



# Università degli studi di Salerno

Dipartimento di Ingegneria Civile

**Dottorato di Ricerca in Rischio e sostenibilità nei sistemi dell'ingegneria civile, edile ed ambientale**

XXX CICLO

Tesi di dottorato in :

## **Volte e cupole in muratura: un approccio basato sull'equilibrio**

Elena De Chiara

### **Tutor**

Prof. Arch. Maurizio Angelillo

### **Coordinatore**

Prof. Ing. Fernando Fraternali

2017/2018



---

## Indice

---

<b>Elenco delle figure</b>	<b>6</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>10</b>
<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
Scopo del lavoro . . . . .	11
Considerazioni preliminari . . . . .	16
Cenni storici . . . . .	20
Comportamento unilaterale e modello di Heyman . . . . .	27
L'arco e la linea delle pressioni . . . . .	29
Statica delle volte e delle cupole con metodi grafici . . . . .	31
Analisi statica della cupola di Sant'Agnese in Agone (Roma) . . . . .	33
<b>1 Modelli unilaterali per le murature</b>	<b>37</b>
1.1 Materiali unilaterali . . . . .	39
1.2 Modello unilaterale per le murature: materiale unilaterale non resistente a trazione . . . . .	41
1.2.1 Comportamento meccanico delle murature . . . . .	41
1.3 Modelli semplificati per le murature . . . . .	48
1.3.1 Modello zero . . . . .	48
1.3.2 Modello uno . . . . .	50

1.3.3	Modello due . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Modello RNRT</b>	<b>52</b>
2.1	Il problema dei valori al contorno . . . . .	54
2.1.1	Campi di tensione e deformazione singolari e delta di Dirac	54
2.1.2	Funzione di Airy . . . . .	60
2.1.3	Il problema di equilibrio per materiali RNRT: campo di tensione statisticamente ammissibile . . . . .	62
2.1.4	Concavità della funzione di Airy . . . . .	63
2.1.5	Il problema di cinematico: campo di spostamenti cinema- ticamente ammissibile . . . . .	64
2.2	Analisi limite applicata alle murature . . . . .	66
2.2.1	Teoremi dell'analisi limite . . . . .	68
2.2.2	Teoremi dell'analisi limite per materiali RNRT . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>70</b>
3.1	Il Metodo . . . . .	70
3.1.1	Descrizione del metodo . . . . .	72
3.2	Formulazione di equilibrio . . . . .	74
3.2.1	Geometria . . . . .	74
3.2.2	Equilibrio membranale nella forma di Pucher . . . . .	76
3.2.3	Tensioni singolari e l'equilibrio nelle membrane unilaterali	77
3.3	Schema computazionale . . . . .	80
3.3.1	Funzione obiettivo . . . . .	85
3.4	Esempi . . . . .	87
3.4.1	Volta a vela . . . . .	87
3.4.2	Volta a crociera . . . . .	90
3.4.3	Volta a padiglione . . . . .	98

---

<b>Indice</b>	<b>5</b>
<b>Conclusioni</b>	<b>106</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>
<b>Siti web</b>	<b>118</b>

---

---

## Elenco delle figure

---

1	Torre dell’Oro (Siviglia) . . . . .	17
2	Torre della Giralda (Siviglia) . . . . .	17
3	Acquedotto romano (Segovia) . . . . .	18
4	Monastero El Escorial (San Lorenzo de El Escorial) . . . . .	18
5	Regole di Fontana per cupole semplici (1694) . . . . .	20
6	La Hire (1695) . . . . .	22
7	Danyzy . . . . .	24
8	Monasterio . . . . .	25
9	Catenaria e catenaria invertita disegnata da Poleni(1748) (sinistra) ; arco in equilibrio con catenaria invertita passante al suo interno(da Heyman [1]) (destra) . . . . .	28
10	Arco etrusco [Durm 1885] (sinistra); Possibile equilibrio tra i blocchi (destra) . . . . .	29
11	Esempio analisi grafica per un arco a tre cerniere (da William S. Wolfe [38]) . . . . .	30
12	Tecnica dello slicing per le cupole in muratura . . . . .	32
13	Cupola della chiesa di Sant’Agnese in Agone . . . . .	32
14	Sezione di S.Agnese (da de Rossi [41]) . . . . .	33
15	Sezione della cupola . . . . .	34
16	Analisi statica del tamburo . . . . .	35

---

17	Analisi statica della cupola . . . . .	36
1.1	Diagrammi sperimentali del comportamento di una muratura a trazione (a) e compressione (b) . . . . .	42
1.2	Fessurazione dovuta a trazione pura . . . . .	44
1.3	Fessurazione dovuta a compressione e taglio . . . . .	45
1.4	Lesioni da schiacciamento . . . . .	46
1.5	Schiacciamento di un pilastro (da Mastrodicasa [48]) . . . . .	46
1.6	Meccanismo fuori piano . . . . .	47
1.7	Meccanismo nel piano . . . . .	47
1.8	Diagramma Tensione-deformazione modello zero . . . . .	49
1.9	Diagramma Tensione-deformazione modello uno . . . . .	50
1.10	Diagramma Tensione-deformazione modello due . . . . .	51
2.1	Spostamento discontinuo lungo una linea retta $\Gamma$ , con tangente $\mathbf{t}$ e normale $\mathbf{m}$ [da Angelillo [47]] . . . . .	58
2.2	Forze agenti su una curva $\Gamma$ [da Angelillo [47]] . . . . .	60
2.3	Funzione delle tensioni di Airy liscia (a) e non liscia (b) [da Angelillo [47]] . . . . .	61
2.4	Dominio degli stati ammissibili per la muratura . . . . .	66
3.1	Membrana e superficie delle tensioni (a), base covariante (b), tensioni (c). . . . .	75
3.2	mesh primaria (a) e mesh duale (b) . . . . .	81
3.3	Proiezione e approssimazione della curvatura . . . . .	82
3.4	Costruzione della matrice dei coefficienti . . . . .	84
3.5	Funzione obiettivo . . . . .	86
3.6	Funzione di forma iniziale $f^o$ per la volta a vela . . . . .	88

---

3.7	Funzione di tensione ottimizzata $F^o$ corrispondente alla funzione di forma $f^o$ . . . . .	88
3.8	Direzioni principali di tensione . . . . .	89
3.9	Funzione di forma iniziale $f^o$ per la volta a crociera . . . . .	90
3.10	Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2) . .	91
3.11	Funzione di tensione ottimizzata $F^o$ corrispondente a $f^o$ . . . . .	91
3.12	Convex Hull . . . . .	92
3.13	Incremento del carico . . . . .	92
3.14	Funzione di tensione a seguito del convex hull . . . . .	93
3.15	Funzione di forma ottimizzata . . . . .	93
3.16	Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale $f^o$	94
3.17	Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2) . .	94
3.18	Funzione di tensione ottimizzata $F^o$ corrispondente a $f^o$ . . . . .	95
3.19	Convex Hull . . . . .	95
3.20	Funzione di tensione a seguito del convex hull . . . . .	96
3.21	Funzione di forma ottimizzata . . . . .	96
3.22	Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale $f^o$	96
3.23	Direzioni principali di tensione . . . . .	97
3.24	Funzione di forma iniziale $f^o$ per la volta a padiglione . . . . .	98
3.25	Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2) . .	99
3.26	Funzione di tensione ottimizzata $F^o$ corrispondente a $f^o$ . . . . .	99
3.27	Convex Hull . . . . .	99
3.28	Incremento del carico . . . . .	100
3.29	Funzione di tensione a seguito del convex hull . . . . .	101
3.30	Funzione di forma ottimizzata . . . . .	101
3.31	Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale $f^o$	102
3.32	Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2) . .	102

---

---

3.33	Funzione di tensione ottimizzata $F^o$ corrispondente a $f^o$ . . . . .	102
3.34	Convex Hull . . . . .	103
3.35	Funzione di tensione a seguito del convex hull . . . . .	103
3.36	Funzione di forma ottimizzata . . . . .	104
3.37	Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale $f^o$	104
3.38	Direzioni principali di tensione . . . . .	105

---

---

## Elenco delle tabelle

---

1	Calcolo peso delle sezioni della cupola . . . . .	35
1.1	Resistenza a compressione ( $f_m$ ), a taglio ( $\tau_o$ ), modulo elastico normale ( $E$ ) e peso specifico ( $w$ ) per diverse tipologie di muratura con malta scadente (da NTC-DM 14.1.2008) . . . . .	43

---

## Introduzione

---

### Scopo del lavoro

Elementi curvi in muratura, quali archi, volte e cupole, rappresentano uno degli elementi strutturali più diffusi, nonché più affascinanti, della Architettura storica mondiale. La maggior parte di queste strutture risale a centinaia di anni fa, e le tecniche con cui si è via via modificata la loro modalità di costruzione si è evoluta durante i millenni, sino a che la costruzione in muratura è stata soppiantata dalle moderne tecniche di costruzione basate sull'utilizzo di nuovi o rinnovati materiali, nuove tecniche e materiali resi disponibili per effetto dalla rivoluzione industriale. Le uniche testimonianze scritte esistenti circa l'insieme di regole tecniche che sono state utilizzate per l'erezione di strutture murarie, anche quelle più complesse, risalgono a tempi piuttosto recenti, un paio di secoli precedenti alle scoperte scientifiche di Galilei e Newton. Da tali scritti si apprende che le regole in base alle quali furono erette opere in muratura quali le Cattedrali Gotiche o le cupole e scale del Barocco europeo, erano pure regole di proporzione. In effetti le tensioni di compressione esistenti nelle murature sono tipicamente molto basse in rapporto alla resistenza del materiale, per cui l'analisi di una struttura muraria può ridursi primariamente alla determinazione di un flusso di forze di compressione in equilibrio con le forze esterne.

Una teoria sensata e ragionevole che spiega l'essenza di questo comportamento in

termini moderni è basata sulle restrizioni che definiscono il materiale unilaterale (No-Tension) di Heyman. Con i suoi contributi, che risalgono al fondamentale lavoro del 1966 ([1]) e che continuano sino ai giorni nostri ([2]), Heyman saggiamente rilegge e riprende il sistema di regole e metodi usati dagli antichi maestri costruttori, inserendo l'analisi delle strutture in muratura nella consolidata cornice dell'Analisi Limite. Nel suo lavoro del 1966, dal titolo "the stone skeleton", Heyman fonde la sua profonda conoscenza dell'allora nascente Teoria della Plasticità (teoria che aveva contribuito a sviluppare a Cambridge sotto la guida di J.F.Baker [3] con contributi precedenti tra cui si ricordano i lavori di Couplet [4] [5], Pippard [6],[7],[8] e di Kooharian [[9]).

Per quanto riguarda le volte e le cupole, è solo recentemente che la teoria di Heyman è stata adottata ed applicata con successo. In questo ambito, esistono due approcci alternativi che sono stati proposti.

Il primo è la così detta "Thrust Network Analysis" che origina dal lavoro di O'Dwyer del 1998 [10] e che è stata successivamente sviluppata da Ochsendorf e Block e Block nel 2008 [11] e successivamente applicata da Vouga et al [12], De Goes et al [13], Block & Lachauer [14], Miki et al [15], Marmo e Rosati [16].

Il secondo è il "Thrust Surface Method", proposto da Angelillo e Fortunato nel 2004 [17] e successivamente applicato estensivamente da Fraternali [18], Baratta [19], Angelillo et al [20], Angelillo [21] [22], Lepore [23].

Questo lavoro di tesi è rivolto all'applicazione del "Thrust Surface Method", ed in particolare all'implementazione al computer di un codice di calcolo in grado di produrre stati di tensione membranali di compressione su superfici interne alla muratura, in equilibrio con assegnati carichi esterni. In effetti, sebbene il "Thrust Surface Method" sia essenzialmente basato sull'equilibrio dei carichi su di una superficie di membrana, ci sono delle differenze sostanziali rispetto ad analoghe approssimazioni, come quelle che conducono a teorie tecniche di membrana per

---

gusci elastici sottili. In effetti una volta a botte in muratura ha una snellezza (rapporto luce su spessore) dell'ordine di 15-20 ed una cupola di 35-50, mentre la teoria di membrana elastica si applica tipicamente a strutture sottili con snellezze superiori a 100. La superficie  $S$  che si considera nel caso di tali strutture elastiche sottili è in effetti la superficie media del guscio, non esistendo grossi margini di manovra per modificare tale superficie. L'idea base del "Thrust Surface Method" è invece che la superficie  $S$  rappresenti solo il supporto di una tensione ammissibile (ovvero equilibrata con i carichi e di compressione) contenuta all'interno dello spessore della volta, cui il continuo circostante trasmette l'azione dei carichi (sfruttando eventualmente anche piccole tensioni di trazione). Tale circostanza è del tutto analoga alla ricerca di una struttura interna alla muratura che si effettua con la TNA, con la quale la scelta della struttura, che è l'analogo discreto della superficie  $S$ , si porta a termine attraverso un processo di ottimizzazione.

Questa libertà di scelta della superficie  $S$  fornisce un vasto repertorio di possibili stati di tensione ammissibili, molto più ampio di quello ottenibile per gli archi (in cui le forme possibili sono pesantemente ristrette dall'equilibrio) e rappresenta l'aspetto peculiare sia della TNA che del TSM. In particolare, con il "Thrust Surface Method" l'equilibrio della membrana sotto l'effetto di carichi assegnati è un problema staticamente determinato, nel senso che tre sono le componenti di tensione incognite e tre le condizioni di equilibrio. Per una forma assegnata  $S$  il repertorio delle tensioni equilibrate è in effetti determinato dalle condizioni al contorno. La scelta della forma  $S$  non è comunque completamente libera, dato che le tensioni di membrana devono essere di pura compressione. Tutto ciò è esemplificato da un semplice esempio, una cupola semisferica di raggio interno  $R$  e spessore costante  $T$ , soggetta ad un carico verticale uniforme per unità di area di  $S$ , ossia al peso proprio.

Se la superficie  $S$  è scelta come la calotta sferica di raggio  $R + \frac{T}{2}$ , data la simmetria

assiale della struttura e del carico, la soluzione è univocamente determinata. Compressioni variabili si sviluppano radialmente, mentre le tensioni circonferenziali, di compressione in una calotta superiore al  $30^\circ$  parallelo, divengono di trazione nella fascia equatoriale compresa tra l'equatore e il  $30^\circ$  parallelo.

Tale soluzione equilibrata, che prevede spinte nulle al bordo, è ovviamente non ammissibile per il modello di Heyman e non può quindi essere accettata. In effetti modificando la forma  $S$ , ad esempio considerando la struttura composta liscia formata da una calotta sferica al di sopra del  $30^\circ$  parallelo e da un paraboloide di forma opportuna nella zona inferiore risulta puramente compressa e diviene accettabile come soluzione equilibrata. Tale soluzione fornisce anche delle spinte non nulle che rappresentano una stima ragionevole delle spinte al bordo della cupola. Lo scopo principale di questa tesi è quello di proporre un metodo per rendere automatica la ricerca di un campo di tensioni ammissibile per una volta di forma arbitraria, basato sulla soluzione iterativa di un problema determinato, in cui il ruolo dell'incognita alternativamente si scambia tra la forma e la tensione. La possibilità pratica di costruire tale procedura iterativa parte dalla formulazione dell'equilibrio di membrana su di una superficie  $S$  secondo lo schema di Pucher [24]. Nel suo geniale lavoro del 1934, utilizzando mezzi analitici primitivi, Pucher, introducendo come variabili primali le così dette "tensioni proiettate", mostra come le tre equazioni di equilibrio di  $S$  possono essere disaccoppiate in due equazioni che rappresentano l'equilibrio superficiale di  $S$ , indipendenti dalla geometria della membrana, e in una equazione che rappresenta l'equilibrio trasversale di  $S$ , equazione in cui la curvatura di  $S$  determina i coefficienti. Questo sistema di equazioni si ottiene in effetti con alcuni elementari passaggi utilizzando il formalismo della geometria differenziale di Riemann e Levi Civita, con tutti i vantaggi che tale approccio matematico consolidato può fornire alle successive elaborazioni (post-processing). La soluzione generale delle due equazioni superficiali può

---

esprimersi in termine di una funzione  $F$  che rappresenta il potenziale delle tensioni (funzione di Airy), e la equazione di equilibrio trasversale si riduce ad una equazione differenziale del secondo ordine lineare in  $F$  i cui coefficienti sono rappresentati dall'Hessiano della funzione  $f$  che descrive  $S$  in una rappresentazione parametrica alla Monge.

La restrizione che il materiale sia esclusivamente compresso impone una restrizione sul potenziale di tensione:  $F$  deve essere concava, ossia il suo Hessiano deve essere semi-definito negativo.

Anche la funzione  $f$  è ristretta dalla condizione che i valori di  $f$  siano contenuti, in ogni punto, nell'intervallo definito dall'estradosso ed intradosso della volta. La procedura iterativa che si propone, che parte da una superficie assegnata  $f^o$ , consiste in una strategia basata sulla ottimizzazione per generare successive funzioni di tensione  $F^o, F1, F2, \dots, Fn, f1, f2, \dots, fn$ , con l'obiettivo di ottenere in modo automatico una funzione di tensione quanto più possibile concava ed una superficie di membrana quanto più vicina possibile alla superficie media della volta.

## Considerazioni preliminari

La muratura, *"l'operazione e la tecnica del costruire strutture murarie usando laterizi o pietre e calce, cemento o altri agglomeranti"*, rappresenta una delle tecniche costruttive più antiche, nascendo in contemporanea con i primi insediamenti permanenti. In generale le strutture murarie sono costruite impilando pietre in modo ordinato, sistemando pietre più piccole o malta per riempire i vuoti tra gli elementi.

All'interno di una singola struttura si possono facilmente trovare diversi tipi di murature, e lo stesso accade anche considerando un singolo elemento della struttura, che può essere anch'esso costituito da tipologie di muratura differenti [25].

La muratura è, quindi, un materiale composito formato da blocchi e malta con una elevata variabilità nella natura e dimensione degli elementi([26],[27]), ma ciò non deve far pensare a una disposizione casuale degli elementi che la costituiscono. Questi, infatti, sono solitamente disposti in modo ben organizzato e con precisi criteri; in effetti, la maggiore o minore organizzazione dell'apparecchio murario è una delle caratteristiche fondamentali per stimare la qualità muraria (esempi di costruzioni in muratura nelle Figure 1, 2, 3 e 4).

Con i progressi scientifici, in particolare nella scienza dei materiali, nel corso degli anni è andata sviluppandosi sempre più la tendenza a progettare i materiali basandosi sull'ottimizzazione delle loro proprietà meccaniche, sfruttando le moderne tecniche di omogeneizzazione che consentono di catturare i tratti salienti del comportamento macroscopico dei materiali tenendo in considerazione le caratteristiche microscopiche degli stessi. In questo contesto di progresso e innovazione, e dove l'attenzione alla sicurezza sismica è in continua crescita e sviluppo, gli edifici in muratura, materiale fortemente discontinuo e anisotropo e dalle proprietà meccaniche locali incerte, sono spesso percepiti come costruzioni vecchie

e inaffidabili, a causa della debolezza intrinseca del materiale. Bisogna tuttavia considerare che gli edifici in muratura costituiscono la maggioranza degli edifici dei centri storici Europei, rappresentando uno dei più importanti patrimoni dell'umanità, il che porta alla necessità di capire il materiale e preservare e mantenere intatti tali edifici[26].

Nel cercare di eliminare questa percezione di inaffidabilità nei riguardi di ta-



Figura 1: Torre dell'Oro (Siviglia)



Figura 2: Torre della Giralda (Siviglia)

le tipologia di strutture, spiegando le motivazioni meccaniche che sono alla base del peculiare comportamento delle strutture in muratura tradizionali, vengono in aiuto gli studi effettuati da Jaques Heyman , che nell'introduzione del suo libro [1] mette in evidenza il fatto che due gravi terremoti hanno solo leggermente danneggiato la cattedrale di Santa Sofia (Istanbul) ed i bombardamenti della seconda



Figura 3: Acquedotto romano (Segovia)



Figura 4: Monastero El Escorial (San Lorenzo de El Escorial)

guerra mondiale spesso hanno risparmiato le cattedrali medievali mentre gli edifici moderni attorno ad esse sono andati distrutti (*"the fact remains that two severe earthquakes only slightly damaged Hagia Sophia and the bombardments of the Second World War often resulted in a medieval cathedral left standing in the ruins of a modern city"*). La storia ci dice che le strutture murarie possono rivelarsi estremamente stabili anche in caso di sollecitazioni elevate.

Heyman fornisce semplici motivazioni meccaniche circa la diversità delle costruzioni in muratura rispetto alle strutture moderne:

---

Volte e cupole in muratura: un approccio basato sull'equilibrio

1. Le strutture storiche in muratura sono caratterizzate da livelli di tensione bassi, normalmente di uno o due ordini di grandezza inferiori alla resistenza a compressione del materiale.
2. La stabilità di tali edifici dipende dalla loro geometria e non dalla resistenza del materiale; questo concetto base era ben chiaro ai costruttori antichi che hanno tramandato per secoli le loro conoscenze, basate su successive esperienze, sia verbalmente che attraverso scritti e disegni; in particolare sono andate sviluppandosi regole geometriche per la costruzione delle strutture, che garantivano la stabilità degli edifici.
3. Il materiale murario e le costruzioni in muratura sono progettate per sostenere prevalenti "sforzi" di compressione.
4. La costruzione dell'apparecchiatura muraria è finalizzata ad evitare che si verificino slittamenti.



---

Successivamente **Galileo** nel suo *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze Attenenti alla Meccanica e i movimenti Locali* (1638) tratta della resistenza dei materiali e della cinematica, in particolare, per quel che riguarda la resistenza dei materiali, cerca di risolvere il problema della resistenza della trave, attaccando le regole di proporzione medioevali, dando come motivazione la validità della legge del cubo quadrato, (*quando un oggetto viene sottoposto ad un aumento proporzionale di dimensioni, il suo nuovo volume è proporzionale al cubo del moltiplicatore e la sua nuova superficie è proporzionale al quadrato del moltiplicatore*), facendo pronunciare a Salviati una considerazione finale circa l'impossibilità di costruire navi, edifici e templi di grandezza indefinita, come nemmeno la natura potrebbe generare un albero di dimensioni incommensurabili poichè esso collaserebbe sotto il suo stesso peso. Tali conclusioni portano a definire il problema dell'equilibrio della struttura come un problema di resistenza e non di geometria, l'approccio basato sulla resistenza dei materiali è corretto quando vengono prese in considerazione strutture moderne, in cui si cerca di far lavorare il materiale a livelli di tensioni dello stesso ordine di grandezza delle tensioni limite, ma non è applicabile alle strutture storiche in muratura in quanto, come già accennato, queste lavorano a livelli di tensioni molto bassi rispetto il loro carico limite.[28]

In seguito **Hooke**, studiando la statica degli archi introdusse l'utilizzo in architettura della catenaria. Hooke effettuò esperimenti pratici per validare la sua idea della catenaria, non riuscendo mai a dimostrarla matematicamente, era però consapevole che se ci fosse riuscito avrebbe, allo stesso tempo, trovato la forma "perfetta" dell'arco con applicati gli stessi carichi della catenaria, ma in compressione. Il primo vero studio meccanico fu effettuato da **La Hire** nel 1695 [29], seguito poi da **Gregory**, che nel 1697 effettuò l'analisi matematica del problema della catenaria e concluse che "*se si può trovare una qualsiasi linea di pressione ricadente*

*interamente all'interno della muratura allora l'arco sarà stabile",* il suo approccio fu poi utilizzato da La Hire nel prosieguo dei suoi studi e da Poleni nel 1748 nel suo studio sulla cupola di San Pietro [30].

Altro contributo rilevante fu quello di **Belidor**: nel 1729 [31], usando lo stesso

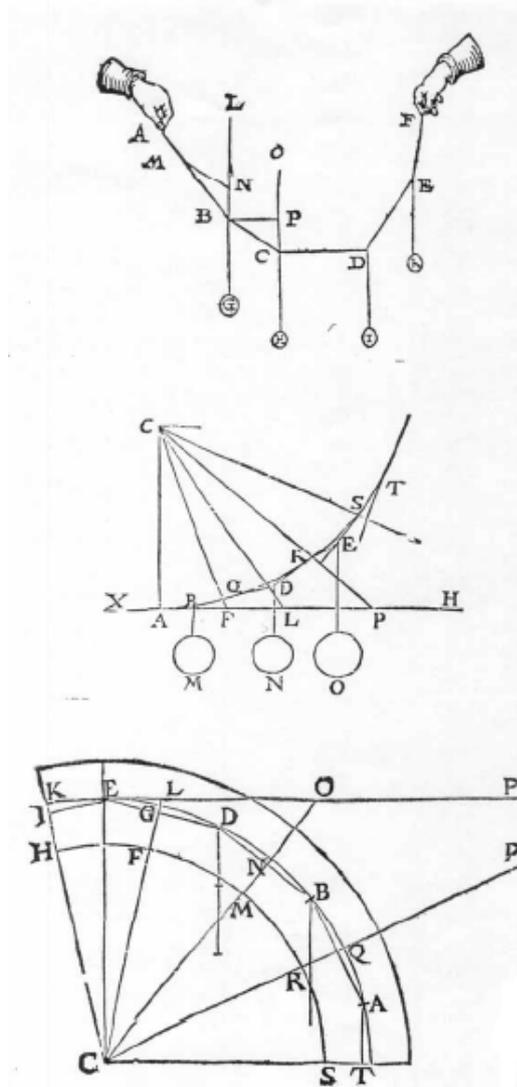


Figura 6: La Hire (1695)

approccio di La Hire, considerando che nell'arco si creano fratture a  $45^\circ$  e che la parte superiore dello stesso si comporta come un cuneo, arriva alla conclusione,

---

Volte e cupole in muratura: un approccio basato sull'equilibrio

peraltro errata, che il collasso dell'arco avviene a causa dello scorrimento tra gli elementi.

Contributo molto importante fu quello dato da **Couplet** [4][5]; Couplet trattò l'argomento in due lavori successivi nel 1729 e nel 1730, in particolare nel secondo lavoro fa precise assunzioni sul materiale, si accorge che i conci di un'arco sono posti in maniera tale che l'attrito renda impossibile lo scorrimento tra gli elementi, considera, inoltre, tensioni basse all'interno del materiale e per questo dà poca importanza alla resistenza. Couplet, considerando la formazione di cerniere a  $45^\circ$ , ricerca lo spessore limite possibile per l'arco per non avere collasso trovando la relazione  $k = \frac{e}{R} = 0.101$  dove  $e$  è lo spessore dell'arco e  $R$  è il raggio medio. Il suo metodo produce risultati fondamentalmente corretti, l'errore principale sta nel considerare l'angolo di frattura fissato a  $45^\circ$ . Successivamente Heyman determinerà la posizione corretta delle cerniere,  $31^\circ$ , e il rapporto corretto  $k = 0.106$ . Il contributo del lavoro di Couplet è enorme. Couplet è il primo a formulare correttamente le ipotesi costitutive del materiale murario e, nel problema dell'equilibrio dell'arco, avendo ben chiara l'idea della linea delle pressioni e dei meccanismi di collasso causati dalla formazione di cerniere è in grado di formulare ipotesi corrette sulla stabilità. Il suo contributo fu subito notato e inserito nei successivi testi di settore.

Nel 1732 **Danyzy** [32], basandosi sul modello di Couplet realizzò dei modelli reali per la valutazione dei meccanismi di collasso degli archi, ottenendo, quindi, una conferma sperimentale degli studi di Couplet (Figura7).

**Coulomb**, presenta nel 1773 [33] un lungo lavoro sulle strutture in muratura, sviluppando una teoria per il corretto dimensionamento dei vari elementi (colonne, archi, travi etc). I suoi studi riguardano principalmente la stabilità degli archi attraverso la ricerca della condizione di equilibrio e la valutazione numerica della spinta. In particolare Coulomb propone valuta un metodo per il calcolo della spin-

ta massima. Per la prima volta si introduce l'idea di un qualche limite (minimo e massimo) per la spinta, questa idea fu successivamente dimostrata da Barlow nel 1846.

Coulomb, inoltre, assume che lo scorrimento è impossibile grazie all'attrito tra i conci e che il collasso avviene quando si formano un numero sufficiente di cerniere all'interno dell'arco.

Uno studio molto interessante, ma mai pubblicato, fu quello di **Monasterio** (Fi-

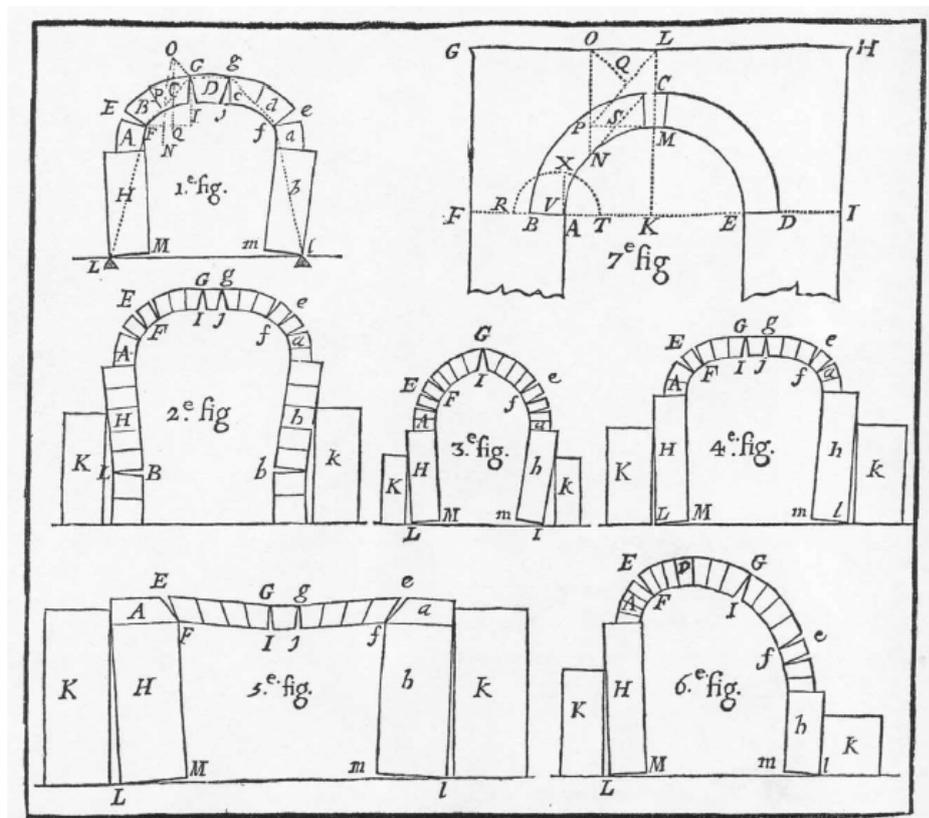


Figura 7: Danyzy

gura 8) , questo lavoro rappresenta la prima applicazione della teoria di Coulomb. Monasterio che, nel suo manoscritto "Nueva Teórica sobre el Empuje de Bóvedas" studia i vari meccanismi di collasso possibili per gli archi, fu il primo a ottenere lo spessore limite di un arco semicircolare in maniera corretta, ponendo le cerniere a

55°, e il primo a proporre un metodo di calcolo, anche se errato, per la valutazione di una cupola emisferica[34].

Una svolta rilevante ed in un certo senso nefasta ai fini della comprensione del

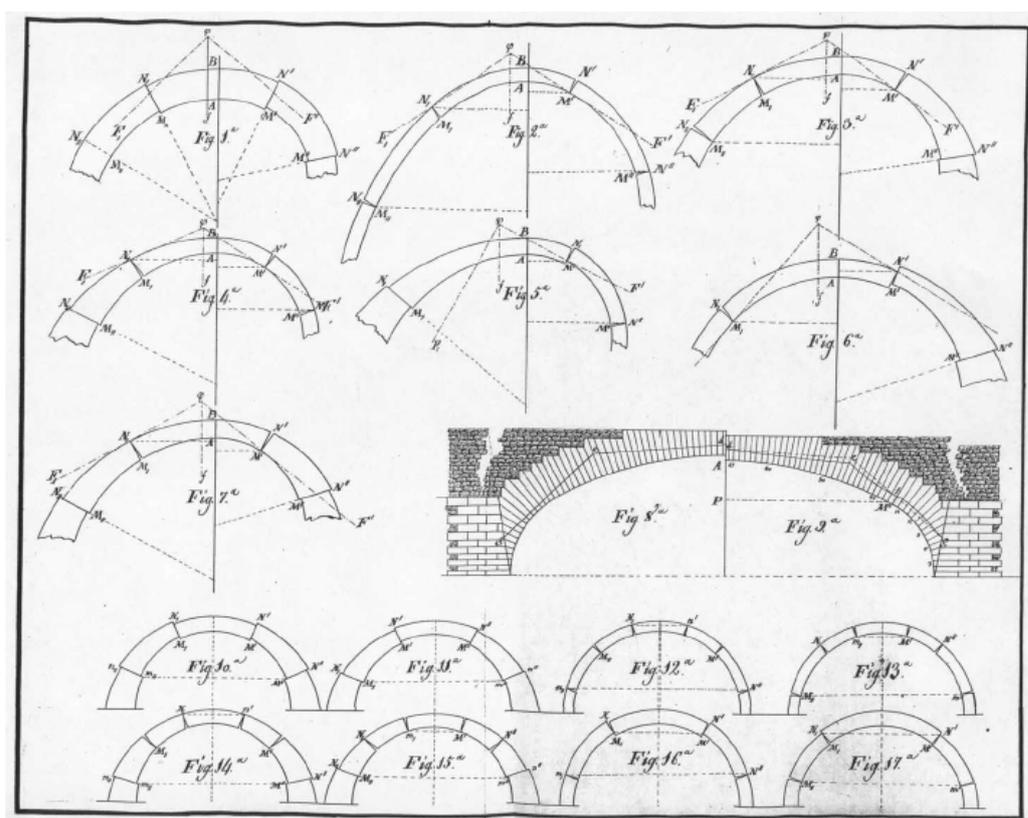


Figura 8: Monasterio

comportamento meccanico delle murature si ha con **Navier** (1785-1836), che può essere considerato il padre della teoria dell'elasticità, avendola riformulata in una forma matematica di facile uso, rendendola per la prima volta disponibile nel campo della tecnica delle costruzioni e contribuendo pertanto alla nascita della moderna Scienza delle costruzioni.

Si inizia, quindi, ad applicare la teoria dell'elasticità alle murature, e la regola del "terzo medio" nasce proprio dagli studi di Navier, tale regola afferma che un arco è stabile e sicuro se la linea delle pressioni passa attraverso una certa frazione

dello spessore, ovvero  $\frac{1}{3}$ , tale regola nasce dalla teoria dell'elasticità applicata alla trave, per cui si ha uno profilo lineare delle tensioni e una sezione sottoposta a sola compressione se il centro delle pressioni si trova entro il terzo medio della sezione della trave.

Per oltre un secolo e mezzo il modello lineare-elastico divenne il metodo principale e indiscusso per il progetto delle strutture, mentre gli studi dei modelli non lineari venivano relegati principalmente all'ambito della ricerca scientifica e considerati dagli ingegneri come mere curiosità scientifiche prive di ogni utilità pratica nell'ambito della scienza e della tecnica delle costruzioni.

In epoca moderna, si ricordano gli studi di **Pippard** ([6], [7], [8]) che a seguito dello sviluppo della teoria della plasticità inizia a riutilizzare l'approccio dell'"equilibrio" per lo studio delle strutture in muratura.

Le ipotesi necessarie per l'applicazione della teoria della plasticità alle strutture in muratura sono quelle inizialmente fatte da Couplet: assenza di resistenza a trazione, resistenza a compressione infinita e assenza di scorrimento tra gli elementi. Queste sono le ipotesi sono usate da **Kooharian**, nel 1953, per dimostrare che è possibile utilizzare i teoremi dell'analisi limite per lo studio delle strutture in muratura [9]. Il teorema statico dell'analisi limite dice che la struttura è in equilibrio se esiste un campo di tensione equilibrato ed ammissibile per il materiale. La forza di questo teorema sta nel fatto che se si riesce a trovare un campo di forze sicuro, la struttura è certamente stabile.

Applicando tale teorema alle strutture in muratura, ad esempio ad un arco si può affermare che se è possibile trovare, tra le infinite linee di spinta, una linea di spinta che sia interna al profilo dell'arco e in equilibrio con i carichi, allora l'arco è stabile e non crollerà sotto l'azione di quei carichi.

## Comportamento unilaterale e modello di Heyman

Caratteristica principale della muratura è il suo comportamento unilaterale, dovuto alla buona resistenza a compressione ed alla scarsa, e spesso trascurabile, resistenza alla trazione; la resistenza a trazione sarebbe, inoltre, anche di difficile valutazione in quanto non dipendente solo dalla resistenza a trazione della malta e dei blocchi ma anche dalla tipologia degli stessi, da come sono posizionati tra di loro, dall'aderenza della malta con la pietra e dalle fratture macroscopiche e microscopiche inevitabilmente presenti nella compagine muraria; una ipotesi a vantaggio di sicurezza è, quindi, quella di trascurare la resistenza a trazione.

In base a tale ipotesi, il comportamento di murature snelle a sviluppo monodimensionale può essere assimilato a quello delle funi. Mentre la prima può resistere solo a compressione, le funi possono resistere solo a trazione. Da qui la possibilità dell'uso della catenaria invertita per la valutazione della stabilità degli archi e delle cupole (Figura 9).

Un modello semplice ma molto efficace per descrivere questo tipo di comportamento è quello di Heyman [35], che si basa su tre assunzioni fondamentali:

1. Assenza di resistenza a trazione;
2. Resistenza a compressione infinita;
3. Assenza di scorrimento tra gli elementi.

La prima ipotesi, ovviamente a vantaggio di sicurezza, è sicuramente corretta in caso di muri a secco, dove l'assenza di malta fa sì che, anche se i singoli blocchi posseggono un sensibile livello di resistenza alla trazione, il giunto non sopporti alcuna trazione. Anche in presenza di malta la resistenza a trazione è difficilmente valutabile per le considerazioni già fatte in precedenza.

La seconda ipotesi è generalmente corretta, in quanto nella maggioranza delle

strutture in muratura i livelli di tensione sono molto bassi, ma in casi particolari potrebbe essere necessario modificarla assumendo una limitata resistenza a compressione.

Anche la terza ipotesi risulta essenzialmente corretta tranne casi estremamente sporadici, legati a una non corretta realizzazione dell'apparecchio murario.

Le restrizioni materiali 1., 2., 3. sono sufficienti per dimostrare la validità dei

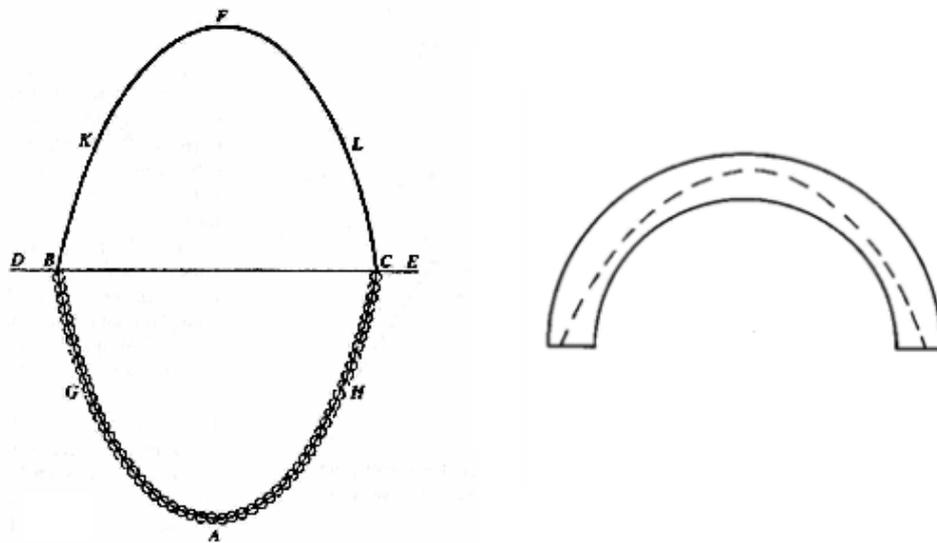


Figura 9: Catenaria e catenaria invertita disegnata da Poleni(1748) (sinistra) ; arco in equilibrio con catenaria invertita passante al suo interno(da Heyman [1]) (destra)

teoremi dell'Analisi Limite [36] applicati ad una struttura composta da un tale materiale.

## L'arco e la linea delle pressioni

Per capire i tratti salienti del comportamento delle strutture in muratura si può partire dallo studio della statica dell'arco.

Nel manuale di Carlo Formenti “*La pratica del fabbricare*” ([37]), gli archi sono definiti come strutture curve formate da parti che si mantengono in equilibrio grazie al mutuo contrasto. L'equilibrio dei carichi è garantito da forze mutue che i singoli conci dell'arco si scambiano.

La linea delle pressioni è il luogo dei punti di intersezione della risultate di tali forze su una famiglia di piani. Nel caso di un arco formato da blocchi, tali piani sono in numero finito essendo le superfici di contatto tra i blocchi stessi; la linea delle pressioni diventa un poligono.

Data l'unilateralità del contatto tra i conci, affinché la struttura sia stabile occorre che la linea delle pressioni si trovi interamente all'interno della muratura.

Se i carichi sono puramente verticali la componente verticale delle forze trasmesse tra i blocchi aumenta man mano che ci si avvicina ai piani di imposta, mentre la componente orizzontale rimane costante (Figura.10).

Se l'arco non è fratturato, è possibile determinare infinite linee di pressione in-

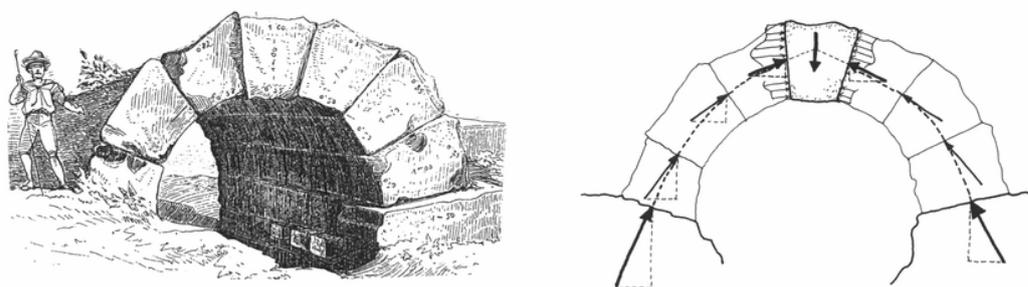


Figura 10: Arco etrusco [Durm 1885] (sinistra); Possibile equilibrio tra i blocchi (destra)

terne all'arco.

Sfruttando il teorema statico dell'analisi limite, se è possibile trovare una linea di pressione totalmente interna alla muratura allora l'arco sarà stabile; tale linea di pressione è esattamente l'inversa del poligono funicolare che equilibra le stesse forze dell'arco (idea della catenaria di Hooke). Sfruttando questa analogia è possibile trovare una distribuzione di forze equilibrata e compatibile con i carichi attraverso metodi grafici (Figura 11).

La linea delle pressioni può anche essere determinata matematicamente risolvendo

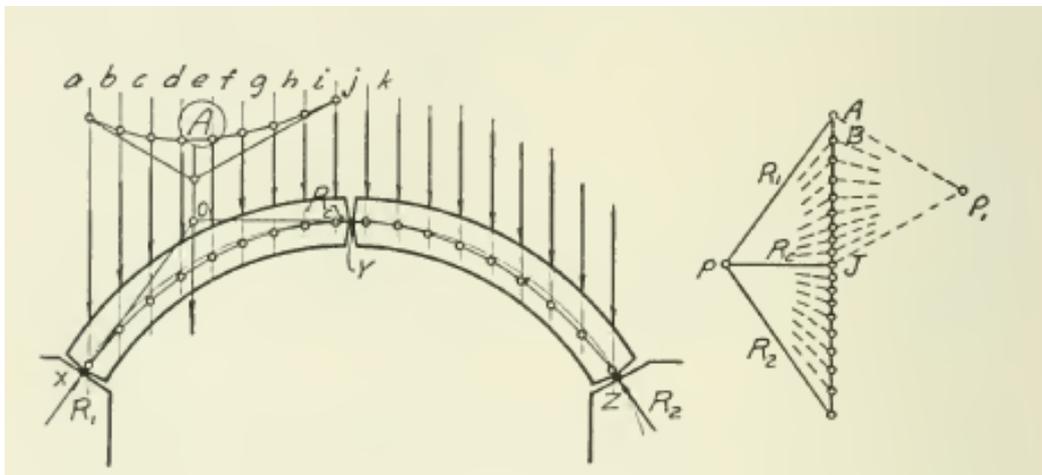


Figura 11: Esempio analisi grafica per un arco a tre cerniere (da William S. Wolfe [38])

l'equazione differenziale  $y'' = \frac{q}{H}$ , dove  $y$  è l'ascissa della linea delle pressioni,  $q$  il carico per unità di lunghezza sulla proiezione orizzontale e  $H$  la spinta orizzontale. Alcuni semplici esempi con quest'ultimo approccio sono riportati in [39].

---

## Statica di volte e cupole con metodi grafici

Con l'ausilio della statica grafica è possibile, inoltre, valutare la condizione di equilibrio di volte e cupole. Ad esempio con il metodo così detto dello slicing (Figura 12), si può dividere la cupola in un certo numero di "spicchi" e considerare l'equilibrio dell'arco formato da due spicchi opposti.

Poichè, data la simmetria del problema, tutti gli archi si comporteranno allo stesso modo, se è possibile trovare una soluzione di equilibrio per uno di essi la cupola è stabile, inoltre, poichè non è importante il valore della tensione ma le proporzioni, è possibile lavorare con il peso totale della cupola, considerato concentrato nel singolo arco e scegliere successivamente, in caso di necessità, il numero di spicchi, in quanto anche considerando il peso totale, la forma della curva delle pressioni non cambierà.

Per il calcolo del volume della cupola si può utilizzare il teorema di Pappo-Guldino  $V = 2\pi rA$  con  $A$  l'area della "fetta" di cupola e  $r$  la distanza del baricentro dell'elemento dall'asse di rotazione. Si può, inoltre, calcolare facilmente la tensione nell'anello superiore (in caso di cupole con occhio) e alla base della cupola  $N = \frac{H}{2\pi}$ .

Di seguito si riporta un esempio dell'uso della statica grafica per il calcolo della soluzione di equilibrio per la cupola di Sant'Agnese in Agone a Roma (Figura 13).

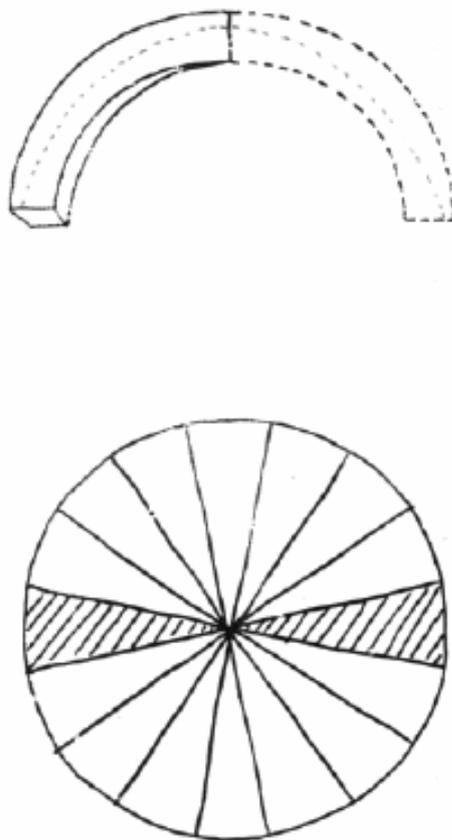


Figura 12: Tecnica dello slicing per le cupole in muratura



Figura 13: Cupola della chiesa di Sant'Agnese in Agone

## Analisi statica della cupola di Sant'Agnese in Agone (Roma)

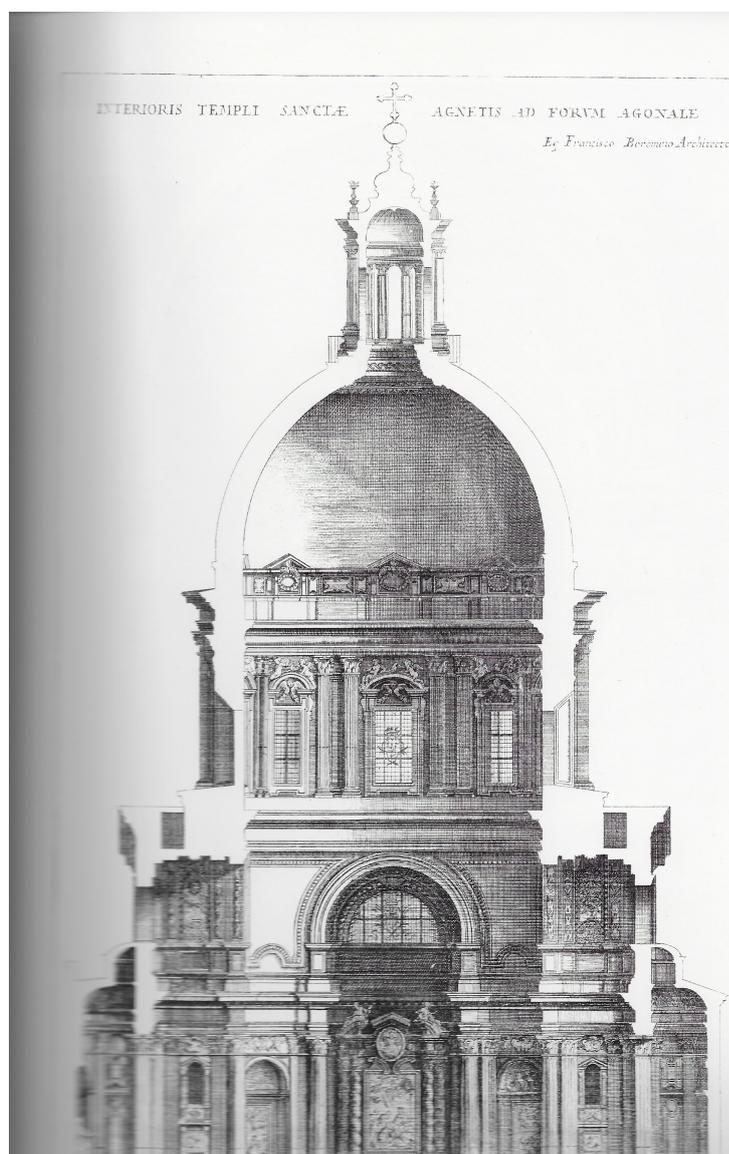


Figura 14: Sezione di S.Agnese (da de Rossi [41])

Per studiare la statica della cupola, la si considera divisa in 8 spicchi e si studia l'equilibrio dell'arco formato da due spicchi opposti (Figura 15).

La cupola è costruita in mattoni, mentre la parte del tamburo è rivestita in traver-

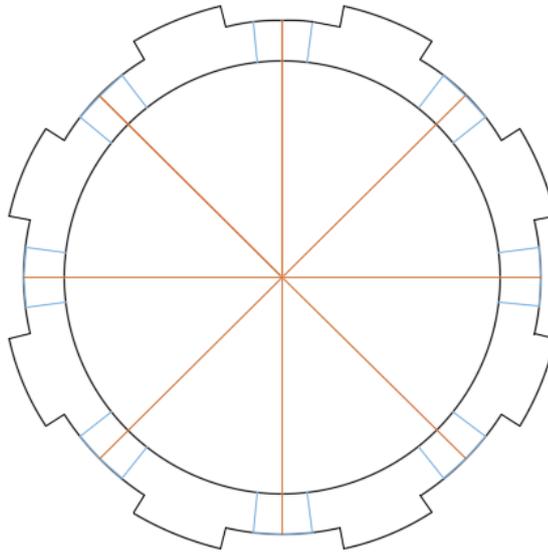


Figura 15: Sezione della cupola

tino e con una piccola anima in tevolozza ,che occupa circa il 10 % del volume e si estende per soli 2 metri in altezza[40],[41]. Per l'analisi statica è stato considerato il peso totale degli elementi.

Per il calcolo del peso della lanterna, questa è stata considerata inizialmente monolitica (considerando un peso specifico di  $17 \frac{KN}{m^3}$  ), successivamente è stato valutato il volume occupato dalle finestre e quindi sottratto dal volume precedentemente calcolato; si è calcolato, infine, il peso delle otto colonne in travertino (peso specifico di  $24 \frac{KN}{m^3}$ ) e tale peso è stato sommato al risultato precedente per ottenere il peso complessivo della lanterna.

Per il calcolo del peso delle sezioni in cui vi sono le finestre e i contrafforti è stato prima valutato il volume considerando come spessore quello massimo (sezione in cui vi sono i contrafforti), a questo quindi è stato sottratto il volume occupato dalle 8 finestre e il volume delle parti senza contrafforti.

Di seguito si riportano i grafici dell'analisi statica effettuata sulla cupola (Figure

16 e 17 ). La spinta minima risulta essere di circa  $2200 \frac{KN}{m}$ .

Tabella 1: Calcolo peso delle sezioni della cupola

Sezione	Area(m <sup>2</sup> )	Raggio(m)	Volume(m <sup>3</sup> )	P(KN)
L	1.7	2.4	25	426.3
1	2.9	4.5	83.2	1414.3
2	2.8	6.2	111	1887.7
3	2.7	7.5	130.3	2215
4	2.7	8.4	147	2501.2
5	3	8.9	167.4	2845.5
6	3.2	9.1	181.5	3085.9
7	7.1	9.4	341.7	5809.6
a	5.6	9.4	265.6	4516.2
b	4.6	9.4	157.3	2673.7
c	6.1	9.4	233.4	3967.5
d	12.7	9.9	791.6	13456
Lanterna				932

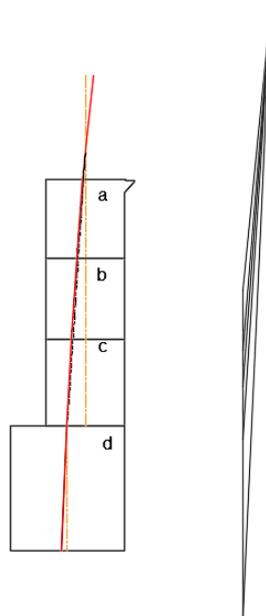


Figura 16: Analisi statica del tamburo

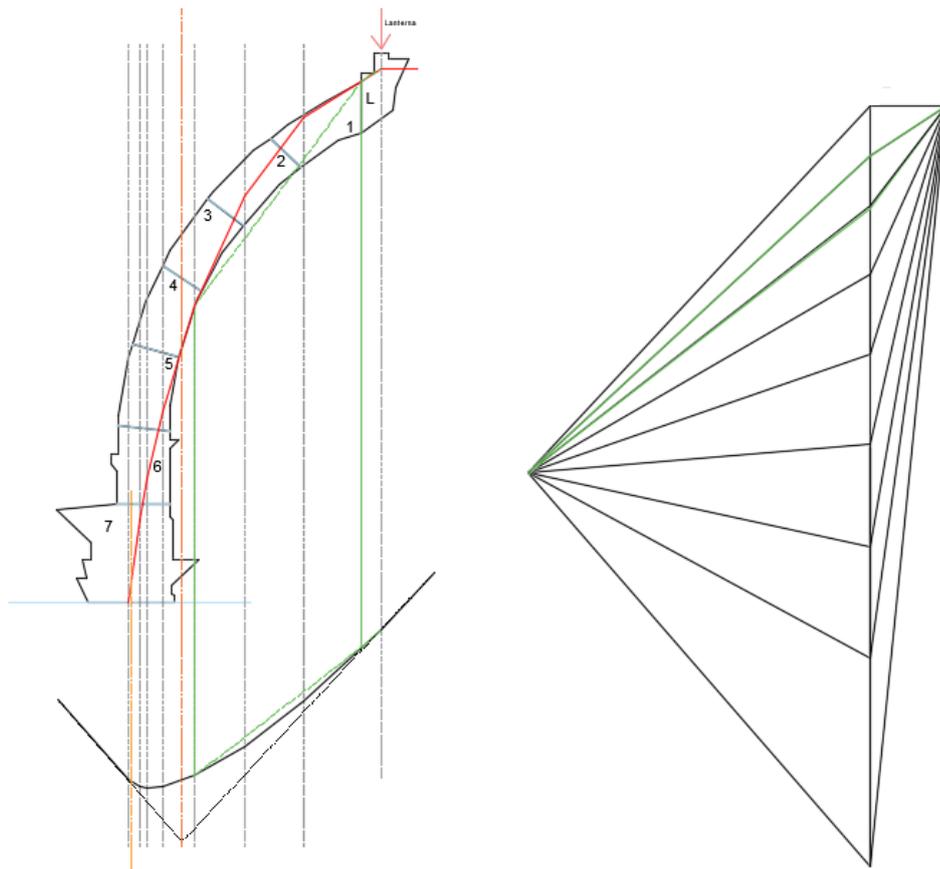


Figura 17: Analisi statica della cupola

# CAPITOLO 1

---

## Modelli unilaterali per le murature

---

Una caratteristica peculiare che accomuna tutti i tipi di muratura è la loro fisiologica debolezza rispetto le tensioni di trazione; il non riconoscere questa caratteristica come del tutto naturale porta inevitabilmente a nutrire timori per la stabilità e la sicurezza di questi edifici, specialmente quando la struttura presenta delle fratture più o meno estese. In realtà tali timori risultano spesso infondati, in quanto, se ben proporzionati, gli edifici in muratura lavorano essenzialmente a compressione e presentano un elevato grado di sicurezza e stabilità [28].

Nella muratura le fratture sono fisiologiche e sono, di solito, causate non da carichi eccessivi ma dal cambiamento delle condizioni al contorno, come ad esempio quello prodotto da cedimenti del terreno. La struttura, proprio a causa della sua scarsa resistenza a trazione, si adegua a tali cambiamenti delle condizioni al contorno tramite spostamenti rigidi e a energia quasi zero che comportano la formazione di fratture più o meno estese che, nella maggioranza dei casi, non devono destare preoccupazione. Esse non inficiano la stabilità dell'edificio, e possono essere richiuse tramite la tecnica del "*scuci-cuci*", ricoperte di intonaco e "*dimenticate*".

La stabilità delle strutture murarie è garantita dalla loro forma, infatti regole ba-

sate sulle proporzioni sono state efficacemente impiegate dagli antichi costruttori per millenni. Usate in modo adeguato, tali regole portavano a strutture eccezionalmente stabili ([42],[43]), come si evince dalle numerose strutture conservate in perfetto stato nel corso dei secoli fino ad oggi.

L'approccio attuale alla tecnica delle costruzioni, fortemente basato sulla resistenza dei materiali e sul calcolo delle tensioni rende difficile per la nuova generazione di Architetti e Ingegneri l'accettazione di regole puramente geometriche per la valutazione della stabilità e della sicurezza di un edificio.

Per dipanare le paure legate alla sicurezza delle strutture in muratura e all'approccio geometrico degli antichi mastri costruttori, può essere utile rivedere gli antichi concetti in chiave moderna, applicando il modello unilaterale, introdotto per la prima volta da Heyman nel suo articolo "*The Stone Skeleton*" [35]; utilizzando le tre assunzioni fondamentali introdotte in tale lavoro è possibile applicare i teoremi dell'analisi limite alle strutture in muratura.

## 1.1 Materiali unilaterali

Un modo per rivedere in chiave moderna l'approccio degli antichi costruttori consiste nell'adottare il modello unilaterale introdotto da Heyman, che si basa sulle seguenti assunzioni:

1. Assenza di resistenza a trazione
2. Resistenza a compressione infinita
3. Assenza di scorrimento tra gli elementi

Come già detto, la prima assunzione è conservativa. Per quanto i singoli blocchi possano presentare anche una relativamente buona resistenza a trazione non è così per la malta, e, nel caso di muri a secco, i giunti sono incapaci di resistere a trazione. Con questa prima ipotesi si assume che la muratura abbia comportamento unilaterale e che possa subire dei distacchi lungo una qualsiasi superficie interna (formando fratture) con dispendio di energia nullo.

Modellando la muratura come un continuo, poichè è possibile avere solo tensioni di compressione, il tensore delle tensioni dovrà essere semidefinito negativo ( $T \in Sym^-$ ).

La seconda ipotesi è normalmente plausibile poichè le strutture in muratura, generalmente, presentano delle tensioni di compressioni molto basse rispetto la loro resistenza; tuttavia lo stesso Heyman osserva che possono esserci casi in cui tensioni eccessive possono causare schiacciamenti; tali fenomeni sono di norma locali e non comportano il collasso della struttura, ma ciò costringe in alcuni casi a mettere in discussione tale ipotesi [1].

La terza ipotesi che stabilisce l'impossibilità di avere scorrimenti tra i blocchi o lungo le linee di frattura, è generalmente corretta, talvolta possono aversi scorrimenti locali di lieve entità che non inficiano la stabilità globale della struttura e

non ne modificano il comportamento.

Uno degli obiettivi primari nella realizzazione di strutture in muratura è sempre stato quello di evitare lo scorrimento tra i blocchi, questo si ottiene posizionando i blocchi in maniera adeguata; se lungo i piani orizzontali l'assenza di scorrimento è garantita dalla compressione causata dal peso stesso dei blocchi che, grazie all'attrito, impediscono slittamenti tra le pietre, nei piani verticali è necessario avere alcuni accorgimenti nel posizionamento dei blocchi per scongiurare lo slittamento, tale obiettivo è spesso raggiunto grazie ad un particolare apparecchio dei blocchi (interlocking).

Al continuo, ciò significa che la deformazione anelastica  $E$  deve soddisfare la legge di normalità rispetto il cono  $Sym^-$  e quindi  $E \in Sym^+$ .

Le tre assunzioni fondamentali,

$$T \in Sym^-, \quad (1.1)$$

$$T \cdot E = 0, \quad (1.2)$$

$$E \in Sym^+, \quad (1.3)$$

equivalgono le tre ipotesi di Heyman per un corpo continuo e consentono l'applicazione dell'analisi limite e dei suoi teoremi, statico e cinematico, alle strutture murarie.

## 1.2 Modello unilaterale per le murature: materiale unilaterale non resistente a trazione

Grazie alle assunzioni fatte è quindi possibile applicare i teoremi dell'analisi limite alle murature, tale approccio è già stato usato da vari autori([44], [45], [46]); tramite l'applicazione dei teoremi statico e cinematico dell'analisi limite è possibile descrivere il comportamento di interi edifici mantenendo una certa semplicità nell'analisi.

Utilizzando l'ipotesi di comportamento unilaterale è possibile, inoltre, interpretare in maniera corretta i pattern di fratture visibili sugli edifici, prodotti da cedimenti al contorno [47].

### 1.2.1 Comportamento meccanico delle murature

La muratura, come già detto, è un insieme eterogeneo di elementi e giunti. Gli elementi possono essere blocchi di pietra, pietre irregolari, mattoni, etc.

La malta utilizzata per legare gli elementi tra loro e per riempire i vuoti, come per i blocchi, può essere di diverse tipologie, ad esempio di argilla, bituminosa, di gesso, a base di calce o cemento etc. Le varie possibilità di combinazione tra elementi e malte porta ad una grandissima varietà di strutture in muratura sia dal punto di vista geometrico sia dal punto di vista meccanico essendo le caratteristiche meccaniche di una particolare muratura connesse non solo alle caratteristiche dei materiali ma anche al loro assemblaggio.

Di seguito si descrivono brevemente alcuni aspetti meccanici di base relativi ad un elemento rappresentativo.

Nella tabella 1.1 sono riportati i valori della resistenza a compressione, a taglio, del peso specifico e del modulo elastico per diverse tipologie murarie, tali valori

sono quelli riportati nel DM 14.01.2008. In Figura 1.1 si vedono i risultati qualitativi di prove sperimentali a trazione e a compressione effettuati su un campione di muratura.

La resistenza di una parete muraria non dipende esclusivamente dalla resistenza del singolo blocco, ma dalla resistenza degli elementi costituenti la parete (malta e blocchi) e dal modo in cui questi sono assemblati; per poter valutare la resistenza globale della muratura nel nuovo codice per le costruzioni sono riportate formule empiriche che mettono in relazione la resistenza dei singoli elementi con quella globale. In Figura 1.1  $f_t$  e  $f_c$  denotano la resistenza a trazione e a compressione delle murature,  $\delta_t$  e  $\delta_c$  le deformazioni di rottura di trazione e di compressione e  $G_t$  e  $G_c$  rappresentano, rispettivamente l'energia di frattura in trazione e in compressione.

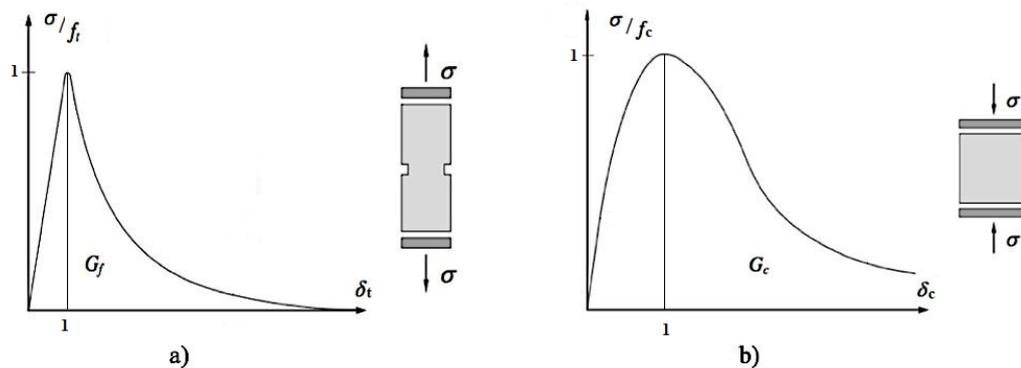


Figura 1.1: Diagrammi sperimentali del comportamento di una muratura a trazione (a) e compressione (b)

Si osserva che i diagrammi riportati in Figura 1.1 sono normalizzati rispetto alle tensioni di resistenza a trazione ( $f_t$ ) e a compressione ( $f_c$ ), e che tali valori sono per tutte le murature tradizionali di almeno un ordine di grandezza diversi. Anche le due energie  $G_t$  e  $G_c$ , ovvero le energie dissipate per creare le fratture che si ottengono in trazione ed in compressione, sono di almeno due ordini di grandezza diversi, e suggeriscono la maggiore facilità che si ha nel fratturare la

Tabella 1.1: Resistenza a compressione ( $f_m$ ), a taglio ( $\tau_o$ ), modulo elastico normale ( $E$ ) e peso specifico ( $w$ ) per diverse tipologie di muratura con malta scadente (da NTC-DM 14.1.2008)

Tipologia di Muratura	$f_m$ [ $\frac{daN}{cm^2}$ ] min-max	$\tau_o$ [ $\frac{daN}{cm^2}$ ] min-max	$E$ [ $\frac{daN}{cm^2}$ ] min-max	$w$ [ $\frac{daN}{m^3}$ ]
In pietrame disordinata (ciottoli, pietre erratiche e irregolari)	10	0.2	6900	1900
	18	0.32	10500	
A conci sbozzati, con parametro di limitato spessore e nucleo interno	20	0.35	10200	2000
	30	0.51	14400	
In pietre a spacco con buona tessitura	26	0.56	15000	2100
	38	0.74	19800	
A conci di pietra tenera (tufo, calcarenite, etc.)	14	0.28	9000	1600
	24	0.42	12600	
A blocchi lapidei squadri	60	0.90	24000	2200
	80	1.20	32000	
In mattoni pieni e malta di calce	24	0.60	12000	1800
	40	0.92	18000	
In mattoni semipieni con malta cementizia	50	2.4	35000	1500
	80	3.20	56000	
In blocchi laterizi semipieni (perc. foratura < 45%)	40	3.00	36000	1200
	60	4.00	54000	
In blocchi laterizi semipieni con giunti verticali a secco (perc. foratura < 45%)	30	1.00	27000	1100
	40	1.30	36000	
In blocchi di calcestruzzo o argilla espansa (perc. foratura 45%-65%)	15	0.95	12000	1200
	20	1.25	16000	
Di blocchi di calcestruzzo semipieni (foratura < 45%)	30	1.8	24000	1400
	44	2.4	35200	

muratura piuttosto che schiacciarla.

Per la modellazione degli edifici in muratura si hanno a disposizione differenti metodologie, in [47] si descrivono due possibili approcci, il primo si basa sull'utilizzo di modelli semplici, basati sulle assunzioni di Heyman, utilizzando questa prima tipologia di modelli è necessario conoscere pochi parametri del materiale e quindi possono essere utilizzati per la maggioranza degli edifici; il secondo approccio si basa su modelli più sofisticati per cui è necessario prendere in considerazione un numero maggiore di parametri e quindi presuppone una conoscenza più dettagliata delle caratteristiche dei materiali e delle caratteristiche geometriche e costruttive dell'edificio.

La maggioranza degli edifici murari mostra gli stessi tipi di comportamento locale e globale.

Da un punto di vista locale è possibile schematizzare i pattern di frattura in tre tipologie principali.

La *prima tipologia* di frattura che è possibile vedere su una costruzione muraria (Figura 1.2) si manifesta come una linea di distacco chiara e definita tra due parti intatte e dipende dalla scarsa resistenza a trazione della muratura; a seconda della resistenza di malta e blocchi, le fratture causate da trazione pura possono interessare sia solo i giunti (la malta), o anche i blocchi.

Non potendo la muratura resistere a trazione, le fratture che ne derivano sono fisiologiche e sono il modo utilizzato dall'edificio per accomodarsi ai cambiamenti delle condizioni al contorno (per esempio dei cedimenti nel terreno) e trovare una nuova condizione di equilibrio stabile.

La *seconda tipologia* (Figura 1.3) implica sia distacco che scorrimenti tra gli ele-



Figura 1.2: Fessurazione dovuta a trazione pura

## 1.2 Modello unilaterale per le murature: materiale unilaterale non resistente a trazione 45

menti, questo pattern di fratture si riscontra in strutture soggette a elevati carichi di compressione e taglio.

La *terza*, e ultima, tipologia (Figura 1.4, Figura.1.5) è lo schiacciamento, è causa-



Figura 1.3: Fessurazione dovuta a compressione e taglio

to da un eccessivo carico di compressione, che supera la resistenza del materiale, è la tipologia di frattura meno frequente, in quanto le strutture in muratura sono progettate per lavorare con carichi molto bassi rispetto la loro resistenza massima, di contro è anche la più pericolosa, poichè il collasso a causa di eccessiva compressione è generalmente improvviso [47].

Dal punto di vista del comportamento globale, considerando muratura di buona qualità, è possibile avere essenzialmente due tipologie di collasso: fuori piano o nel piano.

La *prima tipologia*, il fuori piano (Figura 1.6), è la più frequente e può dipendere, ad esempio, da collegamenti radi o inadeguati in senso trasversale tra le pareti e il resto dell'edificio.

Il fuori piano è un meccanismo tipico in caso di sisma e si può mitigare con una buona progettazione ed un corretto dimensionamento dei muri perimetrali.



Figura 1.4: Lesioni da schiacciamento

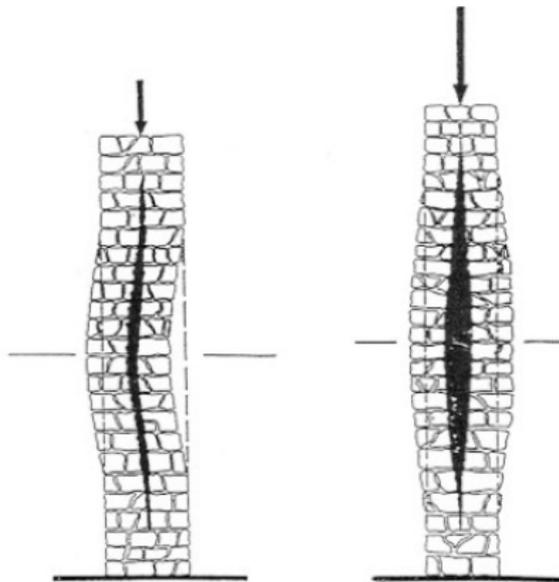


Figura 1.5: Schiacciamento di un pilastro (da Mastrodicasa [48])

La *seconda tipologia* di meccanismo globale, invece, è causata dall'accoppiamento di sforzi normali e di taglio (Figura 1.7).



Figura 1.6: Meccanismo fuori piano



Figura 1.7: Meccanismo nel piano

## 1.3 Modelli semplificati per le murature

Per modellare in maniera semplice il comportamento della muratura ci si può basare su tre differenti modelli, descritti, ad esempio, in [47]:

1. Modello zero,
2. Modello uno,
3. Modello due,

dove lo "zero", "uno" e "due" si riferiscono al numero di parametri richiesti da ciascun modello per descrivere il comportamento del materiale: nel caso 1d il modello zero non necessita conoscere alcun parametro caratteristico del materiale, nel modello uno è necessario definire il modulo elastico  $E$  e nel modello due, in cui sono necessari due parametri, bisognerà fissare sia il modulo elastico  $E$  che la resistenza a compressione  $f_m$ . La resistenza a trazione con questi modelli è sempre considerata nulla.

Di seguito una breve descrizione dei tre modelli.

### 1.3.1 Modello zero

Il modello zero, ovvero RNRT, dove RNRT sta per Rigido Non Resistente a Trazione è il modello più semplice, per la sua applicazione non vi è la necessità di conoscere alcun parametro meccanico.

Si considera il materiale infinitamente resistente a compressione e con resistenza a trazione nulla.

In Figura 1.8 è riportato il diagramma tensione-deformazione del modello che riproduce essenzialmente il modello proposto da Heyman, applicato al continuo ([1], [35]).

Tale materiale è perfettamente rigido in compressione ed esibisce "allungamenti" senza alcuna dissipazione di energia. In un materiale di questo tipo le fratture stanno proprio a rappresentare gli allungamenti dovuti alle trazioni che il materiale, per sua natura, non può sopportare.

Poichè le fratture si creano ad energia zero e tensione zero, considerando la definizione di elasticità per cui la tensione è determinata dalla deformazione  $T = f(\epsilon)$ , il comportamento a trazione è elastico e reversibile.

A compressione, invece, il materiale è modellato come non elastico, infinitamente rigido e con resistenza infinita.

La particolarità di questo modello sta nel non necessitare di alcun parametro per la modellazione del materiale: utilizzandolo la stabilità della muratura dipende dalla geometria della costruzione.

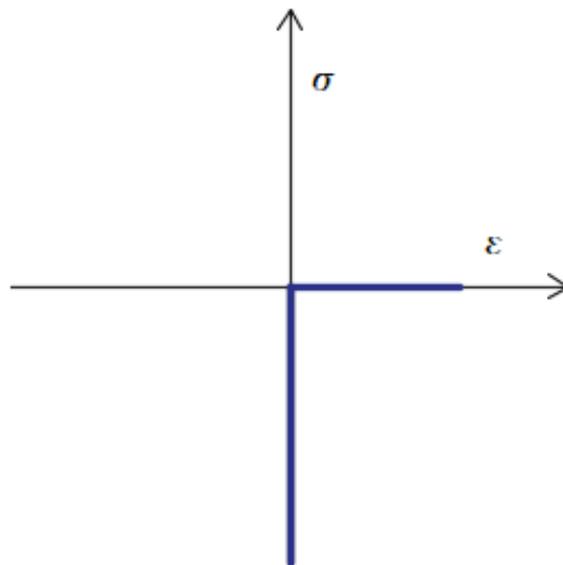


Figura 1.8: Diagramma Tensione-deformazione modello zero

### 1.3.2 Modello uno

Il modello uno (ENRT), Elastico Non Resistente a Trazione (diagramma tensione-deformazione in Figura 1.9), richiede un singolo parametro per la modellazione del materiale, per la cui scelta sono possibili due alternative:

1. considerare rigidità finita con resistenza a compressione infinita;
2. considerare resistenza a compressione finita e rigidità infinita.

La resistenza a trazione è sempre considerata nulla.

Con la prima scelta la muratura è modellata come un materiale iperelastico, con modulo  $E$  noto.

Tale modello è stato ampiamente trattato in numerosi studi (vedi:[50], [51], [52], [53], [54], [55], [56])

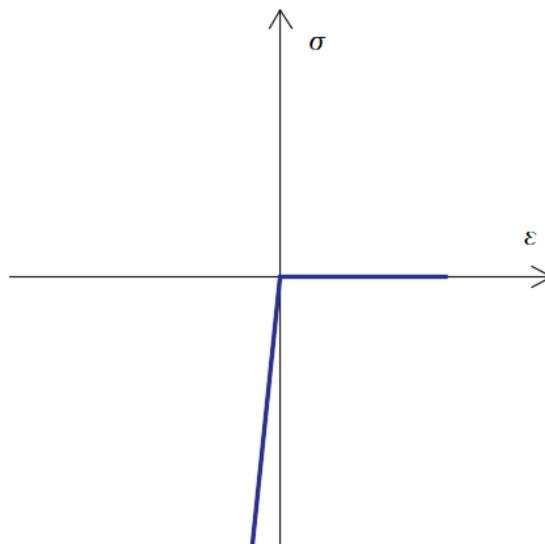


Figura 1.9: Diagramma Tensione-deformazione modello uno

### 1.3.3 Modello due

Per il modello due (diagramma tensione-deformazione in Figura 1.10) sono necessari due parametri per la descrizione del materiale, ovvero il modulo elastico  $E$  e la resistenza a compressione  $f_m$ .

Questo modello è utile se si vogliono descrivere e studiare i meccanismi di collasso descritti nel paragrafo 1.2.1 . Il materiale sottoposto a trazione continua a essere elastico e la deformazione è rappresentata dalle fratture. A compressione invece, il materiale è elastico - perfettamente plastico.

Le deformazioni dovute alla trazione (fratture) sono ancora reversibili, mentre le deformazioni dovute a compressione (lesioni da schiacciamento) non vengono riassorbite se si azzerla la compressione e si deforma il materiale in allungamento.

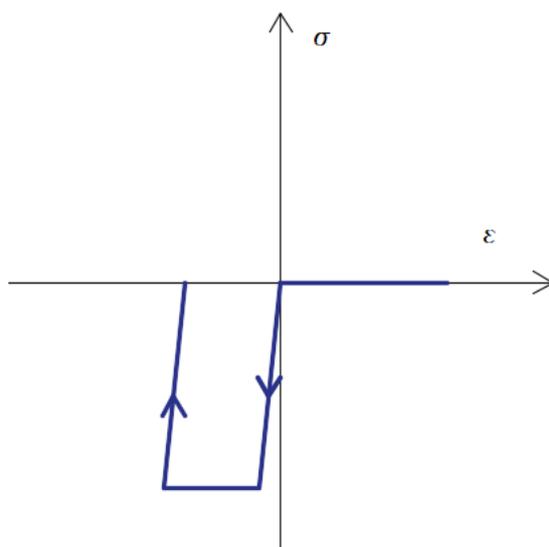


Figura 1.10: Diagramma Tensione-deformazione modello due

## CAPITOLO 2

---

### Modello RNRT

---

Il modello utilizzato nella presente tesi di dottorato è il modello zero (RNRT), per il quale non vi è la necessità di conoscere alcun parametro caratteristico della muratura.

Tale modello consente l'utilizzo dei teoremi dell'analisi limite per le strutture murarie ed è possibile considerare campi di tensione e deformazione singolari; i campi di deformazione singolari vengono utilizzati normalmente nei modelli in cui si considera perfetta plasticità, mentre l'uso di un campo di tensione singolare è stato introdotto per la prima volta inconsapevolmente da Mery [57] e in maniera rigorosa nel 2005 da Lucchesi, Silhavi e Zani [58].

Si considera un corpo  $\Omega$  composto da materiale RNRT. Poichè tale materiale è incapace di sopportare trazioni, la tensione deve essere semidefinita negativa,

$$\mathbf{T} \in Sym^-, \quad (2.1)$$

la deformazione effettiva  $\mathbf{E}^* = (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{E}})$ , in cui  $\underline{\mathbf{E}}$  rappresenta le deformazioni assegnate, deve essere semidefinita positiva,

$$\mathbf{E}^* \in Sym^+. \quad (2.2)$$

---

In aggiunta l'ipotesi di assenza di scorrimenti si traduce nella condizione di normalità

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^* = 0. \quad (2.3)$$

Si assume, inoltre, che le tensioni applicate al bordo  $\underline{s}$  soddisfino la seguente condizione:

$$\underline{s} \cdot \mathbf{n} < 0, \text{ ovvero } \underline{s} = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_N. \quad (2.4)$$

Nel caso piano ( $n=2$ ) le condizioni in 2.1 e 2.2 possono essere riscritte come segue:

$$\text{tr}\mathbf{T} \leq 0, \text{ det}\mathbf{T} \geq 0, \quad (2.5)$$

$$\text{tr}\mathbf{E}^* \geq 0, \text{ det}\mathbf{E}^* \leq 0. \quad (2.6)$$

## 2.1 Il problema dei valori al contorno

Si assume che il corpo  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  (con  $n = 2, 3$ ), caricato sul bordo  $\partial\Omega_N$  da delle trazioni  $\underline{\mathbf{s}}$  e soggetto a un dato spostamento  $\underline{\mathbf{u}}$  sulla parte del bordo vincolata  $\partial\Omega_D$ , sia in equilibrio e sottoposto a piccoli spostamenti  $\mathbf{u}$  a cui corrispondono le deformazioni  $\mathbf{E}(u)$ .

Una struttura in muratura è identificata con l'insieme  $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_D$ , ovvero la regione di  $\mathbb{R}^n$  considerata chiusa su  $\partial\Omega_D$  e aperta sul resto del bordo.

Il problema dei valori al bordo si può descrivere come segue:

trovare un campo di spostamenti  $\underline{\mathbf{u}}$ , con una deformazione  $\mathbf{E}$  e un campo di tensione  $\mathbf{T}$  tale che:

$$\mathbf{E}^* + \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T), \quad \mathbf{E}^* \in Sym^+, \quad \mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \text{ su } \partial\Omega_D, \quad (2.7)$$

$$div\mathbf{T} + \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{T} \in Sym^-, \quad \mathbf{T}\mathbf{n} = \underline{\mathbf{s}} \text{ su } \partial\Omega_N, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^* = 0, \quad (2.9)$$

con  $\mathbf{n}$  versore normale a  $\partial\Omega$ .

### 2.1.1 Campi di tensione e deformazione singolari e delta di Dirac

Da qui in poi ci si interesserà al caso piano ( $n = 2$ ).

Considerando le equazioni di equilibrio in forma forte è necessario che il campo di tensioni  $\mathbf{T}$  sia differenziabile e che la sua derivata sia continua, utilizzando, invece, la formulazione variazionale, se il materiale è elastico lineare, l'unica condizione

necessaria sarà:

$$\sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} da} < \infty, \quad (2.10)$$

Per alcuni materiali rigidi perfettamente plastici, come i materiali unilaterali che modellano la muratura, tale condizione necessaria si indebolisce ancora:

$$\int_{\Omega} \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}} da < \infty, \quad (2.11)$$

ammettendo campi di tensione che sono solo di modulo integrabile, l'insieme delle possibili soluzioni diventa, quindi, ristretto ai casi di  $\mathbf{T}$  tali che:

$$\int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{T}}| < \infty. \quad (2.12)$$

In tal senso  $\tilde{\mathbf{T}}$  che può essere decomposto nella somma di due parti

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_r + \tilde{\mathbf{T}}_s, \quad (2.13)$$

dove  $\tilde{\mathbf{T}}_r$  è la parte assolutamente continua ( $\tilde{\mathbf{T}}_r$  è una densità per unità di area) e  $\tilde{\mathbf{T}}_s$  è la parte singolare.

Si riscrive, quindi, l'equazione di equilibrio in forma variazionale:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) da = \int_{\partial \Omega_N} \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} da, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in K^0, \quad (2.14)$$

dove  $K^0$  è l'insieme dei campi di tensione ammissibili. La presenza di tensioni singolari porta alla necessità di modificare le condizioni al contorno.

Se la  $\mathbf{T}$  non è regolare, la tensione emergente  $\mathbf{s}(\mathbf{T})$  sulla parte caricata del bordo  $\partial \Omega_N$  (la sua traccia al bordo), non sarà data da  $\mathbf{T}_n$  [59], ma, essendo in questo caso possibile che la  $\mathbf{T}$  sia una delta di Dirac della forma  $\mathbf{T} = P\delta(\Gamma) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$ , e considerando la linea di tensione  $\Gamma$  che attraversa il bordo nel punto  $X \in \Gamma$  con un

angolo tale che  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , allora  $\mathbf{s}(\mathbf{T}) = P \delta(X) \mathbf{t}$ . Per quel che riguarda il campo di spostamenti  $\mathbf{u}$ , questo sarà compatibile se oltre ad essere sufficientemente regolare per l'esistenza della corrispondente deformazione infinitesima  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ , soddisfa anche le condizioni al contorno sulla parte del bordo vincolata  $\partial\Omega_D$ :

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}, \text{ su } \partial\Omega_D. \quad (2.15)$$

Prendendo in esame le deformazioni, per materiali elastici lineari, considerando sempre la formulazione variazionale, condizione necessaria è che:

$$\sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, da} < \infty, \quad (2.16)$$

per alcuni materiali rigidi perfettamente plastici (come i materiali unilaterali qui considerati) è sufficiente che  $\mathbf{E}$  sia integrabile;

$$\int_{\Omega} \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}} \, da < \infty. \quad (2.17)$$

Come già fatto per la tensione, campi di deformazione che siano solamente integrabili, l'insieme delle possibili funzioni diventa:

$$\int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{E}}| < \infty, \quad (2.18)$$

e quindi lo spostamento  $\mathbf{u}$  ammette discontinuità finite.

Se  $\mathbf{E}$  corrispondesse al  $\nabla \mathbf{u}$  allora per l'integrabilità di  $\mathbf{E}$  si avrebbe che  $\mathbf{u} \in BV(\Omega)$ , poichè  $\mathbf{E}$  rappresenta la sola parte simmetrica di  $\nabla \mathbf{u}$  si avrà che  $\mathbf{u} \in BD(\Omega)$ .

Anche in questo caso  $\tilde{\mathbf{E}}$  può essere scomposto in:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_r + \tilde{\mathbf{E}}_s, \quad (2.19)$$

dove  $\tilde{\mathbf{E}}_r$  è la parte assolutamente continua ( $\tilde{\mathbf{E}}_r$  è una densità per unità di area) e  $\tilde{\mathbf{E}}_s$  è la parte singolare.

Se  $\mathbf{u} \in BD(\Omega)$ , ovvero  $\mathbf{u}$  può essere discontinuo, allora la condizione  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}$  su  $\partial\Omega_D$  perde di significato; per mantenere condizioni di tipo Dirichelet sul bordo si assume che la muratura circondata con l'insieme  $\Omega \cup \partial\Omega_D$  e che  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}$  su  $\partial\Omega_D$ .

Se si conosce  $\mathbf{E}$  di  $\mathbf{x}$ , per poter integrare le componenti  $E_{\alpha\beta}$  allo scopo di ottenere le componenti (che possono essere discontinue)  $u_\alpha$  di  $\mathbf{u}$ , è necessario che sia soddisfatta la seguente condizione di compatibilità:

$$E_{11,22} + E_{22,11} - 2E_{12,12} = 0, \quad (2.20)$$

condizione che, nel caso di  $\Omega$  semplicemente connesso, è anche sufficiente, in cui un indice preceduto da una virgola, ad esempio  $\alpha$ , rappresenta la derivata rispetto  $x_\alpha$ .

Adottando per le strutture in muratura il modello unilaterale (non resistente a trazione), è possibile ammettere che tensioni e deformazioni siano singolari, ovvero che  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{E}$  possano essere concentrati su delle linee (delta di Dirac).

Da un punto di vista matematico le delta di Dirac non sono funzioni in senso stretto, in quanto assegnano un valore nullo a tutti i punti  $\mathbf{x} \in \Omega$ , eccetto per un insieme di linee di  $\Omega \cup \partial\Omega_D$  sulle quali si assegna un valore infinito. Tali delta di Dirac soddisfano le condizioni:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{T}| < \infty, \quad \int_{\Omega} |\mathbf{E}| < \infty. \quad (2.21)$$

Per quel che riguarda la *deformazione*, considerando campi di spostamento  $\mathbf{u}$  discontinui con un numero finito di discontinuità su un numero finito di archi  $\Gamma$ , la deformazione  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  conterà di una parte regolare  $\mathbf{E}_r$ , deformazione diffusa su  $\Omega - \Gamma$  e una parte singolare  $\mathbf{E}_s$ , nella forma di delta di Dirac concentrate su  $\Gamma$ .

I salti di  $\mathbf{u}$  lungo  $\Gamma$  possono considerarsi rappresentativi delle fratture nel materiale. In Figura 2.1 viene rappresentata una frattura rettilinea che separa il corpo  $\Omega$  in due parti lungo in segmento  $\Gamma$ .

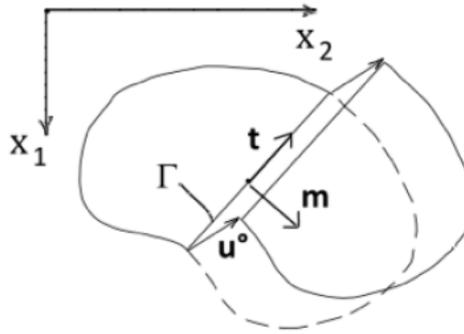


Figura 2.1: Spostamento discontinuo lungo una linea retta  $\Gamma$ , con tangente  $\mathbf{t}$  e normale  $\mathbf{m}$  [da Angelillo [47]]

Lungo  $\Gamma$  il salto è denotato:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-. \quad (2.22)$$

Dove  $\mathbf{u}^+$  è lo spostamento nella direzione di  $\mathbf{m}$ .

Il campo di spostamenti è costante a tratti, con discontinuità lungo  $\Gamma$ . Il salto di  $\mathbf{u}$  può essere scomposto nelle componenti normale e tangenziale:

$$\Delta v = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{m}, \quad \Delta w = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{t}, \quad (2.23)$$

con  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{m}$  la tangente e la normale a  $\Gamma$ .

Da sottolineare che, per l'incompenetrabilità, per ogni frattura, deve valere la condizione per cui  $\Delta v \geq 0$ .

La deformazione  $\mathbf{E}$  corrispondente ad un campo di spostamento costante a tratti è nulla su tutto  $\Omega - \Gamma$  e singolare su  $\Gamma$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \delta(\Gamma) (\Delta v \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \Delta w \mathbf{t} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \Delta w \mathbf{m} \otimes \mathbf{t}). \quad (2.24)$$

Per quel che riguarda la *tensione*, se il campo di tensione  $\mathbf{T}$  non è singolare, per l'equilibrio, la tensione emergente su una possibile linea di discontinuità  $\Gamma$  dovrà essere continua, quindi, su ogni punto regolare di  $\Gamma$ ,  $\mathbf{T}$  dovrà soddisfare la condizione:

$$(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) \mathbf{m} = 0, \quad (2.25)$$

con  $\mathbf{m}$  la normale a  $\Gamma$  e  $\mathbf{T}^+$  la tensione sul lato di  $\Gamma$  nella direzione di  $\mathbf{m}$ .

Se  $\mathbf{T}$  è singolare, ovvero una delta di Dirac su  $\Gamma$ , anche la parte di  $\mathbf{T}$  emergente su  $\Gamma$  potrà essere discontinua. In questo caso, quindi, la parte emergente

$$\mathbf{q} = (\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) \mathbf{m}, \quad (2.26)$$

per essere in equilibrio, dovrà essere bilanciata dalla tensione concentrata su  $\Gamma$  (Figura 2.2).

Considerando la notazione della Figura 2.2, la parte singolare di  $\mathbf{T}$  su  $\Gamma$  è:

$$\mathbf{T}_s = N \delta(\Gamma) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}. \quad (2.27)$$

Chiamando  $p$  e  $q$  le componenti, rispettivamente, tangenziale e normale di  $\mathbf{q}$ , e  $\rho$  la

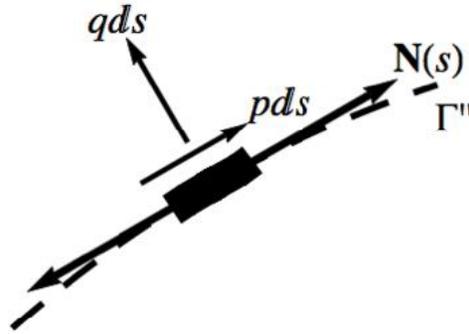


Figura 2.2: Forze agenti su una curva  $\Gamma$  [da Angelillo [47]]

curvatura di  $\Gamma$ , per l'equilibrio dovranno essere soddisfatte le seguenti equazioni:

$$N' + p = 0, \quad N\rho + q = 0. \quad (2.28)$$

Quindi se  $\Gamma$  è una linea retta, allora  $\mathbf{q}$  dovrà essere zero.

### 2.1.2 Funzione di Airy

In assenza di forze di volume ( $\mathbf{b} = 0$ ), le equazioni di equilibrio ammettono una soluzione in termini della funzione scalare  $F$ :

$$T_{11} = F_{,22}, \quad T_{22} = F_{,11}, \quad T_{12} = -F_{,12}, \quad (2.29)$$

la 2.29 è la soluzione generale delle equazioni di equilibrio nel caso i carichi siano bilanciati su ogni contorno chiuso che delimita  $\Omega$  (vedi Gurtin [60]).

Le condizioni al bordo, devono, quindi, essere riformulate in termini di  $F$ .

Chiamando  $\mathbf{x}(s)$  la parametrizzazione di  $\partial\Omega_N$  lungo l'arco, le condizioni al bordo in termini di  $F$  diventano:

$$F(s) = m(s), \quad \frac{dF}{dv} = n(s) \text{ su } \partial\Omega_N, \quad (2.30)$$

dove  $\frac{dF}{dv}$  è la derivata normale di  $F$  sul bordo, e  $n(s)$  e  $m(s)$  sono la forza e il momento di contatto prodotti dalle trazioni  $\mathbf{s}(s)$  su di una trave 1d avente la stessa forma di  $\partial\Omega$  e tagliata in  $s = 0$ .

Un campo di tensione non singolare è rappresentato da una funzione  $F$  liscia (Figura 2.3a), mentre un campo di tensione singolare è rappresentato da una funzione  $F$  con delle pieghe (Figura 2.3b).

La proiezione di una piega di  $F$  sulla piattaforma  $\Omega$  si denota con  $\Gamma$ . Su una piega

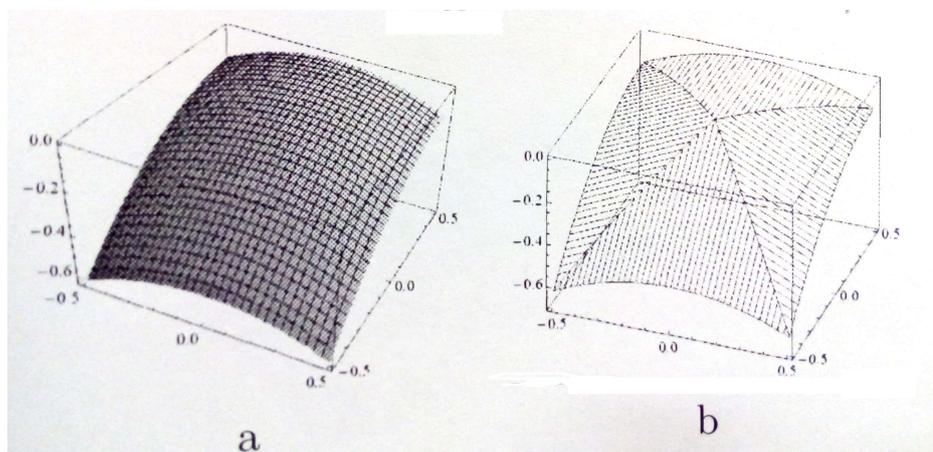


Figura 2.3: Funzione delle tensioni di Airy liscia (a) e non liscia (b) [da Angelillo [47]]

di  $F$ , la derivata seconda di  $F$  rispetto la normale  $\mathbf{m}$  a  $\Gamma$  è una delta di Dirac con supporto su  $\Gamma$ , quindi, l'Hessiano  $\mathbf{H}(F)$  della funzione di tensione  $F$  lungo  $\Gamma$  è:

$$\mathbf{H}(F) = \Delta_m F \delta(\Gamma) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad (2.31)$$

dove  $\Delta_m F$  è il salto di pendenza di  $F$  nella direzione della normale  $\mathbf{m}$ .

Considerando le relazioni di Airy, la parte singolare della tensione è:

$$\mathbf{T}_s = N \delta(\Gamma) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \quad (2.32)$$

dove le forze assiali di contatto  $N$  sono date da:

$$N = \Delta_m F. \quad (2.33)$$

### 2.1.3 Il problema di equilibrio per materiali RNRT: campo di tensione statisticamente ammissibile

Un campo di tensione  $\mathbf{T}$  equilibrato è detto *staticamente ammissibile* per il materiale RNRT se è equilibrato e soddisfa le condizioni per il materiali RNRT (2.5). L'insieme dei campi di tensione staticamente ammissibili  $H$  è:

$$H = \{\mathbf{T} \in S(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0, \mathbf{T} \mathbf{n} = \underline{\mathbf{s}} \text{ su } \partial\Omega_N, \mathbf{T} \in \operatorname{Sym}^-\}, \quad (2.34)$$

con  $S(\Omega)$  spazio di funzioni scelto di conveniente regolarità.

Per campi di tensione  $\mathbf{T}$  non lisci è necessario riformulare le equazioni differenziali di equilibrio, in quanto in questo caso le derivate di  $\mathbf{T}$  non esistono in senso stretto, si può considerare l'equilibrio in forma variazionale utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Introducendo un insieme di spostamenti virtuali:

$$\delta K = \{\delta \mathbf{u} \in S^*(\Omega) : \delta \mathbf{u} = 0 \text{ su } \partial\Omega_D\}, \quad (2.35)$$

il campo di tensione  $\mathbf{T}$  sarà equilibrato con i carichi  $(\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{b})$  se e solo se vale:

$$\int_{\partial\Omega_N} \underline{\mathbf{s}} \cdot \delta \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \delta K, \quad (2.36)$$

con  $S^*(\Omega)$  spazio funzionale di conveniente regolarità.

Per ogni campo di spostamenti  $\mathbf{T}$  staticamente ammissibile, è possibile effettuare

la seguente partizione del dominio  $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_D$ :

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega : tr\mathbf{T} \leq 0, det\mathbf{T} \geq 0\}, \quad (2.37)$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \Omega : tr\mathbf{T} \leq 0, det\mathbf{T} = 0\}, \quad (2.38)$$

$$\Omega_3 = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{T} = 0\}. \quad (2.39)$$

Rappresentando il campo di tensione  $\mathbf{T}$  con la sua decomposizione spettrale:

$$\mathbf{T} = \sigma_1 \mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{k}_2, \quad (2.40)$$

$\Omega_1$  è la parte del dominio soggetta a regime di compressione biassiale ( $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$ ),  $\Omega_2$  è soggetta a compressione uniasiale ( $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \sigma < 0$ ) e  $\Omega_3$  è la parte del dominio inerte. La forma e la regolarità di queste regioni del dominio dipendono dalla regolarità di  $\mathbf{T}$ .

Anche nel caso in cui si considerano delta di Dirac con supporto su un numero finito di archi regolari per cui  $\Omega_i$  può degenerare, è comunque possibile in modo abbastanza semplice identificare le diverse partizioni del dominio  $\Omega$ .

### 2.1.4 Concavità della funzione di Airy

Come precedentemente detto, in assenza di forze di volume ( $\mathbf{b} = 0$ ), è possibile esprimere un campo di spostamenti staticamente ammissibile in termini della funzione scalare  $F$ , detta *soluzione di Airy*. Quindi le 2.5, riscritte in termini di  $F$  diventano:

$$tr\mathbf{T} = F_{,11} + F_{,22} \leq 0, \quad det\mathbf{T} = F_{,11}F_{,22} - F_{,12}^2 \geq 0, \quad (2.41)$$

l'Essiano  $\mathbf{H}(F)$  sarà semidefinito negativo e la funzione di tensione  $F$  dovrà essere concava; in assenza di forze di volume, quindi, la ricerca della soluzione di equilibrio per un materiale rigido non resistente a trazione si traduce nella ricerca di una funzione  $F$  che sia concava assegnando alla parte del bordo  $\partial\Omega_N$  uno specifico valore e una specifica pendenza.

### 2.1.5 Il problema di cinematico: campo di spostamenti cinematicamente ammissibile

Un campo di spostamenti  $\mathbf{u}$  è detto *cinematicamente ammissibile* quando soddisfa le condizioni al contorno  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}$  su  $\partial\Omega_D$  per cui la corrispondente deformazione effettiva  $\mathbf{E}^* = (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{E}}) \in Sym^+$ , ovvero se soddisfa le condizioni 2.6. L'insieme  $K$  dei campi di spostamento ammissibili è il seguente:

$$K = \{\mathbf{u} \in T(\Omega) : \mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \text{ su } \partial\Omega_D, (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{E}}) \in Sym^+\}, \quad (2.42)$$

dove  $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega_D$  e  $T(\Omega)$  è uno spazio di funzioni di conveniente regolarità. Avendo a che fare con un materiale rigido non resistente a trazione si ammette che la funzione  $\mathbf{u}$  abbia discontinuità finite.

Poichè la derivata di  $\mathbf{u}$  non esiste in senso stretto e la sua traccia su  $\partial\Omega_D$  non è ben definita, la relazione tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{u}$  deve essere scritta in forma debole, è possibile farlo sfruttando la forma variazionale usando il principio dei lavori virtuali.

Considerando l'insieme dei campi di spostamenti virtuali:

$$\delta H = \{\delta\mathbf{T} \in T^*(\Omega) : div\delta\mathbf{T} = 0, \delta\mathbf{T}\mathbf{n} = 0 \text{ su } \partial\Omega_N\}, \quad (2.43)$$

il campo di spostamento  $\mathbf{u}$  sarà compatibile con  $(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{E})$  se e solo se vale:

$$\int_{\partial\Omega_D} (\delta\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \underline{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \delta\mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \int_{\Omega} \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}), \quad \forall \delta\mathbf{T} \in \delta H, \quad (2.44)$$

con  $T^*(\Omega)$  uno spazio di funzioni di conveniente regolarità.

In particolare, se lo spostamento presenta salti finiti su di una linea  $\Gamma$ , le deformazioni hanno la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \delta(\Gamma) \left( \Delta v \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \Delta w \mathbf{t} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \Delta w \mathbf{m} \otimes \mathbf{t} \right), \quad (2.45)$$

e le restrizioni del materiale NRNT impongono che sia:

$$\Delta\omega = 0, \quad \Delta u \geq 0, \quad (2.46)$$

ovvero il salto può essere solo di puro distacco e sono impediti gli scorrimenti.

## 2.2 Analisi limite applicata alle murature

Come visto, per lo studio dell'equilibrio dei materiali rigidi non resistenti a trazione sia gli spostamenti che le forze sono soggette a determinate condizioni di compatibilità: per l'esistenza di un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile e di un campo di tensione staticamente ammissibile è necessario che siano soddisfatte determinate condizioni al contorno.

Considerando la definizione dei materiali RNRT, si può notare come le condizioni 2.2 e 2.3 sono equivalenti alla regola di normalità della deformazione totale rispetto al cono dei possibili stati di tensione ammissibili (Figura 2.4).

La condizione di normalità è la condizione chiave che permette l'utilizzo dell'a-

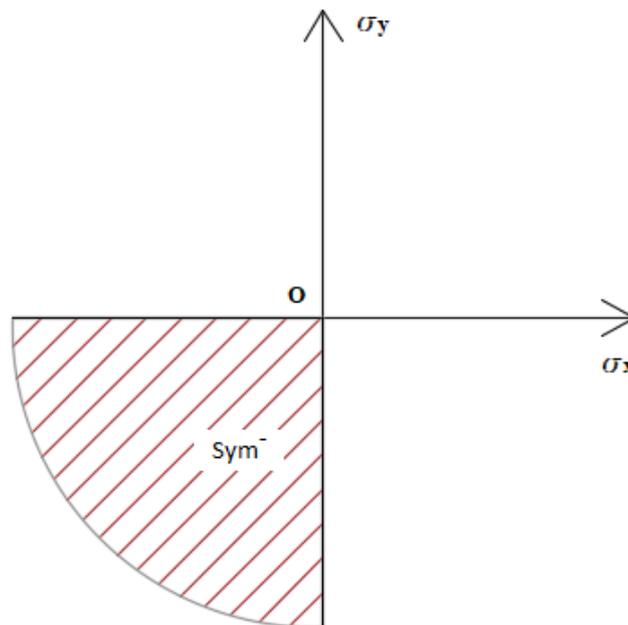


Figura 2.4: Dominio degli stati ammissibili per la muratura

analisi limite e dei suoi teoremi statico e cinematico ai materiali RNRT [61].

Si definisce collasso plastico lo stato per cui una struttura, completamente o solo su una sua parte, mostra un'accelerazione incontrollata causata dai carichi  $(\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{b})$ . Durante un collasso le tensioni e gli spostamenti crescono in maniera indefinita su tutta la struttura o solo su una sua parte, le parti del campo di tensione e di spostamento che mostrano una crescita indefinita vanno a definire il meccanismo di collasso.

Il campo di tensione  $\sigma^a$  è un campo di tensione staticamente ammissibile se soddisfa le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial T_{ij}^a}{\partial x_i} + b_i = 0, \quad x \in V, \quad (2.47)$$

$$T_{ij}^a n_j = s_i, \quad x \in \partial V, \quad (2.48)$$

ovvero l'equazione di equilibrio (2.47) e le condizioni al bordo (2.48), con  $n$  normale uscente a  $V$ . Si ha inoltre la condizione di compatibilità:

$$f(T^a) \leq 0. \quad (2.49)$$

Si definisce carico ammissibile il sistema  $(\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{b})$  in equilibrio con la tensione ammissibile  $T^a$ , e l'insieme  $(\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{b}, \mathbf{T}^a)$  viene detto equilibrato.

Il campo di tensione  $T^s$  è detto staticamente sicuro se oltre a soddisfare le equazioni 2.47 e 2.48, soddisfa anche la seguente condizione di compatibilità:

$$f(\mathbf{T}^a) < 0. \quad (2.50)$$

Considerando il campo della velocità di spostamento  $\dot{\mathbf{u}}_0$  che soddisfa le condizioni cinematiche sulla parte vincolata del dominio  $\Omega$ :

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \underline{\dot{\mathbf{u}}}_0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_D, \quad (2.51)$$

il corrispondente campo di velocità di deformazioni infinitesime, che soddisfa le condizioni con  $\dot{\mathbf{u}}_0$  è:

$$\dot{E}_{0ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_{0j}}{\partial x_i} \right), \quad x \in \Omega, \quad (2.52)$$

e l'insieme  $(\dot{\mathbf{u}}_0, \mathbf{E}_0)$  rappresenta un cinematismo ammissibile.

### 2.2.1 Teoremi dell'analisi limite

I teoremi dell'analisi limite, statico e cinematico, possono essere enunciati in una maniera molto semplice e intuitiva come segue:

1. per il *teorema statico dell'analisi limite* una struttura non crollerà sotto determinate condizioni di carico se esiste almeno un campo di tensione staticamente ammissibile che sia in equilibrio con i carichi esterni,
2. per il *teorema cinematico dell'analisi limite* una struttura crollerà sottoposta a determinate condizioni di carico se esiste almeno un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile per cui il lavoro dei carichi esterni è maggiore della dissipazione interna.

### 2.2.2 Teoremi dell'analisi limite per materiali RNRT

Volendo enunciare i teoremi dell'analisi limite in maniera specifica per materiali rigidi non resistenti a trazione si ha:

1. per il *teorema statico dell'analisi limite*, una particolare condizione di carico  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  non causa il collasso della struttura se esiste almeno un campo di tensione equilibrato che sia di pura compressione ed in equilibrio con i carichi,

2. per il *teorema cinematico dell'analisi limite*, una certa condizione di carico applicata ad una struttura ne causerà il collasso se esiste almeno un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile ( $\mathbf{u}$ ), per cui i carichi ( $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{b}$ ) svolgono lavoro positivo.

# CAPITOLO 3

---

## Applicazioni

---

### 3.1 Il Metodo

Il lavoro si concentra sullo studio dell'equilibrio delle volte in muratura modellate come composte di materiale RNRT.

L'approccio più utilizzato sino ad ora per tale studio è stato di tipo analitico, sfruttando i teoremi dell'analisi limite nell'ambito delle ipotesi tipiche per i materiali unilaterali.

Negli ultimi anni il numero di lavori presenti in letteratura riguardo materiali simili alla muratura è andato ampliandosi; si ha un vasto contributo dall'Università di Salerno, a partire dal lavoro sul Lumped Stress Method [62], poi applicato alle volte nei lavori di Fraternali et al [63], Angelillo & Fortunato [17], Fraternali [18], e recentemente da Angelillo et al in [20]; è, inoltre, importante ricordare i lavori di O'Dwyer [10], Block [11], Block et al [64], Vouga et al [12], De Goes et al [13], Block & Lachauer [14] e Miki et al [15].

Altri lavori interessanti sono quello di Calladine in [65], con uno studio sulle scale elicoidali trattate con il modello della membrana elastica, e i lavori di Block [11], Angelillo [21], [22] e Angelillo et al [66], in cui viene nuovamente trattato

l'argomento delle scale utilizzando, in questo caso, il modello unilaterale.

Una volta in muratura è stabile se è possibile trovare un qualsiasi campo di tensione ammissibile, ossia equilibrato e compatibile con le restrizioni unilaterali. Ammettendo la presenza di tensioni singolari si andrà a ricercare un campo di tensioni ammissibili concentrato su superfici o linee interne alla volta.

La volta in muratura viene considerata come una membrana unilaterale, la cui geometria ammette una descrizione alla Monge il cui equilibrio è formulato alla Pucher, ovvero considerando le tensioni proiettate sulla piattaforma  $\Omega$ .

Considerando solo carichi verticali il problema si riduce ad una equazione differenziale di secondo ordine in due variabili, nella quale la funzione di forma  $f$  e la funzione di tensione  $F$  appaiono in maniera simmetrica e quindi sono perfettamente intercambiabili.

L'ipotesi di materiale unilaterale richiede che la funzione di forma ricada all'interno della volta e che la funzione di tensione sia concava. Di norma per ottenere la seconda condizione è necessario modificare la funzione di forma fino a trovare una superficie la cui funzione di forma associata sia concava.

L'assunzione di materiale unilaterale rende in un certo senso la volta in muratura come una struttura indeterminata in cui la membrana che supporta il carico deve adattare la sua forma per soddisfare i vincoli propri del materiale unilaterale.

La ricerca della coppia superficie di tensione ammissibile (concava) e funzione di forma interna alla volta può essere effettuata in maniera iterativa, partendo indifferentemente da una funzione di forma iniziale ( $f$ ) o di tensione iniziale ( $F$ ) note. Scopo di questo lavoro è stato la creazione di un codice per effettuare tale ricerca in maniera automatica, partendo da una funzione di forma o di tensione nota.

Il codice attraverso un processo di ottimizzazione ricerca una soluzione ammissibile per la struttura.

### 3.1.1 Descrizione del metodo

Per la costruzione dello schema iterativo è stata considerata l'approssimazione della formulazione variazionale dell'equazione trasversale di equilibrio, ottenuta discretizzando sia la funzione di forma  $f$  che la funzione di tensione  $F$  sulla stessa mesh, considerando quindi una rappresentazione simpliciale delle due funzioni.

Per l'approssimazione dell'Hessiano viene adottato il metodo LSM ([62]). Per iniziare il processo di ottimizzazione si può, indifferentemente, partire da una funzione di forma  $f^o$  o da una funzione di tensione  $F^o$ .

Se si sceglie di partire da una forma  $f^o$  nota, si dovranno assegnare dei valori al bordo  $F^*$  per la funzione di tensione  $F$  e la soluzione dell'equazione approssimata dell'equilibrio trasversale in forma variazionale darà come soluzione la funzione di tensione  $F(f^o, F^*)$  corrispondente a quella particolare funzione di forma e in equilibrio con i carichi.

Il problema è lineare, e può essere scritto come segue:

$$A(f^o)F = b(F^*), \quad (3.1)$$

ovvero:

$$F(f^o, F^*) = A^{-1}(f^o)b(F^*). \quad (3.2)$$

È necessario introdurre una funzione obiettivo  $Conc(F)$  che effettui una "misura" del grado di concavità di  $F(f^o, F^*)$  su  $\Omega$ .

Assumendo che la funzione di forma  $f^o$  sia fissata e le condizioni al bordo  $F^*$  incognite, si può esplicitare  $Conc(F)$  in termini di  $F^*$ :

$$C(F^*) = Conc(A^{-1}(f^o)b(F^*)), \quad (3.3)$$

è quindi possibile determinare i valori migliori per il dato al bordo  $F^*$ .

Se a fine calcolo, trovata la funzione di tensione  $F$ , corrispondente alla funzione di forma  $f^o$  ed in equilibrio col carico dato, questa risulta concava, si potrà interrompere la procedura in quanto la coppia  $(f^o, F)$  è rappresentativa di uno stato di equilibrio accettabile per la muratura. Se, invece,  $F$  non risulta concava, sarà necessario modificarla concavizzandola, si avrà quindi una nuova funzione di tensione nota  $F^o$  che verrà utilizzata per ripetere il processo di ottimizzazione, stavolta ricercando la funzione di forma  $f$  corrispondente alla funzione di tensione  $F^o$ .

In quest'ultimo caso, poichè si ricerca la funzione di forma, la funzione obiettivo sarà lo scarto quadratico medio di  $f$  dalla superficie media della volta.

## 3.2 Formulazione di equilibrio

### 3.2.1 Geometria

La geometria di una volta in muratura può essere descritta attraverso le superfici di intradosso e estradosso.

Con la soluzione di equilibrio qui proposta si assume che il carico applicato sulla volta sia portato da una membrana  $S$  di spessore  $s$  interna alla volta stessa. La geometria di tale membrana  $S$  non è fissata, ma può essere modificata e distorta, con l'unico vincolo che resti interna alla struttura.

La superficie  $S$ , che deve essere continua ma non necessariamente liscia, può essere rappresentata attraverso la descrizione di Monge.

Utilizzando tale rappresentazione, la posizione  $x$  di un qualsiasi punto della superficie  $S$  ha un vettore posizione le cui componenti cartesiane si scrivono:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, f(x_1, x_2)\} \quad \{x_1, x_2\} \in \Omega, \quad (3.4)$$

dove:

- $\Omega$  è un dominio bidimensionale, il cui bordo  $\partial \Omega$  è composto da un numero finito di curve di normale uscente  $\mathbf{n}$ , ed è chiamato piattaforma di  $S$ ,
- $\{x_1, x_2\}$  sono le coordinate curvilinee su  $S$ , e corrispondono alle coordinate Cartesiane di  $\mathbf{x}$  sulla piattaforma  $\Omega$ ,
- $x_3=f(x_1, x_2)$  è l'elevazione della membrana.  $f \in C^0(\Omega)$ .

In Figura 3.1 la superficie  $S$  è mostrata una vista tridimensionale.

I versori associati al sistema di coordinate cartesiano sono  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

La membrana è caricata da forze esterne  $\mathbf{q}$ , definite per unità di area di  $S$  e bilan-

ciate dalla tensione generalizzata di membrana  $\mathbf{T}$ , le cui componenti sono rappresentate in Figura 3.1.

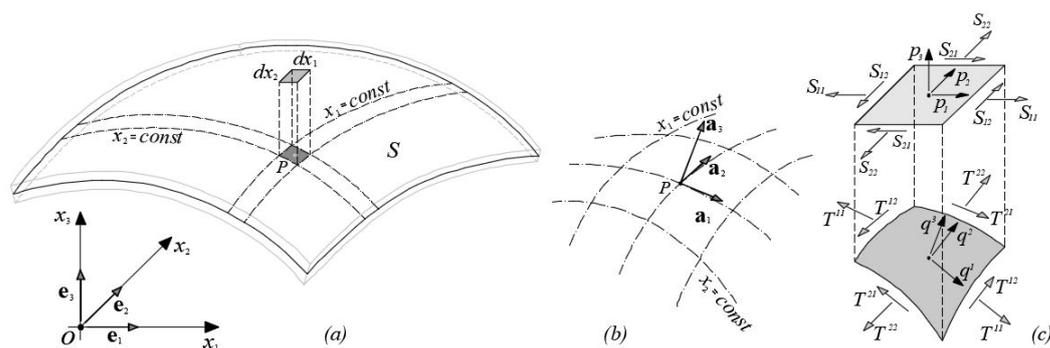


Figura 3.1: Membrana e superficie delle tensioni (a), base covariante (b), tensioni (c).

La base covariante su  $S$ , associata alle coordinate curvilinee  $\{x_1, x_2\}$ , è:

$$\mathbf{a}_1 = \{1, 0, f_{,1}\}; \quad \mathbf{a}_2 = \{0, 1, f_{,2}\}; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{J} \{-f_{,1}, -f_{,2}, 1\}, \quad (3.5)$$

in cui la virgola seguita dall'indice, ad esempio  $i$ , denota la derivata rispetto ad  $x_i$ , e  $\mathbf{a}_3$  coincide con la normale unitaria  $\mathbf{m}$  a  $S$ .

$J = \sqrt{1 + f_{,1}^2 + f_{,2}^2}$  è il determinante *Jacobiano*.

La base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  non è nè unitaria nè ortogonale, e i vettori della corrispondente base controvariante sono:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{J^2} \{1 + f_{,2}^2, -f_{,1}f_{,2}, f_{,1}\}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{J^2} \{-f_{,1}f_{,2}, 1 + f_{,1}^2, f_{,2}\}, \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Equilibrio membranale nella forma di Pucher

Qui si seguono gli sviluppi presentati in [17], di cui, di seguito, si fa una breve sintesi.

La tensione di membrana su  $S$  è definita da un tensore di tensione di superficie  $\mathbf{T}$ , è rappresentata nella base covariante (3.5) come segue:

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta . \quad (3.7)$$

In 3.7,  $T^{\alpha\beta}$  sono le componenti controvarianti di  $\mathbf{T}$ , e si considera valida la convenzione di sommatoria sulle lettere greche ripetute  $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2$ .

Le componenti controvarianti della tensione risultano utili ai fini del calcolo ma non hanno significato fisico, è quindi necessario trasformare tali componenti in componenti cartesiane, per semplificare la lettura e la comprensione dei risultati dell'analisi.

In equilibrio la divergenza della tensione di superficie  $\mathbf{T}$  bilancia il carico  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ , definito per unità di superficie su  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta) \mathbf{a}^\gamma + \mathbf{q} = 0. \quad (3.8)$$

Il metodo più efficiente per descrivere l'equilibrio di membrana su un guscio sottile sottoposto ad un certo carico  $\mathbf{q}$  si deve essenzialmente a Pucher [24].

Le componenti controvarianti della tensione generalizzata  $T^{\alpha\beta}$  sulla superficie di membrana sono trasformate in componenti della tensione proiettata  $S_{\alpha\beta} = J T^{\alpha\beta}$  sulla piattaforma  $\Omega$ , perciò dall'equazione (3.8) proiettata su una base non ortogonale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m} = \mathbf{a}_3\}$  si ottiene:

$$S_{11,1} + S_{12,2} + p_1 = 0, \quad S_{21,1} + S_{22,2} + p_2 = 0, \quad S_{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta} - p_\gamma f_{,\gamma} + p_3 = 0, \quad (3.9)$$

dove  $\mathbf{p} = J\mathbf{q}$  è il carico per unità di area proiettata.

Utilizzando le tensioni proiettate le prime due equazioni di equilibrio appaiono identiche a quelle che si scrivono nel caso piano.

Considerando solo carichi verticali, ovvero  $\mathbf{p} = \{0, 0, -p\}$ , il problema può essere risolto in termini della funzione di tensione di Airy  $F(x_1, x_2)$ , nella forma seguente:

$$S_{11} = F_{,22} , S_{22} = F_{,11} , S_{12} = S_{21} = -F_{,12}. \quad (3.10)$$

Per carichi verticali, l'equazione di equilibrio trasversale (3.9)<sup>3</sup> corrisponde all'equilibrio delle tensioni generalizzate con la componente verticale del carico  $p_3 = -p$ .

Grazie all'utilizzo della funzione di tensione di Airy la (3.9)<sup>3</sup> può essere riscritta come segue:

$$F_{,22}f_{,11} + F_{,11}f_{,22} - 2F_{,12}f_{,12} = p. \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Tensioni singolari e l'equilibrio nelle membrane unilaterali

La muratura viene descritta come un continuo composto da materiale Rigido Non Resistente a Trazione (RNRT) considerando la descrizione di Heyman, questa assunzione implica la necessità di imporre alcuni vincoli: la tensione generalizzata  $\mathbf{T}$  deve essere semidefinita negativa e non produce lavoro per la corrispondente deformazione  $\mathbf{E}$ . Tale deformazione è semidefinita positiva:

$$\mathbf{T} \in \text{Sym}^- , \mathbf{E} \in \text{Sym}^+ , \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.12)$$

La prima applicazione della trasformazione di Pucher per materiali RNRT è stata effettuata da Angelillo e Fortunato in [17], dove viene mostrato che, a causa

delle restrizioni imposte dal materiale RNRT, sia il tensore della tensione di superficie che la matrice delle tensioni proiettate devono essere semidefiniti negativi. In termini della funzione di tensione  $F$ , tale condizione può essere scritta come segue:

$$F_{,11} + F_{,22} \leq 0 \quad , \quad F_{,11}F_{,22} - F_{,12}^2 \geq 0, \quad (3.13)$$

quindi  $F(x_1, x_2)$  deve essere concava.

Se  $F$  è solo continua può avere delle pieghe; in tal caso la tensione proiettata è una delta di Dirac con supporto lungo la proiezione  $\Gamma$  su  $\Omega$  della linea di piega.

L'Hessiano  $\mathbf{H}$  di  $F$  è singolare trasversalmente a  $\Gamma$ , ovvero ha una parte singolare parallela al vettore unitario  $\mathbf{h}$  normale a  $\Gamma$ . Corrispondentemente la derivata direzionale di  $F$  nella direzione di  $\mathbf{h}$ , detta  $F \cdot \mathbf{h}$ , esibisce un salto.

Pertanto, la parte singolare dell'Hessiano  $\mathbf{H}$  di  $F$  può essere scritta come:

$$\mathbf{H}_s = \delta(\Gamma) \Delta F_h \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}, \quad (3.14)$$

$\delta(\Gamma)$  è la delta di Dirac lineare su  $\Gamma$  e  $\Delta F_h$  il salto di pendenza lungo la direzione  $\mathbf{h}$ .

Analogamente la parte singolare della tensione proiettata, corrispondente a  $F$  (vedi (3.10)) è una delta di Dirac su  $\Gamma$  nella forma:

$$\mathbf{S}_s = \delta(\Gamma) \Delta F_k \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (3.15)$$

Dove  $\mathbf{k}$  è la tangente unitaria a  $\Gamma$ .

La concavità di  $F$  implica la concavità della piega  $\Gamma$ . Inoltre  $\Delta F_k$  è negativa e la corrispondente tensione singolare proiettata su  $\Gamma$  è di compressione.

Come conseguenza dell'analisi precedentemente descritta, il problema di equilibrio per la membrana unilaterale  $S$ , sottoposta a carichi verticali, consiste nella

ricerca di una funzione di tensione concava  $F(x_1, x_2)$  che soddisfi l'equazione (3.11), con l'imposizione di condizioni al bordo di tipo Dirichelet o Neumann, rispettivamente:

$$F(x_1(s), x_2(s)) = g(s) \quad \text{o} \quad \frac{dF}{dn}(x_1(s), x_2(s)) = h(s) \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (3.16)$$

$s$  è la parametrizzazione del bordo  $\Delta\Omega$  con la lunghezza d'arco, e  $g(s)$  e  $h(s)$  il momento interno di contatto e la forza assiale prodotti dalle trazioni su una trave 1d di forma  $\partial\Omega$ .

Si può notare che le componenti normale ( $\sigma$ ) e tangenziale ( $\tau$ ) della trazione applicata al bordo possono essere definite in termini delle condizioni al bordo  $g$  e  $h$  come segue:

$$\sigma(s) = g_{/ss}(s), \quad \tau(s) = -h_{/s}(s), \quad (3.17)$$

in cui il simbolo / seguito da indici rappresenta la derivata covariante sul bordo.

### 3.3 Schema computazionale

Scopo di questo lavoro è l'implementazione di un codice iterativo di ottimizzazione in grado di automatizzare la ricerca alternata della funzione di tensione, partendo dalla forma e viceversa.

Per illustrare la procedura numerica, nel seguito vengono considerati tre esempi tipici: la volta a vela, la volta a crociera e la volta a padiglione, tutte su piattaforma  $\Omega$  rettangolare.

Per iniziare il processo di ottimizzazione si è scelto di partire da una funzione di forma  $f^o$  nota, considerando un'approssimazione della superficie media della volta ottenuta discretizzando linearmente la descrizione di Monge della superficie su una mesh triangolare.

Per l'approssimazione della soluzione del problema di equilibrio si parte dalla formulazione variazionale dell'equazione di equilibrio trasversale (3.11), ovvero:

$$E(F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} F_{,\alpha} F_{,\beta} da + \int_{\Omega} pF da. \quad (3.18)$$

È facile, infatti, dimostrare che l'equazione (3.9<sub>3</sub>), considerando condizioni al bordo di tipo Dirichlet, è ottenuta come equazione di Eulero associata alla condizione:

$$\delta E(F) = 0. \quad (3.19)$$

Negli esempi che qui si trattano, la forma iniziale della superficie media descritta da  $f^o$  è assegnata in modo analitico e l'approssimazione simpliciale della superficie stessa viene generata utilizzando i valori che la funzione  $f^o$  assume sui nodi della triangolazione.

Per permettere il calcolo sul bordo degli Hessiani di  $f^o$  ed  $F$ , è necessario considerare un dominio ampliato rispetto alle reali dimensioni della volta sia per la mesh

triangolare che per la funzione di forma  $f^o$ , aggiungendo una striscia di elementi lungo tutto il bordo della mesh triangolare e prolungando la funzione di forma su questa parte aggiuntiva del dominio; in questo primo passo la funzione di tensione viene calcolata, invece, sulla sola parte non ampliata del dominio.

La regione  $\Omega$  è discretizzata utilizzando due mesh complementari e sovrapposte, la mesh primaria (Figura.3.2.a) e la mesh duale (Figura.3.2.b).

La prima è una mesh triangolare regolare, la seconda è formata da esagoni i cui baricentri coincidono con i nodi della mesh primaria.

Da qui in poi  $x_1$  verrà denominato  $x$  e  $x_2$  verrà denominato  $y$ .

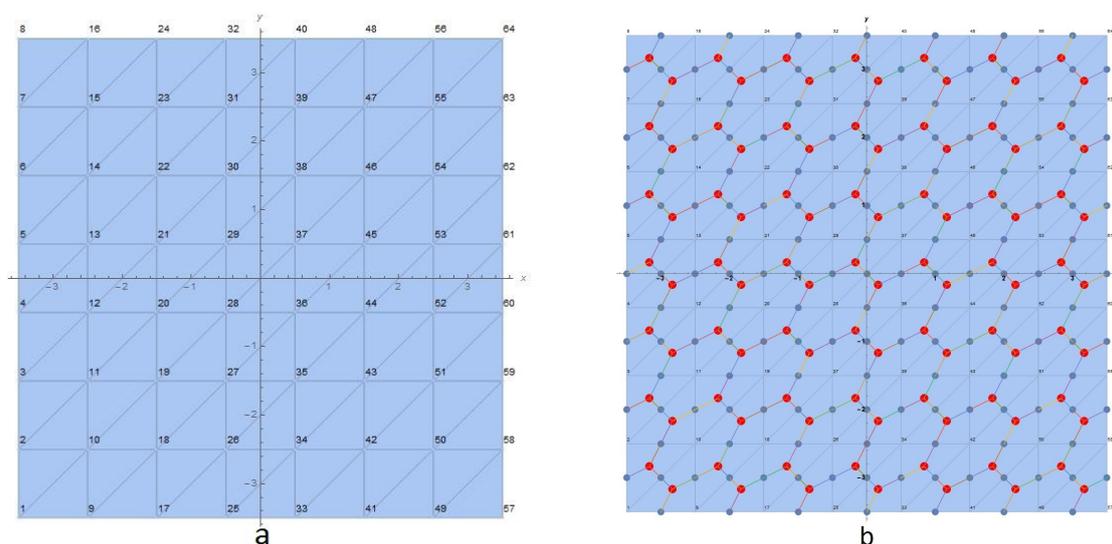


Figura 3.2: mesh primaria (a) e mesh duale (b)

La superficie  $f^o$ , e qualsiasi altra superficie  $f$  ottenuta durante il processo di ottimizzazione è lineare a tratti, in quanto superficie generata dai valori che  $f^o$  assume in corrispondenza dei nodi della mesh primaria formata da triangoli. La curvatura di  $f^o$  è quindi singolare, ovvero una delta di Dirac lineare concentrata lungo lo scheletro della mesh primaria.

Utilizzando l'approssimazione LSM ([62]), la mesh duale è utilizzata per effettuare una media di queste singolarità in ogni nodo della mesh primaria.

Al fine di ridurre gli effetti di anisotropia artificiale dovuti alla mesh, vengono utilizzate due mesh primarie (mesh1, mesh2) per l'approssimazione della funzione di forma  $f$  (e, in seguito, della funzione di tensione  $F$ ), che si differenziano tra loro in quanto presentano elementi diagonali mutuamente trasversali.

La soluzione, trovata alla fine di ogni step del processo di ottimizzazione, viene ricavata sovrapponendo i risultati ottenuti utilizzando le due mesh (mesh1 e mesh2).

In base alla approssimazione LSM, la matrice Hessiana viene calcolata per ogni nodo della mesh primaria attraverso una media, effettuata sulla mesh duale, delle curvature (in questo caso delle delta di Dirac) concentrate sulle interfacce della mesh convergenti nel nodo interessato (Figura 3.3).

Il problema differenziale regolato dall'equazione 3.18 è risolvibile univocamente

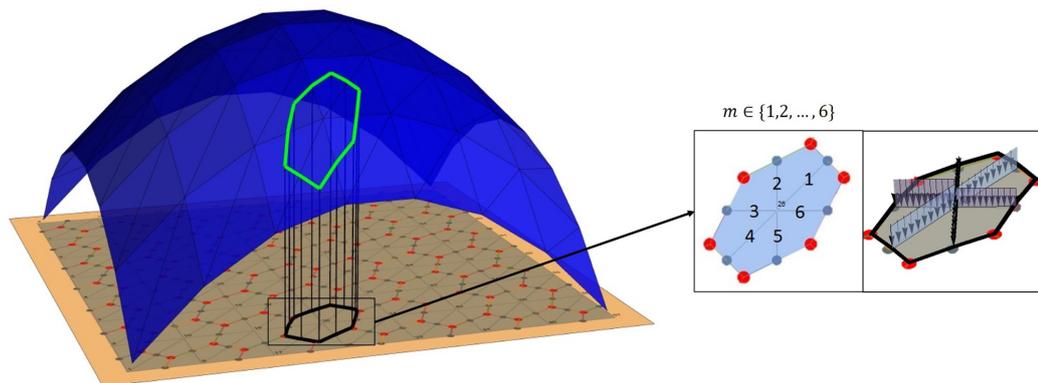


Figura 3.3: Proiezione e approssimazione della curvatura

solo imponendo opportune condizioni al contorno sulla funzione  $F$ . Qui si è scelto di imporre condizioni al contorno di tipo Dirichlet, ovvero si considera assegnato il valore al bordo  $F^* = F|_{\partial\Omega}$  di  $F$ .

Considerando la funzione numerica  $F^*$  come incognita, si ottiene un repertorio di soluzioni equilibrate dipendenti da  $F^*$ . I valori ottimali di  $F^*$  per le condizioni al bordo vengono trovati tramite un opportuno processo di ottimizzazione. Il

problema differenziale discretizzato può essere formalizzato come segue:

$$AF = p, \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_I \\ F_B \end{bmatrix} - p = 0, \quad (3.21)$$

$$A_{II}F_I + A_{IB}F_B - p = 0, \quad (3.22)$$

in cui qui  $F$  rappresenta il vettore dei valori nodali di  $F$ , il pedice  $I$  indica i nodi interni e  $B$  quelli del bordo. Per trovare i valori nodali della  $F$  si utilizza la seguente equazione:

$$F_I = A_{II}^{-1}(p - A_{IB}F_B). \quad (3.23)$$

È possibile sia lasciare tutti i valori del bordo come incogniti, facendoli trovare tutti mediante il processo successivo di ottimizzazione, sia fissare alcuni di tali valori; in tale ultimo caso il termine  $A_{IB}F_B$  sarà così composto:

$$A_{IB}F_B = A_{IB}F_B^{fix} + A_{IB}F_B^{unk}, \quad (3.24)$$

dove l'apice *fix* indica i valori nodali del bordo fissati e *unk* quelli lasciati incogniti. Risolvendo l'equazione (3.23) si ottiene la funzione di tensione  $F$ . L'equazione (3.20) da cui si è partiti per ottenere la soluzione (3.23), non è altro che l'equazione (3.1), questa si ottiene dalla (3.18) come descritto di seguito.

Considerando la discretizzazione sulla mesh primaria, l'equazione (3.18) diventa:

$$E(F) = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta} F_{,\alpha} F_{,\beta} + \sum p F; \quad (3.25)$$

e considerando la condizione (3.19) si ottiene:

$$\sum a_{\alpha\beta} F_{,\alpha} F_{,\beta} + \sum p = 0. \quad (3.26)$$

Dalla (3.26) è possibile risalire al sistema lineare (3.1), considerando che la matrice  $A$  è la matrice dei coefficienti della  $F$  relativa alla parte di mesh interna (Fig.3.4<sup>b</sup>), ovvero la parte incognita della funzione di tensione, e il vettore  $b$  è il vettore dei coefficienti delle  $F^* = F/\partial\Omega$  (Fig.3.4<sup>a</sup>) a cui si sottrae il carico  $p$ .

Per il calcolo del termine  $\sum a_{\alpha\beta} F_{,\alpha} F_{,\beta}$ , dell'equazione (3.26) per ogni nodo si

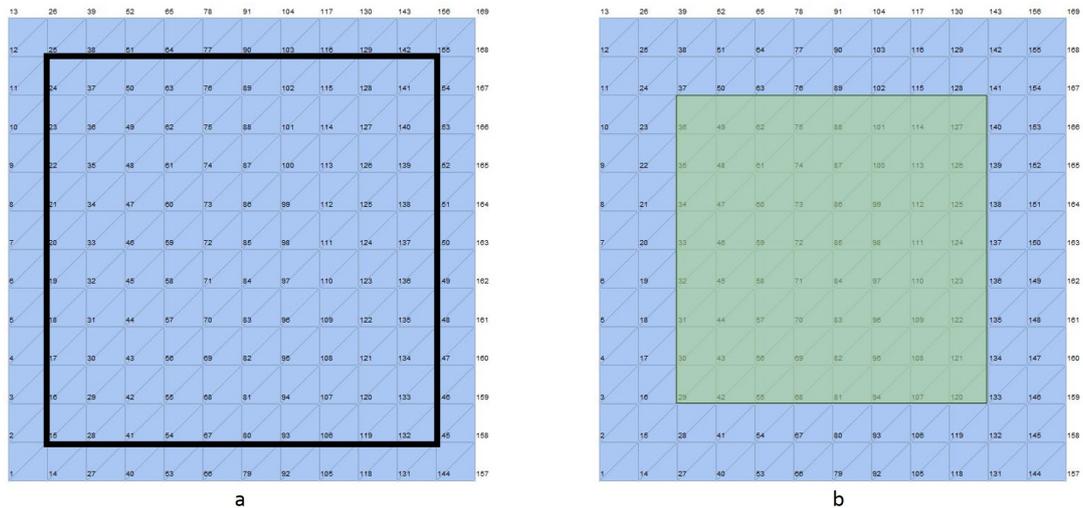


Figura 3.4: Costruzione della matrice dei coefficienti

calcola:

$$a_{\alpha\beta} F_{,\alpha} F_{,\beta} = f_{22} \sum F_{,1} F_{,1} + f_{11} \sum F_{,2} F_{,2} + 2f_{12} \sum F_{,1} F_{,2}; \quad (3.27)$$

dove  $f_{ij}$  è l'Hessiano nel nodo considerato e  $F_{,\alpha}, F_{,\beta}$  sono i gradienti della funzione di tensione  $F$  calcolati sui triangoli della mesh facenti parte dell'elemento duale del nodo considerato (Figura 3.3).

Effettuato il calcolo, la (3.26) viene mediata sull'elemento duale.

### 3.3.1 Funzione obiettivo

Come già detto per trovare la soluzione è necessario imporre i valori al bordo, che verranno trovati grazie al processo di ottimizzazione. È quindi necessario scegliere una funzione obiettivo da minimizzare. La funzione di ottimizzazione scelta per forzare la concavità della funzione di tensione è la seguente:

$$\Psi = \begin{cases} 0 & x \leq 0, y \leq 0 \\ x^2 & x > 0, y < 0 \\ y^2 & x < 0, y > 0 \\ x^2 + y^2 & x > 0, y > 0 \end{cases}, \quad (3.28)$$

con

$$x = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + H_{12}^2}, \quad (3.29)$$

$$y = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + H_{12}^2}, \quad (3.30)$$

dove le  $H_{ij}$  sono le componenti dell'Hessiano della funzione di tensione.

La funzione da minimizzare è:

$$\int_{\Omega} \Psi \, d\Omega, \quad (3.31)$$

Minore è il valore trovato durante il processo di ottimizzazione più la matrice Hessiana sarà vicina ad essere una matrice semidefinita negativa.

In Fig.3.5 è mostrata la funzione obiettivo, questa funzione assume valore zero nella parte ammissibile del dominio.

Tramite l'equazione (3.23) è ora possibile calcolare la funzione di tensione  $F$ . Avendo utilizzato due differenti mesh, si ottengono due funzioni di tensione :

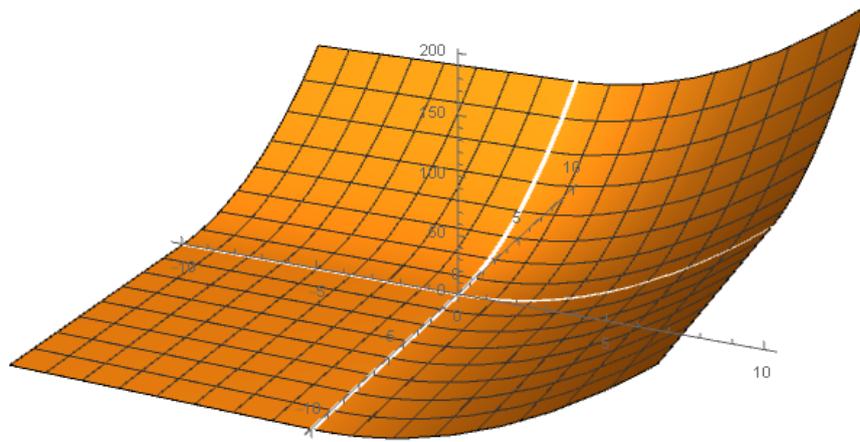


Figura 3.5: Funzione obiettivo

$F$  verrà valutata sovrapponendo queste due funzioni e prendendo da ciascuna le zone che più si avvicinano ad una funzione concava.

Se la funzione trovata risulta concava la volta è sottoposta a sola compressione e la soluzione è accettata senza necessità di nuove iterazioni. In caso contrario si procede con una nuova iterazione rendendo concava la funzione trovata, mediante la generazione del convex hull della funzione di tensione stessa. La superficie concava così ottenuta è utilizzata come dato, mentre la funzione di forma diviene l'incognita.

Attraverso la procedura prima descritta si ottiene, scambiando il ruolo di forma e tensione, una nuova forma corrispondente alla funzione di tensione data.

In questo caso la funzione obiettivo considerata è la seguente:

$$\Phi = \int_{\Omega} (f - f^o)^2 d\Omega. \quad (3.32)$$

## 3.4 Esempi

Per illustrare la procedura presentata nel paragrafo precedente si utilizzano tre esempi.

Si considerano tre tipologie di strutture voltate: volta a vela, volta a crociera e volta a padiglione.

Si ricorda che, data la natura puramente geometrica del problema considerato, non vi è alcuna necessità di specificare le unità di misura per le lunghezze e le forze: il problema è indipendente dalla scala.

### 3.4.1 Volta a vela

Come funzione di forma iniziale  $f^o$  si considera il paraboloido più prossimo alla superficie media della volta (Figura 3.6):

$$f^o = H - \frac{2H}{L^2}(x^2 + y^2). \quad (3.33)$$

Per fissare le idee, si assume  $H = 3$  e  $L = 5$ .

La griglia della mesh primale introdotta sulla piattaforma  $\Omega$  ha lato  $e = 0.5$ , di conseguenza il bordo viene ampliato di 0.5 su ogni lato.

Quale carico assegnato si impone un carico trasversale uniforme di valore  $p = -1$ .

Attraverso il processo di ottimizzazione, usando la (3.28) si ottiene  $\Psi = 0$ , ovvero una funzione di tensione concava.

Sostituendo i valori ottimizzati delle condizioni al bordo nella (3.23) si ottiene la funzione di tensione mostrata in Figura 3.7.

Essendo la funzione di forma  $F$  trovata concava, la struttura è sottoposta a tensioni di sola compressione e la soluzione può essere accettata senza necessità di

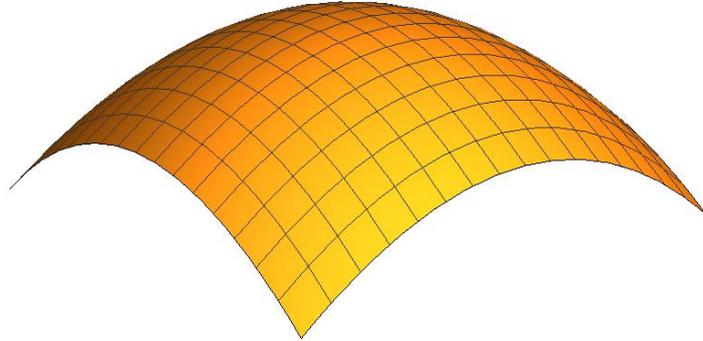


Figura 3.6: Funzione di forma iniziale  $f^o$  per la volta a vela

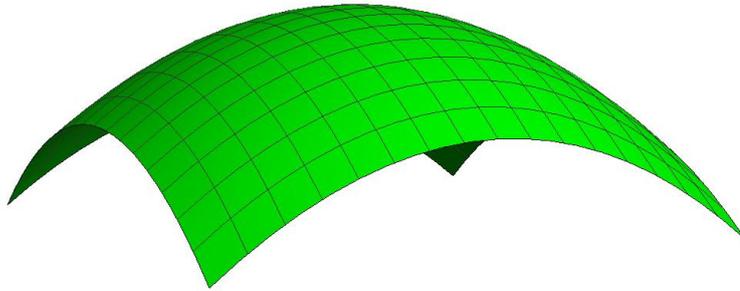


Figura 3.7: Funzione di tensione ottimizzata  $F^o$  corrispondente alla funzione di forma  $f^o$

effettuare altre iterazioni. In Figura 3.8 sono mostrate le direzioni principali di tensione.

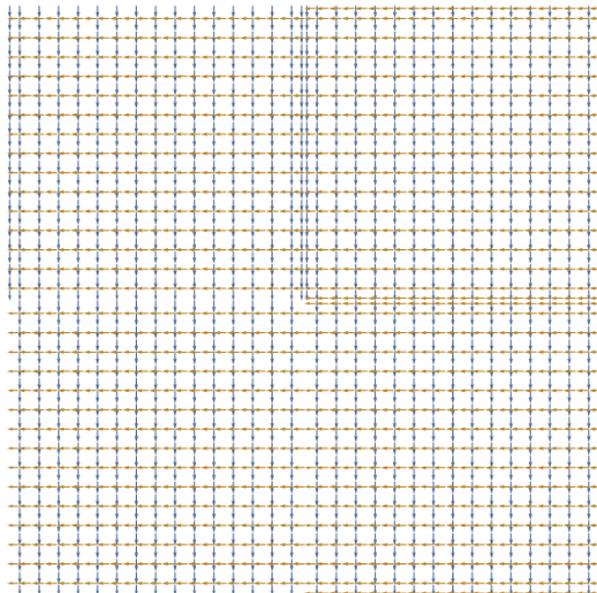


Figura 3.8: Direzioni principali di tensione

### 3.4.2 Volta a crociera

Per il processo di ottimizzazione si parte, anche in questo caso, con una funzione di forma  $f^o$  nota, si è scelto di partire dalla superficie media interna alla volta (Figura 3.9), descritta in sezione da archi circolari.

$$f^o = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| < |y| \\ \sqrt{r^2 - y^2}, & |x| \geq |y| \end{cases}, \quad (3.34)$$

La lunghezza del lato della volta è stato fissata a  $L=5$  e il raggio  $r = 7$ .

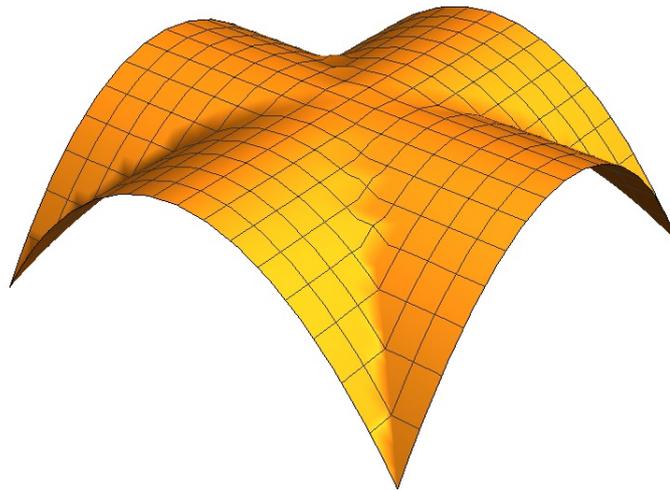


Figura 3.9: Funzione di forma iniziale  $f^o$  per la volta a crociera

La griglia della mesh primale introdotta sulla piattaforma  $\Omega$  ha un lato  $e = 0.5$ , e il bordo, sia della volta che della mesh è stato ampliato di 0.5 su ogni lato per permettere il calcolo della curvatura sul bordo reale della volta.

Quale carico assegnato si impone un carico trasversale uniforme di valore  $p = -1$ .

Tramite l'utilizzo della funzione obiettivo (3.28), grazie al processo di ottimizzazione, alla prima iterazione si ottiene  $\Psi = 291$  e tramite la (3.23) si ottengono le

funzioni di tensione in Figura.3.10.

Sovrapponendo le due soluzioni, scegliendo le parti in maniera che la superficie

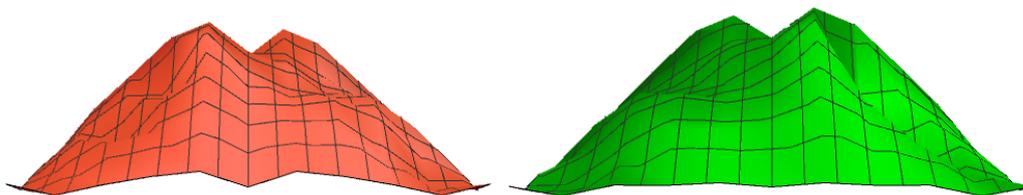


Figura 3.10: Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2)

risultante sia "la più concava possibile" ed estendendo questo risultato, per ora relativo alla sola parte reale della mesh, alla parte "fittizia" della volta, si ottiene la funzione di tensione in Figura 3.11 .

Poichè la funzione non risulta concava, si effettua il convex hull della superficie

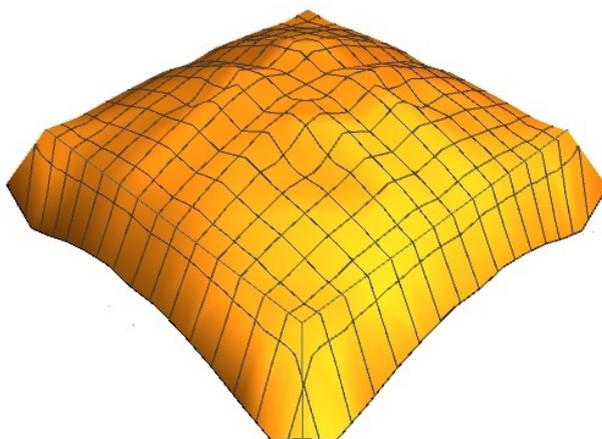


Figura 3.11: Funzione di tensione ottimizzata  $F^o$  corrispondente a  $f^o$

in Figura3.11, il risultato è mostrato in Figura 3.12, da cui si estrae la superficie superiore.

Per evitare zone piatte, con conseguenti problemi nel calcolo della curvatura, si incrementa la funzione di tensione considerando il 10% del valore medio della stessa ( $F_{med}$ ) (3.35). I punti in azzurro in Figura (3.13) sono i punti iniziali

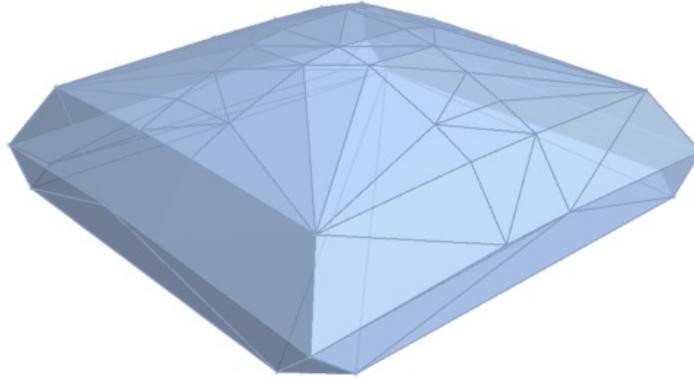


Figura 3.12: Convex Hull

della  $F$  (a seguito del solo convexhull), gli arancioni la loro variazione in seguito all'incremento.

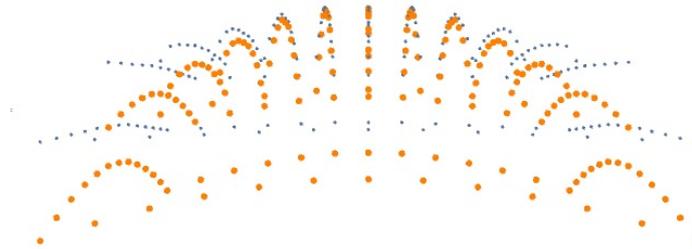


Figura 3.13: Incremento del carico

$$F_{new} = F - \left[ \frac{1}{2} 0.1 F_{med} (x^2 + y^2) \right], \quad (3.35)$$

In Figura 3.14 la funzione di forma ottenuta a seguito del convex hull e dell'incremento di carico.

Si effettua, quindi, una nuova iterazione, considerando stavolta la funzione di tensione come data e la funzione di forma come incognita. Come funzione di ottimizzazione viene utilizzata la (3.32).

Per quel che riguarda le condizioni al bordo, in questo caso, si è scelto di fissare i valori dei quattro punti agli angoli della mesh e far trovare i restanti tramite il

processo di ottimizzazione. A seguito dell'ottimizzazione otteniamo una  $\Phi = 8$ . I risultati sono mostrati in Fig.3.15 e Fig. 3.16. In Fig.3.15 è mostrata la nuova funzione di forma, in Fig.3.16 la nuova funzione di forma (in blu) sovrapposta alla forma iniziale.

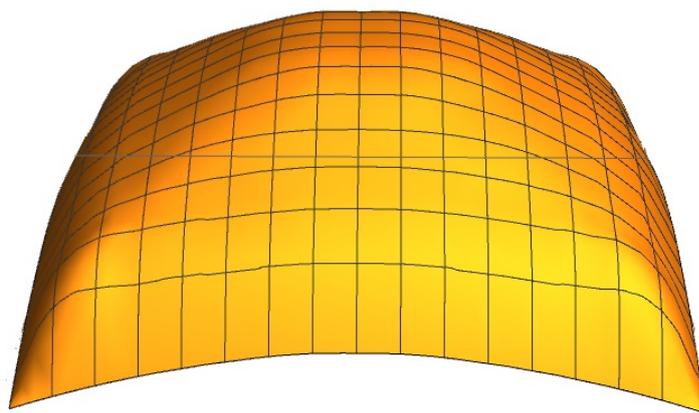


Figura 3.14: Funzione di tensione a seguito del convex hull

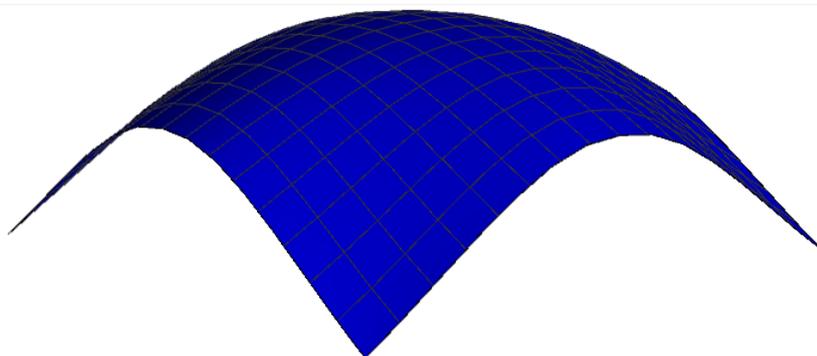


Figura 3.15: Funzione di forma ottimizzata

Si effettua un secondo ciclo di ottimizzazione per tentare di avvicinare maggiormente la funzione di forma alla superficie media della volta. Si sceglie una *tolleranza*  $tol = 0.1$ , che rappresenta la distanza ammessa, in ogni punto, tra la funzione di forma e la superficie media della volta. Si modifica la funzione di

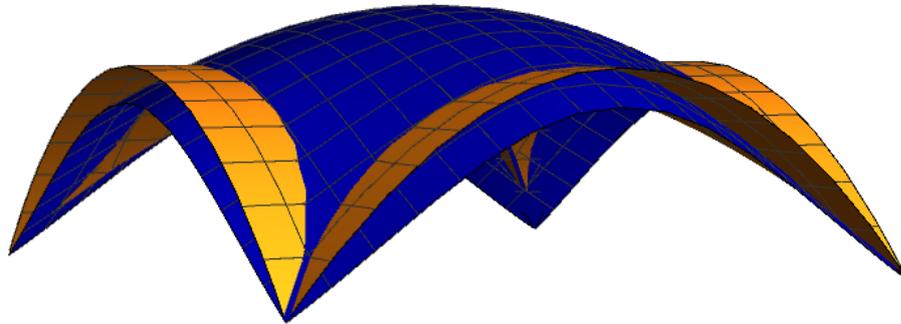


Figura 3.16: Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale  $f^0$  forma trovata riportando tutti i nodi ad avere una distanza massima dalla superficie media pari al valore della *tolleranza*. Considerando questa nuova funzione di forma come nota si parte per un nuovo ciclo di ottimizzazione. A fine ottimizzazione della funzione di tensione, si ottiene un  $\Psi = 256$ . Le funzioni ottenute dalle due mesh sono mostrate in Figura 3.17.

Sovrapponendo le due soluzioni, scegliendo le parti in maniera che la superficie

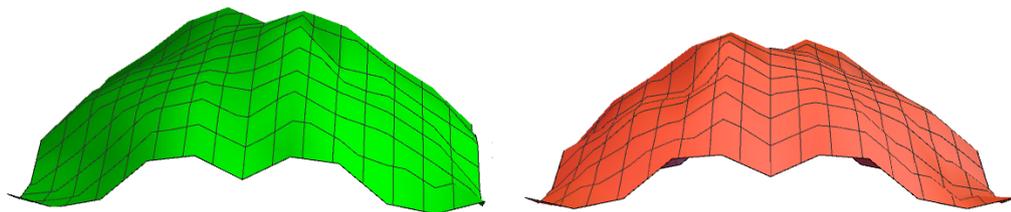


Figura 3.17: Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2)

risultante sia "la più concava possibile" ed estendendo questo risultato, relativo alla sola parte reale della mesh, si ottiene la funzione di forma in Figura 3.18 .

A seguito del convex hull (Figura 3.19) e dell'incremento di carico la nuova funzione di tensione, che verrà utilizzata per la valutazione della funzione di forma, è quella in Figura 3.20. Si effettua, quindi, una nuova iterazione, considerando la funzione di tensione come data e la funzione di forma come incognita. Come funzione di ottimizzazione verrà utilizzata la (3.32), per quel che riguarda le con-

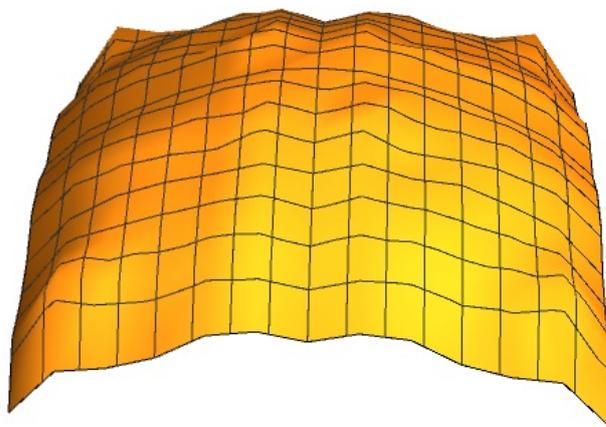


Figura 3.18: Funzione di tensione ottimizzata  $F^o$  corrispondente a  $f^o$

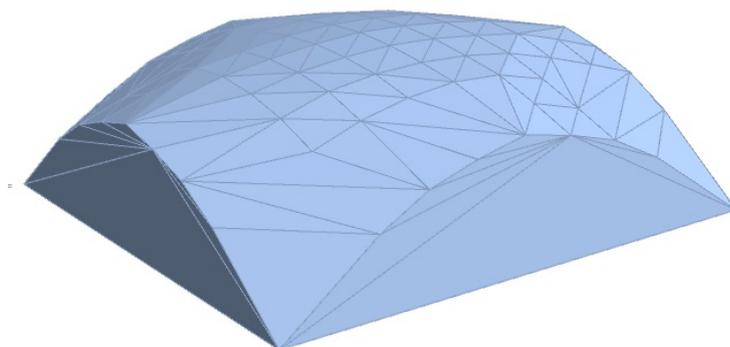


Figura 3.19: Convex Hull

dizioni al bordo, si fissano nuovamente i valori dei quattro punti agli angoli della mesh e si fanno trovare i restanti tramite il processo di ottimizzazione. A seguito dell'ottimizzazione otteniamo una  $\Phi = 1$ .

I risultati sono mostrati in Fig.3.21 e Fig. 3.22. In Fig.3.21 è mostrata la nuova funzione di forma, in Fig.3.22 la nuova funzione di forma (in blu) sovrapposta alla forma iniziale. Come si può notare la funzione di forma si è molto avvicinata alla superficie della volta ed in questo caso il valore di *tolleranza* imposto è sempre verificato. In Figura (3.23) vengono mostrate le direzioni principali di tensione.

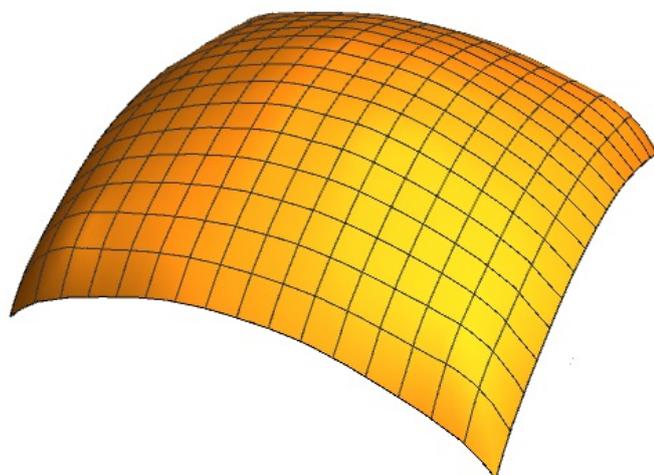


Figura 3.20: Funzione di tensione a seguito del convex hull

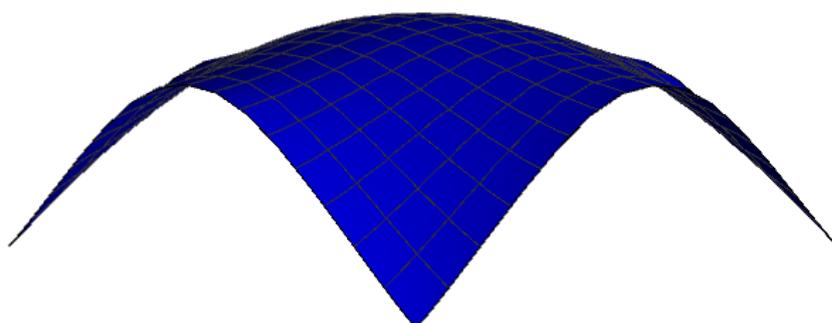


Figura 3.21: Funzione di forma ottimizzata

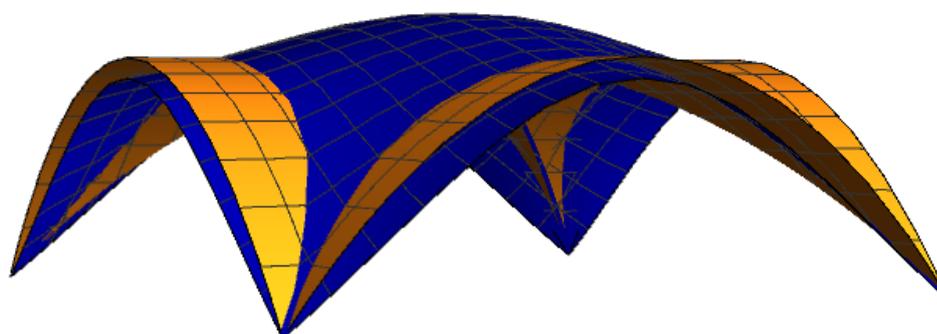


Figura 3.22: Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale  $f^o$

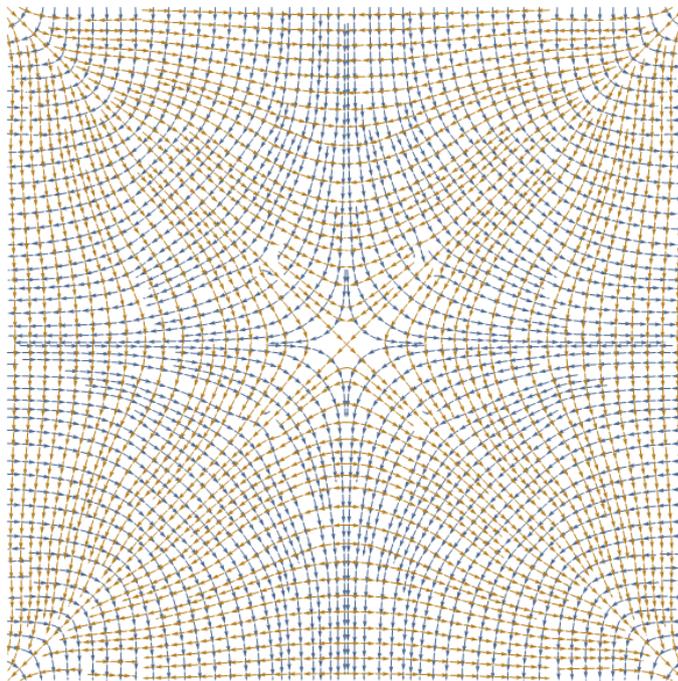


Figura 3.23: Direzioni principali di tensione

### 3.4.3 Volta a padiglione

Per il processo di ottimizzazione si parte, anche in questo caso, con una funzione di forma  $f^o$  nota, si è scelto di partire dalla superficie media interna alla volta (Fig.3.24).

$$f^o = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| \geq |y| \\ \sqrt{r^2 - y^2}, & |x| < |y| \end{cases}, \quad (3.36)$$

La lunghezza del lato della volta è stato fissata a  $L=5$  ed il raggio  $r = 5.5$ .

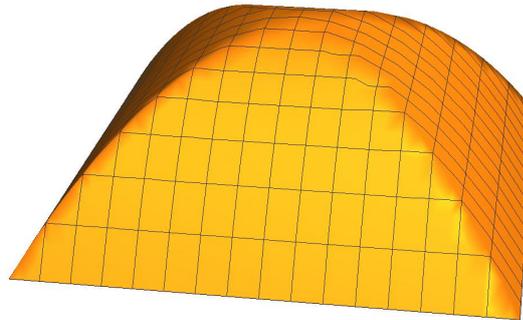


Figura 3.24: Funzione di forma iniziale  $f^o$  per la volta a padiglione

La griglia della mesh primale introdotta sulla piattaforma  $\Omega$  ha un lato  $e = 0.5$ , e il bordo, sia della volta che della mesh è stato ampliato di 0.5 su ogni lato per permettere il calcolo della curvatura sul bordo reale della volta.

Quale carico assegnato si impone un carico trasversale uniforme di valore  $p = -1$ .

Tramite l'utilizzo della funzione obiettivo (3.28), grazie al processo di ottimizzazione, alla prima iterazione si ottiene  $\Psi = 236$  e tramite la (3.23) si ottengono le funzioni di tensione in Figura.3.25.

Sovrapponendo le due soluzioni, scegliendo le parti in maniera che la superficie risultante sia "la più concava possibile" ed estendendo questo risultato, relativo

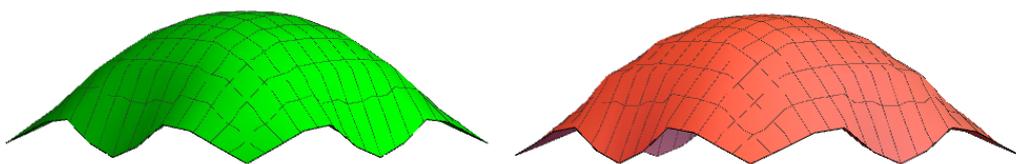


Figura 3.25: Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2)

alla sola parte reale della mesh, si ottiene la funzione di forma in Figura 3.26 .

Poichè la funzione non risulta concava, si effettua il convex hull della superficie

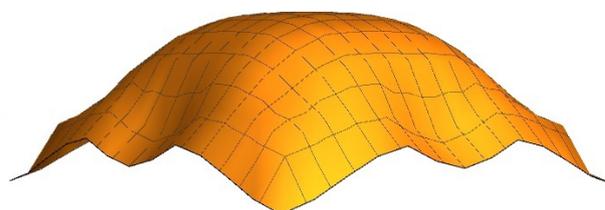


Figura 3.26: Funzione di tensione ottimizzata  $F^o$  corrispondente a  $f^o$

in Figura 3.11, il risultato è mostrato in Figura 3.27, da cui si estrae la superficie superiore.

Per evitare zone piatte, con conseguenti problemi nel calcolo della curvatura, si

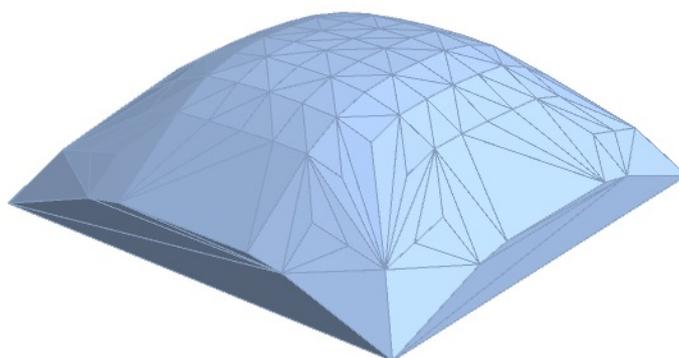


Figura 3.27: Convex Hull

incrementa la funzione di tensione considerando il 10% del valore medio della

stessa ( $F_{med}$ ) (3.37).

I punti in azzurro in Figura (3.28) mostrano i punti iniziali della  $F$  (a seguito del solo convexhull), gli arancioni la loro variazione in seguito all'incremento.

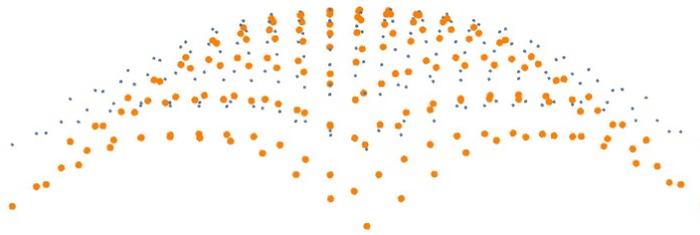


Figura 3.28: Incremento del carico

$$F_{new} = F - \left[ \frac{1}{2} 0.1 F_{med} (x^2 + y^2) \right], \quad (3.37)$$

In Figura 3.29 la funzione di forma ottenuta a seguito del convex hull e dell'incremento di carico.

Si effettua, quindi, una nuova iterazione, considerando stavolta la funzione di tensione come data e la funzione di forma come incognita. Come funzione di ottimizzazione viene utilizzata la (3.32).

Per quel che riguarda le condizioni al bordo, in questo caso, si è scelto di fissare i valori dei quattro punti agli angoli della mesh e far trovare i restanti tramite il processo di ottimizzazione. A seguito dell'ottimizzazione otteniamo una  $\Phi = 18$ . I risultati sono mostrati in Fig.3.31 e Fig. 3.31. In Fig.3.31 è mostrata la nuova funzione di forma, in Fig.3.31 la nuova funzione di forma (in blu) sovrapposta alla forma iniziale.

Si effettua un secondo ciclo di ottimizzazione per tentare di avvicinare la funzione di forma alla superficie media della volta, si sceglie, quindi, una *tolleranza*  $tol = 0.1$ , che rappresenta la distanza ammessa, per ogni punto, tra la funzione di forma e la superficie media della volta.

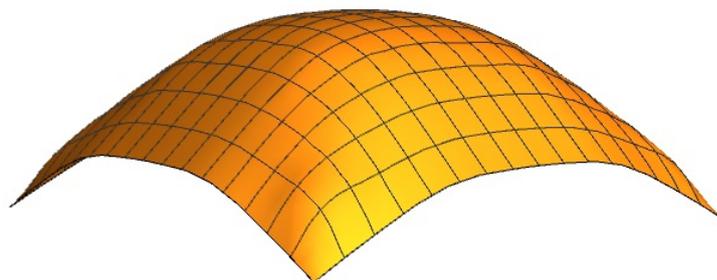


Figura 3.29: Funzione di tensione a seguito del convex hull

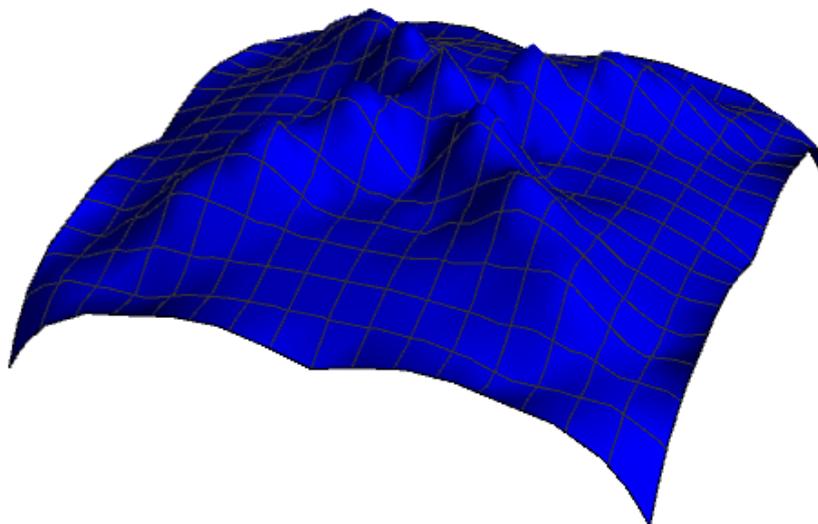


Figura 3.30: Funzione di forma ottimizzata

Si modifica, quindi la funzione di forma trovata riportando tutti i nodi ad avere una distanza massima dalla superficie media pari al valore della *tolleranza*. Considerando questa nuova funzione di forma come nota si parte per un nuovo ciclo di ottimizzazione. A fine ottimizzazione della funzione di tensione si ottiene  $\Psi = 186$ . Le funzioni ottenute dalle due mesh sono in Figura 3.32. Sovrapponendo le due soluzioni, scegliendo le parti in maniera che la superficie risultante sia "la più concava possibile" e estendendola sulla parte fittizia della mesh si ottiene la funzione di tensione in Figura 3.33 .

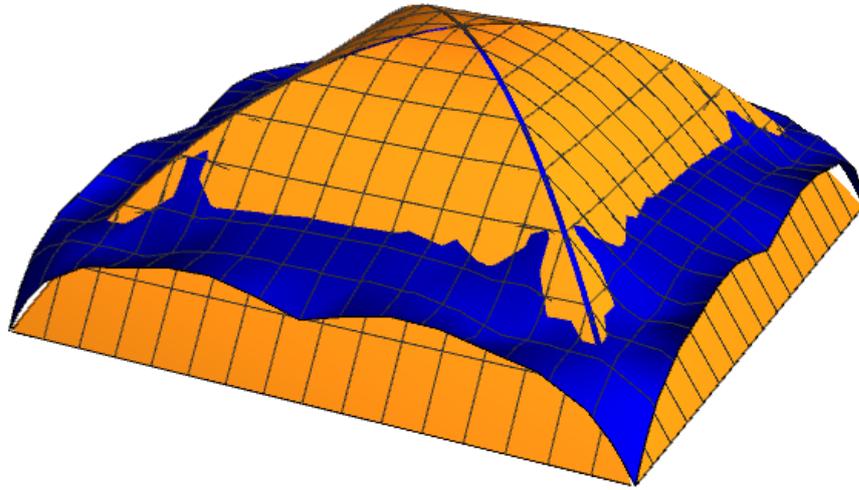


Figura 3.31: Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale  $f^o$

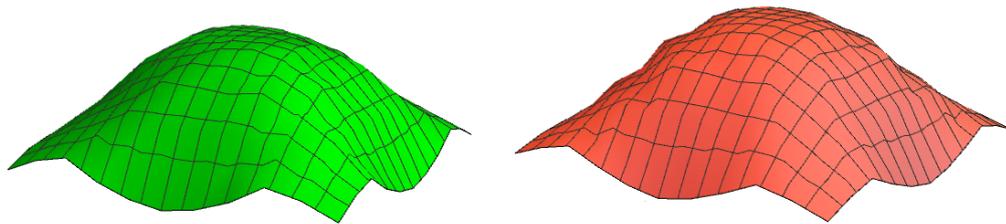


Figura 3.32: Funzioni di tensione risultanti dalle sue mesh (mesh1 e mesh2)

A seguito del convex hull(Figura 3.34)l e dell'incremento di carico la nuova fun-

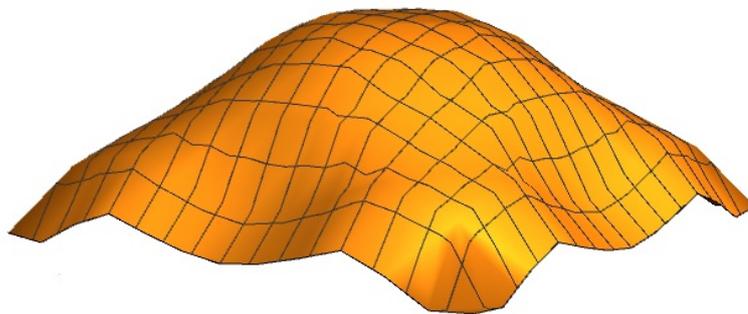


Figura 3.33: Funzione di tensione ottimizzata  $F^o$  corrispondente a  $f^o$

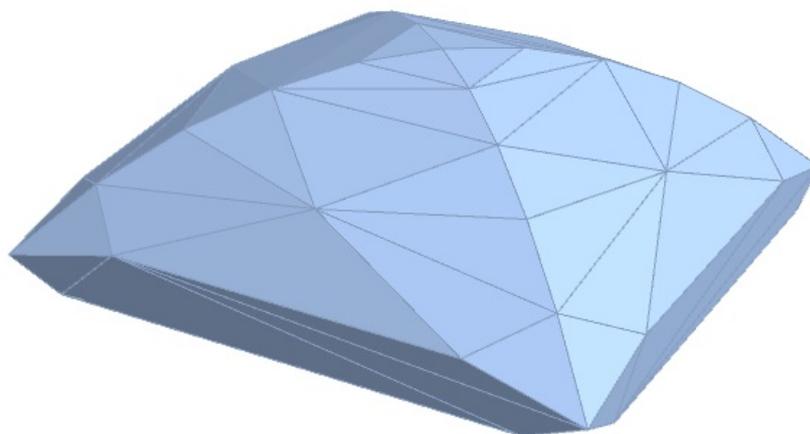


Figura 3.34: Convex Hull

zione di tensione utilizzata per la valutazione della funzione di forma è quella in Figura 3.35 Si effettua, quindi, una nuova iterazione, considerando la funzione di

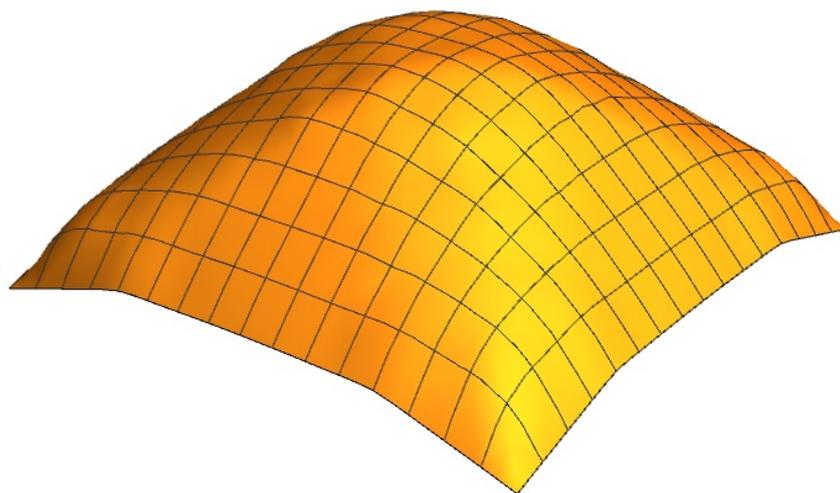


Figura 3.35: Funzione di tensione a seguito del convex hull

tensione come data e la funzione di forma come incognita. Come funzione di ottimizzazione verrà utilizzata la (3.32), per quel che riguarda le condizioni al bordo, si fissano nuovamente i valori dei quattro punti agli angoli della mesh e si fanno

trovare i restanti tramite il processo di ottimizzazione. A seguito dell'ottimizzazione otteniamo una  $\Phi = 2$ .

I risultati sono mostrati in Fig.3.36 e Fig. 3.37. In Fig.3.36 è mostrata la nuova funzione di forma, in Fig.3.37 la nuova funzione di forma (in blu) sovrapposta alla forma iniziale. Come si può notare la funzione di forma si è molto avvicinata

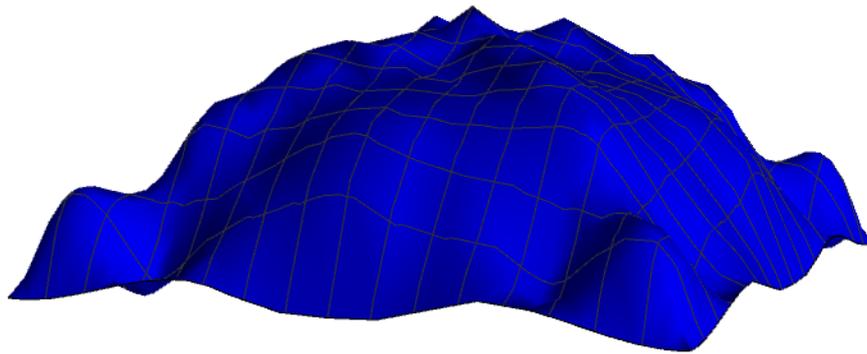


Figura 3.36: Funzione di forma ottimizzata

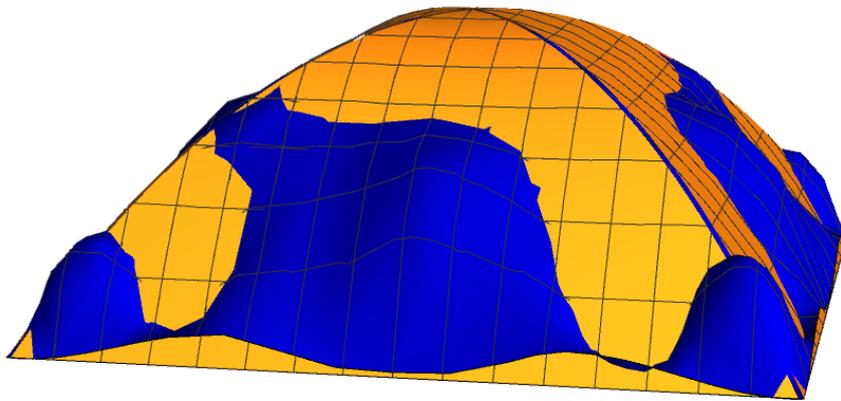


Figura 3.37: Confronto tra la nuova funzione di forma (blu) e la forma iniziale  $f^o$  alla superficie della volta e in questo caso il valore di *tolleranza* imposto è sempre verificato. In Figura (3.38) vengono mostrate le direzioni principali di tensione.

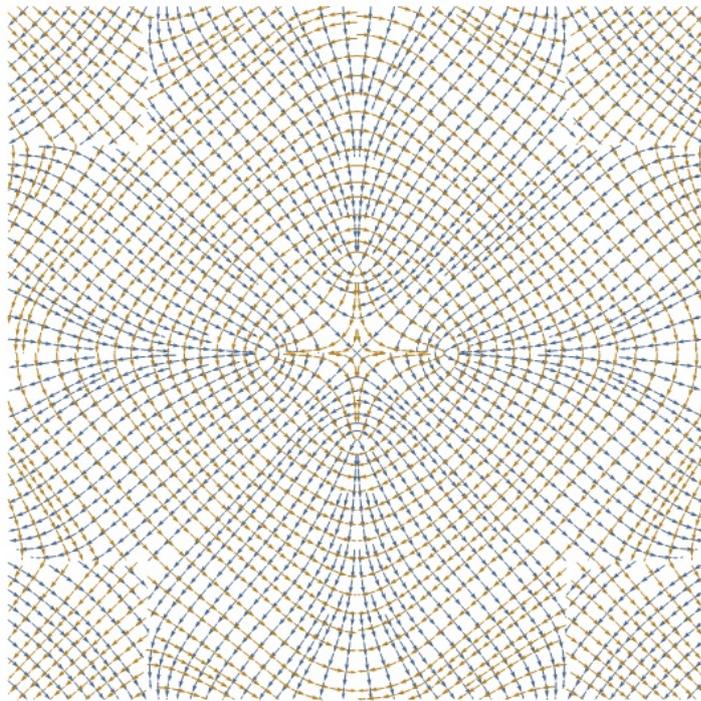


Figura 3.38: Direzioni principali di tensione

---

## Conclusioni

---

Lo scopo principale di questa tesi è quello di proporre un metodo per rendere automatica la ricerca di un campo di tensioni ammissibile per una volta di forma arbitraria, basato sulla soluzione iterativa di un problema determinato, in cui il ruolo dell'incognita alternativamente si scambia tra la forma e la tensione.

In termini delle tensioni proiettate, le tre equazioni di equilibrio di  $S$  possono essere disaccoppiate in due equazioni che rappresentano l'equilibrio superficiale di  $S$ , indipendenti dalla geometria della membrana, e in una equazione che rappresenta l'equilibrio trasversale di  $S$ , equazione in cui la curvatura di  $S$  determina i coefficienti. Questo sistema di equazioni, si ottiene con alcuni elementari passaggi utilizzando il formalismo della geometria differenziale di Riemann e Levi Civita. La soluzione generale delle due equazioni superficiali può esprimersi in termini di una funzione  $F$  che rappresenta il potenziale delle tensioni (funzione di Airy), e la equazione di equilibrio trasversale si riduce ad una equazione differenziale del secondo ordine lineare in  $F$  i cui coefficienti sono rappresentati dall'Hessiano della funzione  $f$  che descrive  $S$ , in una rappresentazione parametrica alla Monge. La restrizione che il materiale sia esclusivamente compresso impone una restrizione sul potenziale di tensione:  $F$  deve essere concava, ossia il suo Hessiano deve essere semi-definito negativo. Anche la funzione  $f$  è ristretta dalla condizione che i valori di  $f$  siano contenuti, in ogni punto, nell'intervallo definito dall'estradosso ed intradosso della volta. La procedura iterativa che si propone, che parte

---

da una superficie assegnata  $f^o$ , consiste in una strategia basata sulla ottimizzazione per generare successive funzioni di tensione  $F^o, F1, F2, \dots, Fn, f1, f2, \dots, fn$ , con l'obiettivo di ottenere in modo automatico una funzione di tensione quanto più possibile concava ed una superficie di membrana quanto più vicina possibile alla superficie media della volta.

Nella fase in cui la forma è assegnata e si ricerca la funzione di tensione risolvendo l'equazione di equilibrio trasversale, tale equazione differenziale ha natura diversa a seconda che l'Hessiano di  $f$  sia definito negativo oppure no. Nel primo caso le equazioni sono ellittiche ed il problema è facilmente risolvibile con tecniche tipo-elementi finiti. In tal caso infatti la matrice risolvente il problema lineare che approssima la soluzione ha una matrice simmetrica dei coefficienti ben condizionata e caratterizzata da uno "spread" contenuto dei suoi autovalori. Differente è la situazione allorché l'Hessiano di  $f$  non è definito e, quindi, l'equazione differenziale diviene localmente iperbolica. In tal caso la matrice dei coefficienti può divenire mal condizionata, rendendo difficile la soluzione numerica con tecniche tipo elementi finiti.

Tale diversa natura della equazione nel caso iperbolico si riflette in una maggiore e pronunciata sensibilità alle specifiche condizioni al contorno, il cui effetto, se nel caso ellittico risulta confinato ad un intorno del bordo, si propaga in profondità all'interno del dominio. Tale problema, che non si verifica quando l'incognita è la forma e il dato è rappresentato da una funzione di tensione assegnata di forma concava, e la particolare tecnica di approssimazione adottata per la soluzione della equazione differenziale di equilibrio trasversale quando l'incognita è  $F$ , ha effetto sulla eventuale convergenza del metodo numerico.

Il metodo qui adottato per la approssimazione numerica della soluzione dell'equilibrio trasversale è il così detto Lumped Stress Method, applicato alla formulazione variazionale di tale equazione del secondo ordine. Il metodo proposto

manifesta una notevole efficienza numerica, anche nei casi iperbolici, rispetto a metodi più tradizionali e basati su approssimazioni lisce delle incognite. Con questo metodo la funzione di tensione è approssimata come una funzione  $C^0$  basata su di una mesh triangolare, per cui le tensioni corrispondenti sono delta di Dirac concentrate sullo scheletro della mesh (i lati dei triangoli). Anche la funzione di forma è approssimata come una funzione  $C^0$  basata sulla stessa triangolazione e, quindi, il suo Hessiano (la curvatura di  $f$ ), consiste in delta di Dirac concentrate sullo scheletro della stessa mesh. Per fare dialogare questi due campi singolari, la tensione e la curvatura sono mediate sugli elementi della mesh duale secondo la tecnica LSM che produce campi di tensioni e curvatura costanti a tratti sugli elementi duali. Un ruolo fondamentale nella ricerca simultanea della forma e della tensione di compressione ottimali è rappresentato dalla scelta delle funzioni obiettivo  $\Psi, \Phi$ .

Nella fase in cui la funzione di forma  $f$  rappresenta il dato e la funzione di tensione  $F$  l'incognita, la scelta più efficiente di tale funzione obiettivo  $\Psi$ , è rappresentata da una funzione quadratica della parte positiva degli autovalori dell'Hessiano di  $F$ , caratterizzata da un unico parametro penalty.

La scelta della funzione  $\Phi$  è ricaduta invece sul più naturale scarto quadratico medio tra i valori di  $f$  e quelli  $f^o$  corrispondenti alla superficie media. La ottimizzazione delle soluzioni sulla base delle due funzioni  $\Psi, \Phi$  è stata ottenuta considerando come parametri i dati al bordo di Dirichelet della  $F$ , oppure della  $f$ , a seconda che l'incognita fosse la tensione o la forma. Negli esempi proposti, la prima soluzione approssimata  $F^o$  ottenuta risolvendo il problema con il dato  $f^o$ , e poi tutte le soluzioni successive, sono modificate e re-immesse nel successivo step operando una concavizzazione con la tecnica del convex hull.

In tali semplici esempi la procedura proposta porta ad approssimazioni convergenti e soddisfacenti, ma è del tutto evidente che questo lavoro rappresenta solo un

primo passo verso la definizione di un programma di calcolo automatico di semplice utilizzo e che l'efficienza di questo procedimento andrebbe esteso a casi più complessi e testato con un numero molto maggiore di incognite (triangolazioni più fitte e non strutturate) e di parametri (condizioni al contorno più ricche).



---

## Bibliografia

---

- [1] J. Heyman. *The Stone Skeleton.* , Cambridge University Press, 1995.
- [2] J. Heyman. *The membrane analysis of thin masonry shells, Nuts and Bolts of Construction History*, Picard, 1, 281-289, 2012
- [3] J.F. Baker *The steel Skeleton*, Cambridge University Press, 1965
- [4] P. Couplet *De la poussée des voûtes*, des sciences p. 79-117, 1729
- [5] P. Couplet *Seconde partie de l'examen de la poussée*, Académie royale des sciences p. 117, 1730
- [6] A.J.S Pippard, E. Tranter, L. Chitty, *The mechanics of the Voussoir arch*, J.inst. Civ. Eng. Paper 5108, pp 281-306 (1936)
- [7] A.J.S Pippard, J.A. Ashby, *An experimental study of the Voussoir arch*, J.inst. Civ. Eng. Paper 5177, pp 383-404 (1938)
- [8] A.J.S Pippard, J.F. Baker , *The Analysis of Engineering Structures*, Arnold, London (1948)
- [9] A. Koocharian, *Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Archs*, Journal Proceedings, vol. 49(12), pp. 317-328, 1952.
- [10] O'Dwyer DW. *Funicular analysis of masonry vaults*. Comput Struct 73: 187-197, 1999

- [11] Block P. *Thrust Network Analysis: Exploring Three-dimensional Equilibrium*. (PhD Dissertation). Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 2009
- [12] Vouga E, Hobinger M, Wallner J, Pottmann H. *Design of Self-supporting Surfaces*. ACM Trans Graph 31(4): article 87 (11 pages), 2012
- [13] F. De Goes , P. Alliez ,H. Owhadi ,M. Desbrun, *On the Equilibrium of Simplicial Masonry Structures*. ACM Trans Graph 32(4): article 93 (10 pages), 2013
- [14] P.Block ,L. Lachauer *Three-dimensional funicular analysis of masonry vaults*. Mech Res Commun 56: 53-60, 2014
- [15] M. Miki ,T. Igarashi ,P. Block , *Parametric Self-supporting Surfaces via Direct Computation of Airy Stress Functions*. ACM Trans Graph 34(4): article 89 (12 pages), 2015
- [16] F. Marmo, L. Rosati, *Reformulation and extension of the thrust network analysis*. Computers and Structures, 182, 104-118, 2017
- [17] Angelillo A, Fortunato A. *Equilibrium of masonry vaults*. Lecture notes in applied and computational mechanics, Novel approaches in civil engineering (Eds Fremond M, Maceri F) 14:105-111. Springer, Berlin, 2004
- [18] Fraternali F. *A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress functions*. Mech Res Commun 37: 198-204, 2010
- [19] A. Baratta, A. Corbi *On the statics of No-Tension masonry-like vaults and shells: solution domains, operative treatment and numerical validation*. Ann. Solid Struct. Mech., 2, 107-122, Springer, Berlin, 2011

- [20] Angelillo M, Babilio E, Fortunato A. *Singular stress fields for masonry-like vaults*. Continuum Mech Therm 25(2-4): 423–441, 2013
- [21] Angelillo M. *Static analysis of a Guastavino helical stair as a layered masonry shell*. Compos Struct 119: 298–304, 2015
- [22] Angelillo M. *The equilibrium of helical stairs made of monolithic steps*. Int Jour Arch Her, to appear, 2016
- [23] N. Lepore *Le volte in muratura: forma e struttura, equilibrio e analisi limite*. Politecnico di Bari and Università degli Studi RomaTRE.
- [24] Pucher A(1936) *Über der spannungszustand in gekrümmten flächen. Beton u Eisen* 33:298-304
- [25] S.Huerta, *Arcos, Bovedas y Cupolas*. Instituto Juan de Herrera, 2004
- [26] M.Como, *Statica delle costruzioni in muratura*. Ed.Aracne, 2010
- [27] P. Lenza, A. Ghersi, B. Calderoni, *Edifici in muratura*, Dario Flaccovio, 2011.
- [28] S. Huerta. *Galileo was wrong: the geometrical design of masonry arches*, , Nexus Netw. J., vol. 8(2), pp. 25-52, 2006.
- [29] Philippe de La Hire. *Traité de mecanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesants lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*. De l'Imprimerie Royale, 1695
- [30] G.Poleni *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, 1748
- [31] Bernard Forest de Belidor *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*, 1729

- [32] Augustin Danyzy *Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes*, dans Histoire de la Société des Sciences établie à Montpellier, no 2, p. 40–56, 1732
- [33] C.A. Coulomb *Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de Statique relatifs à l'Architecture*, Académie des sciences, 1773
- [34] A. Albuérne, S. Huerta. *Coulomb's theory of arches in Spain ca. 1800: the manuscript of Joaquín Monasterio*, Arch' 10. 6th International Conference on Arch Bridges (Fuzhou, China, October 11-13, 2010): ed. by Baochun Chen, Jiangang Wei. Fuzhou, China: College of Civil Engineering, Fuzhou University, 2010, pp. 354-362.
- [35] J. Heyman. *The Stone Skeleton*. ht. .I. Solids Structures, 1966, Vol. 2, pp. 249 to 279. Persamon Press Ltd.
- [36] W. F. Chen, D. J. Han *Plasticity for Structural Engineers*. Springer Verlag, 1988
- [37] C. Formenti *La pratica del fabbricare*, Hoepli, 1893-1895.
- [38] W. S. Wolfe, *Graphical Analysis: A Text Book on Graphic Statics* New York McGraw-Hill, 1921
- [39] M. Angelillo, *Statica ed elementi di dinamica*, Maggioli, 2016.
- [40] F. Bellini, *Le cupole di Borromini: la "scientia" costruttiva in età barocca* Ed Mondadori Electa, 2004.
- [41] Giovanni Giacomo de Rossi, *Insignium Romae Templorum*, Instituto Juan De Herrera, Escuela Tecnica Superior De Arquitectura, Universidad Politecnica de Madrid.

- [42] S. Huerta, *Geometry and equilibrium: the gothic theory of structural design*, Struct. Eng., vol. 84(2), pp. 23-28, 2006.
- [43] S. Huerta, *The debate about the structural behaviour of gothic vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman*, Proceedings of the Third International Congress on Construction History, 20-24 May 2009.
- [44] M. Como, *Equilibrium and collapse analysis for masonry bodies*, Masonry Constructions, pp. 185-194, 1992.
- [45] A. Fortunato, E. Babilio, M. Lippiello, A. Gesualdo, M. Angelillo, *Limit Analysis for unilateral Masonry-like Structures*, Open. Construct. Build. Tech., vol. 10(1), pp. 346-362, 2016.
- [46] M. Gilbert, *Limit analysis applied to masonry arch bridges: state-of-the-art and recent developments*, 5th International Arch Bridges Conference, pp. 13-28, 2007.
- [47] M. Angelillo, *Mechanics of Masonry Structures*, Springer, 2014.
- [48] S. Mastrodicasa, *Dissesti statici delle strutture edilizie*. Milano: Hoepli, 1988
- [49] S. Di Pasquale, *Statica dei solidi murari: teoria ed esperienze*. Università di Firenze: Atti Dipartimento Costruzioni, 1984.
- [50] M. Angelillo, *Constitutive relations for no-tension materials*, Meccanica, 28, 195–202.(1993).
- [51] G. Romano, M. Romano, *Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali.*, Accademia Nazionale dei Lincei, LXVII, 1-10. (1979)

- [52] A. Baratta, R. Toscano, *Stati tensionali in pannelli di materiale non resistente* Atti del VII Congresso Nazionale AIMETA. Genova.(1982).
- [53] M. Como, A. Grimaldi, *A unilateral model for the limit analysis of masonry walls* In Del Piero, G., Maceri, F. (Eds.) *Unilateral Problems in Structural Analysis* (pp. 25-45). Vienna: Springer.(1985).
- [54] G. Romano, E. Sacco, *Analisi limite e collasso plastico per materiali non standard ben posti*, Riv. Ital. Geotecnica, 1, 37-41.(1985).
- [55] G. Castellano, *Un modello cinematico per i materiali non resistenti a trazione*, Cinquantenario della Facoltà di Architettura di Napoli: Franco Jossa e la sua opera (p. 241-256). Napoli: Giannini.(1988).
- [56] G. Del Piero, *Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials* Meccanica, 24(3), 150-162.(1989)
- [57] E. Méry, *Sur l'équilibre des voûtes en berceau*, Annales des ponts et chaussées, vol. 19, pp. 50-70, 1840.
- [58] M. Lucchesi, M. Silhavy, N. Zani, *Singular equilibrated stress fields for no-tension panels*, Mechanical Modelling and Computational Issues in Civil Engineering, vol. 23, pp. 255-265, 2005.
- [59] M. Angelillo, A. Fortunato, A. Montanino, M. Lippiello, *Singular stress fields for masonry walls: Derand was right*, Meccanica, vol. 49(5), pp. 1243-1262, 2014.
- [60] M. Gurtin, *The linear theory of elasticity*, in Handbuch der Physik, vol. VIa/2, Springer-Verlag, 1972.
- [61] G. Del Piero *Limit analysis and no-tension materials*, International Journal of Plasticity, 14(1-3), 259-271, 1998.

- 
- [62] Fraternali F, Angelillo M, Fortunato A. *The Lumped Stress Method and the Discrete-Continuum Approximation*. Int J Solids Struct 39: 6211-6240, 2002.
- [63] Fraternali F, Angelillo M, Rocchetta G. *On the Stress Skeleton of Masonry Vaults and Domes*. Proceedings of the Seventh Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM VII) Temuco, Chile January 2-5: 369-372, 2002
- [64] Block P, Ciblac T, Ochsendorf J. *Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings*. Comput Struct 84(29-30): 1841-1852, 2006
- [65] Calladine CR. *A preliminary structural analysis of a Guastavino spiral staircase*. in “Essays in the History of the Theory of Structures, in Honour of Jacques Heyman”, Instituto Juan de Herrera, 2005
- [66] Gesualdo A, Cennamo C, Fortunato A, Frunzio G, Monaco M, Angelillo M. *Equilibrium formulation of masonry helical stairs*. Meccanica, to appear, 2016

## Siti web

<http://www.monitoraggiofessure-mg.it/index.php?fbl=a3>

<https://www.promozioneacciaio.it>

<http://www.wikitecnica.com/schiacciamento/>

<http://docplayer.it/58469083-II-comportamento-delle-strutture-in-muratura-sotto-sisma-meccanismi-di-danno-e-tecniche-di-mitigazione.html>