lunettata



Figura 47: Palazzo Vertemate Franchi a Piuro di Chiavenna (XVI secolo); volta a specchio lunettata (detta anche a peducci) della sala di Giove e Mercurio.

Dal punto di vista costruttivo, la volta a padiglione è realizzata con le modalità e le apparecchiature tipiche della volta a botte, ripetute nelle due direzioni degli assi.

Per realizzare una volta a padiglione, per prima cosa, era necessario stabilire la linea d'intradosso della volta, dalla quale poi veniva desunta la curvatura degli spigoli. La direttrice è solitamente un arco di cerchio e gli spigoli sono invece archi di ellissi.

Per costruire una volta, come è già stato discusso nella prima parte di questo lavoro, erano necessarie le centine, che riproducevano in tutto o in parte la superficie d'intradosso delle volte e su cui poi veniva costruita la volta stessa.

Per realizzare l'armatura per le volte a padiglione era necessario realizzare mezze centine, in genere con profilo ad arco di cerchio, collocate al centro dei lati del poligono di base e disposte perpendicolarmente ad essi, in modo da convergere nel vertice.

Altre mezze centine, con profilo ellittico, venivano posizionate lungo le diagonali.

La Figura 48 mostra le diverse curve che venivano utilizzate per il tracciamento della linea d'intradosso delle centine: se la pianta dell'ambiente da coprire era un quadrato e la linea d'intradosso perpendicolare ad uno dei lati veniva assunta a tutto sesto, allora ab è la linea secondo cui venivano costruite le centine posizionate al centro del fuso, mentre AV è quella per le centine di spigolo.

Per completare l'orditura venivano sovente realizzate anche delle costole parallele alle prime centine e infine venivano posizionate delle tavole di legno destinate a formare il manto sul quale poi venivano collocati i filari di mattoni.

Le centine venivano tagliate secondo una linea verticale passante per la chiave della volta e dovevano perciò essere sostenute in questo punto, veniva quindi posizionato un monaco fissato mediante un'incavatura alle centine (Figura 49).

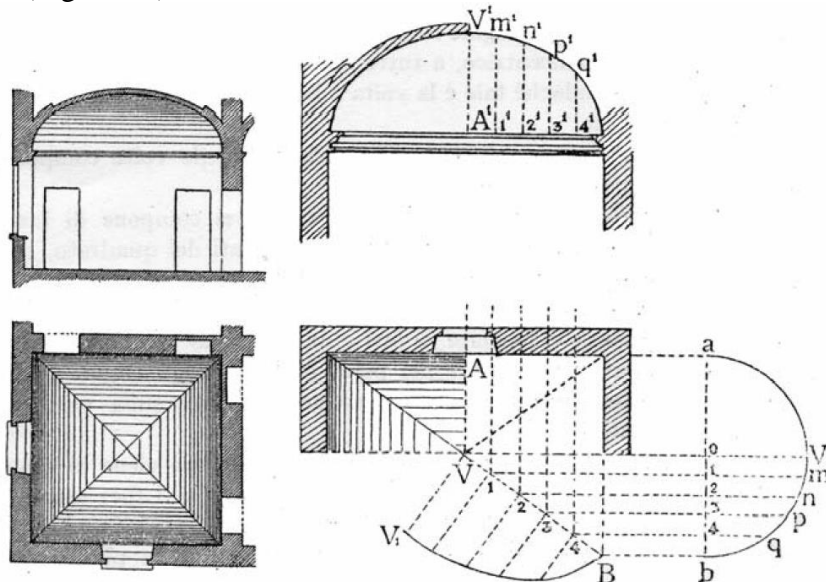


Figura 48: Curve utilizzate per la realizzazione delle centine per una volta a padiglione su pianta quadrata. (Levi C., 1932, 300)

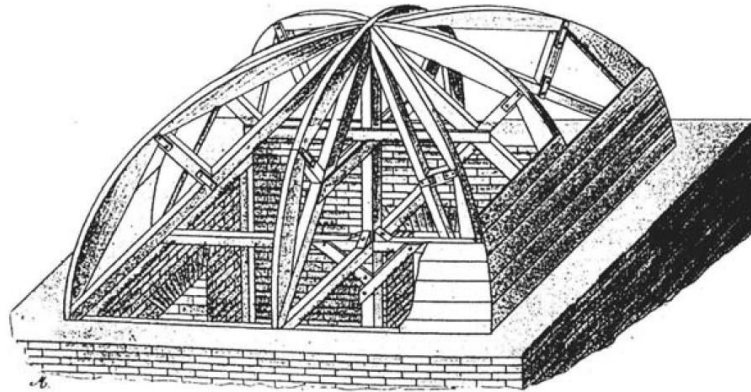


Figura 49: Schema di carpenteria fissa per l'armatura di una volta a padiglione. (De Cesaris F., 1996, 86, da Misuraca et al., 1916)

Terminata la messa in opera delle centine si procedeva con la costruzione vera e propria della volta. Per quanto riguarda i materiali impiegati per la realizzazione delle volte a padiglione, è necessario ricordare che non sono rari gli esempi realizzati in pietra conca. Il loro impiego però era limitato alle opere di maggiore importanza a causa degli elevati costi e dei problemi legati alla lavorazione e alla preparazione dei singoli conci, i quali, come si può osservare nella tavola in Figura 50, richiedevano accurate operazioni di squadratura e taglio.

Il materiale con cui comunemente venivano realizzate le volte era il laterizio, che, grazie alla sua leggerezza, maneggevolezza ed economicità, si prestava ad essere impiegato anche in strutture articolate quali le volte a padiglione.

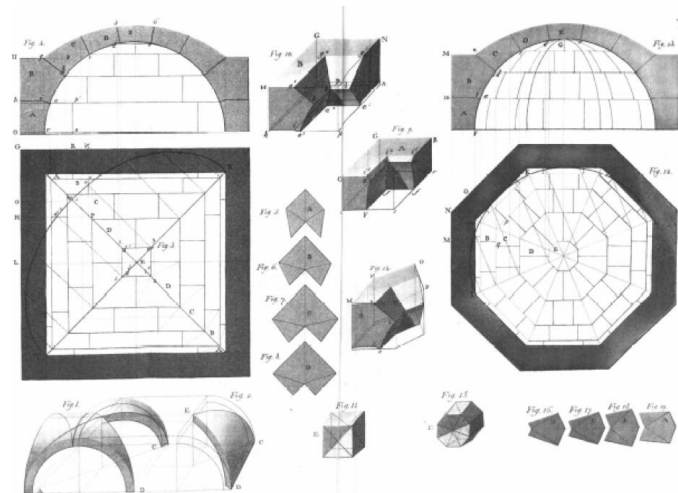


Figura 50: Volta a padiglione su pianta quadrata e ottagonale, con rappresentazione prospettica dei conci per la chiave e gli spigoli. (Rondelet J. B., 1831, tav. XVIII)

Dal punto di vista costruttivo, la disposizione del materiale per ognuno dei fusi era identica a quella per le volte a botte, di cui i fusi stessi sono parte. Gli spigoli, nelle volte a padiglione, erano realizzati contemporaneamente e con lo stesso materiale dei fusi, tuttavia, essendo il punto debole della struttura, veniva spesso preferita una disposizione con filari perpendicolari alle diagonali, in grado di creare un maggiore collegamento in queste zone (Figura 51).

Tra i vari apparecchi utilizzati si riscontra spesso quello a corsi longitudinali (Figura 52), in cui gli archi diagonali presentano soltanto una indentatura ed è proprio lungo tali archi diagonali che sovente si manifestano le maggiori lesioni, dovute alla spinta delle botti tra loro ortogonali.

Talvolta era utilizzato l'apparecchio a spinapesce anche se, per le complicazioni costruttive e la necessità di tagliare i mattoni d'angolo, questa soluzione non veniva preferita.

Per non caricare oltre al necessario i muri, le volte a padiglione, comunemente utilizzate per coprire i locali ai piani superiori, venivano eseguite nello spessore sottile, in foglio o di piatto, e quindi gettate. Per cui, dopo i primi corsi disposti nello spessore di una testa lungo il perimetro, i mattoni venivano disposti in foglio e posati a secco sopra l'aggraziatura.

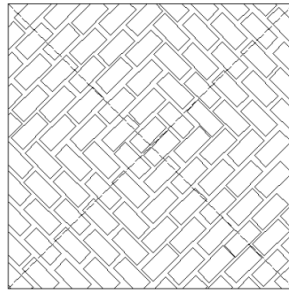


Figura 51: Schema dell'apparecchiatura a filari perpendicolari alle diagonali impiegata per le volte a padiglione.

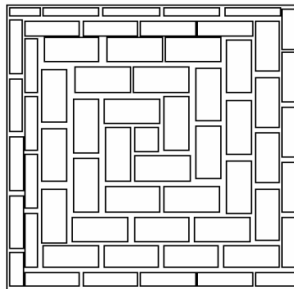


Figura 52: Schema dell'apparecchiatura a filari longitudinali impiegata per le volte a padiglione.

Per la realizzazione delle volte a botte con teste di padiglione, invece, venivano disposti alcuni filari paralleli alle imposte lungo i quattro lati del perimetro, fino a circa un terzo della freccia. Successivamente, in corrispondenza degli angoli, si realizzavano dei filari diagonali che si incontravano lungo i lati minori e poi, nella parte centrale, si procedeva con la realizzazione della volta a botte vera e propria, con archi trasversali disposti come illustrato in Figura 53.

Per le volte a specchio o a schifo venivano impiegati principalmente filari longitudinali per le porzioni di volta a botte e filari disposti a 45° per lo specchio centrale. Spesso venivano collocati negli angoli dei conci di pietra opportunamente sagomati su cui poggiava lo specchio, con il fine di irrigidire la struttura (Figura 54).

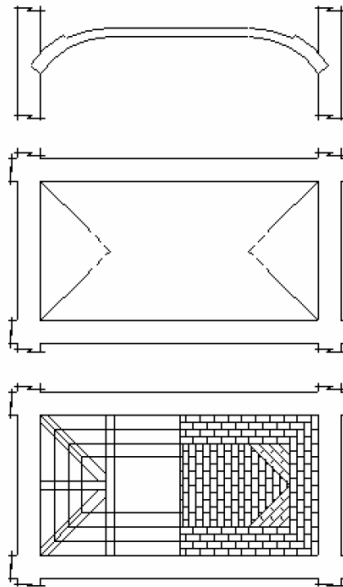


Figura 53: Schema dell'apparecchiatura generalmente usata per le volte a botte con teste di padiglione.

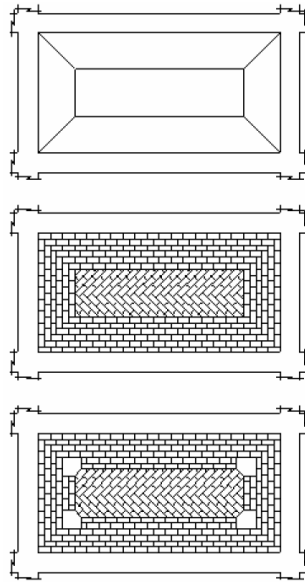


Figura 54: Schema delle apparecchiature impiegate per le volte a specchio.

In alternativa a questa apparecchiatura, potevano essere impiegati filari disposti a 45° , o a spinapesce, per l'intera volta.

Ultimata la posa, si procedeva immediatamente alla colata (gettata) con malta di gesso e sabbia oppure con malta di calce a seconda dei casi. Per questo lavoro i muratori preparavano al di sopra della volta un'impalcatura indipendente, leggera e posante sui muri, in modo tale da non gravare sulla volta, non ancora in grado di funzionare. Terminata la colata, se questa era in gesso, per evitare che si rapprendesse, venivano allentati i cunei per far scendere di qualche centimetro tutta l'impalcatura portante: questo consentiva la circolazione dell'aria sulla superficie inferiore della volta in modo tale che la presa del gesso potesse procedere regolarmente.

CAPITOLO 4. EVOLUZIONE STORICA DEI METODI PER L'ANALISI DELLA STATICA DEGLI ARCHI

4.1 Introduzione

Le murature di elementi curvi – come gli archi, le cupole e le volte - rappresentano una delle tipologie strutturali maggiormente diffuse nell'ambito dell'edilizia storica sia dell'architettura occidentale che di quella orientale. Giacché molte di queste costruzioni, se non la maggioranza di esse, risalgono anche a vari secoli or sono, l'interesse per la loro conservazione e ristrutturazione è stato sempre notevole ed è cresciuto parallelamente al bisogno di sviluppare nuove metodiche per analizzare e valutare la loro capacità portante.

Invero, ciò non è mai stato un obiettivo facilmente raggiungibile, principalmente perché la muratura è un materiale eterogeneo consistente di elementi di diversa natura e geometria quali laterizi e conci lapidei per di più legati con malte anch'esse di tipologia e fattura estremamente variabile (malte di cemento, malte di calce, malte bastarde etc.).

Sia i blocchi che la malta esibiscono in genere differenti comportamenti meccanici, chimici e fisici ed il numero delle loro possibili combinazioni in termini di geometria e modalità di assemblaggio è talmente elevato sicché il semplice termine muratura, di per sé, ben poco può riferire di tale complessità.

In ogni caso, i differenti tipi di muratura sono in genere accomunati da una bassa resistenza a trazione che ha profondamente influenzato la forma delle costruzioni sin da tempi remoti.

Anche la caratterizzazione meccanica delle murature a mezzo di prove *in situ* od in laboratorio è resa particolarmente difficoltosa, oltre che dalle caratteristiche intrinseche al “materiale” stesso, anche dalla variabilità all'interno di una medesima struttura.

Le strutture di interesse storico ed artistico offrono un variegato insieme di sfide per la conservazione, la diagnosi, l'analisi, il monitoraggio e la riabilitazione strutturale.

Le recenti raccomandazioni ICOMOS (*Recommendations for the Analysis, conservation and structural restoration of Architectural Heritage* [91]) e le *Linee Guida per gli edifici di interesse storico-artistico* pubblicate dal Ministero per i Beni e le Attività Culturali [93], suggeriscono l'adozione

di un processo iterativo che prevede l'acquisizione dati e la diagnosi da un lato e la valutazione del comportamento strutturale e la sicurezza dall'altro.

In particolare, la diagnosi e la valutazione della sicurezza strutturale rappresentano due fasi consecutive e correlate che definiscono l'effettiva necessità di dar corso ad eventuali interventi di consolidamento/rinforzo determinandone altresì l'estensione.

Ad oggi, non di meno, l'analisi di strutture in muratura rappresenta ancora una problematica irrisolta: **manca ancora un approccio per lo studio della statica di tali elementi che sia universalmente o quantomeno largamente accettato e condiviso dalla comunità scientifica.**

Semplici modelli elastici lineari, che sono alla base delle usuali analisi strutturali, non possono essere infatti applicati alla muratura giacché questa esibisce un comportamento profondamente differente a seconda che lo stato di tensione sia di trazione o di compressione; il problema è ben noto.

Più di venti anni fa, Giuffrè scrisse [92]:

“C'è bisogno di rivedere qualcosa nella formazione strutturale dell'Ingegnere Civile, tra la Meccanica e la Teoria dell'elasticità. La confusione tra tali due argomenti fa sì che tutti i progressi conseguiti dai tempi di Cauchy nella comprensione del comportamento elastico delle strutture, siano stati applicati tout court – con l'aiuto dei moderni codici di calcolo – indifferentemente a tutte le costruzioni, perfino alle vecchie cattedrali o templi”.

In contrasto con le tendenze del momento, Di Pasquale [94] ha sottolineato che *“nella muratura la forma della struttura resistente dipende dai carichi”* – cfr. Figura 55.

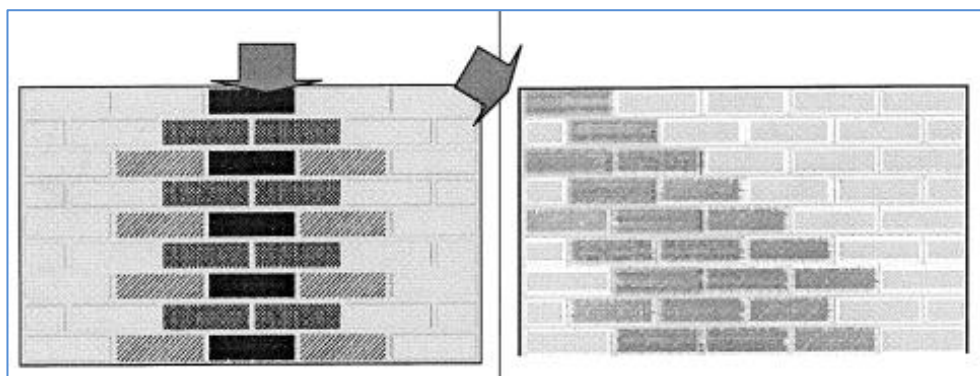


Figura 55: “nella muratura la forma della struttura resistente dipende dai carichi”; Di Pasquale in [94]

Alcuni metodi e strumenti di calcolo sono oggi disponibili per la valutazione del comportamento meccanico delle costruzioni storiche; una esaustiva disamina dello stato dell'arte è riportata in Roca et al. in [97].

I metodi che sono basati su diverse teorie ed approcci, esibiscono differenti livelli di complessità (dal semplice metodo grafico e calcoli manuali alle complesse formulazioni matematiche e grossi sistemi di equazioni non lineari), differente usabilità in ambito professionale (da quello immediatamente utilizzabile in un qualsiasi studio di consulenza a quello disponibile solo in centri di ricerca specializzati) e richiedono differenti tempi di esecuzione (da pochi secondi ad alcune ore di elaborazione) e, di conseguenza, differenti costi.

Vale la pena di notare che vari matematici hanno studiato il comportamento del materiale muratura nell'ambito della *Teoria delle diseguaglianze variazionali* di Lions e Stampacchia e formulato uno specifico funzionale sulle basi di una legge costitutiva semplificata secondo la quale la muratura si comporta come un materiale iperelastico non lineare (omogeneo ed isotropo), non resistente a trazione (i.e. con resistenza a trazione nulla) ed infinita resistenza a compressione, e le fessure sono trattate come distorsioni distribuite (Heyman [96], Di Pasquale [94], Del Piero [105], Giaquinta e Giusti [98], Anzellotti [99]).

Infine va osservato che un'appropriate conoscenza della storia della meccanica strutturale, dei metodi di progettazione e tecnologie costruttive è senz'altro necessaria a comprendere il comportamento meccanico delle costruzioni storiche; su tale argomento si segnalano tra gli altri il testo fondamentale di Benvenuto [95] e recenti scritti di Huerta [100] e [101].

4.2 La moderna teoria degli archi e volte in muratura

4.2.1 Sintesi dell'evoluzione storica

La storia moderna del calcolo delle volte in muratura inizia con il contributo dato sul finire del 1600 dalla scuola inglese (Hooke 1676 e 1705; Gregory 1698) che affermò l'analogia tra la forma invertita di una catenaria ed un arco compresso, poi impiegata da Poleni nel 1743 per il consolidamento della cupola di San Pietro in Roma e riutilizzata da Gaudì, l'architetto della *Sagrada Familia* in Barcellona.

I primi tentativi grafici "scientifici" di studiare l'equilibrio di cupole in muratura sono databili all'inizio del XVIII secolo e sono attribuiti – tra gli altri – a Bouguer (1734), Bossut e Mascheroni (1785).

Questi scienziati formularono equazioni di equilibrio nel piano, trascurando il ruolo delle forze circonferenziali, anticipando di fatto i concetti dell'analisi limite (cfr. Figura 56).

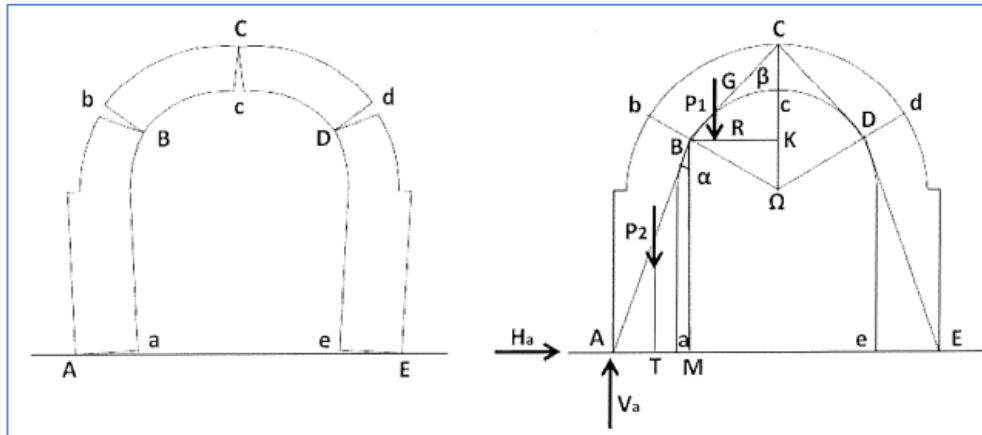


Figura 56: Il contributo di Mascheroni

Durante il XIX secolo fu sviluppata la teoria dell'elasticità e la statica degli archi fu esaminata sotto altra prospettiva (Navier 1826); dopo di ciò, per almeno 50 anni i ricercatori – per esempio Mery (1857) – tentarono di conciliare l'approccio tradizionale in termini di analisi limite con le nuove affermazioni basate sui concetti di resistenza ed elasticità.

Ad ogni modo, ciò che apparve chiaro sin dall'inizio, fu che **le fessure si verificano su elementi curvi soggetti al solo peso proprio, in conseguenza di sforzi di trazione abbastanza modesti.**

In questo contesto, un apprezzabile miglioramento nell'analisi di cupole sferiche fu raggiunto quando Levy (1888) propose un metodo di analisi grafica finalizzato ad individuare il circolo lungo il quale le forze circonferenziali assumevano valore nullo.

Per ciò che concerne gli archi e le volte (costituiti da blocchi lapidei o mattoni d'argilla), esiste ad oggi un solido quadro teorico – Huerta [100] o Como [102] - e si può affermare che la moderna teoria dell'analisi limite di strutture in muratura, che è stata sviluppata principalmente da Heyman [103], è lo strumento più affidabile per comprendere ed analizzare le strutture curve in muratura. Per completezza d'informazione vale la pena di citare anche i precedenti scritti di Pippard [104] e [105] sull'analisi di ponti con archi in muratura.

Infine, la possibilità di estendere i teoremi dell'analisi limite ai materiali non resistenti a trazione è stata completamente provata da Del Piero [106].

In accordo con la formulazione di Heyman [103], i teoremi limite della plasticità possono essere applicati alle strutture in muratura a patto che siano verificate le seguenti condizioni:

1. La resistenza a compressione del materiale è infinita;
2. Non vi è scorrimento tra i blocchi;
3. La resistenza a trazione della muratura è nulla.

Queste condizioni permettono l'applicazione dei ben noti teoremi di plasticità: teorema statico (*limite inferiore* o *lower bound*) e teorema cinematico (*limite superiore* o *upper bound*) – cfr. Figura 57 -.

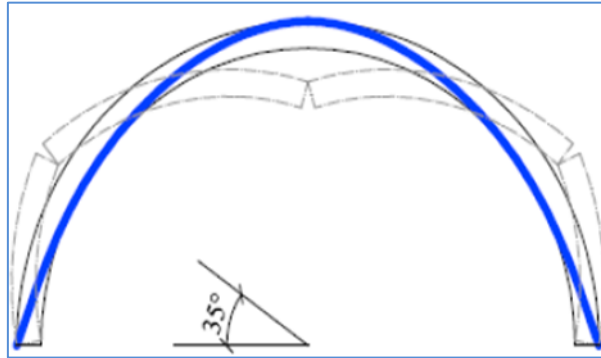


Figura 57: La curva delle pressioni (linea blu continua) ed i meccanismi di collasso per un arco

4.2.2 Il progetto di archi e volte in muratura

La problematica può essere discussa con riferimento all'elemento base dell'architettura delle strutture murarie: l'arco.

In un arco di conci in equilibrio, (vedi Figura 58) le pietre trasmettono una spinta e questa spinta deve essere contenuta all'interno dell'arco, per ottenere un insieme di tensioni di compressione equivalenti alla spinta stessa.

La linea ottenuta unendo i punti di applicazione della spinta in corrispondenza di ogni giunto (ovvero il luogo di tali punti) è la **curva delle pressioni (line of thrust)**.

Per capire il concetto è solo necessario avere una qualche familiarità con il parallelogramma delle forze. Tradizionalmente due approcci hanno dimostrato la loro utilità nell'analisi dell'arco:

- Il primo è di considerare l'equilibrio di un semiarco;

- Il secondo è l'analogia con la statica della catenaria.

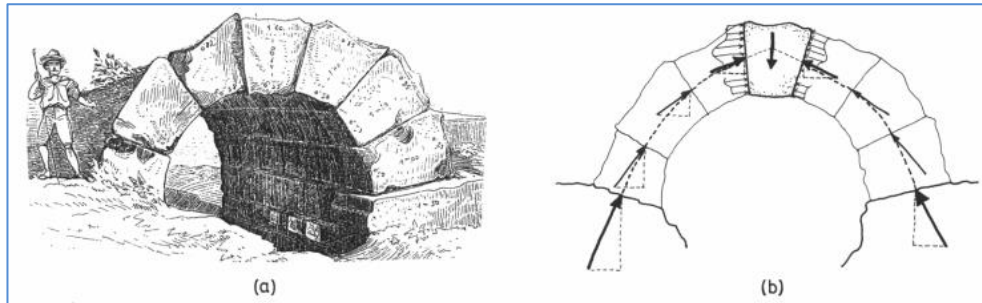


Figura 58: (a) arco etrusco a conci [Durm, 1885]; (b) l'equilibrio dei conci lapidei in un arco: le forze inclinate sono trasmesse all'interno dell'arco ed alle imposte c'è sempre una spinta con una componente orizzontale (di entità uniforme su tutto lo sviluppo dell'arco) che deve essere opportunamente contrastata

4.2.3 I due semiarchi: “Una forza formata da due debolezze”.

Si consideri il mezzo arco rappresentato in Figura 59. E' chiaro che esso collasserà a meno che non sia applicata una forza in un qualche punto della sezione di chiave. Se applichiamo un'adeguata spinta orizzontale in questa sezione allora, come mostra la figura, la spinta si comporrà con il peso di ogni concio e la traiettoria della spinta descriverà la **curva delle pressioni** (*thrust line*).

La spinta orizzontale rimane costante; tutte le direttrici delle spinte scambiate tra i vari conci possono essere raggruppate nel poligono delle forze rappresentato a sinistra nella figura. Allora, usando la terminologia della statica grafica, la **curva delle pressioni** (*thrust line*) corrisponde al **poligono funicolare invertito**, disegnato tracciando linee parallele al poligono delle forze. Si noti che, in ogni giunto la spinta è contenuta entro i limiti della muratura. E' evidente che cambiando l'entità della spinta orizzontale otterremo infinite curve delle pressioni (*thrust line*) all'interno dell'arco; è possibile pure variare il punto di applicazione della spinta sul giunto di chiave.

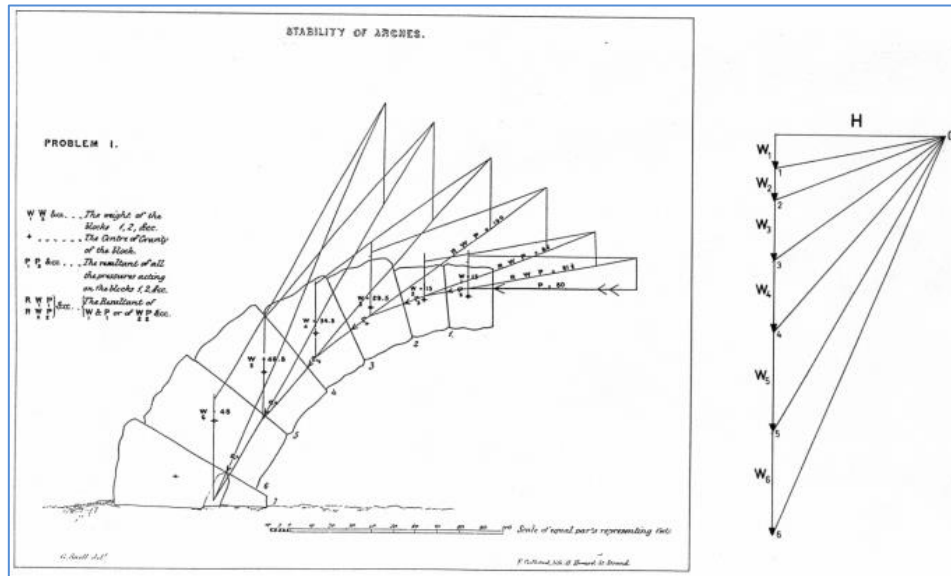


Figura 59: a sinistra, la curva delle pressioni in un semiarco. La componente di spinta orizzontale in chiave è composta (somma vettoriale) con il peso dei conci successivi pervenendo così a definire un “percorso” di trasmissione delle forze [Snell 1846]. Destra, il corrispondente poligono delle forze.

Ora, possiamo immaginare di collocare un identico semi-arco in posizione speculare a quello esaminato. La spinta orizzontale dei due semiarchi si equilibrerà, a prescindere da quale linea di spinta si consideri (i.e. posizione della spinta nell’ambito della sezione di chiave): per dirla con le parole di Leonardo:

« Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze, imperoché l’arco negli edifici è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circuli, ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e oponendosi alla ruina l’uno dell’altro, le due debolezze si convertono in una unica fortezza »⁷

Un semiarco da solo è destinato a collassare, ma due semiarchi “collassanti” formano un arco stabile. Si noti che l’arco completo può essere in equilibrio in corrispondenza di una varietà infinita dello stato di compressione interna: in termini tecnici, l’arco è staticamente ridondante, ovvero iperstatico.

⁷ Roberto Marcolongo, *Studi Vinciani*, VII, p. 237, Napoli, 1937.

4.2.4 L'analogia con la catenaria

Un'altra via per comprendere il comportamento degli archi in muratura è stata proposta da Robert Hooke:

«As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch»
[Hooke 1675] Figura 60.

L'equilibrio delle funi e quello degli archi costituiscono due facce dello stesso problema; questa è la geniale intuizione di Hooke.

Un altro matematico inglese David Gregory, completò l'affermazione di Hooke:

“None but the catenaria is the figure of a true legitimate arch, or fornix. And when an arch of any other figure is supported, it is because in its thickness some catenaria is included”.

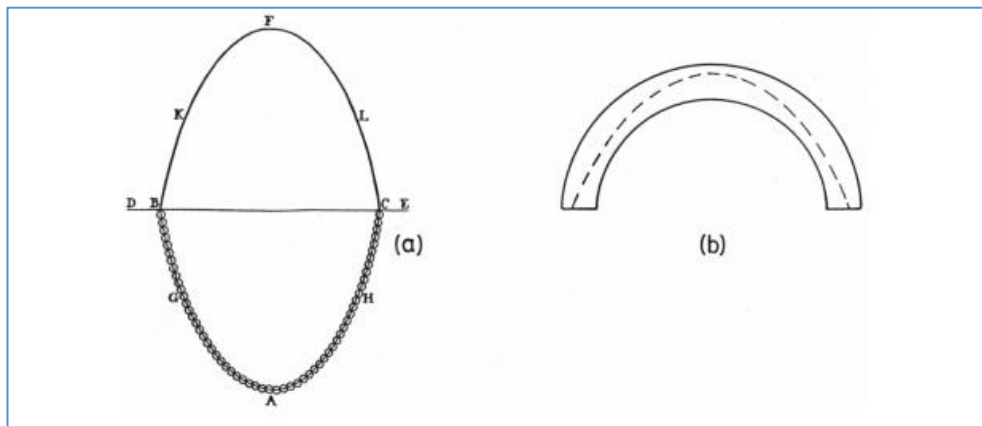


Figura 60: (a) l'arco è una catena o fune, invertita. (b) Il generico concio dell'arco può essere visto come sospeso ad una catena immaginaria che rappresenta la configurazione di equilibrio. Giacché la muratura deve lavorare a compressione, la catena "invertita" deve essere contenuta all'interno dello spessore dell'arco [182].

4.3 Il teorema statico

La struttura è sicura, nel senso che il collasso non avverrà, se è possibile individuare una configurazione di equilibrio staticamente ammissibile. Questo avviene quando è possibile individuare una **curva delle pressioni** (*thrust line*) interna allo spessore dell'arco (o una superficie delle pressioni – *thrust surface* – interna allo spessore della volta) **in equilibrio con i carichi esterni**.

Nella pratica, la soluzione è vincolata a limitate zone della sezione trasversale della struttura, ad esempio $0,85d$ – con d spessore della sezione – e ciò non solo per tener conto di imperfezioni della geometria reale, ma anche per evitare irrealistiche concentrazioni di tensione che violerebbero l’assunto dell’assenza di rotture a compressione (Heyman [109]). L’analisi della curva delle pressioni è uno strumento utile per spiegare ed esaminare la stabilità di strutture riconducibili a schemi piani, ma purtroppo è praticamente limitata ad esse.

4.3.1 L’arco limite

Un arco di spessore sufficiente, conterrà infinite curve delle pressioni (*lines of thrust*), come ad esempio nel caso dell’arco di Figura 61.a.

Se riduciamo lo spessore dell’arco, la forma della curva delle pressioni non subirà alcuna variazione, ma è evidente che raggiunto un certo spessore, solo una curva sarà contenuta all’interno dell’arco: quest’arco è l’**arco limite** e il suo spessore è lo **spessore limite** (Figura 61.b).

Lo spessore limite può essere convenientemente espresso come una frazione della luce. Per archi semicircolari lo spessore limite è all’incirca pari a $1/18$ della luce. Ciò significa che non si può realizzare un arco in muratura di spessore minore a quello derivante dall’applicazione di tale proporzione, in caso contrario l’arco diverrà un meccanismo e collasserà (cfr. Figura 61.c).

Pertanto l’arco limite costituisce il punto di partenza per il progetto di un arco sicuro: otterremo quindi una *sicurezza geometrica*, inspessendo l’arco limite.

Ci sono due approcci per la progettazione di un arco sicuro: approccio in termini di **resistenza** (*strenght approach*) ed approccio in termini di **stabilità** (*stability approach*). In entrambi gli approcci l’arco limite costituisce il punto di partenza.

Se vogliamo conseguire una misura della sicurezza basata sulla resistenza, allora lo spessore dovrà essere incrementato fino a quando le tensioni non raggiungano un valore considerato ammissibile, ottenuto dividendo la tensione di rottura per un certo coefficiente.

Se invece siamo più preoccupati di un possibile collasso per perdita di stabilità (i.e. formazione di un meccanismo di collasso), allora dobbiamo incrementare lo spessore moltiplicandolo per un certo *fattore di sicurezza geometrico* (concetto introdotto da Heyman [125] [109]). Nel caso di archi, un valore tipico è 2 o 3, sicché un arco *sicuro* avrà uno spessore quantomeno doppio rispetto a quello dell’arco limite.

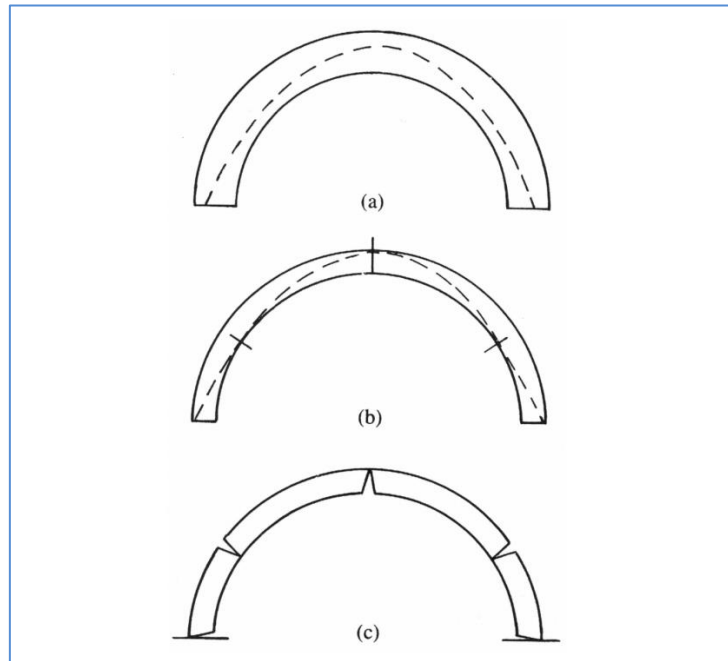


Figura 61: (a) un arco di spessore sufficiente contiene agevolmente infinite curve delle pressioni (lines of Thrust); inter alia quella qui disegnata. (b) Al diminuire dello spessore si raggiunge un cosiddetto “spessore limite” in corrispondenza del quale può essere disegnata all’interno dell’arco solo una curva delle pressioni. (c) Nei punti in cui la curva delle pressioni è tangente alla superficie di intradosso od estradosso dell’arco, si formano delle cerniere e quindi un meccanismo di collasso.

4.3.2 Il progetto di un arco in muratura: resistenza contro stabilità

Si vuole riflettere su quale tra le due condizioni – resistenza e stabilità – governi il progetto di un arco; esaminiamo tale problematica con l’ausilio di un esempio.

Si consideri un arco in pietra di luce pari a 18 m; l’arco limite avrà quindi uno spessore nell’ordine del metro – cfr. Figura 62.a.-.

Resistenza: se si pensa di realizzare l’arco con una arenite di media consistenza (20 kN/m^3) esibente una tensione di lavoro ammissibile nell’ordine dei 4 N/mm^2 (i.e. 1/5 di una tensione di rottura supposta essere pari a 20 N/mm^2), allora è facile calcolare (considerando una distribuzione uniforme delle tensioni) che l’incremento di spessore richiesto – rispetto a quello limite – sarà di 71 mm ca., ovvero lo 0,4% ca. della luce.⁸

⁸ L’inspessimento generalizzato di 70 mm fa sì che anche laddove la curva delle pressioni sia tangente alla superficie originaria (zone di formazioni delle cerniere) si venga

In Figura 62.b l'incremento di spessore è stato esagerato per favorirne la lettura. Lo spessore dell'arco così incrementato è così prossimo allo spessore limite, che ci si trova comunque in una condizione di collasso imminente; si può infatti dire che la geometria non sia affatto cambiata.

Stabilità: l'usuale fattore geometrico 2 o 3 (quest'ultimo rappresentato in Figura 62.c) impone una variazione sostanziale nella forma dell'arco riconoscibile da un esame a vista. Qualsiasi mastro muratore intuirà, già solo vedendo l'arco, che esso non solo è sicuro, ma anche sovradimensionato (il valore usuale del fattore di sicurezza geometrico è in genere pari a 2).

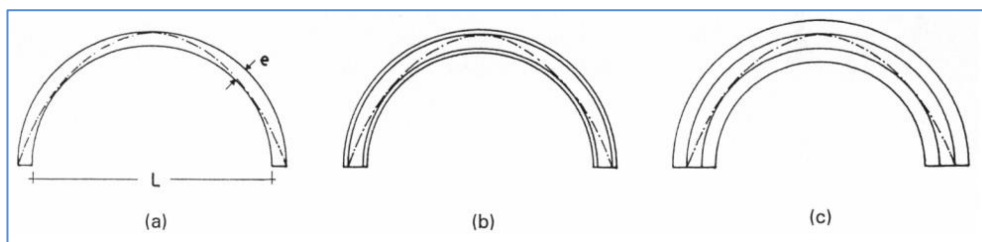


Figura 62: progetto di un arco in muratura. (a) L'arco limite. (b) Progetto per "resistenza"; l'incremento di spessore deve garantire che le tensioni non superino quelle ammissibili. (c) Progetto per "stabilità"; l'incremento di spessore deve essere tale da garantire una "sicurezza geometrica" all'arco.

Il criterio della resistenza non è sicuro: le tensioni possono essere basse ma l'arco sarà pericolosamente prossimo ad una situazione di collasso. Naturalmente i calcoli sono stati svolti per un arco di 18 m di luce. Per archi di maggiori dimensioni, le tensioni cresceranno linearmente e l'incremento di spessore sarà corrispondentemente maggiore.

Luce limite per la muratura. Per una certa dimensione della luce dell'arco, lo spessore associato alla resistenza coinciderà con lo spessore associato alla stabilità e tale valore individuerà la luce limite dell'arco. Per fattori di sicurezza geometrica pari a 2 (e considerando una distribuzione di tensioni alla base di tipo rettangolare) questa luce massima varrà:

$$s_{max} = \frac{2 \sigma_{adm}}{\pi \gamma}$$

a disporre di un'ulteriore "striscia" di muratura – l'inspessimento - mediamente sollecitata da tensioni di compressioni non eccedenti quella ammissibile.

dove σ_{adm} la tensione massima ammissibile del materiale e γ è il peso specifico della muratura. Per tali dati⁹ risulterà $s_{max} = 128 \text{ m}$ e la luce massima in termini assoluti – in corrispondenza della quale la tensione assumerà valore pari a quello di rottura – è 5 volte maggiore, ossia 640 m, essendo 5 il coefficiente di sicurezza adottato per le tensioni. Con pietre di migliore qualità potranno costruirsi archi di luce proporzionalmente maggiore.

L'arco in pietra di maggior luce ad oggi realizzato è quello del ponte di Fong-Huan, in Cina, costruito nel 1972: 120 m.

La quantità $\frac{\sigma_{adm}}{\gamma}$, dimensionalmente corrispondente ad una lunghezza, rappresenta l'altezza limite di una colonna di sezione uniforme costruita con questo materiale; questa quantità fu usata nel diciannovesimo secolo come una misura della resistenza del materiale e anche come un'indicazione delle dimensioni massime realizzabili (cfr. prospetto in Figura 63).

⁹ Si fa sempre riferimento ai valori indicati in apertura di paragrafo, ossia $\sigma_{adm} = 4 \text{ N/mm}^2$ e $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.

INDICATION DES MATÉRIAUX.	Poids du décimètre cube.	Charge d'écrasement par centimètre carré.	Hauteur représentative de la charge d'écrasement (1).	OBSERVATIONS.
<i>Pierres volcaniques.</i>				
Basalte de Suède.	kilogr. 3,06	kilogr. 1912	mètres. 6248	Rondelet.
Basalte d'Auvergne.	2,88	2078	7215	Id.
Lave du Vésuve, dite <i>Piperno</i>	2,60	563	2165	Id.
Lave grise des environs de Rome.	1,97	228	1157	Id.
Tuf de Rome.	1,22	58	478	Id.
<i>Granits.</i>				
Granit d'Aberdeen bleu.	2,62	767	2927	G. Rennie.
Granit vert des Vosges.	2,85	620	2175	Rondelet.
Granit gris de Bretagne.	2,74	654	2383	Id.
Granit de Normandie, Gatmos.	2,66	702	2639	Id.
Granit gris des Vosges.	2,64	423	1603	Id.
<i>Grès.</i>				
Grès très-dur.	2,52	813	3226	Id.
Grès blanc.	2,48	923	3713	Id.
Grès bigarré des Vosges.	2,17	400	1843	Conservatoire des arts et métiers.
<i>Pierres calcaires.</i>				
Marbre noir de Flandre.	2,72	789	2901	Rondelet.
Marbre blanc veiné.	2,70	298	1104	Id.
Marbre rouge du Devonshire.	2,70	522	1933	Rennie.
Calcaire de Portland.	2,42	262	1083	Id.
Pierre de Caserte, près Naples.	2,72	595	2191	Rondelet.
Pierre noire de St-Fortunat (Lyon)	2,65	627	2366	Id.
Liais de Bagneux, près Paris.	2,44	445	1824	Id.
Travertino de Rome.	2,36	298	1262	Id.
Roche de Châtillon, près Paris.	2,29	174	760	Id.
Roche douce de Châtillon.	2,08	134	644	Id.
Roche d'Arcueil, près Paris.	2,30	253	1100	Id.
Pierre de Saillancourt, 1 ^{re} qualité.	2,41	141	585	Id.
<i>Briques.</i>				
Brique dure très-cuite.	1,55	150	962	
Brique rouge.	2,17	57	262	
Brique rouge pâle.	2,08	39	187	
<i>Mortiers.</i>				
Mortier de chaux et de sable de rivière.	1,63	31	»	Rondelet.
Mortier de ciment de tuileau.	1,46	48	»	Id.
Mortier de pouzzolanes de Naples et de Rome mêlées.	1,46	37	»	Id.
Mortier avec chaux éminemment hydraulique.	»	144	»	Vicat.

(1) Cette colonne indique la hauteur du prisme droit de la matière considérée dont le poids serait suffisant pour écraser sa propre base (§ 25).

Figura 63: tavola delle resistenze delle pietre e dei mattoni. Nella seconda colonna dalla destra, il valore limite dell'altezza in metri, calcolato in base ai valori di peso specifico e tensioni ammissibili, pure tabellati, espressi rispettivamente in kg/dm^3 e kg/cm^2 - Collignon 1885 [126] -

4.3.3 *Lo stato tensionale in strutture in muratura: forma e resistenza*

Anche nelle più grandi strutture in muratura mai realizzate, gli sforzi principali nelle parti maggiormente sollecitate (tipicamente nelle colonne) sono abbastanza moderati se rapportati ai carichi di rottura, come ben evidenziato nella Tabella 1 che segue.

BUILDINGS	PRINCIPAL STRESS <i>N/mm²</i>
Columns, church of Toussaint d'Angers	4.4
Main pillars, French Pantheon (St. Genevieve), Paris	2.9
Main pillars, Hagia Sophia	2.2
Main pillars, cathedral of Palma de Mallorca	2.2
Main pillars, St. Paul, London	1.9
Main pillars, St. Peters. Rome	1.7
Main pillars, Church des Invalides , Paris	1.4
Main pillars in the cathedral of Beauvais	1.3
Base of the tambour of the Roman Pantheon	0.6
BRIDGES	
Bridge of Morbegno (<i>s</i> = 70 m)	7.0
Bridge of Plauen (<i>s</i> = 90 m)	6.9
Bridge of Villeneuve (<i>s</i> = 96 m)	5.7
Viaduct of Salcano, Göritz (<i>s</i> = 85 m)	5.1
Bridge over the Rocky River (<i>s</i> = 85 m)	4.4
Bridge of Luxemburg (<i>s</i> = 85 m)	4.8

Tabella 1: sforzi principali in alcune delle più grandi strutture in muratura mai realizzate. In quasi tutti i casi la tensione principale è di almeno un ordine di grandezza minore della tensione di rottura delle corrispondente muratura – Huerta [127] -.

Per esempio, nelle colonne principali di S. Pietro, che sostengono la cupola ed il tamburo per un peso complessivo di 400.000 kN, lo sforzo principale è di 1,7 N/mm².

In conclusione, è un dato di fatto che nelle strutture storiche in muratura le tensioni sono di uno o due ordini di grandezza inferiori della tensione di rottura della muratura e, pertanto, **il progetto delle strutture in muratura non è governato dalla resistenza, ma dalla stabilità.**

La stabilità governa il progetto, il che significa che l'obiettivo è progettare **forme sicure**.

Tanto dipende dal Teorema statico dell'Analisi Limite che, per dirla con le parole del prof. Heyman, è “*the rock on which the whole theory of structural design is now seen to be based*” (Heyman [128]).

Il principale corollario di questo teorema conduce ad un approccio al problema in termini di equilibrio (ricerca di una soluzione equilibrata) che, per una struttura in muratura, si traduce nell'individuare uno stato di equilibrio di pura compressione il che equivale ad un problema geometrico (i.e. di forma della struttura).

Citando di nuovo Heyman: “*The key to the understanding of masonry is to be found in a correct understanding of geometry*” [109].

4.4 Il teorema cinematico

Se si può individuare un meccanismo cinematicamente ammissibile per il quale il lavoro sviluppato dalle forze esterne è ≥ 0 , allora l'arco collasserà.

Il moltiplicatore dei carichi così determinato è un limite superiore (*upper-bound*) di quello effettivo. In pratica questo teorema è facilmente applicabile solo agli archi od altre strutture piane.

Metodi manuali classici di analisi – Como [102] -, permettono di individuare in maniera appropriata soluzioni equilibrate per diversi tipi di volte. Fanning e Boothby [110] hanno fornito una panoramica critica dei differenti tipi di analisi per archi e volte in muratura. Comunque, metodi semplificati di analisi limite possono fornire eleganti soluzioni per i complessi problemi della cupola e tamburo della Basilica di Santa Maria Assunta in Carignano (Genova); Bagicalupo et al. [111].

E' stato osservato che normalmente per strutture fatte di mattoni di laterizio e blocchi lapidei:

- Il collasso avviene generalmente per piccoli spostamenti;
- La seconda ipotesi precedentemente discussa (assenza di scorrimento) non è sempre verificata. Infatti lo scorrimento è possibile in taluni casi, ma rotture per taglio ai giunti possono essere trattate solo nel contesto di analisi con legge del flusso plastico non associato (Gilbert et al. [112]);
- L'infinita resistenza a compressione è un assunto criticabile, infatti lo stesso Heyman [109] suggerì un metodo per tener conto di ciò, ma il comportamento a rottura ha un'importanza minore nella risposta di strutture in muratura, eccetto che per archi di modesto spessore, pilastri, torri e strutture verticali massicce.

Lo studio delle volte in muratura dovrebbe portare in conto i tratti caratteristici del materiale muratura, come evidenziato da Huerta [100]:

- 1) Eterogeneità;
- 2) Una resistenza a trazione quasi nulla ed una buona resistenza a compressione;
- 3) Alti coefficienti d'attrito;
- 4) L'importanza della geometria globale per il conseguimento dell'equilibrio.

CAPITOLO 5. METODI DI CALCOLO NUMERICI PER L'ANALISI DELLE STRUTTURE CURVE

I metodi di calcolo sviluppati di recente possono essere classificati in due ampie categorie:

- *Thrust Network Methods* (TNM), ovvero metodi basati sul concetto di superficie delle pressioni e quindi sul Teorema Statico dell'analisi limite;
- *Finite Element Method* (FEM), ovvero metodi agli elementi finiti sviluppati sia per l'analisi incrementale non lineare che per l'analisi limite.

5.1 *Thrust Network Methods (TNM)*

Allo scopo di estendere il concetto e l'uso della curva delle pressioni (thrust line) alle strutture spaziali, o'Dwyer [107], ha introdotto l'uso di un reticolo funicolare in 3D definito nel piano. Il suo approccio è limitato a carichi verticali ed il layout del reticolo funicolare è fissato nel piano.

Sebbene il reticolo fisso nel piano generi risultati conservativi, esso offre comunque una comprensione nettamente migliore della statica delle volte rispetto a quanto invece ottenibile attraverso l'analisi semplificata consistente nella combinazione di poligoni funicolari di opportuni schemi piani, derivati dalla struttura spaziale. Comunque, un'importante limitazione di questo metodo consiste nell'impossibilità di trattare l'indeterminazione statica del reticolo nell'equilibrio orizzontale in considerazione della proiezione orizzontale prefissata.

Basandosi sullo studio di O' Dwyer, l'analisi del reticolo funicolare è stata ulteriormente sviluppata da *Block et al.* [108][113][114] con l'introduzione dei diagrammi delle forze reciproche di Maxwell che descrivono possibili condizioni di equilibrio di reticoli funicolari di compressione, ovvero reticoli (superfici) delle pressioni (thrust network), sotto carichi verticali.

Uno svantaggio non trascurabile della procedura innanzi richiamata era costituito dalla mancanza di un algoritmo generale e dalla conseguente necessità di manipolare i diagrammi delle forze reciproche senza poter fruire dell'ausilio di un calcolatore. Il miglioramento della procedura nel senso di superare tale limitazione è stato discusso da Block e Lachauer in [114].

Un altro approccio recente per l'analisi dell'equilibrio in 3D basato sui reticoli funicolari ed ispirato ai modelli sospesi di Gaudì è stato proposto da Andreu et al. [115]. L'approccio, che permette di tener conto di condizioni di carico generiche, è differente dal precedente e le soluzioni di equilibrio non sono vincolate da proiezioni orizzontali prefissate.

Un approccio al problema correlato al TNA per generare reticoli funicolari in presenza di carichi verticali è stato presentato da Fraternali [117] come una particolare estensione al caso 3D del metodo degli sforzi concentrati (Fraternali et al. [118]).

Può essere dimostrato che le loro condizioni di equilibrio e l'impostazione globale, separante l'equilibrio orizzontale da quello verticale, era nel complesso equivalente all'analisi del reticolo delle pressioni (TNA) ma, per contro, questo approccio - basato sulla discretizzazione della funzione delle tensioni di Airy - presenta alcune difficoltà rispetto a singolarità nelle condizioni al contorno (vincoli) e di carico, o discontinuità quali fratture od aperture, nella superficie di equilibrio discretizzata (Babilo et al. [119]). Casi studio molto interessanti e tecnicamente indicativi sono stati discussi di recente da Angelillo ed altri in [120].

Infine, un algoritmo risolutivo abbastanza efficiente, basato sui reticoli funicolari e metodo degli sforzi concentrati, è stato presentato da Vouga et al. [121] per trovare particolari soluzioni che si adattassero al meglio a superfici assegnate; tale metodo si è rivelato però incapace di cogliere il particolare comportamento delle strutture gotiche, quale quello in prossimità delle nervature. Problematiche sulla convergenza dei TNM debbono ancora essere chiarite.

Un approccio differente, basato sulla selezione di superfici caratterizzate da uno stato tensionale membranale rispettoso delle condizioni di equilibrio e della condizione di resistenza a trazione nulla, è stato di recente presentato da Baratta e Corby [122][123].

Il problema è espresso in termini di una adeguata funzione delle tensioni e la soluzione è quindi cercata usando un approccio energetico. In generale è provato che sotto certi carichi gravitazionali l'equilibrio della volta implica la sua ammissibilità. Questo risultato è abbastanza significativo in quanto spiega perché è possibile costruire una volta in muratura semplicemente ipotizzando una forma resistente sotto assegnati carichi.

5.2 Metodi agli elementi finiti

5.2.1 Modelli eterogenei

Una struttura in muratura può essere analizzata discretizzando separatamente i blocchi ed i giunti di malta. In questo caso, per ogni fase si introduce un opportuno legame costitutivo, che deve tener conto, ovviamente, anche dell'interazione di ogni singolo componente con l'insieme della struttura muraria.

Nell'ambito di una modellazione agli elementi finiti possono essere seguiti due approcci distinti: nel **primo**, i giunti tra i blocchi sono discretizzati utilizzando elementi finiti di dimensioni opportune, mentre, nel **secondo**, gli elementi "giunti" sono rimpiazzati da particolari vincoli di contatto tra i blocchi (leggi di interfaccia).

Il **primo approccio** richiede un notevole onere computazionale per l'analisi di strutture reali ed infatti viene quasi utilizzato esclusivamente per l'analisi dello stato tensionale di piccoli elementi di muratura.

Nel **secondo approccio**, invece, l'utilizzo di leggi di interfaccia consente di utilizzare solo elementi di tipo "brick", dotati di opportune leggi costitutive. Ovviamente, ogni blocco deve sempre essere modellato utilizzando almeno un elemento finito. Pertanto, in tutti i modelli eterogenei, le dimensioni del problema numerico crescono molto rapidamente all'aumentare della complessità della struttura.

- **Page** (1978 [124]). La muratura è discretizzata in blocchi a comportamento elastico-lineare ed isotropo collegati da «*linkage elements*» (o "*links*") di tipo puntuale. I «*links*» hanno comportamento fragile a trazione e di tipo elasto-plastico bilineare in compressione. Tale modello può essere utilizzato per muri sollecitati a taglio ma non è in grado di descrivere, ad esempio, il collasso per schiacciamento;
- **Lourenço et al.** (1994[129], 1996[130]). Modello con leggi di interfaccia derivate dal criterio di Mohr-Coulomb. Nei blocchi, gli sforzi ammissibili a compressione ed a trazione sono descritti introducendo due opportune superfici limite, dette, rispettivamente, superficie di chiusura e superficie di "cut-off" a trazione. Sia il criterio di Mohr che la superficie di "cut-off" variano secondo una legge incrudente, mentre la superficie di chiusura non evolve con lo stato di deformazione. I meccanismi di scorrimento e di apertura sono

localizzati all'interno dei giunti di malta, mentre il collasso per compressione coinvolge l'intera struttura muraria.

- **Lofti e Shing** (1994 [131]). Modello con legge di interfaccia caratterizzata da una funzione di limite elastico iperbolica (generalizzazione del criterio di Mohr-Coulomb). A differenza del modello di Lourenço, il modello di Lofti e Shing prevede che la superficie di snervamento del legame di interfaccia sia dotata di gradiente continuo in ogni punto. Il comportamento limite a compressione dei blocchi è governato dal criterio di Von Mises, mentre la rottura per trazione è descritta mediante una superficie di "cut-off" alla Rankine. Il modello di Lofti e Shing è in grado di simulare sia lo scorrimento a taglio che la compattazione a compressione dei giunti, attraverso una legge del flusso plastico di tipo non-associato. La funzione di limite elastico dell'interfaccia evolve secondo un modello "softening".
- **Gambarotta e Lagomarsino** (1997 [132]). Il comportamento dei letti di malta è modellato utilizzando metodi propri della meccanica del danneggiamento. Il danneggiamento dei giunti è misurato da una variabile interna associata ad una velocità di rilascio dell'energia di deformazione, che include termini anelastici da scorrimento e dilatazione. Il danneggiamento dei blocchi evolve quando la velocità di rilascio dell'energia eguaglia l'energia specifica di frattura (o tenacità) dei giunti. Quest'ultima dipende a sua volta dalla variabile di danno.

5.2.2 Modelli omogenei

I modelli omogenei si basano sulla introduzione di un continuo omogeneo, equivalente, in senso opportuno, al composito murario. Le caratteristiche di tale mezzo possono essere definite introducendo un opportuno legame costitutivo in grado di rappresentare il comportamento macroscopico della muratura, ovvero a partire dalle proprietà meccaniche dei componenti (blocchi e malta), attraverso tecniche di omogeneizzazione.

Modello rigido o elastico non resistente a trazione. Si tratta del primo modello costitutivo formulato per le murature, utilizzato sin dall'antichità, in maniera più o meno consapevole, per la verifica ed il dimensionamento di tali strutture. Caratteristico è il suo impiego nelle strutture ad arco ed a volta, unitamente alla costruzione grafica del poligono funicolare di un sistema piano di forze, e nell'analisi limite di strutture murarie piane o spaziali.

Una sua prima applicazione sistematica, nella versione rigido-non resistente a trazione, è reperibile nel celebre lavoro di J. Heyman "The Stone Skeleton" (1966[103]), che presenta svariati esempi di analisi limite di strutture murarie di tipologia varia.

La prima sistemazione matematica di tale modello si può far risalire ad alcuni studi pionieristici di A. Signorini (1925[133][134]), che lo prendono in esame come prototipo di legge costitutiva di tipo unilaterale.

Lo studio delle sue proprietà matematiche è stato oggetto di attenzione da parte di numerosi autori, provenienti prevalentemente dalla scuola italiana (vedi, ad esempio, Romano G. e M., 1979[135]; Di Pasquale, 1984,2[136][137]; Romano e Sacco, 1984[138]; Anzellotti, 1985 [139]; Como e Grimaldi, 1985[140]; Giacquinta e Giusti, 1985[141]; Del Piero, 1987[142], 1989[143]; Panzeca e Polizzotto, 1988[144]; Steigmann, 1991[145]; Angelillo, 1995[146], 1998[147], solo per citare alcuni tra i contributi più rilevanti disponibili in letteratura).

Si tratta di un modello semplice dal punto di vista concettuale ed allo stesso tempo raffinato dal punto di vista matematico. Esso prevede che il materiale reagisca rigidamente o elasticamente in compressione e non sia in grado di sopportare alcuno sforzo di trazione. E' capace di descrivere con una teoria al continuo i fenomeni di fessurazione tipici delle strutture murarie. Ignora gli effetti dell'attrito tra i blocchi e riproduce bene il comportamento delle murature storiche o degradate, nelle quali i letti di malta sono dotati di proprietà meccaniche a trazione ed a taglio estremamente ridotte.

Ganju (1977 [148]); Chen (1982 [149]); Shing (1988 [150]). Macro-modelli isotropi derivati da risultati sperimentali, sulla base di generalizzazioni dei modelli costitutivi comunemente adottati per il conglomerato cementizio. Si tratta di modellazioni accurate solo per murature rinforzate con inclusioni di calcestruzzo, che non tengono conto dell'anisotropia meccanica delle murature ordinarie, dovuta alla presenza dei letti di malta.

Samarashinghe e Hendry (1980[151] , 1982 [152]). Modelli macroscopici anisotropi elasto-fragili rispetto ad un dominio limite delle tensioni nel campo degli sforzi accoppiati trazione-compressione (non è introdotta una resistenza limite per compressione pura). Quando lo stato di sforzo raggiunge la superficie limite, la rigidezza e la resistenza locali vengono poste pari a zero.

Page et al. (1985 [153][154]). Modello anisotropo elasto-fragile nel campo degli sforzi accoppiati trazione-compressione ed elasto-plastico nel

campo degli sforzi di compressione pura. Introducendo tale modello in un codice agli elementi finiti, le due non linearità (plasticità e rottura) sono trattate separatamente, mantenendo una costante mentre l'altra evolve. La superficie limite del materiale è riferita al piano delle componenti di tensione relative alle direzioni dei giunti. Ciascuna componente della deformazione plastica è legata solo alla omonima componente di sforzo, attraverso una legge polinomiale.

Contro e Sacchi (1985 [155]). Generalizzazione del modello di Page con l'introduzione di una resistenza nulla a trazione e di un comportamento plastico incrudente in compressione. Considerando diverse orientazioni degli sforzi principali rispetto ai giunti, si ottiene un dominio limite racchiuso da sei facce piane nel campo degli sforzi di compressione biassiale.

Pietruszczak e Niu (1992 [156]). Modello continuo ottenuto mediante una doppia procedura di omogeneizzazione, per tener conto delle stratificazioni sia in orizzontale (letti di malta), che in verticale (giunti di testa). I letti di malta sono trattati come piani di debolezza del materiale, mentre i giunti di testa sono trattati come inclusioni caratterizzate da proprietà meccaniche inferiori rispetto ai blocchi. Il collasso del materiale omogeneizzato può verificarsi sia per schiacciamento dei blocchi che per apertura e/o slittamento dei giunti orizzontali. Nel primo caso viene introdotto un comportamento elasto-fragile del sistema blocchi-giunti di testa, mentre nel secondo caso il collasso viene descritto attraverso un comportamento di tipo elasto-plastico. Si tratta di un modello fortemente direzionale (anisotropo), particolarmente adatto allo studio del collasso della muratura sotto stati di tensione biassiali.

Papa e Nappi (1993 [157], 1996[158]). Modelli di danneggiamento unilaterali evolutivi con tre variabili interne che descrivono separatamente il danno prodotto da tensioni di trazione, tensioni di compressione e tensioni da taglio. Il modello di danno applicato a ciascun componente della muratura è di tipo fragile ed è capace di riprodurre il recupero di rigidità che si osserva sperimentalmente quando sforzi di compressione si sovrappongono a preesistenti sforzi di trazione ("effetto unilaterale"). Esso è in grado anche di descrivere effetti di danneggiamento a taglio dello stesso ordine di grandezza degli effetti di danneggiamento per tensioni normali. La matrice di rigidità del materiale composito viene ottenuta mediante tecniche numeriche di omogeneizzazione (del tipo ad elemento di volume rappresentativo), a partire dai modelli di danno dei materiali base.

Gambarotta e Lagomarsino (1997 [159]). Modello continuo ottenuto mediante omogeneizzazione di un mezzo stratificato. Include leggi di danneggiamento dei blocchi e dei letti di malta descritte in funzione di due opportune variabili interne. Una descrive il danneggiamento dei letti di malta, mentre l'altra descrive il danneggiamento per schiacciamento dei blocchi. L'evoluzione del danno viene descritta ricorrendo alla soluzione di un Problema di Complementarietà Lineare. Tale modello consente di valutare l'energia dissipata dal materiale sotto carichi ciclici, che rappresenta un parametro molto importante ai fini della valutazione della vulnerabilità sismica degli edifici in muratura.

Luciano e Sacco (1997 [160]). Modello di danneggiamento ottenuto mediante tecniche di omogeneizzazione del tipo della "cella unitaria". L'elemento ricorrente (cella) è formato da un blocco intero, quattro porzioni di blocchi adiacenti (di dimensioni pari ad un quarto di un intero blocco), due giunti interi in orizzontale ed in verticale e due semigiunti in verticale. La legge di danno prevede che le fratture possano svilupparsi solo lungo i giunti orizzontali e verticali, caratterizzati da una legge costitutiva elasto-fragile, e che i blocchi si comportino invece come elementi indefinitamente elastici. Si ammette che lo spessore dei giunti sia molto piccolo e che il collasso di un giunto, una volta attinto, sia di tipo totale, ossia lo interessi completamente. Vengono definiti otto distinti stati di danno della cella unitaria, ciascuno corrispondente ad un diverso "crack pattern" nei giunti. Si ammette, in particolare, che un giunto interessato dal collasso non possa più ripristinarsi. La teoria della omogeneizzazione viene impiegata per determinare, numericamente, i moduli elastici della muratura integra e fessurata. Un modello di evoluzione del danno è anche proposto. Si tratta di una modellazione molto valida per le murature antiche o degradate, nelle quali la resistenza a trazione della malta è molto minore della resistenza (a trazione ed a compressione) dei blocchi e pertanto le fratture si sviluppano prevalentemente lungo i giunti.

Callerio e Papa (1998 [161]). Modelli di danneggiamento elasto-plastici evolutivi per la simulazione del comportamento murario sotto carichi ciclici. La muratura è descritta come un continuo ortotropo in stato piano di tensione. Il suo comportamento è elastico fino a quando lo stato di sforzo è interno ad un dominio elastico limitato da otto superfici piane nello spazio delle componenti cartesiane di tensione (riferite alle direzioni dei giunti). La superficie limite prevede una ridotta resistenza del materiale nei confronti degli stati di trazione pura e di trazione-compressione. Quando lo stato di tensione raggiunge la frontiera del dominio elastico, si attivano deformazioni

anelastiche sulla base di una legge del flusso plastico di tipo associato. Alla fine di ogni "step" in cui si suddivide la legge di carico, le deformazioni anelastiche incrementali vengono scomposte in una parte propriamente plastica ed in una parte di danneggiamento, alla quale si associa una riduzione della rigidità elastica del materiale.

Luciano e Sacco (1998 [162]); Cecchi, Milani e Tralli (2003 [163]). Modelli di danneggiamento per murature rinforzate con materiali compositi ("Fiber Reinforced Plastics" o FRP) ottenuti mediante tecniche di omogeneizzazione.

Milani e Tralli (2003 [164]). Modello micromeccanico per murature non rinforzate in grado di trattare sia il caso di comportamento elastico dei materiali base (mattoni e malta), sia il caso di comportamento elasto-plastico. La tecnica di omogeneizzazione adottata si fonda su un approccio alle tensioni, che utilizza opportune generalizzazioni del principio di minimo dell'energia complementare. Il modello si presenta in buon accordo con i risultati sperimentali di Page (1981 [165][166]) e maneggevole dal punto di vista numerico.

CAPITOLO 6. ALGORITMI EVOLUTIVI ED ALGORITMI GENETICI

6.1 *L'evoluzione naturale come paradigma computazionale*

Nel 1864 Charles Darwin pubblicò “*L'origine della specie attraverso la selezione naturale*” [167] testo che rivoluzionò la concezione tradizionale dell'origine della specie vivente, dando un aspetto organico e definitivo alla concezione deterministica dell'evoluzione.

Darwin teorizzò che, analogamente alla selezione artificiale operata dall'uomo, anche in natura dovesse agire un meccanismo simile a causa di un fattore selettivo che doveva essere individuato nella lotta incessante per la sopravvivenza in un dato ambiente. Egli sosteneva che il numero d'organismi viventi che nasce è superiore a quello che può sopravvivere con le risorse disponibili; quindi esiste tra i vari individui una lotta continua alla sopravvivenza.

In questa lotta prevalgono i più adatti alle condizioni di vita in cui si trovano e trasmettono i loro caratteri ai discendenti. Questa sopravvivenza del più adatto è la base della teoria della *selezione naturale*.

Per la maggior parte degli organismi l'evoluzione avviene attraverso i seguenti processi: *selezione naturale*, *riproduzione sessuale*, *crossover* e *mutazione*.

La *selezione* determina quali elementi di una popolazione sopravvivono per riprodursi; essa opera sulle caratteristiche preesistenti senza produrre nuove funzioni.

La *riproduzione* rappresenta il fine ultimo di qualunque forma vivente e garantisce il mescolamento e la ricombinazione dei geni ai discendenti.

Il *crossover* è quel meccanismo che permette di incrociare i caratteri genetici dei genitori, in modo tale che i figli abbiano le loro stesse caratteristiche.

Si ha una *mutazione* quando si verifica un errore da parte di una cellula nel riprodurre il codice genetico; sebbene la cellula sia in grado di correggere questi errori nei geni copiati, alcuni di essi possono non essere corretti. Nonostante nella maggior parte dei casi la *mutazione* conduca alla generazione di difetti congeniti, si possono verificare eventi particolari e sporadici nei quali essa può portare ad un miglioramento della specie.

Il processo evolutivo s'innescava quando **mutazioni casuali** o **combinazioni** di geni, derivati da processi riproduttivi, danno origine ad individui migliori dotati quindi di una **fitness** maggiore, cioè di un miglior adattamento all'ambiente in cui vivono.

Tali individui tendono a sopravvivere più a lungo (**selezione**) e a generare più figli, i quali hanno un'elevata probabilità di presentare quelle stesse caratteristiche positive dei genitori, cioè quelle caratteristiche che permettono agli individui di aumentare la loro probabilità di sopravvivenza, a causa del meccanismo di incrocio (**crossover**) [168].

In questo modo, col passare delle generazioni, la probabilità che un individuo presenti tali qualità aumenta, fino a divenire una caratteristica della specie.

A livello di popolazione, il risultato di questo processo è l'aumento della **fitness** degli individui che la compongono e quindi **l'evoluzione della specie**.

Questi concetti fondamentali della teoria dell'evoluzione di Darwin rappresentano i passi logici di soluzione degli **Algoritmi Genetici** (AG) i quali costituiscono un sottoinsieme degli **Algoritmi Evolutivi** (EA).

6.2 Gli algoritmi evolutivi

Il termine **algoritmo evolutivo** (*Evolutionary Algorithms-EA*) è utilizzato per descrivere una classe di sistemi di soluzione di problemi tramite computer, che utilizzano meccanismi basati sull'analogia con le leggi di evoluzione della specie, quali selezione, ricombinazione e mutazione come elemento chiave dell'implementazione.

Gli algoritmi evolutivi sono dunque delle tecniche informatiche ispirate dalla biologia che si basano su una metafora, illustrata schematicamente nella Tabella 2 che segue.

Evoluzione	Problem Solving
Ambiente	Problema da risolvere
Individuo	Possibile soluzione
Adattamento	Qualità della soluzione

Tabella 2: illustrazione schematica della metafora su cui si basano gli algoritmi evolutivi

Un semplice algoritmo evolutivo segue nei caratteri generali il seguente pseudo-codice:

```

Generation = 0
Inizializza la popolazione
while not (condizione di terminazione)
do
    generation = generation + 1
    Calcola fitness di ciascun individuo
    Selezione
    Crossover
    Mutazione
end while

```

Questo modello è da interpretarsi nel seguente modo [168]: definito un problema da risolvere, data una codifica (*genotipo*) mediante la quale si possono rappresentare soluzioni del problema ed una funzione, detta funzione di *fitness* in quanto è in grado di valutare la bontà di ogni soluzione, si genera in maniera casuale una *popolazione* $S(t)$ di soluzioni, dove t rappresenta un determinato istante di tempo, e si valuta quindi la fitness di ciascuna soluzione.

Nel processo evolutivo la fitness misura la capacità di un individuo ad adattarsi all'ambiente in cui vive e quindi la sua "*probabilità di sopravvivenza*".

Negli algoritmi evolutivi la *fitness* è pertanto il parametro che regola i meccanismi mediante i quali, a partire da $S(t)$ si crea un nuovo insieme di soluzioni $S(t+1)$; in particolare caratterizzato da un gran numero di elementi.

Per far ciò, dall'insieme $S(t)$ viene selezionato un sottoinsieme di soluzioni $S(t)^*$, con un processo probabilistico regolato dai valori di fitness di ciascuna soluzione.

Il nuovo insieme $S(t+1)$ è ottenuto a partire da $S(t)$ mediante tre meccanismi: *Selezione*, *Crossover* e *Mutazione*.

SELEZIONE:

alcune delle soluzioni, già presenti nell'iterazione precedente, "sopravvivono" e permangono invariate in $S(t+1)$; lo scopo è simulare la legge darwiniana della sopravvivenza del più adatto. Nella versione originale degli algoritmi genetici, questa legge è implementata per mezzo della cosiddetta selezione proporzionale alla *fitness*: per creare una nuova popolazione intermedia di n individui "genitori", vengono effettuate n estrazioni indipendenti di un individuo dalla popolazione esistente, con probabilità per ogni individuo di essere estratto direttamente

proporzionale alla sua fitness. Di conseguenza, gli individui al di sopra della media verranno in media estratti più volte, mentre quelli al di sotto della media andranno incontro all'estinzione.

Una volta estratti gli n genitori come descritto innanzi, gli individui della generazione successiva $S(t+1)$ saranno prodotti mediante l'applicazione di un certo numero di operatori di riproduzione, i quali possono coinvolgere un solo genitore (simulando quindi una sorta di riproduzione asessuata), nel qual caso si parla di mutazione, o più di un genitore, normalmente due (riproduzione sessuata), nel qual caso si parla di ricombinazione. Negli algoritmi genetici sono utilizzati due operatori di riproduzione: **crossover** e **mutazione**.

CROSSOVER:

vengono generate nuove soluzioni (figli) aventi codifiche (genotipi) derivate da quelle di due o più soluzioni (genitori) di $S(t)$.

Per applicare il crossover, gli individui genitori vengono accoppiati a due a due; quindi, con una certa probabilità p_{cross} - chiamata "tasso di crossover", che è un parametro dell'algoritmo-, ciascuna coppia subisce il crossover vero e proprio, che consiste nell'allineare le due stringhe binarie, tagliarle in un punto estratto a caso, e scambiare le metà destre, ottenendo così due nuovi individui, che ereditano parte dei loro caratteri da un genitore e parte dall'altro.

Dopo il crossover, tutti gli individui subiscono la mutazione.

MUTAZIONE:

vengono generate nuove soluzioni mediante alterazioni casuali della codifica di soluzioni presenti in $S(t)$. Lo scopo è quello di simulare l'effetto di errori casuali di trascrizione che possono avvenire con una probabilità molto bassa p_{mut} ogniqualvolta un cromosoma venga duplicato, e che consiste nel decidere di invertire ciascuna singola cifra binaria, indipendentemente dalle altre, con probabilità p_{mut} .

In altre parole, ciascuno zero ha una probabilità p_{mut} di diventare un uno e viceversa.

Il ciclo evolutivo, per come è concepito, potrebbe andare avanti all'infinito. Nella pratica, però, bisogna decidere quando arrestarlo, in base a qualche criterio di terminazione specificato dall'utente. Alcuni esempi di criteri di terminazione possono essere:

- il passaggio di un numero prefissato di generazioni o di una certa quantità di tempo;

- il rinvenimento di una soluzione soddisfacente secondo qualche misura;
- la mancanza di miglioramenti per un certo numero prefissato di generazioni.

L'utilizzo di questo tipo di algoritmi è per la maggior parte finalizzato ad alcuni casi di programmazione dell'intelligenza artificiale in robotica, alla biocomputazione, a particolari problemi di gestione ed a sistemi di ottimizzazione di ingegneria.

L'algoritmo si propone quindi come metodo di ricerca di soluzioni ottime di un problema definito dall'utente in uno spazio determinato dalla codifica scelta dall'utente per rappresentare le soluzioni.

Nel caso più diretto, il problema da affrontare può essere la ricerca del minimo (o massimo) di una funzione, attraverso la determinazione dei parametri numerici inclusi nella formula che la descrive: in questo caso la *fitness* è direttamente la funzione da minimizzare.

Tuttavia, quando il problema non è di tipo analitico, il procedimento non è così diretto.

E' quindi necessario definire una funzione di decodifica che trasformi il genotipo nel corrispondente fenotipo (soluzione), applicare la soluzione così ottenuta al problema che s'intende risolvere e misurarne la bontà attraverso la funzione di fitness.

La diversa codifica delle soluzioni, unitamente ai metodi utilizzati per elaborare e ricombinare l'informazione contenuta nel genotipo per generare nuovi individui a partire da quelli presenti nell'attuale popolazione, consente di suddividere i metodi di calcolo evolutivistico in diversi paradigmi.

Più precisamente si possono suddividere gli algoritmi evolutivi nel seguente modo [169]:

- *Evolution Strategies (ES)*.
- *Evolutionary Programming (EP)*.
- *Algoritmi Genetici (GA)*, *codifica reale*, *codifica binaria*.
- *Genetic Programming (GP)*.
- *Differential Evolution (DE)*.

Essi si differenziano notevolmente per logiche e procedimenti e sono ottimizzati per il tipo di problema che devono risolvere.

Nella tabella seguente vengono riportate le caratteristiche principali degli algoritmi evolutivi appena citati.

	ES	DE	GAbinary
Representation	Real-valued	Real-valued	Binary-valued
Fitness is	Objective function value	Objective function value	Scaled objective function value
Self-adaptation	Standard deviations and rotation angles	None	None
Mutation	Gaussian, main operator	Gaussian, only operator	Bit-inversion, background operator
Recombination	Discrete and intermediate, sexual and panmictic, important for self-adaptation	Linear combination: DE1, linear combination with elitism: DE2	z-point crossover, uniform crossover, only sexual, main operator
Selection	Deterministic, extinctive or based on preservation	Deterministic, extinctive or based on preservation	Probabilistic, based on preservation
Constraints	Arbitrary inequality constraints	Arbitrary inequality constraints	Simple bounds by encoding mechanism
Theory	Convergence rate for special cases, (1+l)-ES, (1+l)-ES, global convergence for (m+l)-ES	Convergence rate for special cases	Scheme processing theory, global convergence for elitist version

Figura 64: principali caratteristiche degli algoritmi evolutivi (da [169]); il tipo di algoritmo qui di interesse è quello genetico (GA), con formulazione binaria della generica soluzione (elemento della popolazione).

Se si esaminano in dettaglio le applicazioni in cui sono sfruttati, si possono dedurre i pregi degli EA (Algoritmi Evolutivi):

- Possibilità di risolvere problemi complessi senza conoscere un preciso metodo di soluzione.

- Capacità di auto-modificazione in base alla mutazione del problema.
- Capacità di simulare alcuni fenomeni a causa dell'organizzazione ispirata a quella dell'evoluzione biologica.

Nel presente capitolo ci limiteremo ad esaminare solo gli algoritmi genetici, cioè quegli algoritmi evolutivi che storicamente sono stati sviluppati per primi. La comprensione di tali algoritmi aiuta poi a capire anche il funzionamento di tutti gli altri algoritmi evolutivi.

6.3 *Gli algoritmi genetici*

Gli algoritmi genetici (GAs) appartengono alle tecniche di ottimizzazione di tipo “soft computing”, cioè a quelle tecniche che, come le reti neurali e la logica fuzzy, sono basate su processi non deterministici, e sono stati sviluppati nell’ambito dell’intelligenza artificiale.

Essi sono algoritmi di ricerca basati su meccanismi di selezione naturale, ovvero sull'analogia con l'evoluzione genetica osservata in natura [170].

La prima monografia sull'argomento è di *J.H. Holland*: “*Adaptation Natural and Artificial System*” [171]. John H. Holland è docente di psicologia e d’ingegneria elettronica all’Università del Michigan, nonché membro dello *Steering Committee* del *Santa Fè Institute* e si occupa, da quasi quarant’anni, della pratica dell’evoluzione algoritmica. Il punto di partenza della sua ricerca è stato quello di credere nel fatto che incorporando adeguatamente gli AG in un algoritmo per calcolatore, essi potessero costituire una tecnica per risolvere problemi complessi, così come ha fatto la natura, attraverso l’evoluzione. Iniziò quindi a creare algoritmi che fossero in grado di manipolare stringhe binarie e provvedessero alla sopravvivenza di quelle migliori, così come in natura avviene il processo d’evoluzione, attraverso un ciclo di selezione, riproduzione, alterazione e sostituzione delle stringhe. In ogni generazione, una nuova serie di stringhe era creata usando i bit delle migliori stringhe precedenti. Holland cercò di ampliare il campo d’azione degli AG creando un codice che rappresentasse la struttura di qualsiasi programma per calcolatore [172].

Il risultato è stato il sistema classificatore, costituito da un insieme di regole, ciascuna delle quali svolgeva azioni particolari ogni volta che le sue condizioni venivano soddisfatte; condizioni e azioni erano rappresentate da stringhe di bit, corrispondenti alla presenza o all’assenza di specifiche caratteristiche nell’input e nell’output delle regole.

Le stringhe di qualità elevata si riproducevano, quelle di qualità scarsa morivano; inoltre il processo riproduttivo combinava continuamente queste stringhe in maniera diversa, generando soluzioni sempre più raffinate.

Da millenni gli esseri umani fanno uso di tecniche d'incrocio e di selezione per ottenere prodotti con qualità e prestazioni sempre più elevate, ma il problema consiste nel tradurre tali tecniche in una forma adatta ai programmi per calcolatore. Il vero problema è la costruzione di un codice genetico che possa rappresentare la struttura di programmi diversi, come il DNA rappresenta la struttura di una persona. Il meccanismo di un GA è sorprendentemente semplice, esso non coinvolge niente di più che la capacità di copiatura delle stringhe e il loro scambio parziale [170].

Per impostare un esperimento con un algoritmo genetico è necessario definire in modo esatto la struttura del genoma, stabilendone la lunghezza ed il significato dei singoli bit [169].

Le operazioni di crossover e di mutazione utilizzate con questo tipo di rappresentazione, si possono rappresentare nel seguente modo:

Crossover	Mutazione
$\{10011 \mid 011\} \rightarrow \{00110 \mid 011\}$ $\{00110 \mid 100\} \rightarrow \{10011 \mid 100\}$	100 0 1011 \rightarrow 100 1 1011

Figura 65: schema esemplificativo degli operatori di crossover e mutazione

Fra i diversi tipi di crossover i più comuni sono il crossover singolo punto, in cui le stringhe che codificano i due genitori vengono "tagliate" in uno stesso punto; si opera poi uno scambio della parte destra (o sinistra) delle stringhe per ottenere due figli in cui il genotipo del primo è costituito dalla concatenazione della parte destra del genotipo del primo genitore con la parte sinistra (destra) di quella del secondo, mentre il genotipo del secondo figlio è costituito dalla concatenazione della parte destra (o sinistra) del genotipo del secondo genitore con la parte sinistra (destra).

Una generalizzazione al crossover multi-punti permette di avere scambi ogni secondo segmento tra le posizioni di crossover successive; i punti di crossover sono scelti a caso.

Un effetto possibile di crossover a 5-punti su due individui, potrebbe essere schematizzato nel seguente modo:

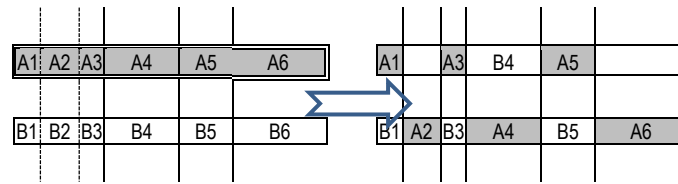


Figura 66: crossover a 5 punti; gli indici alfanumerici indicano porzioni delle due generiche stringhe A e B, appartenenti alla popolazione delle soluzioni al tempo (t), dalle quali generare soluzioni successive (t+1)

Ogni volta che i punti di crossover sono dispari, le probabilità di scambio per tornare ad avere asimmetria dipendono dalla posizione dei bit.

Il crossover uniforme prevede invece che, per ogni posizione all'interno della stringa, i bit corrispondenti dei due genitori vengano assegnati uno ad un figlio e l'altro all'altro figlio in modo casuale.

La mutazione consiste semplicemente nell'inversione di un bit scelto a caso in qualunque posizione del genoma.

La procedura seguita da un di un tipico **algoritmo genetico** per l'evoluzione dell'insieme delle soluzioni (popolazione) può riassumersi come segue:

1. Generazione casuale della prima popolazione di soluzioni (cromosomi);
2. Applicazione della funzione di *fitness* alle soluzioni (cromosomi) appartenenti all'attuale popolazione;
3. Selezione delle soluzioni considerate migliori in base al risultato della funzione di *fitness* e della logica di selezione scelta;
4. Procedimento di crossover per generare delle soluzioni ibride a partire dalle soluzioni scelte al punto 3;
5. Creazione di una nuova popolazione a partire dalle soluzioni identificate al punto 4;
6. Riesecuzione della procedura a partire dal punto 2 ed utilizzando la nuova popolazione creata al punto 5.

L'iterazione dei passi presentati permette l'evoluzione verso una soluzione ottimizzata del problema considerato.

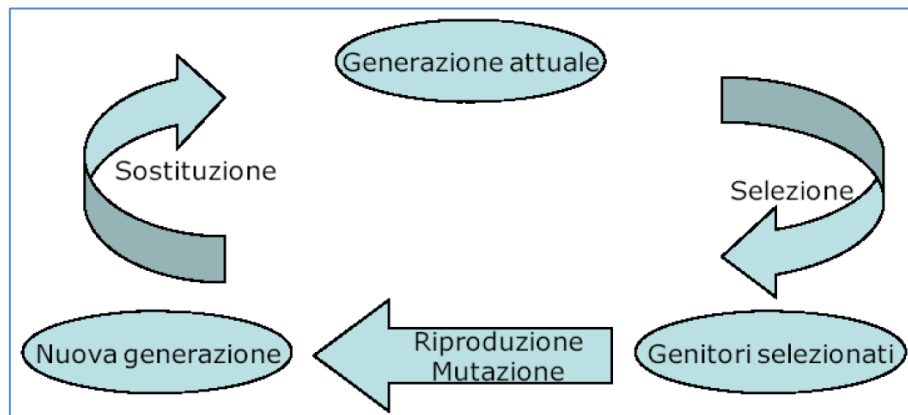


Figura 67: schema di funzionamento di un algoritmo genetico

Poiché questo algoritmo di base soffre del fatto che alcune soluzioni ottime potrebbero essere perse durante il corso dell'evoluzione e del fatto che l'evoluzione potrebbe ricadere e stagnare in "ottimi locali" spesso viene integrato con la tecniche dell'*elitarismo* e con quella delle *mutazioni casuali*. La prima consiste in un ulteriore passo precedente al punto 3 che copia nelle nuove popolazioni anche gli individui migliori della popolazione precedente, la seconda invece successiva al punto 4 introduce nelle soluzioni individuate delle occasionali mutazioni casuali (operatore Mutazione) in modo da permettere l'uscita da eventuali ricadute in ottimi locali.

6.4 Il Breeder Genetic Algorithm (BGA)

6.4.1 Aspetti generali

Il *Breeder Genetic Algorithm* (BGA) è una particolare forma di algoritmo genetico che si basa su una selezione artificiale simile a quella messa in atto dagli allevatori (*breeder*) nella selezione di razze animali [173], [174], [175], [176].

Da circa 200 anni, e quindi ancor prima di che Darwin formulasse le sue rivoluzionarie teorie sulla selezione ed evoluzione della specie, l'allevamento degli animali si è evoluto da un'arte basata sull'intuito ad una scienza empirica basata sulla statistica.

Almeno sino in tempi recenti vi è stata una rilevante differenza tra il *vero* allevatore e l'allevatore *virtuale*, intendendosi con quest'ultimo un algoritmo genetico. L'allevatore reale non ha informazioni sul materiale genetico di cui dispone e deve stimare un "dato aggregato" che egli definisce

come valore di allevamento (*breeding value*) dell'animale. L'allevatore virtuale del nostro *Algoritmo Genetico* (GA) conosce invece i geni della sua popolazione, per di più egli controlla gli operatori genetici (i.e. *mutazione*, *ricombinazione* etc.); tanto almeno sino ad oggi, sebbene è più che probabile che con l'avanzare delle biotecnologie questa distinzione presto sparirà.

Quindi, contrariamente agli algoritmi genetici (GA) standard, nel caso di *BGA*, la *Mutazione* e la *Ricombinazione* non solo non sono considerati eventi generatori di disordine, ma al contrario vengono studiati e gestiti in funzione della probabilità di generare delle soluzioni migliori.

Il *BGA* è quindi definito da 7 elementi, come

$$BGA = (P^0; N; T; \Gamma; \Delta; F; term)$$

dove

- P^0 = popolazione iniziale;
- N = numero di individui componenti ogni generazione;
- T = la soglia di troncamento;
- Γ = l'operatore di *ricombinazione*;
- Δ = l'operatore di *mutazione*;
- F = la funzione di *fitness*;
- *term* = il criterio di terminazione (arresto) della procedura.

Caratterizzano il metodo *BGA* gli operatori di *ricombinazione* e di *mutazione*, mentre gli altri elementi sono stati già illustrati innanzi con riferimento alla descrizione generale degli algoritmi evolutivi (EA) ed in particolare degli algoritmi genetici di tipo generico (GA).

6.4.2 L'operatore ricombinazione

L'operatore *ricombinazione* combina il materiale genetico di due soluzioni "genitori" (*parents solutions*) per generarne una nuova (soluzione figlia); questo è l'operatore di maggior importanza per il *BGA*, che da esso mutua le proprie peculiarità.

In dettaglio, sono stati definiti in [173], 3 operatori di ricombinazione che, sebbene leggermente diversi tra loro, sono simili nei principi informatori.

- **Discrete recombination (DR)**

Siano $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1; \dots; y_n)$ le stringhe rappresentative di due soluzioni "genitori"; la soluzione "figlia", ovvero la

soluzione generata dalle due della generazione precedente, può ottenersi come

$$z_i = \{x_i\} \text{ o } \{y_i\}$$

x_i e y_i sono scelti con probabilità 0,5.

- **Extended Intermediate Recombination (EIR)**

$$z_i = x_i + \alpha_i(y_i - x_i) \text{ con } i = 1, \dots, n$$

con α_i scelto in maniera casuale nell'intervallo $[-0,25, 1,25]$.

- **Extended Line Recombination (ELR)**

$$z_i = x_i + \alpha(y_i - x_i) \text{ con } i = 1, \dots, n$$

con α scelto in maniera casuale nell'intervallo $[-0,25, 1,25]$.

Gli effetti geometrici della ricombinazione sono stati spiegati in [177]. La **DR** genera gli angoli dell'*ipercubo* definito dalle componenti di x ed y . **EIR** può generare qualsiasi punto all'interno di un *ipercubo* leggermente più grande. **ELR** genera un punto sulla linea definita da x ed y . In entrambi gli ultimi due operatori il nuovo punto può giacere fuori dall'intervallo $[x_i; y_i]$.

6.4.3 L'operatore mutazione

Una variabile x_i ha probabilità p_m di essere selezionata quale oggetto di una mutazione; nella procedura BGA si assume normalmente $p_m = 1/n$ ed almeno una variabile sarà oggetto di mutazione.

Alla variabile così selezionata viene aggiunto un valore compreso nell'intervallo $[-range_i; +range_i]$, dove $range_i$ definisce il *mutation range*.

$Range_i$ è normalmente posto pari a $0,1 \cdot serchinterval_i$, essendo quest'ultimo – *serchinterval_i* – il dominio di definizione della variabile x_i .

Il nuovo valore z_i è dunque computato come

$$z_i = x_i \pm range_i \cdot \delta.$$

Ognuno dei due segni $+$ o $-$ hanno la medesima possibilità di essere scelti, probabilità perciò pari a pari a 0,5.

Il fattore δ è calcolato da una distribuzione che preferisce valori piccoli, ossia:

$$\delta = \sum_{i=0}^{15} \alpha_i 2^{-i} \quad \alpha_i \in 0,1.$$

Prima della mutazione si pone $\alpha_i = 0$; quindi ogni α_i è mutato in 1 con probabilità $p_s=1/16$. Solo $\alpha_i=1$ contribuisce alla somma. In media ci sarà solo un α_i con valore 1, che indichiamo genericamente con α_j . Quindi δ è dato da

$$\delta = 2^{-j}.$$

L'operatore *mutation* di un BGA standard è in grado di generare qualsiasi punto nell'ipercubo con centro x definito $x_i \pm range_i$, ma per sua natura effettua maggiori test in un intorno di x . Con la configurazione standard illustrata innanzi l'operatore mutazione è in grado di localizzare l' x_i ottimo con una precisione pari a $range_i \cdot 2^{-15}$.

Giuseppe Teodosio

*Tecnologia, modellazione meccanica
e rinforzo strutturale con materiali innovativi
di strutture curve in muratura*

CAPITOLO 7. IL MODELLO PROPOSTO

7.1 Introduzione

E' stato sviluppato un modello numerico avanzato capace di ricercare una superficie delle pressioni “sicura”, per strutture voltate in muratura. Il modello è basato su un *Breeder Genetic Algorithm* (BGA) – cfr. § 6.4 - già proposto dall'autore in studi svolti nel corso del dottorato ed applicati ad approssimazioni FEM della geometria delle volte a mezzo di elementi *shell* [188]; studi illustrati pure in [204].

Il BGA permette di individuare a curva delle pressioni sicura (*safe thrust surface*) muovendo i nodi del modello FEM della volta esaminata entro un dominio di progetto, minimizzando il valor medio delle tensioni principali di trazione (*fitness*) nella muratura non rinforzata. Il modello può anche essere adottato per il progetto e la verifica di volte consolidate con materiali compositi costituiti da fibre in matrice cementizia (FRCM *fiber reinforced cementitious matrix*), assumendo che la curva delle pressioni si possa muovere al di fuori del dominio fisico, in corrispondenza delle porzioni rinforzate.

Sono di seguito illustrati i risultati di elaborazioni condotte per una volta a padiglione soggetta a combinazioni di carichi statici e dinamici.

7.2 Il modello numerico

La procedura numerica proposta è formulata entro il campo dell'elasticità lineare [204].

La struttura in muratura è modellata agli elementi finiti (FEM), utilizzando elementi *shell* a prevalente comportamento membranale (cfr. Figura 68).

Denotiamo con:

- $x_{i,j}$ l'*i*-esima coordinata del *j*-simo nodo,;
- $x_{i,j}^{min}$ il limite inferiore di $x_{i,j}$, corrispondente all'intradosso della volta nel caso di muratura non rinforzata;
- $x_{i,j}^{max}$ il limite superiore di $x_{i,j}$, corrispondente all'estradosso della volta nel caso di muratura non rinforzata;
- $\xi_{i,j}$ la variabile di controllo assumente valori compresi nell'intervallo [0,1].

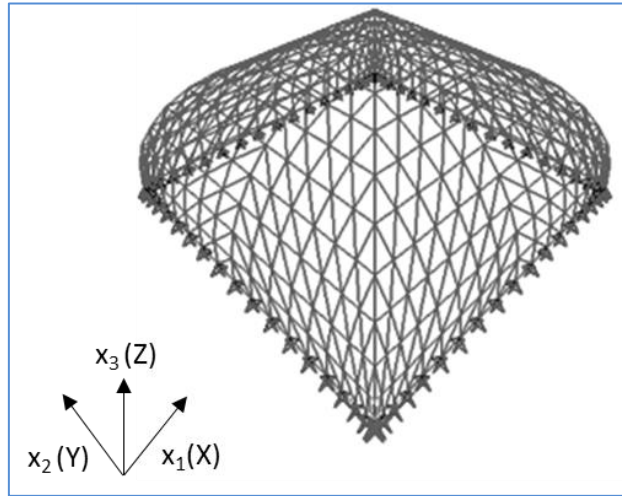


Figura 68: Modello FEM della volta a padiglione oggetto di studio

Cerchiamo una *curva delle pressioni sicura* per la volta, muovendo i nodi del modello FEM all'interno di un dominio di progetto, definito me segue:

$$x_{i,j} = x_{i,j}^{min} + \xi_{i,j}(x_{i,j}^{max} - x_{i,j}^{min}).$$

La ricerca della superficie delle pressioni sicura è condotta attraverso il *BGA* presentato in [205][206], minimizzando la funzione di *fitness* corrispondente al valor medio delle tensioni principali di trazione nella muratura non rinforzata.

Più specificamente, se assumiamo che sia n il numero complessivo di nodi del modello FEM oggetto della ricerca ed N il numero delle variabili di controllo $\xi_{i,j}$, ($N=3n$ nel caso in cui tutte le tre coordinate nodali governino la strategia di ricerca), possiamo definire l' m -simo "individuo" corrispondente alla t -esima generazione, come il vettore

$$\mathbf{x}_m^t = (x_{1,1}, \dots, x_{3,n})_m.$$

Il *BGA* trova la superficie delle pressioni sicura eseguendo attraverso i seguenti passi:

1. viene generata una popolazione di composta da λ individui;
2. vengono selezionati i migliori μ individui all'interno della popolazione di λ elementi;
3. l'individuo migliore viene annesso alla generazione successiva;

4. i restanti $\lambda-1$ individui della generazione successiva vengono creati a mezzo della procedura denominata *Extended Intermediate Recombination* (EIR) [173]÷[176], [208] e mutazione dei migliori μ individui della generazione corrente – cfr. anche § 6.4.2 a pg. 81 e segg.);
5. I passi dal 2 al 4 sono ripetuti finché il valore della funzione di fitness è minore di un prefissato valore della tensione di trazione.

La procedura proposta ci permette di approssimare il modello costitutivo elastico non resistente a trazione di una muratura non rinforzata con modello FEM elastico lineare [183]÷[193].

7.3 Il caso di studio

E' stato analizzato il caso studio di una volta a padiglione in tufo giallo napoletano (cfr. Figura 69), soggetta a combinazioni di carico statiche e dinamiche.

La volta a padiglione, come ben noto, è generata dall'intersezione di più volte a botte collocate sui lati opposti di un poligono di base. Lo stato tensionale in questo tipo di volte è più complesso di quello esibito dalle volte a crociera ed a botte.

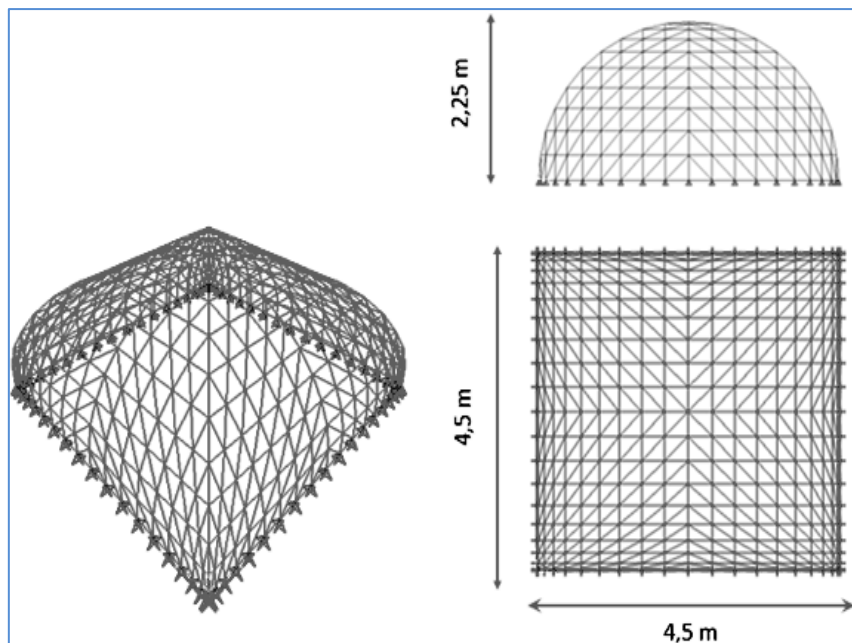


Figura 69: viste assonometrica, frontale ed in pianta del modello FEM della volta a padiglione oggetto di studio

La volta esaminata è caratterizzata da uno spessore costante di 0,25 m; la sua geometria è descritta in Figura 70.

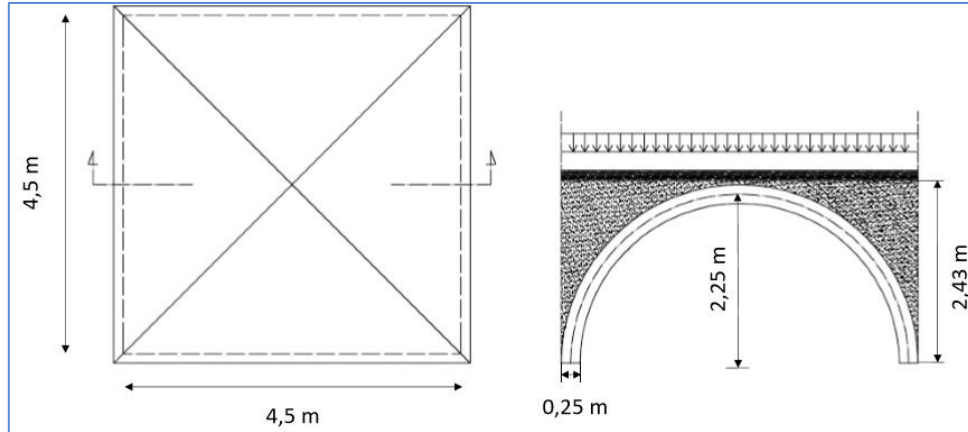


Figura 70: pianta e sezione della volta a padiglione oggetto di studio

La struttura in muratura è stata modellata a mezzo del programma agli elementi finiti SAP90 [212]. La mesh consiste di 441 nodi ed 800 elementi shell triangolari a prevalente comportamento membranale, in conseguenza del fatto che lo spessore flessionale è posto pari ad 1/5 dello spessore flessionale; il vincolo di base – esteso all'intero perimetro - è di tipo cerniera.

Le proprietà fisiche e meccaniche dei materiali assunte a base del calcolo sono quelle indicate in riportate in Tabella 3, dove – secondo la simbologia usuale – sono stati indicati con:

- γ_1 =peso specifico della muratura;
- γ_2 = peso specifico del materiale di rinfiacco;
- E_m = Modulo di elasticità della muratura).

γ_1 [kN/m ³]	γ_2 [kN/m ³]	E_m [MPa]
15,00	10,00	1500,00

Tabella 3: proprietà fisiche e meccaniche dei materiali

Sono state esaminate tre combinazioni di carico statiche:

- volta soggetta al solo peso proprio;
- volta soggetta ai carichi permanenti e variabili;
- volta soggetta ai carichi permanenti ed a carichi variabili agenti solo su metà della sua estensione in pianta.

Sono pure state analizzate combinazioni di carico comprendenti sia carichi verticali che azioni sismiche, queste ultime modellate in accordo con l'approccio statico suggerito dallo *European Standard EN 1998-1* [209]. In particolare, le forze orizzontali nella direzione X sono assunte essere pari al 50% delle forze verticali (carichi permanenti e variabili).

Infine, si propone un intervento di rinforzo con FRMC (*fiber reinforced cementitious matrix*) studiando il comportamento della volta così rinforzata.

Nell'ambito del modello numerico, la funzione di *fitness* è applicata alla muratura non rinforzata; in tal caso – muratura non rinforzata – è ammessa la ricollocazione dei nodi del modello FEM lungo l'asse Z pur sempre, però, all'interno del volume della muratura della volta. Nel caso di muratura rinforzata, la ricollocazione riguarda pur sempre la coordinata Z del generico nodo, ma è anche ammessa – in corrispondenza delle zone placcate con FRCM - una dislocazione che vada oltre il dominio fisico, ovvero lo spessore della volta, dal lato opposto a quello di collocazione del rinforzo [204].

Indichiamo con

- RTS (*Reference Thrust Surface*) la curva delle pressioni di riferimento, corrispondente alla superficie media (baricentrica) della volta;
- MTTS (*Minimum Tension Thrust Surface*) la Superficie delle Pressioni a – a tensione minima – individuata a mezzo della procedura numerica proposta.

Graficizzazioni dei valori degli sforzi membranali principali minimi e massimi sono riportate di seguito – sotto forma di mappe di isovalori in opportuna scala cromatica – e riferite alla RTS e MTTS.

7.3.1 *Peso proprio*

Come prima analisi, è stato considerato il modello numerico proposto, soggetto al peso proprio della struttura.

Partendo dall'analisi svolta su modelli FEM nella configurazione RTS e MTTS (Figura 71), sono stati valutati – nei due casi - gli sforzi membranali negli elementi *shell* (Figura 72).

In termini di tensioni locali, le tensioni principali minime e massime sul modello RTS sono uguali a $\sigma_{max} = 3,04 \times 10^{-2} \text{ MPa}$ and $\sigma_{min} = -4,40 \times 10^{-2} \text{ MPa}$, rispettivamente, mentre il valor medio della tensione principale di trazione è pari a $\sigma_{ave} = 3,73 \times 10^{-9} \text{ MPa}$.

I risultati ottenuti considerando la configurazione geometrica relativa alla MTTTS evidenziano che la tensione principale massima ($\sigma_{max} = 8,24 \times 10^{-4} \text{ MPa}$) ed il valore medio della tensione principale di trazione ($\sigma_{ave} = 5,35 \times 10^{-10} \text{ MPa}$) sono significativamente più piccolo di quelli ottenuti con riferimento alla geometria RTS, ed il valore minimo delle tensioni principali di compressione per la MTTTS ($\sigma_{min} = -4,08 \times 10^{-2} \text{ MPa}$) è grossomodo invariato rispetto a quello determinato con riferimento alla geometria RTS.

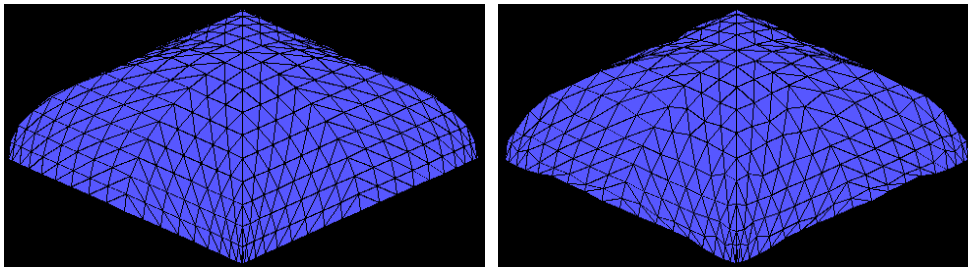


Figura 71: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTTS (a destra)

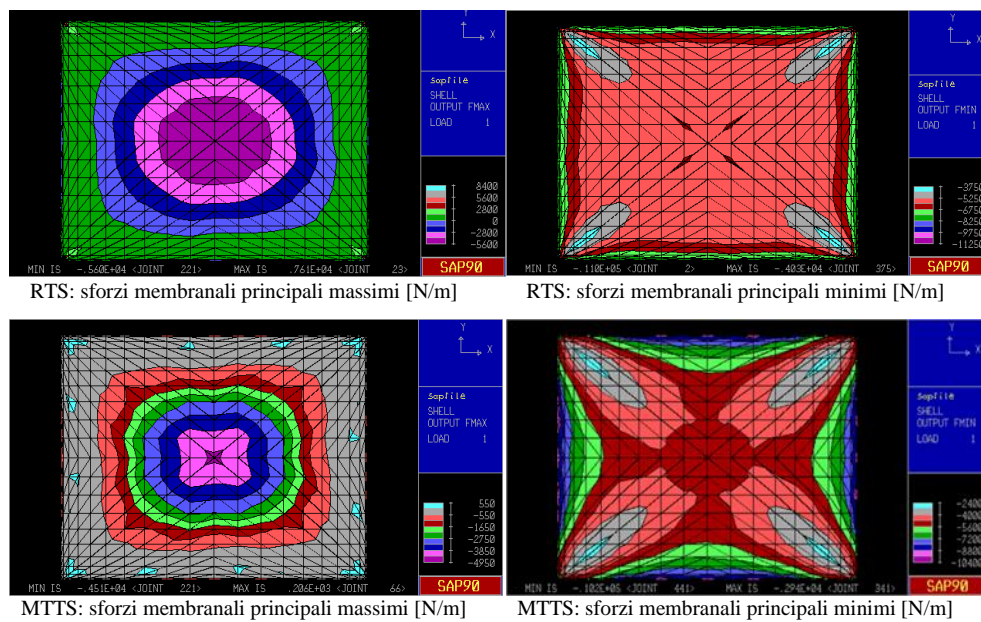


Figura 72: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta per Peso Proprio

7.3.2 Carichi permanenti e carichi variabili

Viene esaminata la volta soggetta alla combinazione di carichi statici di progetto LC_{St} , definita come segue:

$$LC_{St} = G_1 + (G_{2,1} + G_{2,2}) + Q$$

dove:

G_1 è il carico permanente relativo al peso proprio della volta;

$G_{2,1}$ è il carico permanente relative al peso proprio del materiale di rifianco;

$G_{2,2}$ è il carico dovuto ai sovraccarichi fissi, assunti pari a $3,00 \text{ kN/m}^2$;

Q è il carico variabile, posto pari a $4,00 \text{ kN/m}^2$.

Le analisi FEM condotte sui modelli RTS e MTTs (Figura 73) forniscono i valori degli sforzi membranali principali minimi e massimi agenti negli elementi *shell*, rappresentati in termini di mappe di isovalori in Figura 74.

I corrispondenti valori di tensione principale minima e massima nella geometria RTS sono rispettivamente pari a $\sigma_{max} = 1,03 \times 10^{-1} \text{ MPa}$ and $\sigma_{min} = -1,40 \times 10^{-1} \text{ MPa}$, mentre il valor medio del delle tensioni principali di trazione è pari a $\sigma_{ave} = 1,26 \times 10^{-8} \text{ MPa}$.

La MTTs ci permette di evidenziare che i valori della tensione principale massima ($\sigma_{max} = 7,20 \times 10^{-3} \text{ MPa}$) ed il valor medio della tensione principale di trazione ($\sigma_{ave} = 3,01 \times 10^{-9} \text{ MPa}$) sono significativamente più piccoli dei corrispondenti valori ottenuti con riferimento al modello RTS e, inoltre, il valore minimo delle tensioni principali di compressione valutato sulla geometria MTTs ($\sigma_{min} = -1,42 \times 10^{-1} \text{ MPa}$) resta quasi invariato rispetto a quello calcolato sulla geometria RTS.

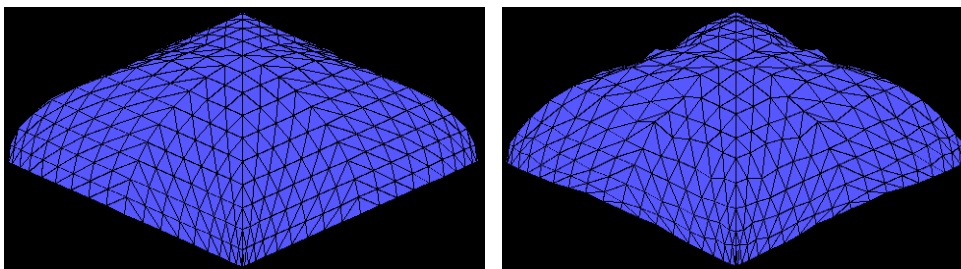


Figura 73: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra)

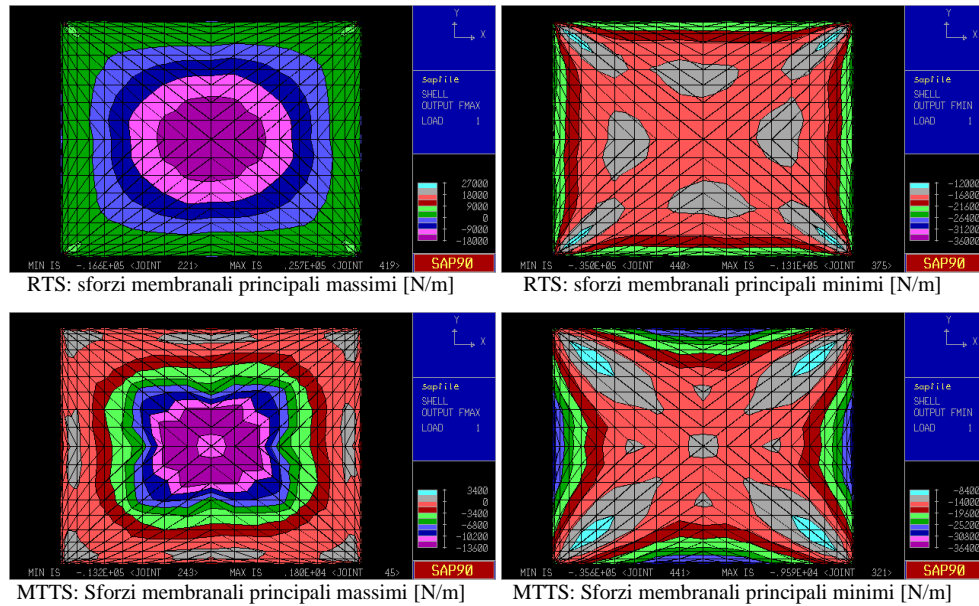


Figura 74: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando agenti carichi permanenti e variabili.

7.3.3 Carichi permanenti e carichi variabili agenti su metà della struttura

La volta è analizzata nella combinazione di carico LC_{St} , assumendo che i carichi variabili agiscano solo su metà della superficie (Figura 75).

Sgli sforzi membranali principali minimi e massimi relativi alle geometrie RTS e MTTs sono rappresentati nelle mappe di isovalori di Figura 77.

Le tensioni principali minime e massime sulla geometria RTS sono, rispettivamente, pari a $\sigma_{max}=8,08 \times 10^{-2}$ MPa and $\sigma_{min}=-1,18 \times 10^{-1}$ MPa, mentre il valore medio delle tensioni principali di trazione è pari a $\sigma_{ave}=1,03 \times 10^{-8}$ MPa.

Le analisi svolte mostrano che i valori della massima tensione principale ($\sigma_{max} = 6,04 \times 10^{-3}$ MPa) ed il valor medio della tensioni principali di trazione ($\sigma_{ave}=2,75 \times 10^{-9}$ MPa) sul modello MTTs sono significativamente minori dei corrispondenti valori attinti sul modello RTS ed, inoltre, il valore minimo della tensione principale di compressione calcolato su MTTs ($\sigma_{min}=-1,18 \times 10^{-1}$ MPa) è grossomodo invariato rispetto al corrispondente valore calcolato sul modello RTS.

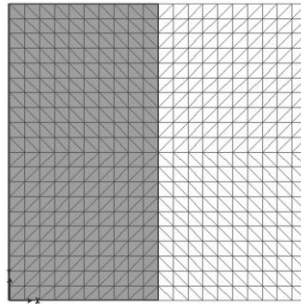


Figura 75: Vista in pianta del modello FEM con indicazione dell'area – in grigio – di applicazione dei carichi variabili

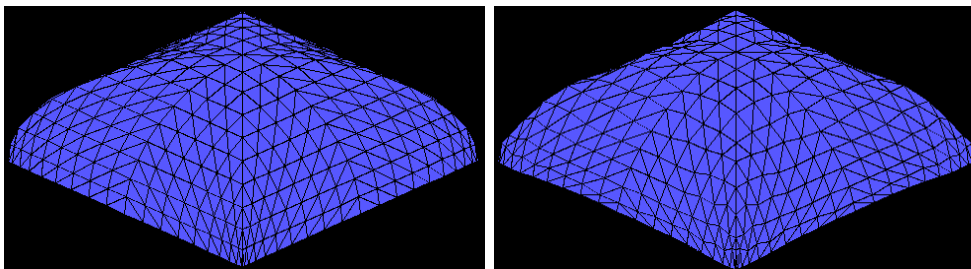


Figura 76: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra)

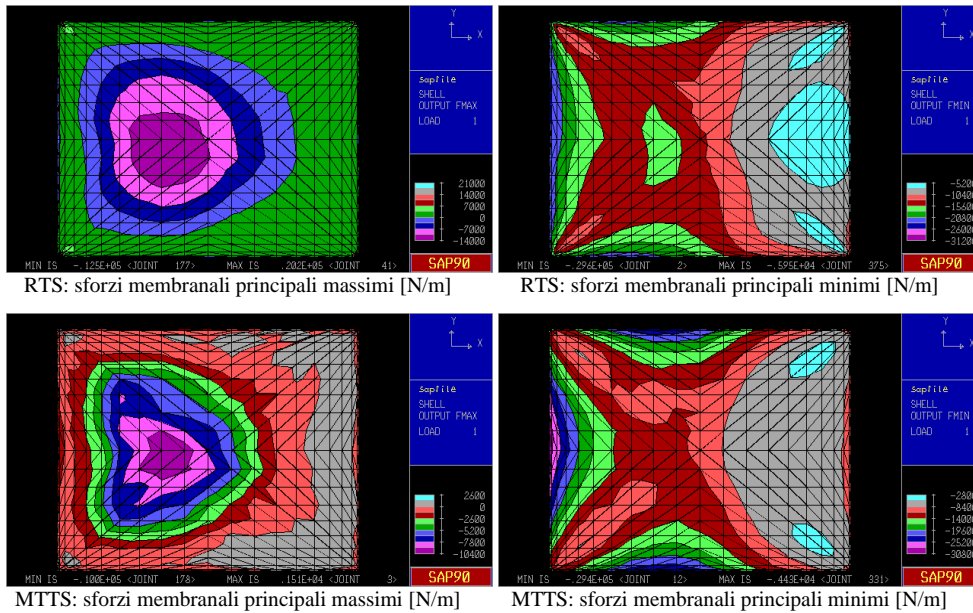


Figura 77: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando agenti carichi permanenti e variabili solo su metà della superficie

7.3.4 Carichi sismici e rinforzi localizzati con FRCM

Esaminiamo la volta soggetta alla combinazione di carico dinamico di progetto definita di seguito:

$$LC_{Dyn} = E + G_1 + (G_{2,1} + G_{2,2}) + \psi_{2,1} Q$$

dove:

- E è il carico dovuto all'azione sismica pensata agente lungo la direzione X del sistema di riferimento cartesiano assunto nel modello FEM della volta;
- G_1 è il carico permanente dovuto al peso proprio della volta;
- $G_{2,1}$ è il carico permanente dovuto al peso proprio del materiale di rinforzo;
- $G_{2,2}$ è il carico permanente relativo al peso proprio di altri elementi non strutturali (massetti, pavimenti, etc.), assunto pari a $3,00 \text{ kN/m}^2$;
- $\psi_{2,1}$ è il coefficiente di combinazione assunto pari a $0,8$;
- Q sono i carichi variabili assunti pari a $4,00 \text{ kN/m}^2$.

Gli effetti dell'azione sismica sono modellati per mezzo di forze orizzontali in accordo ad un approccio statico convenzionale (European Standard EN 1998-1). L'intensità di tali forze sismica è assunta essere pari al 50% dell'intensità dei carichi verticali.

Le mappe degli isovalori degli sforzi membranali massimi e minimi attinti negli elementi shell sono mostrati in Figura 79.

Le tensioni principali massime sul modello RTS ed MTS sono rispettivamente pari a $\sigma_{\max}=3,50 \times 10^{-1} \text{ MPa}$ e $\sigma_{\max}=1,50 \times 10^{-1} \text{ MPa}$; i valori minimi delle tensioni principali sul modello RTS ed MTS sono rispettivamente pari a $\sigma_{\min}=-4,28 \times 10^{-1} \text{ MPa}$ e $\sigma_{\min}=-5,28 \times 10^{-1} \text{ MPa}$, respectively.

Ancora con riferimento ai due modelli RTS e MTS, i valori medi delle tensioni principali di trazione sono rispettivamente pari a $\sigma_{\text{ave}}=4,00 \times 10^{-8} \text{ MPa}$ e $\sigma_{\text{ave}}=2,65 \times 10^{-8} \text{ MPa}$.

Vale la pena di notare che, anche in questa simulazione, si può ottenere una rilevante riduzione della tensione principale massima di trazione (-57%) considerando la geometria MTS come una configurazione alternativa alla RTS.

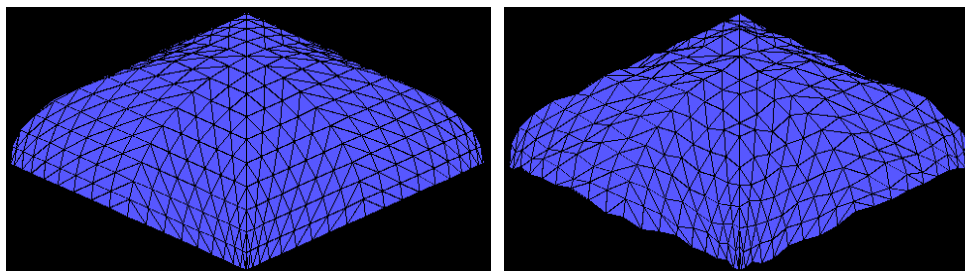


Figura 78: i modelli FEM nelle configurazioni RTS (a sinistra) e MTTs (a destra)

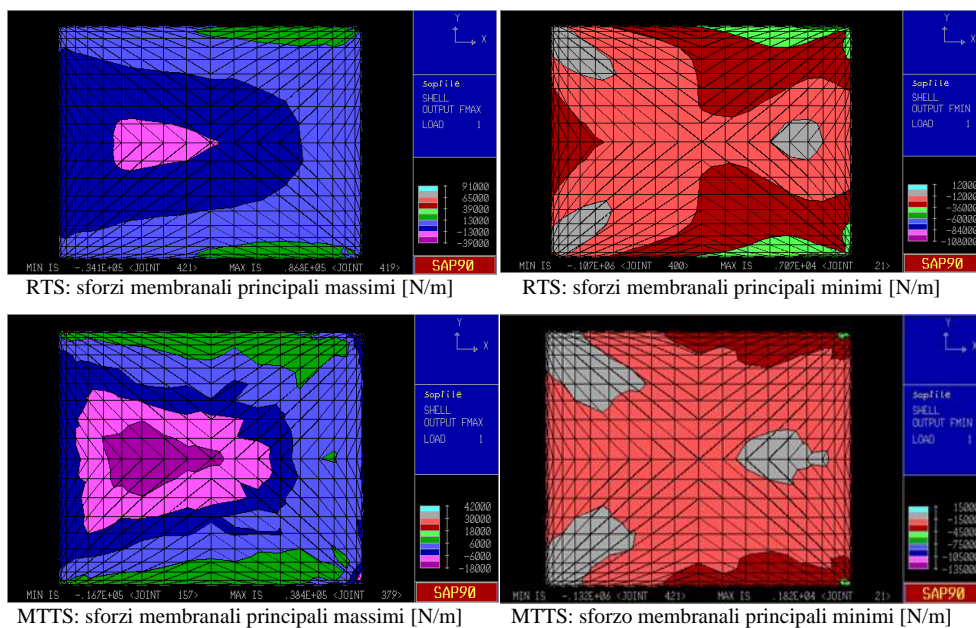


Figura 79: Viste in pianta della volta non rinforzata, con mappa degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minimi; analisi svolta considerando la combinazione di carico LC_{dyn} (carichi permanenti, carichi variabili ed azione sismica)

L'analisi FEM condotta sul modello MTTs ha evidenziato che, in prossimità del perimetro di base della volta, le tensioni principali di trazione assumono valori comparabili alla tensione di rottura a trazione della muratura di tufo ($1,00 \times 10^{-1}$ MPa) e le corrispondenti direzioni principali sono all'incirca orizzontali.

Pertanto, si propone un intervento di consolidamento con un rinforzo esterno in FRMC [213]÷[216].

I compositi adottati allo scopo, sono strisce di FMRC ad orditura monodirezionale (Figura 80) che esibiscono le proprietà meccaniche riportate in Tabella 4.

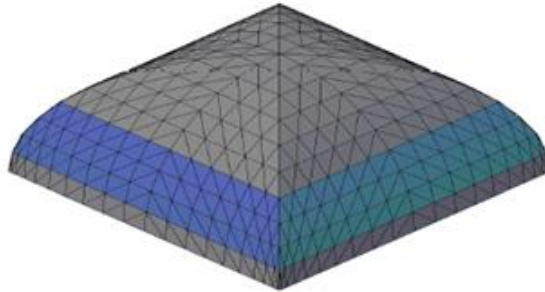


Figura 80: Vista assometrica del modello FEM della volta rinforzata; le strisce di FRCM sono applicate sulle parti evidenziate in blu

Carbon fiber	Cementitious Matrix	
Tensile strenght	4800 MPa	Compressive strenght ≥ 20.0 MPa (after 28 d)
Young modulus	240 GPa	Flexural strenght ≥ 3.5 MPa (after 28 d)
Density	1.82 g/cm ³	Young modulus ≥ 7000 MPa (after 28 d)
Ultimate strain	1.8 %	

Tabella 4: proprietà meccaniche del FRCM

L'orientazione delle fibre di FRCM è assunta essere parallela al perimetro di base della volta;

L'analisi FEM sul modello MTTs della volta rinforzata (Figura 81) restituisce i valori minimi e massimi degli sforzi membranali, resi in Figura 82 sotto forma di mappa degli isovalori.

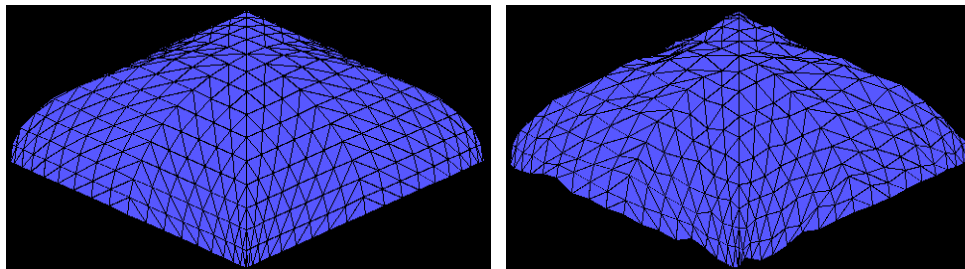


Figura 81: vista del modello MTTs

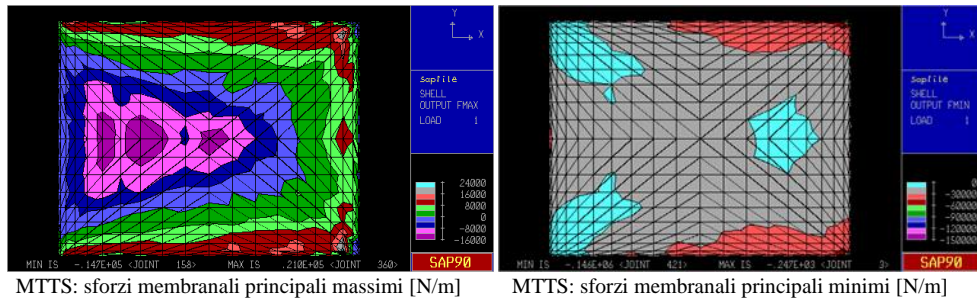


Figura 82: viste in pianta del modello FEM MTTS rinforzato con FRM; mappe degli isovalori degli sforzi membranali principali massimi e minime

I corrispondenti valori delle massime tensioni di trazione nelle porzioni di muratura non rinforzate, sono minori della resistenza a trazione della muratura stessa.

Giuseppe Teodosio

*Tecnologia, modellazione meccanica
e rinforzo strutturale con materiali innovativi
di strutture curve in muratura*

CAPITOLO 8. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Nel presente lavoro è stato messo a punto un modello numerico avanzato per l'analisi dell'equilibrio di volte in muratura rinforzate e non.

Il modello proposto permette di approssimare il comportamento della muratura quale membrana non resistente a trazione (*thrust surface*), attraverso un'analisi elastica lineare riferita ad una superficie delle pressioni a trazione minima (MTTS *Minimum Tension Thrust Surface*).

Tale superficie è ricercata a mezzo di una procedura di riallocazione dei nodi della mesh descrittiva della volta (*r-adaptive mesh*), costituita da elementi *shell* a prevalente comportamento membranale.

Nel dettaglio, la procedura proposta si basa sulla ricerca, per il tramite di un algoritmo genetico di tipo BGA (*Breeder Genetic Algorithm*), di una superficie contenuta entro un dominio tridimensionale di progetto (coincidente con il volume della volta nel caso di muratura non rinforzata), che, per assegnati carichi sollecitanti l'elemento murario, garantisca la minimizzazione del valor medio delle tensioni principali di trazione nella muratura non rinforzata (*fitness*).

La procedura messa a punto è stata applicata al caso studio di volta a padiglione in muratura di tufo giallo, soggetta a diverse combinazioni di carico, sia statiche che dinamiche.

I risultati ottenuti per tutte le predette azioni hanno evidenziato valori medi delle tensioni principali di trazione nella configurazione MTTS (*Minimum Tension Thrust Surface*) significativamente ridotti rispetto a quelli determinati dall'analisi FEM svolta con riferimento alla superficie media della volta (RTS *Reference Thrust Surface*).

La volta esaminata è risultata altresì vulnerabile alle azioni sismiche nella configurazione MTTS, oltre che in quella RTS, in ragione del superamento della resistenza a trazione della muratura in prossimità del perimetro di base. Si è pertanto ipotizzato un possibile intervento selettivo di consolidamento mediante un rinforzo in FRCM da applicare in corrispondenza di dette zone.

La volta così rinforzata è stata successivamente analizzata con il ridotto modello, ricercando, nella specie, la configurazione MTTS, mediante la medesima funzione di fitness impiegata per gli altri casi, seppur ristretta ai nodi della muratura non rinforzata. Il competente stato tensionale è risultato staticamente ammissibile, a riprova dell'efficacia dell'approccio formulato, che può costituire, pertanto, un utile strumento per valutare la vulnerabilità di strutture curve in muratura e per progettare schemi di rinforzo ottimali.

È opportuno rilevare, infine, come il modello proposto esibisca un'applicabilità del tutto generale ad un qualsiasi carico arbitrario e, dunque, consenta di superare le restrizioni sulle condizioni di carico che competono tipicamente agli approcci continui e non, basati sulla funzione delle tensioni o la Thrust Network Analysis (cfr. CAPITOLO 5).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] AA. VV., *Conoscenze e sviluppi teorici per la conservazione di sistemi costruttivi tradizionali in muratura*, Atti del Convegno di Studi, Bressanone 23-26 Giugno 1987, Libreria progetto editore, Padova 1987.
- [2] AA.VV., *Diagnosi dei dissesti e consolidamento degli edifici*, a cura di G. Fienco, Edizioni scientifiche italiane, Napoli 1978.
- [3] AA.VV., *Le volte in muratura tra tecnologia antica e tecnologia moderna*, Atti del Convegno di Studi, Padova 16 Dicembre 1989, Eurograf, Padova 1989.
- [4] AA. VV., *Lo specchio del cielo*, a cura di Conforti C., Electa, Milano 1997.
- [5] AA.VV., *Manuale del recupero del comune di Città di Castello*, a cura di Giovanetti F., Edizioni Dei, Tipografia del Genio Civile, Roma 1992.
- [6] Abraham P., *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*, Paris 1935.
- [7] Abramson D., *The Bank of England*, in AA.VV., *John Soane Architetto: 1753-1837*, Skira, Milano 2000.
- [8] Aceto F., *Cantieri medievali*, Jaka Book, Milano 1995.
- [9] Adam J.P., *L'arte di costruire presso i romani*, Longanesi e C, Milano 1998.
- [10] Alberti L. B., *L'architettura (De re aedificatoria)*, a cura di Orlandi G. e Portoghesi P., edizioni il Polifilo, Milano 1966.
- [11] Altin M., *The structural analysis of domes: from Pantheon until Reichstag*, in *Historical construction*, P.B. Lourenco, P. Roca eds, Guimaraes 2001.
- [12] Astrua G., *Manuale pratico del mastro muratore*, Hoepli, Milano 1996.
- [13] Battisti E., *Filippo Brunelleschi*, Editrice Electa, Milano 1989.
- [14] Becchi A., Foce F., *Degli archi e delle volte: arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio, Venezia 2002.
- [15] Bonavia M., *Volte*, in *Manuale del recupero del Comune di Roma*, Edizioni DEI, Roma 1989.
- [16] Bonelli R., Bozzoni C., Franchetti Pardo V., *Storia dell'architettura medievale*, Laterza, Bari 1998.

- [17] Borea E., *Le cupole nelle stampe*, in *Prospettiva* n. 93-94, pp 213-224.
- [18] Bosc E., *Dictionnaire raisonné d'architectures et des sciences et arts qui s'y rattachent*, Tomo 4, voce: voûte, Librairie de Firmin-Didot et C., Parigi 1877-1880.
- [19] Bossut N., *Trattato elementare di meccanica del sig. abate Bossut tradotto dalla terza edizione francese con note; ed un appendice contenente due memorie dello stesso autore sull'equilibrio delle volte*, stamperia del R.I. Monastero di S. Salvatore, Pavia 1788.
- [20] Breymann G. A., *Archi, volte, cupole*, traduzione italiana a cura dell'ing. Valentini C., Dedalo, Roma 2003.
- [21] Buti G., *Strutture, elementi e tipi edilizi*, in *Enciclopedia universale dell'arte*, vol. VIII, Novara 1982 (ad vocem).
- [22] Caleca L., De Vecchi A., *Tecnologie di consolidamento delle strutture murarie*, Libreria Dario Flaccovio Editrice, Palermo 1987.
- [23] Cangi G., *Manuale del recupero strutturale e antisismico*, DEI Tipografia del Genio Civil, Roma 2005.
- [24] Cantalupi A., *Raccolta di tavole, formole ed istruzioni pratiche per l'ingegnere architetto e pel meccanico*, Tip. Domenico Salvi e Comp., Milano 1867.
- [25] Castigliano A., *Manuale pratico per gli ingegneri*, Augusto Federico Negro Editore, Torino 1882.
- [26] Cattaneo P., Barozzi da Vignola G., *Trattati (1554)*, Edizioni Il Polifilo, Milano 1985.
- [27] Cattaneo L., *L'arte muratoria*, Vallardi, Milano 1889.
- [28] Cigni G., *Il consolidamento murario. Tecniche d'intervento*, Edizioni Kappa, Roma 1978.
- [29] Choisy A., *L'art de batir chez les byzantins*, Arnaldo Forni Editore, Parigi 1883.
- [30] Ciaccia P., *Caratteri costruttivi dell'edilizia storica : diagnosi dei dissesti : tecniche di intervento*, SE, Napoli 2003.
- [31] Claudel, J., Laroque, L., *Pratique de l'art de construire*, Dunod, Paris 1863.
- [32] Cloquet, L., *Traité d'architecture. Elements de l'architecture, type d'édifices estétique, composition et pratique de l'architecture*, ch. Beranger, Parigi 1911-22.

- [33] Codazza G., *Nozioni teoriche-pratiche sul taglio delle pietre e sulle centine delle volte*, Tipografia Bizzoni, Pavia 1844.
- [34] Codazza G., *Sull'equilibrio astratto delle volte*, Tipografia Bizzoni, Pavia 1847.
- [35] Croci G., *Le grandi cupole del passato: San Pietro*, in "recupero e conservazione", n. 72 2006.
- [36] Curioni G., *L'arte di Fabbricare. Costruzioni civili, stradali, idrauliche*, Negro, Torino 1870.
- [37] D'Ayala D., *In tema di comportamento strutturale delle cupole in muratura*, Università di Roma "La Sapienza", tesi di dottorato in Ingegneria delle strutture, Roma, febbraio 1994.
- [38] De Cesaris F., *Gli elementi costruttivi tradizionali*, in *Trattato di restauro architettonico*, a cura di Giovanni Carbonara, UTET, Torino 1996.
- [39] Defez A., *Il consolidamento degli edifici. Lezioni del corso tenuto alla Facoltà di Architettura di Napoli*, Liguori Editore, Napoli 1981.
- [40] De la Ruffiniere du Prey P., *John Soane, the making of an architect*, Academy Editions, Londra 1982.
- [41] Della Torre S., *Alcune osservazioni sull'uso degli incatenamenti lignei in edifici in edifici lombardi dei secoli XVI-XVII*, in *Il modo di costruire*, EdilStampa, Roma 1990.
- [42] Della Torre S., Schofield R., *Pellegrino Tibaldi architetto e il S. Fedele di Milano: invenzione e costruzione di una chiesa esemplare*, Nodo Libri, Como 1994.
- [43] De Sivo B., Cito G., Giordano G., Iovino R., *Il recupero delle coperture*, Dario Flaccovio Editore, Palermo 1992.
- [44] Di Giorgio Martini F., *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*, a cura di Corrado Maltese, edizioni Il Polifilo, Milano 1967.
- [45] Di Pasquale S., *L'arte di costruire*, Marsilio, Venezia 1996.
- [46] Di Pasquale S., *Primo rapporto sulla Cupola di Santa Maria del Fiore*, CLUSF, Firenze 1977.
- [47] Durand J. N. L., *Lezioni di architettura (1819)*, a cura di E. D'Alfonso, CLUP, Milano 1986.
- [48] Escrig F., *Towers and domes*, Computational Mechanics Publications, Boston 1998.

- [49] Foce F., Sinopoli A., *Svolte di pensiero nella riflessione scientifica sulla statica degli archi in muratura*, in “Costruire in laterizio”, n. 52-53/1996, Faenza editrice, Faenza 1996.
- [50] Gallaccini T., *Trattato sopra gli errori degli architetti*, Gregg International Publishers Limited, Westmead 1970.
- [51] Giustina I., *Problemi di lessico tecnico nella documentazione relativa a cantieri ricchiniani*, in *Storia delle tecniche murarie e tutela del costruito, esperienze e questioni di metodo*, a cura di Della Torre S., Guerini Studio, Milano 1996.
- [52] Guarini G., *Architettura civile*, a cura di Tavassi La Greca B., Edizioni Il Polifilo, Milano 1968.
- [53] Guasti C., *La cupola di Santa Maria del Fiore*, Forni, Firenze, 1974.
- [54] Gulli R., Mochi G., *Bovedas tabicadas: architettura e costruzione*, CDP Editrice, Roma 1995.
- [55] Heyman J., *Arches, vaults and buttresses*, Variorum, Norfolk 1996.
- [56] Heyman J., *The masonry arch*, Ellis Horwood Lim., Chichester 1982.
- [57] Huerta S., *Oval domes: History, Geometry and Mechanics*, in “Nexus Network Journal”, vol. 9, n. 2, 2007.
- [58] Krautheimer R., *Architettura paleocristiana e bizantina*, Einaudi, Torino 1986
- [59] Krautheimer R., *Tre capitali cristiane*, Einaudi, Torino 1987.
- [60] Lancaster L.C., *Concrete vaulted construction in Imperial Rome*, Cambridge University press, Cambridge 2005.
- [61] Levi C., *Trattato teorico-pratico di costruzioni civili, rurali, stradali ed idrauliche*, vol. I e II, Ulrico Hoepli, Milano 1932.
- [62] Lugli G., *La tecnica edilizia romana con particolare riguardo a Roma e Lazio*, Vol. I, Giovanni Bardi Editore, Roma 1957.
- [63] Mainstone R., *Hagia Sophia: architecture and liturgy of Justinian’s great church*, Thames and Hudson, London 1997.
- [64] Mango C., *Architettura bizantina*, Electa, Milano 1978.
- [65] Mastrodicasa S., *Dissesti statici delle strutture edilizie*, Hoepli, Milano 1993.

- [66] Mezzanotte G., *Percorsi del restauro in San Faustino a Brescia*, Edizioni Il Polifilo, Università degli Studi di Brescia 1997.
- [67] Milizia F., *Principi di architettura civile (1785)*, a cura di Giovanni Antolini, Gabriele Mazzotta editore, Milano 1972.
- [68] Mirabella Roberti G., Spina O., Discrete Element Analysis of the Sardinian Nuraghe, proc. 3rd Int. Sem. on Historical Constructions, P.Lourenço and P. Roca Ed., Guimarães 2001, pp. 719-728.
- [69] Nikolinakou M. A., Tallon A. J., *New research in early gothic flying buttresses*, proceeding of Second Interantional Congress on Construction History, Cambridge University 2006.
- [70] Palladio A., *I quattro libri dell'architettura (1570)*, a cura di Magagnato L. e Marini P., Edizioni Il Polifilo, Milano 1980.
- [71] Poletti M., Terrugi S., *Le volte del San Fedele di Milano: la modellazione agli elementi finiti come supporto per un'analisi costruttiva secondo la teoria delle soluzioni staticamente ammissibili*, relatore Della Torre S., correlatore Tomasoni E., Facoltà di Architettura, Politecnico di Milano, A.A. 2002-2003.
- [72] Protti E., *Archi, volte, scale nella moderna edilizia*, Edizioni tecniche utilitarie, Bologna 1935.
- [73] Roca P., *Studies on the structure of Gothic Cathedrals*, in Historical Construction, P.B. Lourenco, P. Roca Eds, Guimaraes 2001.
- [74] Rondelet J. B., *Trattato teorico e pratico dell'arte di edificare*, a cura di Soresina B., Tomo II, seconda parte, Tomo III, Editrice coi tipi di Caranenti L., Mantova 1831.
- [75] Rutigliano G., *Le bubbole nella costruzione delle volte*, in "Costruire in laterizio", n. 50-51/1996, Faenza editrice, Faenza 1996.
- [76] Salemi Pace G., *Sull'equilibrio delle volte simmetriche : note*, M. Amenta, Palermo 1884.
- [77] Salimbeni L., *Degli archi e delle volte libri sei di Leonardo Salimbeni.*, per Dionigi Ramazzini, Verona 1787.
- [78] Sanpaolesi P., *Strutture a cupola autoportanti*, in "Palladio", n. 21, 1971.
- [79] Scamozzi V., *L'idea dell'architettura universale (1615)*, Gregg, Ridgewood 1964.
- [80] Scurati Manzoni P., *L'architettura romana dalle origini a Giustiniano*, Guerini Studio, Milano 1991.

- [81] Serlio S. *I sette libri dell'Architettura*, Arnoldo Forni editore, Bologna 1987.
- [82] Storz S., *La tecnica edilizia romana e paleocristiana delle volte e cupole a tubi fittili*, in *Lo specchio del cielo*, a cura di Conforti C., Electa, Milano 1997.
- [83] Terrin J. J., *Cupole*, Jaka books, Milano 2006.
- [84] Valadier G., *L'architettura pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di S. Luca (1831)*, Editorgrafica, Roma 1992.
- [85] Valcarcel, J.P., Dominguez, J., Martin, E., Escrig, F., *Structural behaviour of Gothic vaults*, in Proceedings of the "Eighth International Conference on Structural Studies, Repairs, and Maintenance of Heritage Architecture", vol. 15, Greece 2003, pp 241-249.
- [86] Viollet le Duc E., *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI au XVI siècle*, Tomo IX, voce: voûte, Librairies imprimeries reunies, Parigi 1875.
- [87] Viollet le Duc E., *L'architecture raisonnée : extraits du dictionnaire de l'architecture française*, a cura di Hubert Damish, Hermann, Parigi 1964.
- [88] Vitruvio, *I dieci libri dell'architettura*, a cura di Daniele Barbaro, Edizioni Il Polifilo, Milano 1987.
- [89] Watkin D., *Sir John Soane: the Royal Academy Lectures*, Cambridge University, Cambridge 2000.
- [90] Wittkower R, *Art and architecture in Italy: 1600 to 1750*, Penguin books, Londra 1982.
- [91] ICOMOS, *Recommendations for the analysis, conservation and structural restoration of architectural heritage*; 2001.
- [92] A. Giuffrè, *Lecture sulla meccanica delle murature storiche*, Roma; Edizioni Kappa, 1990.
- [93] Ministero per i Beni e le Attività Culturali (MiBAC), *Linee guida per la valutazione e la riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale*, 2011.
- [94] S. Di Pasquale, *L'arte del Costruire*, Marsilio, Venezia, 1996
- [95] E. Benvenuto, *La scienza delle costruzioni ed il suo sviluppo storico*, Roma; Edizioni di storia e letteratura, 2006.
- [96] J. Heyman, *Equilibrium of shell structures*, Oxford, Oxford University Press, 1977

- [97] P. Roca, M. Cervera, G. Gariup e L. Pelà, *Structural analysis of masonry historical constructions. Classical and advanced approaches*, Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 17, pp. 299-325, 2010.
- [98] M. Giaquinta, E. Giusti, *Reserches of the equilibrium of masonry structures*, Archives of rational Mechanics Analysis, vol. 88, pp. 359-392, 1985.
- [99] G. Anzellotti, *Elasticity with unilateral constraints on the stress*, International workshop on Integral Functionals in calculus of variations; supplemento Rendiconto Circolo matematico di Palermo s.2, 1987 pp. 13-141
- [100] S. Huerta, *Mechanics of masonry vaults: the equilibrium approach*; Structural Anlysis of Historical Construction; Guimaraes, (Portogallo), 2001
- [101] S. Huerta, *The analysis of masonry architecture: A historical approach Architectural*, Scientific Review – vol. 51 n. 4, pp. 297-328, 2008
- [102] M. Como, *Statics of historic masonry constructions*. Springer-Verlag, Berlino (Germania), 2013
- [103] J. Heyman, *The stone skeleton*, International Journal of solids Structural, vol. 2, n. 2, pp. 249-256, 1966.
- [104] A.J.S. Pippard, E.R.J. Ashby, *An experimental study of the voissour arch*, Juornal of the Institute of Civil Engineering, vol. 10, pp. 383-403, 1936.
- [105] A.J.S. Pippard, *The approximate estimation of safe loads on masonry bridges*, Juornal of the Institute of Civil Engineering, vol. 1, pp. 365-371, 1946.
- [106] G. Del Piero, *Limit analysis and no-tension materials*, International Journal of Plasticity, vol. 14, pp. 259-271, 1998.
- [107] D. O'Dwyer, *Funicular analysis of masonry vaults*, Computational Structures, Vol. 73, n. 1-5, pp. 187-197, 1999.
- [108] P. Block, P.T. Ciblac, J.A. Ochsendorf, *Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings*, Comp. Struct. , vol. 84, n. 29-30, pp. 1841-1852, 2006
- [109] J. Heyman, *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*; Cambridge University Press, 1995
- [110] P.J. Fanning, T.E. Boothy, *Three dimensional modelling and full scale testing of stone arch bridges*, Comp. Struct. Vol. 79, n. 29-30, pp. 2645-2662, 2001
- [111] Bacigalupo, A. Brencich, I. Gambarotta, *A simplified assesment of the dome and drum of the basilica of Santa Maria Assunta in Carignano in Genoa*, Eng. Struct., vol. 56, pp. 749-765, 2013

- [112] M. Gilbert, C. Casapulla, H.M. Ahmed, *Limit analysis of masonry block structures with non associative frictional joints using linear programming*, Computer & Structures , vol. 84 p.. 873-887, 2006
- [113] P. Block, J.A. Ochserdorf, *The network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium*, J. IASS, vol. 8, pp. 312-335, 2014
- [114] P. Block, L. Lachauer, *Three dimensional equilibrium analysis of Gothic masonry vaults*, International Journal Architectural Heritage, vol. 8 pp. 312-335, 2014
- [115] L. Andreu, L. Gil, P. Roca, *Computational Analysis of masonry structures with funicular model*, J. Eng. Mechan. ASCE, vol. 133, n. 4, pp. 473-480, 2007
- [116] Andreu, L. Gil, P. Roca, *Analysis of masonry structures by funicular networks*; Proc. Instit. Of Civil Eng. And Comp. Mech., vol 163, n. 3, pp. 147-154, 2010
- [117] F. Fraternali, *A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress function*, Mech. Res. Comm. Vol. 37, n. 2, pp. 198-204, 2010
- [118] F. Fraternali, M. Angelillo, A. Fortunato, *A lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation*, Int. J. Solids Structures, vol. 39, n. 25, pp. 6211-6240, 2002
- [119] E. Babilio, A. Fortunato, M. Lippiello, *A stress approach to the equilibrium of masonry domes: a case study*, Workshop Wonder Masonry 2007
- [120] M. Angelillo, E. Babilio, A. Fortunato, *Singular stress fields for masonry-like vaults*, Continuum mechanics Thermodyn. Vol. 25, pp. 423-441, 2013
- [121] E. Vouga, M. Hobinger, J. Wallner, H. Pottmann, *Design of self supporting surfaces*, in ACM transactions on Graphics SIGGRAPH 2012 Conference Proceedings, 2012
- [122] Baratta, O. Corbi, *Stress analysis of masonry vaults and static efficacy of FRP repairs*, Int. J. Solids Structures, vol. 44, pp. 8028-8056, 2007 Baratta 2007
- [123] Baratta, O. Corbi, *On equilibrium and admissibility coupling in NT vaults of general shape*; Int. J. Solids Structures, vol. 47, pp. 2276-2284 2010
- [124] A.W. Page, *Finite element model for masonry*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, 1267-1285, 1978.
- [125] J. Heyman, *The safety of masonry arches International Journal of Mechanic Science*, 11 363 1969
- [126] E. Collignon, *Cours de mecanique appliquee aux constructions. Premier partie: resistance des materiaux*, 3rd ed. Paris 1885

- [127] S. Huerta, *Arcos, bovedas y cupolas. Geometria y equilibrio en el calculo traditional de estructuras de fabrica*, Madrid, Instituto Juan de Herrera, 2004
- [128] J. Heyman, *The science of structural engineering*, London; Imperial College Press, 1999
- [129] P.B. Lourenço, J.G. Rots, *Implementation of an interface cap model for the analysis of masonry structures*, Computational Modelling of Concrete Structures, Mang. H., Bicanic N. and de Borst R., 123-134, 1994.
- [130] P.B. Lourenço, *Computational strategies for masonry structures*, PhD. Thesis, Delft Univ. of Technology, 1996.
- [131] H.R. Lofti, P.B. Shing, *Interface model applied to fracture of masonry structures*, J. Struct. Engrg. ASCE, 120, 63-80, 1994.
- [132] L. Gambarotta, S. Lagomarsino, *Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications*, Earth. Eng. and Struct. Dynamics, 26, 423-439, 1997.
- [133] A. Signorini, *Un teorema di esistenza ed unicità nello studio dei materiali poco resistenti a trazione*, Tend. Accad. Naz. Lincei, Vol. 2, 1925, pp. 401-406.
- [134] A. Signorini, *Sulla pressoflessione delle murature*, Rend. Accad. Naz. Lincei, vol. 2, 1925, pp. 484-489.
- [135] G. Romano, M. Romano, *Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie VIII, vol. LXVII, 1979.
- [136] S. di Pasquale, *Questioni concernenti la meccanica di mezzi non reagenti a trazione*, Atti VII Congr. Naz. AIMETA, Trieste 1984.
- [137] S. di Pasquale, *Statica dei solidi murari: teoria ed esperienze*. Internal Report, Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze, 1984.
- [138] G. Romano, E. Sacco, *Sul calcolo di strutture non reagenti a trazione*, Atti VII Congr. Naz. AIMETA, Trieste, 1984.
- [139] G. Anzellotti, *A class of non-coercive functionals and masonry like materials*, Ann. Inst. Henri Poincarè, vol. 2, 1985.

- [140] M. Como, A. Grimaldi, *A unilateral model for the limit analysis of masonry walls*, in *Unilateral Problems in Structural Analysis*, (G. Del Piero & F. Maceri Ed. S), CISM-Springer Verlag, 1985.
- [141] M. Giaquinta, G. Giusti, G., *Researches on the equilibrium of masonry structures*, Arch. Rational Mech. Analysis, Vol. 88, pp.359-392, 1985.
- [142] G. del Piero, *Recent developments in the mechanics of materials which do not support tension*, Proc. Int. Colloquium on Free-Boundary Problems, Irsee, 1987.
- [143] G. del Piero, *Constitutive equations and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials*, Meccanica, Vol. 24, 1989, pp.150-162
- [144] T. Panzeca, C. Polizzotto, *Constitutive Equations for no-tension materials* Meccanica, vol. 23, 1988.
- [145] D. J. Steigmann, *Analysis of a theory of elasticity for masonry solids*, J. Mech. Phys. Solids, 39, 543-553, 1991.
- [146] M. Angelillo, F. Rosso, *On statically admissible stress fields for a plane masonry-like structure*, Quart. Appl. Math., Vol. 53, pp. 731-751, 1995.
- [147] M. Angelillo, A. Fortunato, A., *Modellazione di pareti murarie*, Quaderni CNR, 1998.
- [148] T.N. Ganju, *Non-linear finite element analysis of clay brick masonry*, in Proceedings of 6th Australian Conf. on the Mechanics of Structures and Materials, Univ. of Canterbury, 59-65, 1977.
- [149] W. F. Chen, *Plasticity in reinforced concrete*, McGraw-Hill, 1982.
- [150] P.B. Shing, p.b., E. Klamerus, H. Spaeh, J.L. Noland, j.l., *Seismic performance of reinforced masonry shear walls*, in Proceedings of 9th World Conf. on Earthquake Engineering, Japan, 103-108, 1988.
- [151] W. Samarasinghe, A.W. Hendry, *The strength of brickwork under biaxial tensile and compressive stress*, in Proceedings of 7th Int. Symposium on Load Bearing Brickwork, London, 1980.

- [152] W. Samarasinghe, A.W. Page, A.W. Hendry, *A finite element model for the inplane behaviour of brickwork*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 73, 1982.
- [153] A.W. Page, P.W. Kleeman, M. Dhanasekar, *An in-plane finite element model for brick masonry*, New Analysis Techniques for Structural Masonry, S.C. Anand Editor, ASCE Special Publication, New York, 1-18, 1985.
- [154] A.W. Page, M. Danasekar, P.W. Kleeman, *The failure of brick masonry under biaxial stresses*, Proceedings Institute Civ. Engrs., 79, 295-313, 1985.
- [155] R. Contro, G. Sacchi Landriani, *Plane stress analysis for anisotropic no-tension materials with hardening compression*, Eng. Frac. Mech., 21, 947-955, 1985.
- [156] S. Pietruszczak, X. Niu, *A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry*, Int. J. of Solids & Struct., 29(5), 531-546, 1992.
- [157] E. Papa, A. Nappi, *A numerical approach for the analysis of masonry structures*, Masonry International, 7, 18-24, 1993.
- [158] E. Papa, *A unilateral damage model for masonry based on a homogenisation procedure*, Mech. of Cohesive-Frictional Mat. 1, 349-366, 1996.
- [159] L. Gambarotta, S. Lagomarsino, *Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls*, Part I: the mortar joint model and its applications, Earth. Eng. and Struct. Dynamics, 26, 423-439, 1997.
- [160] R. Luciano, E. Sacco, *Homogenization Technique and damage model for old masonry material*, Int. J. Solids and Structures, 34(24), 3191-3208, 1997.
- [161] A. Calliero A., E. Papa, *An elastic-plastic model with damage for cyclic analysis of masonry panels*, in Computer Methods in Structural Masonry (STRUMAS IV), Pande G.N., Middleton J. and Kralj B. (Editors), E&F Spon, 19-26, 1998.
- [162] R. Luciano, E. Sacco, *Damage of masonry panels reinforced by FRP sheets*, Int. J. Solids and Structures, 35 (15), 1723-1741, 1998.
- [163] A.Cecchi, G. Milani, A. Tralli, *Un modello per murature rinforzate con FRP: analisi del comportamento meccanico e sensitività di pannelli murari al variare del posizionamento del rinforzo*, Atti XVI Convegno AIMETA (AIMETA '03), Ferrara, 2003.

- [164] G. Milani, A. Tralli, *A simple micro-mechanical model for the homogenized constitutive equations of masonry*, Atti XVI convegno AIMETA (AIMETA'03), Ferrara, 2003.
- [165] A.W. PAGE, *The biaxial compressive strength of brick masonry*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 71, 1981.
- [166] A. Page, *A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension-tension range*, Int. J. Masonry Constructions, 26-30, 1981.
- [167] C. Darwin, *On the origin of species*, Harvard University; Harvard 1864.
- [168] J.H. Holland, *Adaptation in natural and artificial system*, Mit Press, 1992
- [169] T. Back T., *Evolutionary algorithms in theory and practice*, Oxford University, 1996
- [170] D.E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Wesley, 1989.
- [171] J.H. Holland, *Adaptation in natural and artificial system*, Mit Press, 1992.
- [172] J.H. Holland, *Algoritmi genetici*, Le Scienze, n 289, settembre 1992.
- [173] H. Muhlenbein, D. Schlierkamp-Voosen, *Predictive Models for the Breeder Genetic Algorithm*, in Evolutionary Computation, 1(1): 25-49, 1993
- [174] T. Back, F. Hoffmeister, H.P. Schwefel, *A survey of evolution strategies*, in R.K. Belew and L.B. Booker (editors); fourth International Conference on Genetic Algorithms; San Mateo, California , USA, 1991.
- [175] D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms*, in Search, Optimization and Machine Learning; Addison-Wesley; 1989.
- [176] H.P. Schwefel, *Numerical Optimization of Computer Models*, Wiley, Chichester, 1981
- [177] H. Muhlenbein, M. Schomisch, J. Born, *Parallel genetic algorithm as a function optimizer*, Parallel Computing, 17, - 619-632; 1991

- [178] F. Fraternali, G. Bilotti, *Non-Linear Elastic Stress Analysis in Curved Composite Beams*. *Computers & Structures*, **62**, 837-869, 1997.
- [179] F. Fraternali, *Free Discontinuity Finite element models in two-dimensions for in-plane crack problems*, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **47**, 274-282, 2007.
- [180] F. Fraternali, C.D Lorenz, G. Marcelli, *On the estimation of the curvatures and bending rigidity of membrane networks via a local maximum-entropy approach*, *Journal of Computational Physics*, **231**, 528-540, 2012.
- [181] V.P. Berardi. *Initiation of Failure for Masonry Subject to In-Plane Loads through Micromechanics*. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2016
- [182] J. Heyman, *The stone skeleton*. New York: Cambridge University Press; 1995.
- [183] F. Fraternali, A. Marino, T. El Sayed, A. Della Cioppa. *On the Structural Shape Optimization through Variational Methods and Evolutionary Algorithms*. *Mechanics of Advanced Materials and Structure*, **18**, 225-243, 2011.
- [184] A. Baratta, O. Corbi. *On the statics of No-Tension masonry-like vaults and shells: Solution domains, operative treatment and numerical validation*. *Annals of Solid and Structural Mechanics* **2**, 107, 2011.
- [185] A. Baratta, O. Corbi. *An approach to the positioning of FRP provisions in vaulted masonry structures*. *Composites Part B Engineering*, **53**, 334-341, 2013.
- [186] G. Carpentieri, F. Fabbrocino, M. De Piano, V.P. Berardi, L. Feo, F. Fraternali. *Minimal mass design of strengthening techniques for planar and curved masonry structures*. 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, (ECCOMAS 2016), Chania, Crete, Greece, June 5-10, 2016.
- [187] P. Block, L. Lachauer, M. Rippmann. *Thrust network analysis: design of a cutstone masonry vault*. *Shell structures for architecture: form finding and optimization*, 71-87, 2014.
- [188] F. Fraternali, G. Teodosio, M. De Piano, G. Carpentieri, V.P. Berardi. *Advanced numerical models of masonry vaults*. XXII Congresso Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, Genova, Italy, September 14-17, 2015.

- [189] F. Fraternali, A. Angelillo, F. Fortunato. *A lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation*. International Journal of Solids and Structures, **39**, 6211-6240, 2002.
- [190] F. Fraternali. *A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress functions*. Mechanics Research Communications, **37**, 198-204, 2010.
- [191] L. Soveja, M. Budescu, I. Gosav. *Modelling methods for unreinforced masonry structures*. Construction architecture. Gheorghe Asachi Technical University of Iai; LIX (LXIII), 2013.
- [192] F. Fraternali. *A mixed lumped stress-displacement approach to the elastic problem of masonry walls*. Mechanics Research Communications, **38**, 176-180, 2011.
- [193] M. Angelillo, A. Fortunato, A. Montanino A, Lippiello M. *Singular stress fields in masonry structures: Derand was right*. Meccanica, **49**, 1243-1262, 2014
- [194] D.E. Golberg, M.P. Samtani. *Engineering optimization via genetic algorithm*. 9th Conference Electronic Computation, United States, University of Alabama, Birmingham, February 23-26, 1986.
- [195] W.M. Jenkins. *Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm*. Journal of Structural Engineering, ASCE **118**, 1992.
- [196] P. Hajela, E. Lee, C.Y. Lin. *Genetic algorithms in structural topology optimization*. Mota Soares CA, Bendsøe MP, editors. Topology design of structures, Vol. 227. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [197] C.D. Chapman, K. Saitou, M.J. Jakiela. *Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design*. Journal Mechanical Design, **116**, 1005-1012, 1994.
- [198] S.D. Rajan. *Sizing, shape and topology design optimization of trusses using genetic algorithm*. Journal of Structural Engineering, ASCE, **121**, 1480-1487.
- [199] J.H. Holland. *Outline for a logical theory of adaptive systems*. Journal of the ACM, **9**, 297-314, 1962.
- [200] L.J Fogel, A.J. Owens, M.J. Walsh. *Artificial intelligence through simulated evolution*. New York: John Wiley, 1966.

- [201] D.E. Goldberg, J.H. Holland. *Genetic algorithms and machine learning*. Journal of machine learning, **3**, 95-99, 1988.
- [202] M. Mitchell, S. Forrest. *Genetic algorithms and artificial life*. Artificial life journal **1**, 267 - 289, 1994.
- [203] K. DeJong. *Evolutionary computation: a unified approach*. Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2007), England UK, London, July 7-11, 2007.
- [204] F. Fabbrocino, I. Farina, V.P. Berardi, A.J.M. Ferreira, F. Fraternali. *On the thrust surface of unreinforced and FRP-/FRCM-reinforced masonry domes*. Composites Part B Engineering, **83**,297-305, 2015.
- [205] C. Maenghyo, J. Seongki. *R-Adaptive mesh generation for shell finite element analysis*, Journal of Computational Physics, **199**, 29-16, 2004.
- [206] I. De Falco, R. Del Balio, A. Della Cioppa, E. Tarantino. *A comparative analysis of evolutionary algorithms for function optimisation*. 2th Workshop on Evolutionary Computation (WEC2 1996), Nagoya, Japan, 1996.
- [207] I. De Falco, R. Del Balio, A. Della Cioppa, E. Tarantino. *Optimising constrained continuous multivariable functions with breeder genetic algorithms*. Kundu S, editor. Evolutionary optimization. Polish Academy of Sciences Publisher, 1999.
- [208] H. Mühlenbein, M. Schomisch, J. Born. *The parallel genetic algorithm as function optimizer*. Parallel Computing, **17**, 619-632, 1999.
- [209] G. Magenes. *Masonry building design in seismic areas: recent experiences and prospects from a European standpoint*. 1st European Conference on Earthquake Engineering and Seismology, University of Pavia, (a joint event of the 13th ECEE & 30th General Assembly of the ESC), Geneva, Switzerland, 3-8 September 2006.
- [210] A. Fortunato, F. Fraternali, M. Angelillo. *Structural capacity of masonry walls under horizontal loads*. Ingegneria sismica N1, 41-51 Anno XXXI, 2014.
- [211] *European Committee for Standardization. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - part 1: general rules, seismic actions and rules for buildings* 2004. EN 1998-1. 2004. Brussels, Belgium.
- [212] CSI. *Analysis reference manual for SAP2000®*. Berkeley, California, USA: Computers and structures Inc; 2013.

- [213] L. Ascione, F. Fraternali, *A penalty model for the analysis of composite curved beams*, Computers & Structures, **45**, 985-999, 1992.
- [214] F. Fraternali, J.N. Reddy, *A penalty model for the analysis of laminated composite shells*, International Journal of Solids and Structures, **30**, 3337-3355, 1993.
- [215] L. Ascione, V.P. Berardi, L. Feo, G. Mancusi. *A numerical evaluation of the interlaminar stress state in externally FRP plated RC beams*. Composites Part B: Engineering, **36** (1), 83-90, 2005.
- [216] L. Ascione, V.P. Berardi. *Anchorage device for FRP laminates in the strengthening of concrete structures close to beam-column joints*. Composites Part B: Engineering, **42** (7), 1840-1850, 2011.