



UN MODELLO NDEA RELAZIONALE PER MISURARE LA PERFORMANCE ECONOMICA DI UN PROCESSO DI PRODUZIONE CON QUATTRO STADI E CON TECNOLOGIA DI PRODUZIONE A RETE CON OUTPUT INDESIDERABILI

Claudio Pinto

ISSN: 1971-3029

Publication date: July 23rd, 2021

Università degli Studi di Salerno
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche
Via Giovanni Paolo II, 132 – 84084; Fisciano (SA) – Italy

E-mail dises@unisa.it

Web www.dises.unisa.it

UN MODELLO NDEA RELAZIONALE PER MISURARE LA PERFORMANCE ECONOMICA DI UN PROCESSO DI PRODUZIONE CON QUATTRO STADI E CON TECNOLOGIA DI PRODUZIONE A RETE CON OUTPUT INDESIDERABILI

Claudio Pinto*

Abstract. La Network Data Envelopment Analysis è un approccio di misurazione delle performance relative per unità decisionali modellate come un sistema a rete composto da più sotto parti ciascuna con la propria (sotto) tecnologia di produzione e variamente interconnesse tra loro. In questo lavoro proponiamo un modello NDEA relazionale nella versione dei moltiplicatori per misurare le performance relative di unità decisionali (processi produttivi) modellati come un sistema a rete di quattro sotto processi interconnessi tra loro tramite risorse intermedie, risorse condivise e con la produzione di output indesiderabili. Il lavoro ha come obiettivi da un lato estendere la modellistica NDEA per misurare la performance relativa di processi produttivi modellati come reti con più di due sotto processi e dall'altro attribuire al processo in questione una possibile tecnologia di produzione a rete e sotto tecnologie con output indesiderabili.

Keywords: Network Data Envelopment Analysis, processo di produzione con 4 sotto processi, (sub)tecnologia con produzione di output indesiderabili.

AMS 2010 classifications: 90B10, 90C05, 91B38, 97M40.

JEL classifications: C44, C55, L25.

Acknowledgements: I miei ringraziamenti vanno ai due revisori anonimi per i loro fondamentali commenti.

1. Introduzione

La Data Envelopment Analysis (DEA) Charnes, Cooper, & Rhodes (1978), e la Network Data Envelopment Analysis (NDEA) (Fare and Grosskopf (2000); Cook and Zhu (2008); Kao (2014)) sono due approcci metodologici nati all'interno della ricerca operativa e delle scienze manageriali usati per misurare l'efficienza (performance) relativa di unità decisionali differenti (ad esempio organizzazioni pubbliche e private oppure un unico processo produttivo e così via). La differenza tra i due approcci è che mentre la DEA considera ogni unità decisionale come una scatola nera che utilizza gli input per trasformarli in output senza considerare la sua struttura interna la NDEA, consente di tener conto sia della struttura interna

* 3clab, DISA-MIS, Università degli Studi di Salerno, Via Giovanni Paolo II, 132, 84084, Fisciano (SA), Italy.

del sistema che delle operazioni che intercorrono tra le sue parti. I due approcci di modellizzazione e misurazione possono essere utilizzati anche come strumenti di policy (vedi per esempio Smith & Street (2008)) per la DEA e la proposta di Pinto (2020)** per la NDEA) e permettono di modellare i processi di produzione e/o generiche unità decisionali in modo molto variegato (vedi per esempio la classificazione presentata in Castelli, Presenti and Ukovich (2010), oppure la revisione in Kao (2014). A nostra conoscenza solo Pinto (2020)** per la prima volta ha proposto in questa letteratura di usare l'approccio NDEA come strumento di policy a livello organizzativo proponendo di plasmare gli input e output del modello in un mix di variabili discrezionali vs non discrezionali e considerare almeno una variabile non discrezionale come variabile di policy. Dal nostro punto di vista ci sono degli obiettivi organizzativi che non possono essere trattati solo in questo modo come ad esempio accade nel caso in cui un obiettivo organizzativo è quello di ridurre la produzione di output indesiderabili (es. prodotti di scarto, prodotti difettati ecc.). Nella letteratura DEA (vedi per esempio Liu, Meng, Li and Zhang (2010); Zhou, Ang, and Poh (2008); Zanella, Camanho, and Dias (2015); Tone and Tsutsui (2011); Halkos and Tzeremes (2013)) e NDEA (vedi per esempio (Liu, Zhou, Ma, Liu, and Shen (2015), Fukuyama and Weber (2014)) la questione appena citata può essere trattata dal punto di vista della produzione di output "cattivi" o altrimenti detto di output indesiderabili (Cherchye, De Rock, and Walheer (2015); Walheer (2018)). In questo lavoro, trattando anche gli obiettivi di policy di riduzione degli output indesiderabili all'interno dei modelli di misurazione della efficienza relativa Smith & Street (2008), descriveremo una tecnologia di produzione a rete in presenza di output indesiderabili nel caso di generiche unità produttive decisionali modellate come un sistema a rete con struttura interna con più di due sotto processi. A questo fine in primo luogo definiamo il modello grafico della struttura del processo di produzione a rete con quattro sotto processi, poi definiamo e formalizziamo una tecnologia a rete con la produzione di output indesiderabili da attribuire al processo stesso ed infine proporremo un modello NDEA-VRS relazionale con i moltiplicatori, con orientamento di misurazione all'output e con misura radiale. Il modello data la sua natura relazionale dopo aver effettuato la linearizzazione Charnes and Cooper (1962), ci consentirà di misurare anche l'efficienza relativa dei sotto processi. Il lavoro è così strutturato: nella sezione 2 presentiamo una breve rassegna sul trattamento degli input e output indesiderabili nei modelli DEA e NDEA, sul trattamento degli input condivisi nei modelli NDEA, e sui più recenti modelli NDEA relazionali con più di due sotto processi, nella sezione 3 presentiamo il modello grafico del processo di produzione a quattro stadi (3.1), la descrizione e formalizzazione di una tecnologia a rete con la produzione di output indesiderabili (3.2) e il modello NDEA-VRS relazionale per misurare l'efficienza sia del processo che delle sue sotto parti (3.3), nella sezione 4 proponiamo un'applicazione a dati non reali per mostrare il funzionamento del modello, ed infine nelle sezioni 5 e 6 la discussione e le conclusioni, rispettivamente.

2. Breve rassegna sulla letteratura di interesse

Il paper contiene la proposta di un modello NDEA relazionale nella versione dei moltiplicatori per misurare l'efficienza relativa di un processo produttivo modellato come una rete di 4 sotto processi interconnessi tra loro attraverso risorse condivise e intermedie e con la produzione di output indesiderabili. Per tale motivo la revisione della letteratura che si presenterà in questa sezione interesserà da un lato lo stato dell'arte relativamente al trattamento di input e output indesiderati all'interno della metodologia DEA convenzionale (esempi si trovano in (Fare, Grosskopf, Lovell, and Pasurka (1989); You and Yan (2011)) e nei modelli NDEA (vedi per esempio Huang, Chen, and Yin (2014); Fukuyama and Weber (2014)), da un'altra parte la revisione riguarderà invece sia la modellizzazione che la misurazione dell'efficienza relativa con l'approccio relazionale NDEA Kao (2009a) dei processi di produzione con più di due sotto processi (vedi per esempio Chen, Du, Sherman, and Zhu (2014)) sia la letteratura che ha riguardato il trattamento degli input condivisi in tali modelli (vedi per esempio Chen, Du, Sherman, and Zhu (2010); Chen, Du, Sherman, and Zhu (2014); Cook, Hababou and Tuentner (2000); Cook and Hababou (2001))

Con riferimento al primo dei punti indicati si ricorda che in Halkos and Petrou (2019), si trova una revisione critica Halkos and Petrou (2018), dei principali metodi usati in letteratura per trattare la produzione di output indesiderati all'interno della metodologia DEA convenzionale e in cui vengono indicate quattro possibilità: 1) ignorarli nella tecnologia di produzione, 2) trattarli come input regolari (cioè da output del modello DEA diventano input), 3) trattarli come output normali (per esempio lavorando sulla disponibilità) ed infine 4) procedere a delle adeguate trasformazioni degli stessi (soluzione adottata in questo lavoro per il modello NDEA). Questi autori affermano che ogni modo proposto per affrontare gli output indesiderati all'interno della DEA contiene sia punti di forza che di debolezza con cui ogni ricercatore deve confrontarsi e quindi ogni ricercatore deve valutare quale soluzione sia la più appropriata alle esigenze di ricerca. A nostra conoscenza possiamo affermare anche che: 1) si rinvenivano due diversi approcci per trattare gli output indesiderati: uno diretto e uno indiretto, 2) che la misurazione in presenza di output indesiderabili ha riguardato anche la variazione della produttività nel tempo e che 3) la presenza di output indesiderati nei modelli DEA ha riguardato principalmente le questioni di sostenibilità ambientale (come ad esempio accade in Reinhard, Lovell and Thijssen (2000)). L'approccio indiretto prevede la trasformazione della scala di misurazione degli output indesiderabili ed è stato proposto in Seiford and Zhu (2002). L'approccio diretto è stato proposto da Chung, Fare and Grosskopf (1997), che ipotizzano invece la scarsa disponibilità degli output indesiderati in un modello DEA. Il modello DEA di questi ultimi autori continua ad assumere la forte disponibilità di input e output desiderabili mentre l'assunzione di scarsa disponibilità di output negativi come sottoprodotti di output desiderabili serve ad indicare che la riduzione degli output indesiderabili non è priva di costi. Tuttavia, come notato in Liu, Meng, Li, and Zhang (2010), la decisione di assumere la debole o forte disponibilità delle variabili di un modello DEA dovrebbe dipendere dalla natura dell'applicazione. Esempi di lavori invece che hanno trattato gli output indesiderabili in un modello DEA orientato all'output attraverso trasformazioni monotone negative (quarta

possibilità indicata sopra) si trovano ad esempio in Ali and Seiford (1990) ; Lovell, and J.A. (1995); Fleishman, Alexander, Bretschneider, and Popp (2009). Esempi invece di paper in cui gli output indesiderati sono stati trattati come input (terza possibilità indicata sopra) in un modello DEA orientato agli input e quindi destinati ad essere ridotti si trovano in Telle and Larsson (2007); Yang and Pollit (2009). Lavorando sulla disponibilità forte e debole, gli output indesiderabili sono stati trattati anche in modelli DEA con orientamento all'input output Liu, Meng, Li and Zhang (2010). Secondo alcuni autori però introducendo gli output indesiderati come input in un modello DEA il modello DEA risultante non riflette la vera tecnologia Dyckhoff and Allen (2001). Una revisione delle trasformazioni più usate per trattare gli output indesiderabili in modelli DEA orientati all'output si trova invece in Scheel (2001). In quest'ultimo lavoro, infatti, secondo l'autore si può rappresentare correttamente la tecnologia di produzione evitando di trattare gli output indesiderati come input da minimizzare. Liu, Meng, Li, and Zhang (2010), descrivono l'assunzione di disponibilità e una serie di diverse misurazioni delle prestazioni in presenza di input e output indesiderati, quindi discutono diverse combinazioni di ipotesi e metriche di disponibilità. Chen, Yu, Chang, Hsu, Managi (2015), per tener conto della presenza di output desiderabile e non desiderabili propongono una funzione di distanza direzionale basata sulla misura di efficienza migliorata di Russel facendo notare che la loro misura è simile alla misura basata sugli slack e ad una misura di distanza direzionale orientata all'output in quanto la loro misura consente di espandere gli output desiderabile e contrarre quelli indesiderabili.

Come detto all'inizio le considerazioni sul trattamento degli input e degli output indesiderabili svolte per la DEA convenzionale sono ampiamente adattabili ed effettivamente trattate anche nel caso di modelli DEA che considerano la struttura interna delle DMU (ad esempio Wu, Zhu, Ji, and al. (2016); Walheer (2018)). Quindi anche per questi modelli si può affermare che gli output indesiderabili possono essere trattati come input (vedi per esempio Ebrahimnejad, Tavana, Lotfi, and Shahverdi (2014), oppure trattati come elementi desiderabili solo dopo aver operato una trasformazione sui dati ad essi riferiti (soluzione adottata in questo lavoro), oppure utilizzando misure diverse Huang, Chen, and Yin (2014), come le misure direzionali come accade in Lozano, Gutiérrez, and Moreno (2013), o ancora lavorando sulla disponibilità degli output indesiderati assumendo una disponibilità forte o debole Liu, Zhou, Ma, Liu, and Shen (2015). Lozano, Gutiérrez, and Moreno (2013), propongono ad esempio un approccio a distanza direzionale per affrontare i problemi della DEA di rete in cui i processi possono generare non solo output finali desiderabili ma anche output indesiderati. Huang, Chen, and Yin (2014), propongono un modello di rete a due stadi con output negativi per misurare l'efficienza delle banche commerciali cinesi dal 2008 al 2012. Il loro modello è del tipo basato sugli slacks. Lozano and Adenso-Diaz (2018), hanno proposto di applicare l'approccio Network Data Envelopment Analysis (NDEA) per valutare l'efficienza dei flussi di prodotto in periodi variabili per una rete di fornitura multiprodotto, in cui possono verificarsi perdite (ad esempio, deterioramento di prodotti deperibili) nei nodi o gli archi. Walheer (2018), suggerisce di trattare gli output come la componente fondamentale del processo di produzione modellando ogni output individualmente. Questo per Walheer dà la possibilità di considerare le interconnessioni con gli input, gli output e gli output indesiderati. In

particolare, l'autore fa una distinzione tra output/input indesiderabili che sono dovuti/utilizzati da tutti gli output e quelli che sono dovuti/assegnati ad output specifici. L'autore indica che la letteratura ha suggerito differenti modi di trattare gli output indesiderabili. Il primo modo è quello di usare l'approccio assiomatico sulla tecnologia per modellare le interconnessioni tra output desiderabili e output indesiderabili come ad esempio l'assioma della disponibilità debole come fatto in Fare, Grosskopf, Lovell, and Pasurka (1989), e l'assioma della solidarietà nulla come fatto in (Färe and Grosskopf (2004). Un altro modo è applicare una trasformazione matematica agli output indesiderabili (soluzione seguita qui), un altro modo ancora è quello di usare particolari misure quando si usano gli output indesiderabili ed infine modellare gli output indesiderati come input. L'autore poi dopo aver citati questi modi che tengono conto della interconnessione tra output e output indesiderabili cita quelli che hanno trattato la questione attraverso le interconnessioni tra input e output usando differenti categorie di input. Una prima categoria di input è quella usata per produrre tutti o un sotto insieme di output (come accade qui). E secondo l'autore questi input possono essere interpretati come beni pubblici e quindi aumentano le economie di scala e scopo nel processo di produzione. Una seconda categoria di input è quella che è allocata per la produzione di ogni output, ed infine una terza categoria di input che è quella proporzionale agli output. Lozano and Gutierrez (2011), propongono un approccio con una funzione di distanza direzionale per modelli NDEA in cui i processi possono generare non solo output finali desiderabili ma anche output indesiderabili e lo applicano al problema della modellazione e del benchmarking delle operazioni aeroportuali. Un esempio di uso di funzioni direzionali e dell'assioma di disponibilità debole degli output indesiderabili in tecnologie a rete si trova invece in Fukuyama and Weber (2014), che mostrano come misurare la performance in modelli a due stadi in presenza di output indesiderabili in concomitanza con la produzione di output buoni. Loro partono dal presupposto, valido per i modelli DEA convenzionali, che la disponibilità debole degli output indesiderabili implica un costo opportunità di ridurre gli output indesiderati: meno output desiderabili devono essere prodotti per ridurre la produzione congiunta di output indesiderabili. Ma aumentare la produzione di output desiderabili e ridurre invece sia gli input usati che la produzione di output indesiderabili si può perseguire attraverso le misure non radiali. Una funzione che consente questo è la funzione di distanza direzionale introdotta da Chambers, Chung, and Fare (1996), che Chambers, Chung, and Fare (1998), estendono su una tecnologia a rete a due stadi. In definitiva gli autori definiscono una funzione di distanza direzionale per sistemi a rete e introducono nel modello NDEA le variabili di slacks per gli input e output desiderabili ma non per gli output indesiderabili. Fukuyama and Weber (2010), seguendo Tone and Tsutsui (2009), introducono l'inefficienza di rete basata sugli slacks in presenza di produzione di output indesiderabili introducendo nel modello NDEA variabili di slacks sia per gli input che per gli output desiderabili ma non per le variabili intermedie. Tutti i lavori della letteratura economica finora citati considerano sempre processi di produzione a due stadi. Il presente lavoro si spinge oltre e tratta invece la produzione di output indesiderabili nel caso di processi di produzione con più di due sotto processi, in particolare ne considera quattro ed adotta come strategia di trattamento gli output indesiderabili attraverso la trasformazione monotona

negativa presentata in Seiford and Zhu (2002), per modelli DEA convenzionali. La scelta di tale strategia tra quelle possibili Walheer (2018), non è legata ad esigenze applicative (non vi è cioè la necessità di rimanere incollati ad esigenze di ricerca specifica) ma per mantenere la convessità Seiford and Zhu (2002). Ricordando Walheer (2018), sulle strategie di trattamento degli output indesiderati emergono quindi sin da ora le numerose possibilità di ricerca futura sia nella direzione teorica che di modellizzazione della tecnologia che applicata.

Per quanto riguarda il secondo punto ovvero il trattamento di input condivisi Chen, Du, Sherman and Zhu (2014), presentano modelli DEA-VRS per misurare le prestazioni di processi di rete a due stadi con input condivisi non divisibili. Il loro modello considera delle proporzioni di attribuzione delle risorse condivise. Sotto questa caratteristica seguendo Kao and Hwang (2008), che attribuisce ad ogni variabile lo stesso variabile peso in modo da realizzare la relazionalità nel modello DEA e poi seguendo Liang, Cook, and Zhu (2008), gli autori combinano le efficienze dei due sotto processi con una media pesata in cui la somma dei pesi è uguale a 1. I pesi usati nel combinare le efficienze dei due sotto processi riflettono l'importanza relativa di ogni sotto processo. Cook and Hababou (2001), dalla lettura dell'abstract, si evince che essi estendono i modelli DEA additivi a processi con risorse condivisi. Cook, Hababou and Tuente (2000), dalla lettura dell'abstract, si evince che essi rimarcando che il fenomeno della condivisione presenta comunemente la difficoltà tecnica di come disaggregare una misura complessiva in parti componenti estendono la normale struttura DEA a una che determina una migliore suddivisione delle risorse per ottimizzare il punteggio di efficienza aggregato. Chen, Du, Sherman and Zhu (2010), nel loro paper sviluppano una serie di modelli DEA per misurare le prestazioni di processi di rete a due stadi con input condivisi non divisibili. Viene presentata una scomposizione additiva dell'efficienza per il processo di rete a due fasi. I modelli sono sviluppati nell'ipotesi di rendimenti di scala variabili (VRS), ma possono essere prontamente applicati nell'ipotesi di rendimenti di scala costanti (CRS). Anche nella letteratura appena citata i modelli NDEA a risorse condivise non superano mai processi con più di tre stadi (sotto processi) come invece accade per il modello presentato qui che ne considera 4.

Per quanto riguarda infine la modellazione di processi produttivi come processi con più di due sotto processi e lo sviluppo di modelli NDEA relazionale Kao (2009(a)), i lavori più recenti presenti oggi in letteratura e a cui questo lavoro si ispira sono quelli in Pinto (2020)**, Pinto (2020)*, Pinto (2020)***. Pinto (2020)***, propone una strategia, da lui stesso chiamata “della formazione dei blocchi” per misurare l'efficienza relativa di un processo di produzione con 3 stadi in presenza di risorse condivise. La sua proposta è quella di costruire diversi blocchi a cui per ognuno di essi sia possibile applicare un modello NDEA relazionale a due stadi in serie e poi usare una formula di aggregazione delle efficienze dei blocchi. Lo stesso autore ritiene che la sua soluzione, affiancandosi a quella dei sistemi ibridi di Kao (2009(a)), rappresenti una valida soluzione per cogliere i vincoli tecnologici, economici ecc. ecc. all'interno delle strutture produttive a rete che spesso consigliano di considerare due o più parti di un sistema come una parte unica. Pinto (2020)*, propone invece un modello NDEA relazionale per misurare l'efficienza relativa di un

processo di produzione a 4 stadi avvisando che nella realtà esistono processi produttivi che possono essere ricondotti a strutture a rete di quattro sotto processi. L'autore propone modelli NDEA relazionali sia con misura radiale con orientamento all'input che con orientamento all'output. Entrambi i modelli assumono ritorni di scala costante sia per l'intero processo che per le sue sotto parti. Una caratteristica del suo modello è che il primo sotto processo ha sempre una valenza interna (nel senso che produce output usati dagli altri processi interni ma non produce output per l'esterno) e per funzionare usa solo risorse di sistema condivise con altri sotto processi. Pinto (2020)** , propone di trattare le variabili di un modello NDEA come un mix di variabili discrezionali e non discrezionali in cui almeno una variabile non discrezionale del modello sia considerata dal manager una variabile di policy corrente. Nel suo lavoro Pinto (2020)** , considera un modello NDEA relazionale per soli due stadi in cui la variabile non discrezionale è una variabile intermedia. L' autore applica il modello al settore ospedaliero e tratta gli interventi chirurgici come una variabile intermedia non discrezionale ai fini di policy di politica sanitaria a livello organizzativo. Il presente lavoro si differenzia da tutti i modelli presentati dal Pinto nei suoi tre lavori appena descritti per il fatto che il modello a 4 stadi presentato e sviluppato qui adotta una tecnologia di produzione a rete con la produzione di output indesiderabili.

3. Il modello grafico, la tecnologia e il modello NDEA con output indesiderabili

3.1 Il modello grafico

Il modello grafico del nostro processo produttivo è quello presentato nella Figura 1 sotto. Date N unità decisionali generiche tutte modellate con la stessa struttura interna di Figura 1 il processo di produzione prevede, una volta attribuita la stessa tecnologia di produzione a rete ad ognuna di esse, la produzione di cinque output di cui 2 output indesiderati prodotti rispettivamente dal secondo e dal terzo sotto processo. Il sotto processo 4 impiega risorse di sistema condivise ed esogene per produrre solo output desiderabili, mentre i restanti sotto processi 2 e 3 per il loro funzionamento usano sia risorse esogene (come ad esempio quelle rappresentate con la variabile x_5 per il sotto processo 3, con la variabile x_1 per il sotto processo 2 e con la variabile x_6 per il primo sotto processo) e sia risorse intermedie condivise (variabili z_{12} e z_{22} per il sottoprocesso 2 e z_{13} e z_{23} per il sotto processo 3) ma per produrre anche output indesiderati (y_2 per il secondo sottoprocesso e y_3 per il terzo). Le variabili intermedie del modello, z_1 e z_2 , sono prodotte esclusivamente dal primo sotto processo e poi attribuite in date proporzioni definite ex-ante dal ricercatore/manager ai sotto processi 2 e 3. Alcune variabili di sistema come x_2, x_3, x_4 non solo consentono il funzionamento del primo sotto processo ma anche quello dei restanti 3 compreso il quarto che invece non usa risorse intermedie condivise. Per misurare l'efficienza relativa di questo processo e dei suoi sotto processo nella sezione 3.2 che segue prima descriviamo e formalizziamo una delle possibili tecnologie di produzione a rete per il processo in questione e per le sue parti e poi proporremo un modello NDEA-VRS dei rapporti relazionale con orientamento all'output per misurarne l'efficienza tecnica relativa. La tecnologia che segue è soggetta alle condizioni minime di regolarità[†] Bogetoft and Otto (2019), solitamente assunte nel definire una tecnologia (N)DEA. (tecnologia 3).

[†] La nostra tecnologia di produzione come si vede assume libera disponibilità forte di tutti gli output.

Aggiungendo poi l'assunzione di convessità si giunge alla tecnologia convessa con output indesiderabili prima del trattamento sulle variabili di output indesiderabili (tecnologia 4) e caratterizzata da libera disponibilità degli input e degli output con produzione di output buoni e indesiderabili e con l'uso di risorse di processo, condivise ed intermedie ed infine si giunge alla tecnologia a rete completa di assunzioni con ritorni di scala variabili e produzione di output indesiderabili dopo la trasformazione monotona negativa di quest'ultimi Seiford and Zhu (2002), sia per l'intero processo che per i suoi sotto processi (tecnologia 5)[‡].

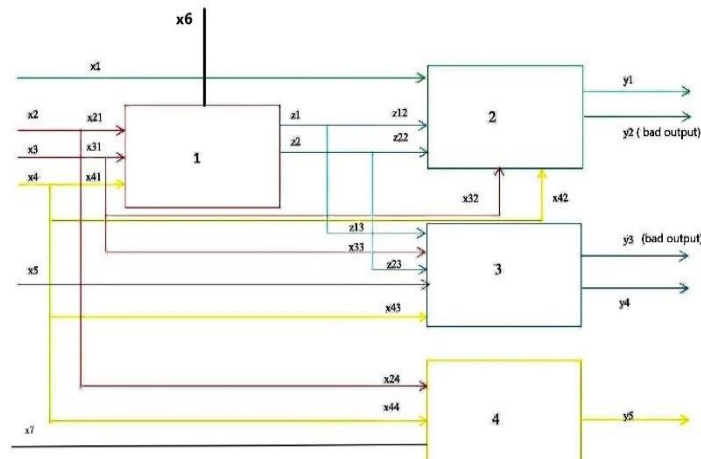


Figura 1: Il modello grafico del sistema con 4 sotto parti e output indesiderabili

3.2 Una tecnologia a rete con output indesiderabili

La tecnologia di produzione di qualsiasi processo di produzione può essere descritta, rappresentata e formalizzata in vari modi: 1) utilizzando gli insiemi tecnologici e le sue corrispondenze all'input o all'output Bogetoft and Otto (2019), oppure 2) adottando le funzioni di produzione con i suoi duali (funzioni di costo, ricavo e funzione di profitto), oppure 3) attraverso le funzioni di distanza di Farrell (1957), e Shephard (1970). Bogetoft and Otto (2019). L'approccio della funzione di produzione è generalmente più utilizzato quando l'esatta relazione tra gli input e gli output di un sistema è perfettamente nota adottando una delle funzioni note in economia (ad esempio Cobb-Douglas, Translogaritmica, ecc. ecc.) e quando generalmente il processo adotta una tecnologia di produzione con un solo output. In questo articolo, oltre ad avere un processo di produzione modellato come un sistema a rete composto da più sotto processi ognuno con una sua sub-tecnologia il processo, produce più output e la vera relazione tra gli input e gli output non è nota né tantomeno si assume si conoscerla. Nel qual caso la formalizzazione della tecnologia

[‡] Il lavoro non modella direttamente la libera disponibilità degli output desiderabili e non desiderabili come libera disponibilità debole (Fare, Grosskopf, Lovell, & Pasurka, 1989) ma dal momento in cui sviluppa un modello NDEA dei moltiplicatori e adotta la strategia di trasformazione negativa monotona per il trattamento degli output indesiderabili (Seiford & Zhu, 2002) ciò che ottiene dall'interpretazione dei risultati è che il miglioramento della performance può essere perseguito attraverso un aumento degli output desiderati e allo stesso tempo una riduzione di quelli indesiderati in assenza di costo di riduzione per quest'ultimi.

di produzione a rete potrebbe avvenire attraverso l'uso delle funzioni di produzione multi-output (vedi per esempio Forsund (2017)) La tecnologia di produzione per questo sistema di produzione a rete invece la descriveremo e rappresenteremo più utilmente attraverso gli insiemi tecnologici Bogetoft and Otto (2019). Supponiamo allora di avere k DMU e che per ogni k -esima unità il vettore degli input è costituito solo da buoni (good) input (cioè fattori desiderabili) $X_i = X_i^g$ dedicati alla produzione di tutti i tipi di output. Le variabili intermedie Z sono anch'esse tutte variabili desiderabili: $Z_j = Z_j^g$, mentre gli output prodotti dal sistema attraverso i suoi sotto processi possono essere sia output buoni (g) che output indesiderabili (output indesiderabili, b): $Y_i = [Y_i^g, Y_i^b]$. Al suo interno, invece, il processo è strutturato come un sistema a rete composto da 4 sotto processi ognuno dei quali per il suo funzionamento usa i propri input che possono essere sia condivisi con gli altri sotto processi, oppure essere esclusivamente usate dal singolo sotto processo (esogene) oppure avere come input gli output prodotti da altri sotto processi (variabili intermedie) (come accade ai sotto processi 2 e 3 del processo produttivo della Figura 1 che tra i loro input hanno gli output intermedi prodotti dal primo sotto processo) Castelli, Pesenti and Ukovich (2010). Quindi, ipotizzando per un momento che per il nostro processo produttivo di Figura 1 con quattro sotto processi la distinzione tra output desiderabili e output non desiderabili ancora non sia stata operata, e in cui il secondo e il terzo sotto processo utilizzano output intermedi come input, l'insieme delle possibilità di produzione a rete (o altrimenti chiamato insieme tecnologico a rete) P può essere genericamente descritto come segue:

$$P_{four} = \{(X, Y, Z): (X, Z, Y) \in P, (X^1, Z^1) \in P_1, (X^2 \text{ and } Z^2, Y^2) \in P_2, (X^3 \text{ and } Z^3, Y^3) \in P_3, (X^4, Y^4) \in P_4\} \quad (1)$$

Dove P_1, P_2, P_3, P_4 sono gli insiemi delle possibilità produttive rispettivamente del primo, secondo, terzo e quarto sotto processo mentre P indica l'insieme delle possibilità di produzione di tutto il sistema nella sua interezza considerando anche la produzione interna. Nel suo insieme il processo utilizza il vettore di input X per produrre il vettore di output Y attraverso i quattro sotto processi e produce un vettore Z di prodotti interni. Nello specifico X^1 è il vettore di input utilizzato nel primo sottoprocesso per produrre il vettore di output intermedi Z^1 ; il vettore Z^2 e X^2 sono rispettivamente i vettori degli input intermedi e dedicati usati dal secondo sotto processo per produrre il vettore di output Y^2 ; X^3 e Z^3 sono rispettivamente i vettori degli input intermedi e dedicati utilizzati dal terzo sotto processo per produrre il vettore Y^3 di output; ed infine X^4 è il vettore di input utilizzato dal quarto sotto processo per produrre il vettore degli output Y^4 . Per adattare in modo più specifico questa descrizione generale della tecnologia di produzione a rete al processo di produzione con quattro sotto processi al processo di Figura 1 notiamo che: 1) il primo sotto processo P_1 opera con 3 input condivisi (x_{21}, x_{31}, x_{41}) e una risorsa esogena (x_6) e produce due output dedicati esclusivamente ad uso interno (variabili intermedie z_1 e z_2), 2) il secondo sotto processo P_2 opera con 1 input esogeno x_1 , due input intermedi prodotti dal primo sottoprocesso (z_{12}, z_{22}) e due input non intermedi condivisi con il primo sotto processo (x_{32}, x_{42}) per produrre sia un vettore di output buoni (y_1^g) che uno di output indesiderabili (y_2^b), 3) il terzo sotto processo P_3 per il suo funzionamento richiede due input intermedi (z_{13}, z_{23}) condivisi anche con il secondo sotto processo, 2 input di processo condivisi con il primo sotto processo (x_{33}, x_{43}) e a solo input esogeno (x_5) per produrre un vettore di output indesiderabili costituito da un solo output (y_3^b) e uno di output buoni di un solo output (y_4^g), ed infine 4) il quarto sotto processo P_4 impiega due input di processo condivisi entrambi con il primo sotto processo (x_{24}, x_{34}) e una risorsa esogena (x_7) per produrre un unico vettore di output buoni (y_5^g). La nuova tecnologia a rete può quindi essere ora descritta e formalizzata attraverso il seguente insieme tecnologico a rete:

$$P_{four} = \left\{ (X, Y^{good}, Y^{bad}, Z): \begin{pmatrix} x_1 & y_1^{good} \\ x_2 & y_2^{bad} \\ x_3 & y_3^{bad} \\ x_4 & y_4^{good} \\ x_5 & y_5^{good} \\ x_6 & y_6^{good} \\ x_7 & y_7^{good} \end{pmatrix} \in P, \begin{pmatrix} \alpha_{21}x_{21} \\ \alpha_{31}x_{31} \\ \alpha_{41}x_{41} \\ x_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in P_1, \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_{32}x_{32} \\ \alpha_{42}x_{42} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} \beta_{11}z_{12} \\ \beta_{22}z_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^{good} \\ y_2^{bad} \end{pmatrix} \in P_2, \begin{pmatrix} (1 - \alpha_{31} - \alpha_{32})x_{33} \\ \alpha_{43}x_{43} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} (1 - \beta_{11})z_{13} \\ (1 - \beta_{22})z_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3^{bad} \\ y_4^{good} \end{pmatrix} \in P_3, \begin{pmatrix} (1 - \alpha_{21})x_{24} \\ x_7 \end{pmatrix}, (y_5) \in P_4 \right\} \quad (2)$$

Ad ognuna delle variabili condivise (le x con doppio pedice e le variabili z) è associato un vettore scalare di proporzione di distribuzione tra i sotto processi. Quindi, ad esempio, l'input di processo x_2 è condiviso tra il primo e il quarto sotto processo con proporzione di attribuzione pari a α_{21} e $1 - \alpha_{21}$, rispettivamente. L'input di processo x_3 è condiviso tra il primo il secondo e il terzo sotto processo con le seguenti proporzioni di attribuzione: $\alpha_{31}, \alpha_{32}, 1 - \alpha_{31} - \alpha_{32}$, rispettivamente. L'input di sistema x_4 è diviso tra tutti i sottoprocessi 1,2,3 e 4 con proporzioni di attribuzione pari a: $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, 1 - \alpha_{41} - \alpha_{42} - \alpha_{43}$ rispettivamente. E così a continuare per tutte le altre variabili del modello condivise, intermedie e esogene. Nell'ipotesi di rendimenti di scala costanti e disponibilità libera di tutti gli input e gli output, possiamo descrivere la tecnologia a rete NDEA per stimare la (2) come segue:

$$\left\{ (X, Y^{good}, Y^{bad}, Z): \begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \lambda_j X_j \leq X, \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j \geq Y, \text{ appartiene a } P \\ & \sum_{j=1}^k \lambda_j X_j^1 \leq X^1, \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_j^1 \geq Z^1, \text{ appartiene a } P_1 \\ & \sum_{j=1}^k \mu_j Z_j^2 \leq Z^2, \sum_{j=1}^k \mu_j Y_j^{1good} \geq Y^{1good}, \sum_{j=1}^k \mu_j Y_j^{2bad} \leq Y^{2bad}, \text{ appartiene a } P_2 \\ & \sum_{j=1}^k v_j Z_j^3 \leq Z^3, \sum_{j=1}^k v_j X_j^3 \leq X^3, \sum_{j=1}^k v_j Y_j^{3bad} \leq Y^{3bad}, \sum_{j=1}^k v_j Y_j^{3good} \geq Y^{3good}, \text{ appartiene a } P_3 \\ & \sum_{j=1}^k \xi_j X_j^4 \leq X^4, \sum_{j=1}^k \xi_j Y_j^4 \geq Y^4, \text{ appartiene a } P_4 \\ & \lambda_j, \mu_j, v_j, \xi_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Come si può leggere nella (3) con questa tecnologia a rete si assume una forte disponibilità libera per tutte le tipologie di input e output sia per quelli di sistema che per quelli delle sue sotto parti, e per ognuno dei quali si assumono rendimenti di scala costanti. La tecnologia NDEA nella (3) sotto l'ipotesi di disponibilità libera degli output buoni Y^{good} e di quelli indesiderabili (cattivi) Y^{bad} assume che con lo stesso livello di input il processo di produzione nel suo insieme e le sue sotto parti possono produrre meno output indesiderabili (ovvero, l'output indesiderabile in eccesso può essere smaltito) ed invece produrre più output buoni. Ma questo richiede che nel modello NDEA gli output indesiderabili ricevano lo stesso segno di diseguaglianza degli input per essere ridotti. Adottando invece la trasformazione degli output indesiderabili proposta da Seiford and Zhu (2002), la tecnologia (3) può essere riscritta come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k \lambda_j X_j \leq X, \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j \geq Y \text{ (sistema)} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j X_j^1 \leq X^1, \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_j^1 \geq Z^1 \text{ (sub 1)} \\ \sum_{j=1}^k \mu_j Z_j^2 \leq Z^2, \sum_{j=1}^k \mu_j Y_j^{2good} \geq Y^{2good}, \sum_{j=1}^k \mu_j \bar{Y}_j^{2bad} \geq \bar{Y}^{2bad} \text{ (sub 2)} \\ \sum_{j=1}^k v_j Z_j^3 \leq Z^3, \sum_{j=1}^k v_j X_j^3 \leq X^3, \sum_{j=1}^k v_j \bar{Y}_j^{3bad} \geq \bar{Y}^{3bad}, \sum_{j=1}^k v_j Y_j^{3good} \geq Y^{3good} \text{ (sub 3)} \\ \sum_{j=1}^k \xi_j X_j^4 \leq X^4, \sum_{j=1}^k \xi_j Y_j^4 \geq Y^4 \text{ (sub 4)} \\ \lambda_j, \mu_j, v_j, \xi_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (4)$$

Come si può vedere nella (4) la trasformazione monotona negativa degli output indesiderabili ci permette di invertire il segno di disuguaglianza associato ad essi da $\leq$ a $\geq$ e la variabile degli output indesiderabili nella tecnologia NDEA cambia notazione da Y^{bad} a $\bar{Y}^{bad}$. Questo cambiamento avviene sempre sotto l'assunzione di libera disponibilità di tali output (ovvero la riduzione degli stessi non è soggetta né a costi né a particolari vincoli comportamentali rispetto a quelli desiderabili e agli input della tecnologia Walheer (2018). Ora però possiamo interpretare che con lo stesso livello di input il processo di produzione nel suo insieme e per ognuno dei suoi sotto processi si possono produrre meno output indesiderabili trasformati e meno output buoni. Cioè si può disporre liberamente dell'eccesso sia degli output desiderabili che di quelli non desiderabili trasformati. Infine, assumendo rendimenti di scala variabili, la tecnologia di produzione a rete presentata nella (4) può essere definita e formalizzata come segue:

$$T_{VRS}^{(IO)} = \left\{ (X, Y^g, Y^b, Z) \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \lambda_j X_j \leq X_{jo}, \sum_{i=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_{jo} \\ \sum_{i=1}^n X_j^1 \lambda_j^1 \leq X_{jo}^1, \sum_{i=1}^n Z_j^1 \lambda_j^1 \geq Z_{jo}^1, \sum_{i=1}^n \lambda_j^1 = 1, \lambda_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n Z_j^2 \lambda_j^2 \leq Z_{jo}^2, \sum_{i=1}^n X_j^2 \lambda_j^2 \leq X_{jo}^2, \sum_{i=1}^n Y_j^{2good} \lambda_j^2 \geq Y_{jo}^{2good}, \sum_{i=1}^n \bar{Y}_j^{2bad} \lambda_j^2 \geq \bar{Y}_{jo}^{2bad} \\ \sum_{i=1}^n X_j^3 \lambda_j^3 \leq X_{jo}^3, \sum_{i=1}^n Y_j^3 \lambda_j^3 \geq Y_{jo}^{3good}, \sum_{i=1}^n \bar{Y}_j^{3bad} \lambda_j^3 \geq \bar{Y}_{jo}^{3bad} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_j^4 X_j^4 \leq X_{jo}^4, \sum_{i=1}^n \lambda_j^4 Y_j^4 \geq Y_{jo}^4 \\ \lambda_j \geq 0, \lambda_j^1 \geq 0, \lambda_j^2 \geq 0, \lambda_j^3 \geq 0, \lambda_j^4 \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^3 = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^4 = 1 \end{array} \right. \right\} \quad (5)$$

La differenza tra la tecnologia a rete nella (4) e quella nella (5) è che nella 5 si è inserito il vincolo di convessità sulle variabili d'intensità per ogni sotto processo e per l'intero processo per modellare rendimenti di scala variabili. In tutte le descrizioni e formalizzazione delle tecnologie a rete sopra (dalla 3 alla 5) i vettori delle risorse X contengono sia le variabili condivise X^S che esogene X^{EX} le quali non sono state indicate per motivi di spazio e perché comunque non si altera la descrizione della tecnologia visto che per tali input sono mantenute le stesse assunzioni per tutte le variabili. Inoltre, nella descrizione della tecnologia (5) si cambia leggermente la notazione per motivi di chiarezza indicando la variabile di intensità con λ ($\lambda_j, \lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda_j^3, \lambda_j^4$) invece che con μ, v, ξ, λ . Riassumendo i passaggi compiuti di definizione e formalizzazione della tecnologia a rete finale di nostro

interesse la tecnologia descritta nella (3) è quella con la libera disponibilità di tutti gli input e output e incorporando gli output indesiderati senza alcuna trasformazione, la tecnologia a rete descritta nella (4) è la stessa di quella nella (3) ma riporta gli output indesiderati sotto la trasformazione monotona negativa Seiford and Zhu (2002), ed infine la tecnologia (5) è la stessa di quella nella (4) sotto l'assunzione però di rendimenti di scala variabile introdotti attraverso la condizione di convessità $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ sia per la tecnologia di processo che per la sotto tecnologia dei sotto processi.

3.3 Il modello output NDEA-VRS con output indesiderabili

La Figura 1 presenta un generico processo a 4 stadi con input esogeni e condivisi (x), variabili intermedie condivise (z) e con la produzione di output buoni (y^g) e output indesiderabili (cattivi) (y^b). Supponiamo allora che l'insieme delle DMU sia costituito da $j=N$ unità DMU_i ($j = 1, \dots, N$) e che ognuna di esse abbia m risorse denotate con x_{ij} per l'intero processo. Alcune di queste sono esclusivamente dedicate ai singoli sotto processi come la risorsa indicata con la variabile di input x_6 per il primo sotto process, x_1 per il secondo sotto processo, e x_5 e x_7 per il terzo e il quarto sotto processo, mentre altre sono risorse condivise, come accade per quelle indicate con le variabili di input (x_2, x_3, x_4). In totale quindi il processo per produrre i suoi output impiega 7 risorse. Indicheremo le risorse condivise con x_{i1j} ($i_1 \in S_1$), x_{i2j} ($i_2 \in S_2$), x_{i3j} ($i_3 \in S_3$), x_{i4j} ($i_4 \in S_4$), rispettivamente e dove $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1, 2, \dots, m\}$, dove i pedici i_1, i_2, i_3, i_4 indicano il numero di risorse condivise attribuite al primo, secondo, terzo e quarto sottoprocesso. Supponiamo anche che ogni DMU abbia p risorse intermedie indicate con z_{dj} ($d = 1, 2, \dots, p$). Tali risorse sono prodotte dal primo sotto processo, e quindi output di esse, e che possono diventare input dei restanti 3 in una certa proporzione (nel nostro processo di Figura 1 diventano input del secondo e del terzo). Il processo poi produce q output denotati con y_{rj} ($r = 1, 2, \dots, q$). Alcuni di questi sono prodotti dal secondo sotto processo, altri dal terzo e altri dal quarto e li indicheremo con y_{r2j} ($r_2 \in O_2$), y_{r3j} ($r_3 \in O_3$), y_{r4j} ($r_4 \in O_4$). Alcuni di questi output sono output "buoni" e altri "cattivi" (indesiderabili). Così per esempio nel nostro caso avremo che per il secondo e terzo sotto processo il vettore degli output potrà essere ripartito in buoni e cattivi output mentre gli output del quarto saranno solo output desiderabili (buoni). Indicheremo allora con y_{r2j}^{g+b} ($r_{2j}^g \in O_2^g, r_{2j}^b \in O_2^b$), y_{r3j}^{g+b} ($r_{3j}^g \in O_3^g, r_{3j}^b \in O_3^b$) i vettori degli output buoni e cattivi (indesiderabili) del secondo e del terzo sotto processo, rispettivamente. Per tutte le risorse di processo condivise x_{ikj} (dove k è il k -esimo sottoprocesso $k=1,2,3,4$) attribuiremo delle porzioni α_{ikj} ($0 < \alpha_{ikj} < 1$) di attribuzione di ciascuna risorsa usata dal primo, dal secondo, dal terzo e dal quarto sotto processo. Così ad esempio con α_{j1}^1 indicheremo la porzione di attribuzione della risorsa 1 (indicata con pedice) condivisa con il primo sotto processo (indicato dall'apice). Se tale risorsa sarà poi condivisa anche con il secondo, terzo e quarto indicheremo con $\alpha_{j1}^2, \alpha_{j1}^3, \alpha_{j1}^4 = (1 - \alpha_{j1}^1 - \alpha_{j1}^2 - \alpha_{j1}^3)$ le porzioni di attribuzioni rispettivamente al secondo, terzo e quarto sotto processo della risorsa di processo 1 (x_{1j}) in modo tale che $\alpha_{j1}^1 + \alpha_{j1}^2 + \alpha_{j1}^3 + \alpha_{j1}^4 = 1$. Per tutte le risorse intermedie z prodotte dal primo sotto processo e condivise con ogni f -esimo sotto processo attribuiremo, allo stesso modo come abbiamo fatto per le risorse di processo x , delle proporzioni di attribuzione β_{dj}^f ($0 < \beta_{dj}^f < 1$) e sempre con le stesse condizioni, ovvero che la somma dei pesi attribuita alla stessa variabile intermedia condivisa sia sempre pari a 1. Se per il processo in Figura 1 immaginiamo che tutti i sotto processi fossero separati e tutti gli output prodotti fossero tutti output buoni per misurare la loro efficienza relativa

potremmo usare modelli DEA convenzionali indipendenti con orientamento all'output (o all'output), con assunzioni di ritorni di scala variabili (VRS) (o costanti CRS) e nella versione moltiplicativa come segue:

- Per il primo sotto processo

$$\begin{aligned} & \min \frac{\sum_{i1=1}^{s1} \alpha_{i1}^1 v_{i1}^1 X_{i1o}^1 + \mu_o^1}{\sum_{d=1}^p w_{1d} Z_{id}} \\ & \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{i1=1}^{s1} \alpha_{s11} v_{s11} X_{s11}^1 + \mu^1}{\sum_{d=1}^p w_d^1 Z_d^1} \geq 1 \\ & \quad v, w, u \geq 0, \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Dove:

α_{s1}^1 = è il vettore delle proporzioni degli input condivisi

$x = x^{shared}$ attribuita al primo sottoprocesso con $x^{shared} \in R_+^{s1}$

v_{1s1} = è il vettore dei pesi degli input condivisi

X_{1s1} = è il vettore delle risorse condivise attribuite al primo sotto processo

w_{1d} = è il vettore dei pesi associati alle variabili intermedie prodotte dal primo sotto processo

Z_{id} = è il vettore delle variabili intermedie prodotte dal primo sotto processo

- Per il secondo sotto processo

$$\begin{aligned} & \min \frac{\sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{s2o}^2 + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^2 X_{iex2o}^2 + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^{p2} w_d^2 Z_{do}^2 + \mu_o^2}{\sum_{r2=1}^{o2} u_{r2}^2 Y_{r2o}^2} \\ & \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{s2o}^2 + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^2 X_{iex2o}^2 + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^{p2} w_d^2 Z_{do}^2 - \mu_j^2}{\sum_{r2=1}^{o2} u_{r2}^2 Y_{r2j}^2} \geq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Dove valgono le stesse cose fissate per il sotto processo 1 tranne che ora il sotto processo 2 funziona non solo con risorse di processo condivise in una certa proporzione ($\alpha_{i2}^2 X_{s2}^2$) ma anche con risorse dedicate di tipo esogeno (nel caso del processo in Figura 1 la risorse indicata con la variabile x_1 e nel modello NDEA sopra indicata sempre con il vettore X ma con pedice differente iex2) e con variabili intermedie condivise.

- Per il terzo sotto processo

$$\begin{aligned} & \min \frac{\sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{s3o}^3 + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^3 X_{iex3o}^3 + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^{p3} w_d^3 Z_{do}^3 + \mu_o^3}{\sum_{r3=1}^{o2} u_{r3}^3 Y_{r3o}^3} \\ & \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{s3j}^3 + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^3 X_{iex3j}^3 + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^{p3} w_d^3 Z_{dj}^3 + \mu_j^3}{\sum_{r3=1}^{o2} u_{r3}^3 Y_{r3j}^3} \geq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

- Per il quarto sotto processo

$$\begin{aligned}
& \min \frac{\sum_{i4=1}^{s4} \alpha_{s4}^4 v_{s4}^4 X_{s4o}^4 + \mu_o^4}{\sum_{r4=1}^{o4} u_{o4}^4 Y_{o4o}^4} \\
& \text{s. t. } \frac{\sum_{i4=1}^{s4} \alpha_{s4}^4 v_{s4}^4 X_{s4j}^4 + \mu_j^4}{\sum_{r4=1}^{o4} u_{o4}^4 Y_{o4j}^4} \geq 1
\end{aligned} \tag{9}$$

Adottando per tutti i modelli sopra (6,7,8 e 9) la linearizzazione di Charnes and Cooper (1962), avremo che:

- Primo sotto processo indipendentemente considerato

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i1=1}^{s1} \alpha_{i1}^1 v_{i1}^1 X_{i1o}^1 + \mu_o^1 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i1=1}^{s1} \alpha_{i1}^1 v_{i1}^1 X_{i1o}^1 + \mu_o^1 - \sum_{d=1}^p w_d^1 Z_d^1 \geq 0 \\
& \quad \sum_{d=1}^p w_d^1 Z_d^1 = 1 \\
& \quad v^1, w^1 \geq 0, \alpha^1 \geq 0
\end{aligned} \tag{10}$$

- Secondo sotto processo

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{i2o}^2 - \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^2 X_{iex2o}^2 - \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^2 w_d^2 Z_{do}^2 + \mu_o^2 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{i2j}^2 + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^2 X_{iex2j}^2 + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^2 w_d^2 Z_{dj}^2 + \mu_o^2 - \sum_{r2=1}^{o2} u_{r2}^2 Y_{r2}^2 \geq 0 \\
& \quad \sum_{r2=1}^{o2} u_{r2}^2 Y_{r2}^2 = 1 \\
& \quad v^2, u^2, w^2 \geq 0; \alpha^2, \beta^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

- Terzo sotto processo

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{i3o}^3 + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^3 X_{iex3o}^3 + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^3 w_d^3 Z_{do}^3 + \mu_o^3 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{i3o}^3 + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^3 X_{iex3j}^3 + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^3 w_d^3 Z_{do}^3 + \mu_o^3 - \sum_{r3=1}^{o3} u_{r3}^3 Y_{r3}^3 \geq 0 \\
& \quad \sum_{r3=1}^{o3} u_{r3}^3 Y_{r3}^3 = 1 \\
& \quad v^3, u^3, w^3 \geq 0, \alpha^3, \beta^3 \geq 0
\end{aligned} \tag{12}$$

- Quarto sotto processo

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i4=1}^{s4} \alpha_{i4}^4 v_{i4}^4 X_{i4o}^4 + \mu_o^4 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i4=1}^{s4} \alpha_{i4}^4 v_{i4}^4 X_{i4j}^4 + \mu_j^4 - \sum_{s4=1}^{o4} u_{s4}^4 Y_{s4j}^4 \geq 0 \\
& \quad \sum_{s4=1}^{o4} u_{s4}^4 Y_{s4j}^4 = 1 \\
& \quad v^4, u^4 \geq 0, \alpha^4, \beta^4 \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Differentemente da Chen, Du, Sherman and Zhu (2014), il nostro processo di produzione con input condivisi (indicato in Figura 1) è costituito da 4 sotto processi anziché 2. Questo è un punto innovativo del nostro paper rispetto alla letteratura che non sia Pinto (2020)*. Un secondo aspetto riguarda l'introduzione della produzione di output indesiderabili per un processo di produzione a 4 stadi differenziandosi così anche da Fukuyama and Weber (2014), che considera invece un processo di produzione con soli due stadi. Inoltre, sempre in Fukuyama and Weber (2014), per misurare l'efficienza relativa di un processo produttivo con tecnologia a rete con due sotto processi in cui si producono output indesiderabili si adotta la soluzione della funzione di distanza direzionale. Noi, invece differentemente da Fukuyama and Weber (2014), proponiamo una tecnologia a rete con quattro sotto processi anziché due e mantenendo un modello NDEA con i moltiplicatori e con assunzioni di scala variabile usiamo la misurazione radiale[§] anziché direzionale e trattiamo gli output indesiderabili attraverso la trasformazione negativa traslata dei dati di output indesiderabili indicata da Seiford and Zhu (2002). Come già indicato tale soluzione sugli output indesiderati preserva la convessità Seiford and Zhu (2002) **. Questi autori infatti argomentano che, supponendo che l'obiettivo sia quello di aumentare gli output buoni e diminuire quelli negativi, questo può essere perseguito in un modello DEA standard sotto forma di inviluppo adottando la seguente trasformazione per gli output negativi: $\bar{y}_{rj}^b = -y_{rj}^b + v_r > 0$. Dove y_{rj}^b è l'output indesiderabile (cattivo) che verrà moltiplicato per -1 mentre $v_r = \max\{y_{rj}^b\} + 1$. Il modello in Seiford and Zhu (2002), otterrà un vincolo indipendente per gli output indesiderabili con lo stesso segno di quello per uscite buone. Assumendo che tale strategia di trattamento degli output indesiderabili possa essere felicemente e senza ostacoli (consentendoci di rappresentare in modo veritiero una possibile tecnologia con output indesiderabili) adattata utilmente anche al caso di modelli NDEA (per altri modi di trattare gli output indesiderabili nella NDEA vedi esempio Fukuyama and Weber (2014), indicando con $\bar{y}_{rj}^b$ la trasformazione appena indicata i modelli DEA indipendenti che abbiamo presentato sopra, dopo aver operato la linearizzazione di Charnes and Cooper (1962), possono essere scritti come segue:

- Primo sotto processo

idem

- Secondo

[§] Noi qui stiamo assumendo che la dualità esistente tra modelli di inviluppo e modello dei moltiplicatori valida per la modellistica DEA sia anche valida per i modelli NDEA a più di due stadi.

** Come già indicato altrove nel testo la scelta di come trattare gli output indesiderabili dipende sostanzialmente dalle esigenze di ricerca, dal processo reale che si sta modellando e dalla necessità di descrivere la vera tecnologia (Halkos & Petrou, 2019). Poiché il lavoro è essenzialmente metodologico e non applicativo la scelta del trattamento degli output indesiderabili del nostro modello è guidata esclusivamente dal fatto che il trattamento degli output indesiderabili attraverso le trasformazioni monotone è tra i modi più vicini alla idea di descrizione delle tecnologie di produzione per processi di produttivi che hanno come output prodotti difettati e/o emissioni nocive per l'ambiente. Verosimilmente per altri processi gli scarti di produzione sarebbero input e non output. Ma trattare gli output indesiderabili attraverso la proposta di (Seiford & Zhu, 2002) preserva la convessità come precisato dagli stessi autori

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{i2o}^2 + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^2 X_{iex2o}^2 + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^2 w_d^2 Z_{do}^2 + \mu_o^2 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2}^2 X_{i2j}^2 + \sum_{iex2=1}^{ex} v_{iex2}^2 X_{iex2j}^2 + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^2 w_d^2 Z_{dj}^2 + \mu_o^2 - \left(\sum_{r2=1}^{o2(g)} u_{r2}^2 Y_{r2}^{2(g)} + \sum_{r2=1}^{\bar{o}2(b)} \bar{u}_{r2}^2 \bar{Y}_{r2}^{2(b)} \right) \geq 0 \quad (14) \\
& \quad \sum_{r2=1}^{o2(g)} u_{r2}^{2(g)} Y_{r2}^{2(g)} + \sum_{r2=1}^{\bar{o}2} \bar{u}_{r2}^{2(b)} \bar{Y}_{r2}^{2(b)} = 1 \\
& \quad v^2, u^{2(g)}, \bar{u}^{2(b)}, w^2 \geq 0; \alpha^2, \beta^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Terzo sotto processo

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{i3o}^3 - \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^3 X_{iex3o}^3 - \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^3 w_d^3 Z_{do}^3 + \mu_o^3 \\
& \quad v, w \\
& \text{s. t. } \sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_{i3}^3 X_{i3j}^3 + \sum_{iex3=1}^{ex} v_{iex3}^3 X_{iex3j}^3 + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^3 w_d^3 Z_{dj}^3 + \mu_o^3 - \left(\sum_{r3=1}^{o3(g)} u_{r3}^3 Y_{r3}^{3(g)} + \sum_{r3=1}^{\bar{o}3(b)} \bar{u}_{r3}^3 \bar{Y}_{r3}^{3(b)} \right) \geq 0 \quad (15) \\
& \quad \sum_{r3=1}^{o3(g)} u_{r3}^3 Y_{r3}^{3(g)} + \sum_{r3=1}^{\bar{o}3} \bar{u}_{r3}^3 \bar{Y}_{r3}^{3(b)} = 1 \\
& \quad v^3, u^3, w^3 \geq 0; \alpha^3, \beta^3 \geq 0
\end{aligned}$$

- Quarto sotto processo

idem

Come si può notare il vettore degli output dei modelli 14 e 15, relativi al secondo e al terzo sotto processo del nostro processo di produzione in Figura 1, ora contiene output buoni, i cui dati non sono stati trasformati, e output indesiderabili con dati trasformati. In questo modo possiamo evitare di cambiare i vincoli del modello per accomodare gli output indesiderabili nella misurazione. Passiamo ora a considerare il processo di Figura 1 come un processo a rete con una sua tecnologia a rete con la produzione di output indesiderabili. Come noto dalla letteratura per i modelli a rete a due stadi Kao (2009(a), Kao and Hwang (2008), applicando i modelli sopra indicati in modo separato non si modellano correttamente le misure intermedie z_{ikj} . E questo perché in alcuni di essi (segnatamente per il nostro modello per il secondo, terzo e quarto) tali variabili si riducono, mentre per altri, per il primo sotto processo, si assume che esse rimangano invariate al livello corrente. Un approccio alternativo fornito in letteratura per misurare l'efficienza per i processi a due stadi è quello di vedere loro da un punto di vista centralizzato Liang, Cook and Zhu (2008), e determinare l'insieme dei pesi ottimali per le misure intermedie che massimizza lo score globale. Per il nostro modello NDEA invece seguiremo solo Kao and Hwang (2008), e Kao 2009(a),^{††} e assumiamo che $w_d^2, w_d^3 = w_d$ per tutte le variabili intermedie ($d=1, 2..d$), e, poiché alcune variabili di processo x sono anch'esse condivise assumiamo che $v_{i1}^1, v_{i2}^2, v_{i3}^3, v_{i4}^4 = v_i$,

^{††} L'approccio relazionale proposto da questo autore/i prevede che la funzione obiettivo riguardi l'efficienza dell'intero processo mentre quella dei sotto processi è sviluppata nei vincoli. Per dare relazionalità al modello gli autori poi assegnano alla stessa variabile lo stesso variabile peso. Noi per sviluppare il nostro modello NDEA relazionale abbiamo seguito questo approccio. I passaggi dal 6 al 15 nel teso sono stati inseriti per avere maggiore chiarezza nel passare da modelli con tecnologia senza indesiderabili output a quelli con indesiderabili output e per specificare i modelli DEA convenzionale (10,13,14 e 15) da risolvere dopo come approccio dei modelli indipendenti. Altri autori come (Liang, Cook, & & Zhu, 2008) prima definiscono i modelli per la misurazione della efficienza dei processi e poi procedono ad una loro aggregazione ad esempio di tipo moltiplicativo.

ovvero che i paesi associati ad una variabile di processo condivisa sia lo stesso per i tutti i sotto processi in cui è presente come input. Proponiamo pertanto il seguente modello relazionale NDEA-VRS nella versione moltiplicativa e orientata all'output senza vincoli indipendenti:

$$\begin{aligned}
& \min \frac{\sum_{i=1}^m v_i X_i^{sys} + \mu_o^1 + \mu_o^2 + \mu_o^3 + \mu_o^4}{\sum_{i=1}^{q(g)} u_i^{sys(g)} Y_{io}^{sys(g)} + \sum_{i=1}^{q(b)} u_i^{sys(b)} \bar{Y}_i^{sys(b)}} \\
& s. t. \frac{\sum_{i=1}^m v_i X_i^{sys} + \mu_o^1 + \mu_o^2 + \mu_o^3 + \mu_o^4}{\sum_{i=1}^{q(g)} u_i^{sys(g)} Y_{ij}^{sys(g)} + \sum_{i=1}^{q(b)} u_i^{sys(b)} \bar{Y}_{ij}^{sys(b)}} \geq 1 \\
& \frac{\sum_{i=1}^{s1} \alpha_{i1}^1 v_i X_{i1}^{s1} + \mu_{jo}^1}{\sum_{d=1}^{p1} w_d Z_d} \geq 1 \\
& \frac{\sum_{i2=1}^{s2} \alpha_{i2}^2 v_{i2} X_{i2}^{s2} + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_{iex2}^{ex2} X_{iex2}^{ex2} + \sum_{d=1}^{p2} \beta_d^2 w_d Z_d^2 + \mu_o^2}{\sum_{r2=1}^{o2(g)} u_{r2}^{o2(g)} Y_{r2}^{o2(g)} + \sum_{r2=1}^{o2(b)} u_{r2}^{o2(b)} \bar{Y}_{r2}^{o2(b)}} \geq 1 \\
& \frac{\sum_{i3=1}^{s3} \alpha_{i3}^3 v_i X_{i3}^{s3} + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3}^{ex3} X_{iex3}^{ex3} + \sum_{d=1}^{p3} \beta_d^3 w_d Z_d^3 + \mu_o^3}{\sum_{r3=1}^{o3} u_{r3}^3 Y_{r3}^{o3(g)} + \sum_{r3=1}^{o3(b)} u_{r3}^{o3(b)} \bar{Y}_{r3}^{o3(b)}} \geq 1 \\
& \frac{\sum_{i4=a}^{s4} \alpha_{i4}^4 v_{i4} X_{i4}^{s4} + \mu_o^4}{\sum_{r4=1}^{s4} u_{r4}^4 Y_{r4}^{s4}} \geq 1
\end{aligned} \tag{16}$$

Come si può notare nel modello sopra le singole componenti del vettore X, sia che sia il vettore degli input di sistema X^{sys} che il vettore degli input di processo condivise $X_i^{s1}, X_i^{s2}, X_i^{s3}, X_i^{s4}$ ricevono la medesima variabile peso v_i . Per, indicare che la stessa variabile, ad esempio x_3 , riceve sempre la stessa variabile peso sia che venga trattata come variabile di sistema globale sia che sia trattata come una variabile condivisa con i restanti sotto processi (come accade alla stessa x_3 che è variabile di processo ma anche condivisa con il secondo e il terzo sottoprocesso e attribuita ad essi in proporzioni pari a $\alpha_{j3}^1, \alpha_{j3}^2$ e $\alpha_{j3}^3 = 1 - \alpha_{j3}^1 - \alpha_{j3}^2$, rispettivamente al primo, al secondo e al terzo sotto processo) assegniamo la stessa variabile di peso v . Allo stesso modo per le variabili intermedie z, sia che esse siano trattate nel modello NDEA come output del primo sotto processo che come input di altri sotto processi attribuite ad essi in certe proporzioni, abbiamo associato la stessa variabile peso w . Adottando la linearizzazione di Charnes and Cooper (1962), abbiamo:

$$\begin{aligned}
& .\min \sum_{i=1}^p v_i X_{io} + \mu_o^1 + \mu_o^2 + \mu_o^3 + \mu_o^4 \\
& s. t. \sum_{i=1}^q u_i Y_{io}^{g+b} = 1 \\
& \sum_{i=1}^m \mu_i X_i - \sum_{i=1}^q v_i Y_i^{g+b} + \mu_o^1 + \mu_o^2 + \mu_o^3 + \mu_o^4 \geq 0 \\
& \sum_{i1=1}^{s1} \alpha_{i1} v_i X_{i1}^{s1} - \sum_{i1=1}^{q1} w_i Z_{i1}^1 + u_o^1 \geq 0 \\
& \sum_{d=1}^{p2} \beta_d w_d Z_d^{s12} + \sum_{i2=1}^{s3} \alpha_{i2} v_i X_{i2}^{s2} + \sum_{iex2=1}^{ex2} v_i X_{iex2}^{EX2} - \sum_{i=1}^{o2} u_i Y_i^{2g+b} + \mu_o^2 \geq 0 \\
& \sum_{d=1}^{p3} \beta_d w_d Z_d^{s13} + \sum_{i=1}^{p6} v_i X_{i1}^{s3} + \sum_{iex3=1}^{ex3} v_{iex3} X_{iex3}^{ex3} - \sum_{i=1}^{o3} u_i Y_i^{3g+b} + \mu_o^3 \geq 0 \\
& \sum_{i4=1}^{s4} \alpha_{i4} v_i X_{i4}^{s4} - \sum_{i=1}^{o4} u_i Y_i^{4g} + \mu_o^4 \geq 0 \\
& \mu_i, v_i, w_i \geq 0 \text{ and } u_o^{sys}, u_o^1, u_o^2, u_o^3, u_o^4 \text{ free in sign}
\end{aligned} \tag{17}$$

Dove:

X_{io} = è il vettore delle risorse del sistema in esame $X_i \in R^p$

Y_{io}^{g+b} = è il vettore degli output del sistema in esame composto da entrambi gli output buoni Y^{good} che brutta uscita Y^{bad} [Y^{good} , Y^{bad}] $\in R^{g+b}$ with $g + b = q$
 X_i^{S1} = è il vettore delle risorse condivise assegnate al primo sotto processo $X_i^{S1} \in R^{p1}$
 Z_i^1 = è il vettore degli output del primo sottoprocesso $Z_i^1 \in R^{q1}$ ed anche le variabili intermedia condivise con gli altri sotto processi [Z_1 , Z_2] $\in R^{z1}$
 Z_i^{S12} = è il vettore delle variabili intermedie condivise (output del primo sotto processo e input per gli altri) [Z_{12} , Z_{22}] condivisa tra la prima e la seconda prova e attribuita alla seconda in precise proporzioni $\alpha_{12}\alpha_{22}$ definite ex ante
 X_i^{S2} = è il vettore delle risorse di sistema condivise con il secondo sottoprocesso $X_i^{S2} \in R^{p3}$
 X_i^{EX2} = è il vettore di variabili esogene utilizzato dal secondo sotto processo per la sua tecnologia di produzione $X_i^{EX2} \in R^{p4}$
 Y_i^{2g+b} = è il vettore degli output del secondo sotto processo costituito da entrambi gli output buoni Y^{good} che output indesiderabili Y^{bad} [Y^{good} , Y^{bad}] $\in R^{g1+b1}$ with $g1 + b1 = q^1$
 Z_i^{S13} = è il vettore delle variabili intermedie condivise prodotte dal primo sotto processo e attribuite secondo le proporzioni $\alpha_{13}\alpha_{23}$ al terzo sotto processo
 X_i^{S3} = è il vettore delle risorse di sistema condivise con la terza parte sotto processo secondo proporzioni stabilite ex ante
 X_i^{EX3} = è il vettore delle risorse esogene utilizzate esclusivamente dal sotto processo 3
 Y_i^{3g+b} = è il vettore degli output buoni (g) e indesiderabili (b) prodotti dal sotto processo 3
 X_i^4 = è il vettore delle risorse utilizzate dal sotto processo 4
 Y_i^{4g} = è il vettore degli output prodotti dal sotto processo 4

Come si può vedere il modello (1) presenta il vettore degli output distinguendo tra output buoni Y^g da una cattiva uscita Y^b nello stesso vincolo del modello. Questi ultimi output negativi continuano a essere trattati nel modello (1) come output buoni dopo aver effettuato la trasformazione Seiford and Zhu (2002), senza dedicare loro un vincolo indipendente. L'efficienza relativa del sistema sarà:

$$E_{sys} = \sum_{i=1}^p v_o^* X_{io} + \mu_o^{1*} + \mu_o^{2*} + \mu_o^{3*} + \mu_o^{4*} \quad (18)$$

3.3.1L'efficienza relativa dei sotto processi

La linearizzazione Charnes and Cooper (1962), adottata per il modello NDEA (1) e la natura relazionale dello stesso Kao 2009(a), ci permettono di derivare l'efficienza relativa dei sotto processi applicando la formula di decomposizione moltiplicativa Kao (2009(a)). Avremo quindi:

- Efficienza relativa del primo sotto processo:

$$E_I = \frac{\sum_{i=1}^{p1} X_i^{S1} u_i^* + \mu_{i1}^*}{\sum_{i=1}^{q1} Z_i^1 v_{i1}^*} \quad (19)$$

- Efficienza relativa del secondo sotto processo:

$$E_{II} = \frac{\sum_{i=1}^{p^2} Z_i^{S12} w_1^* + \sum_{i=1}^{p^3} X_i^{S2} u_i^* + \sum_{i=1}^{p^4} X_i^{EX2} u_i^* + \mu_{i2}^*}{\sum_{i=1}^{q^2} Y_i^{2g+b} v_{i2(g+b)}^*} \quad (20)$$

- Efficienza relativa del terzo sotto processo:

$$E_{III} = \frac{\sum_{i=1}^{p^5} Z_i^{S13} w_i^* + \sum_{i=1}^{p^6} w_i^* X_i^{S3} + \sum_{i=1}^{p^7} X_i^{EX3} w_i^* + \mu_{i3}^*}{\sum_{i=1}^{q^3} Y_i^{3g+b} v_{i3(g+b)}^*} \quad (21)$$

- Efficienza relativa del quarto sotto processo:

$$E_{IV} = \frac{\sum_{i=1}^{p^8} X_i^4 u_i^* + \mu_{i4}^*}{\sum_{i=1}^{q^4} Y_i^{4g} v_{i4(g)}^*} \quad (22)$$

Poiché il trattamento degli output indesiderabili consisteva nella trasformazione negativa proposta in Seiford and Zhu (2002), entrano nel modello NDEA come quelli buoni e la misurazione all'output dell'efficienza relativa dei sotto processi, a nostro parere, può essere effettuato con l'applicazione della formula di decomposizione moltiplicativa dell'efficienza relativa nel caso di modelli relazionali NDEA una volta eseguita la linearizzazione del modello stesso e introdotto il vincolo di normalizzazione sugli output ($\sum_{i=1}^q Y_{io}^{g+b} v_i = 1$) Charnes and Cooper (1962).

4. Esempio applicativo

In questa sezione riportiamo un esempio applicativo del modello NDEA sopra proposto con un campione virtuale di $N = 150$ DMU omogenee ciascuna delle quali dotata di un processo produttivo con struttura a rete come quella di Figura 1 con 5 ingressi di cui 5 uscite 2 prodotti difettosi rispettivamente dal sotto processo 2 e 3 e due variabili intermedie Intermedio 1 e Intermedio 2. I dati sono stati generati con un generatore di dati casuali in R (RCoreTeam, 2016).

4.1 Dataset

Per la nostra applicazione utilizzeremo dati virtuali generati con un generatore di dati casuali (RCoreTeam, 2016). L'applicazione qui proposta mira sia a mostrare i risultati del modello in via comparativa con la sua versione completamente con output buoni (1), sia ad indagare la performance sia del sistema che delle sue parti) Banker, Charnes and Cooper (1984), Banker (1984), Seiford and Zhu (1999 (a), in presenza di produzione output indesiderabili.

Tabella 1: Statistiche descrittive del data set

	min	max	range	median	mean	std.dev
input.1	201	214	13	207	206,44	2,837
input.2	98	115	17	107	106,953	3,203
input.3	144	159	15	152	151,907	3,046
input.4	104	114	10	109	109,073	2,063
input.5	53	68	15	59	59	2,742
input.6	164	173	9	169	168,673	1,971
input.7	164	175	11	169	169,047	1,926
output.1	90	105	15	95	95,853	3,112
bad.output.2	190	205	15	197	196,973	2,963
bad.output.3	171	187	16	179	179,06	3,205
output.4	117	145	28	134	133,287	5,174
output.5	101	118	17	108	108,233	3,292
intermediate.1	127	136	9	131	130,953	1,873
intermediate.2	111	130	19	120	120,193	3,142
y2_bad	1	16	15	9	9,027	2,963
y3_bad	1	17	16	9	8,94	3,205

La Tabella 1 riporta le statistiche descrittive del set di dati, comprese quelle delle variabili di output non valide dopo la trasformazione $y2_{bad}, y3_{bad}$). La tabella 2 che segue è la tabella delle correlazioni tra le variabili del modello.

Tabella 2: Correlazione tra input, output e variabili intermedie

	input.1	input.2	input.3	input.4	input.5	input.6	input.7	output.1	bad.output.2	bad.output.3	output.4	output.5	intermediate.1	intermediate.2	y2_bad	y3_bad
input.1	1	-0.044	0.193	0.102	0.131	0.183	-0.017	0.038	-0.101	0.035	0.083	-0.022	-0.048	0.008	0.101	-0.035
input.2	-0.044	1	0.108	0.149	-0.051	-0.005	-0.123	0.104	-0.15	-0.006	0.064	0.083	-0.092	0.043	0.15	0.006
input.3	0.193	0.108	1	-0.136	0.037	0.097	-0.157	-0.118	-0.087	-0.117	0.046	-0.001	0.093	0.072	0.087	0.117
input.4	0.102	0.149	-0.136	1	0.07	-0.124	0.014	-0.071	0.023	-0.012	0.075	0.062	-0.015	-0.023	-0.023	0.012
input.5	0.131	-0.051	0.037	0.07	1	-0.061	-0.047	0.006	0.022	-0.082	0.057	0.009	-0.005	-0.012	-0.022	0.082
input.6	0.183	-0.005	0.097	-0.124	-0.061	1	0.05	0.065	-0.011	-0.022	0.034	0.036	-0.001	-0.18	0.011	0.022
input.7	-0.017	-0.123	-0.157	0.014	-0.047	0.05	1	0.041	0.164	-0.004	-0.015	0.149	0.051	-0.187	-0.164	0.004
output.1	0.038	0.104	-0.118	-0.071	0.006	0.065	0.041	1	-0.062	0.111	-0.284	-0.084	-0.046	0.053	0.062	-0.111
bad.output.2	-0.101	-0.15	-0.087	0.023	0.022	-0.011	0.164	-0.062	1	-0.003	0.036	-0.01	0.046	-0.066	-1	0.003
bad.output.3	0.035	-0.006	-0.117	-0.012	-0.082	-0.022	-0.004	0.111	-0.003	1	-0.075	-0.127	-0.043	-0.057	0.003	-1
output.4	0.083	0.064	0.046	0.075	0.057	0.034	-0.015	-0.284	0.036	-0.075	1	0.113	0.123	-0.042	-0.036	0.075
output.5	-0.022	0.083	-0.001	0.062	0.009	0.036	0.149	-0.084	-0.01	-0.127	0.113	1	-0.035	-0.135	0.01	0.127
intermediate.1	-0.048	-0.092	0.093	-0.015	-0.005	-0.001	0.051	-0.046	0.046	-0.043	0.123	-0.035	1	0.102	-0.046	0.043
intermediate.2	0.008	0.043	0.072	-0.023	-0.012	-0.18	-0.187	0.053	-0.066	-0.057	-0.042	-0.135	0.102	1	0.066	0.057
y2_bad	0.101	0.15	0.087	-0.023	-0.022	0.011	-0.164	0.062	-1	0.003	-0.036	0.01	-0.046	0.066	1	-0.003
y3_bad	-0.035	0.006	0.117	0.012	0.082	0.022	0.004	-0.111	0.003	-1	0.075	0.127	0.043	0.057	-0.003	1

Poiché la trasformazione eseguita sugli output indesiderabili è monotona le correlazioni rimangono invariate con segno invertito. Come è possibile notare tutti le variabili sono debolmente correlate tra di loro. Ma seppur riferita a dati non realistici occorre notare che: 1) l'output desiderabile y1 prodotto dal secondo sotto processo è negativamente correlato con l'output indesiderabile prodotto da esso stesso y2 (bad) seppur dopo la trasformazione la correlazione cambia di segno, 2) l'output desiderabile y4 prodotto dal terzo sotto processo è negativamente correlato con l'output indesiderabile prodotto da esso stesso y3 (bad) seppur dopo la trasformazione la correlazione cambia di segno. Queste correlazioni ci suggeriscono che un aumento dell' output desiderabile prodotto nel sotto processo 2 genera una riduzione dell' output indesiderabile generato in esso e lo stesso accade per il sotto processo 3, 3) che gli input 4,5 e 7 sono positivamente correlati con l'output indesiderato prodotto dal sotto processo 2 (y2 bad) ma negativamente correlati con l'output indesiderabile y3(bad) prodotto dal terzo sotto processo (prima della trasformazione dei dati operata sugli output indesiderabili). L'ulteriore lettura è lasciata al lettore.

4.2 Risultati

I risultati di efficienza relazionale ottenuti con modello NDEA (17) e quelli relativi ai sotto processi ottenute delle formule di efficienza relativa (19,20,21,22) sono riportati nella Tabella 3 sottostante.

Tabella 3: Statistiche descrittive per le misurazioni dell'efficienza output NDEA-VRS.
N=150

	nbr.val	min	max	median	mean	std.dev
System	150	1	1,058	1,003	1,011	0,014
Sub 1	8	1	1,11	1,056	1,056	0,036
Sub 2	147	1	547,636	1,094	7,525	49,88
Sub 3	148	1	98,761	1,31	5,445	13,815
Sub 4	114	1	24,676	1,088	1,648	2,59

Come si può leggere dalla Tabella 3, in media il sotto processo 1, cioè il processo interno dedicato esclusivamente alla produzione di output ad uso interno presenta una inefficienza tecnica di 5.6%. Ovvero dato il livello delle risorse ad esso attribuito questo sotto processo ha ancora un potenziale di produzione ad uso interno del 5.6%. In altre parole, l'unità media può aumentare proporzionalmente del 5.6% la produzione delle risorse intermedie z_1 e z_2 . Il secondo sotto processo potrebbe in media aumentare le sue performance, e quindi migliorare le performance di sistema, attraverso la riduzione dei suoi output indesiderabile applicando la formula di proiezione per gli output indesiderabili fornita in (Seiford & Zhu, 2002) data da $\hat{y}^b = v_r - (h^* \bar{y}^b + s^+)$ e quindi in questo caso una riduzione in media dell'output indesiderabile 2 da 206 a $206 - 7.525 * 9.027 = 136.243$ e allo stesso tempo espandendo in media il suo output desiderabile y_1 del 752% ovvero da 95.853 a $95.853 * 7.525 = 714.875$. E così via per il primo, terzo e quarto sotto processo. Nel caso il processo di produzione fosse stato considerato senza tener conto delle operazioni interne dei suoi sotto processi, ovvero come processo che avrebbe usato input per produrre output, l'efficienza relativa del processo medio misurato con un modello DEA convenzionale sarebbe stata 100% (vedi Tabella 4) contro l'oltre 101% di quella del processo medio con le sue operazioni interne (vedi Tabella 3). Allo stesso modo per i suoi sotto processi se li avessimo considerati parti indipendenti all'interno dell'intero processo avremmo avuto che in media gli score di efficienza relativa sarebbero stati rispettivamente del 1.023 per il primo

sotto processo, 1 per il secondo, 1.045 per il terzo 1.061 per il quarto, mentre con il modello NDEA sarebbero state del 1.056, 7.525, 5.445 e 1.648.

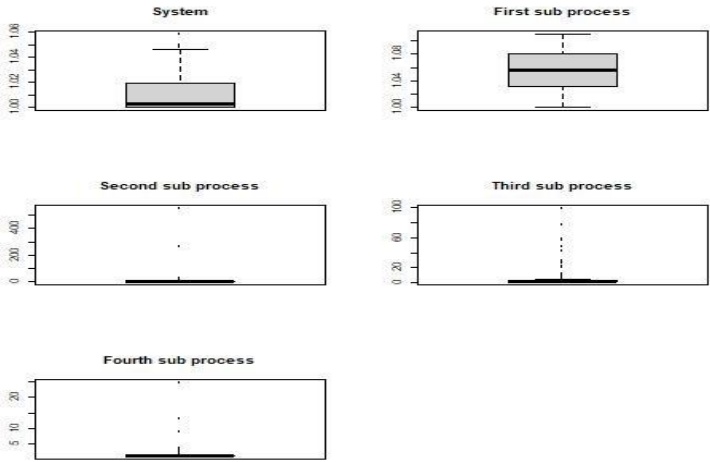


Figura 2: Boxplot degli score NDEA

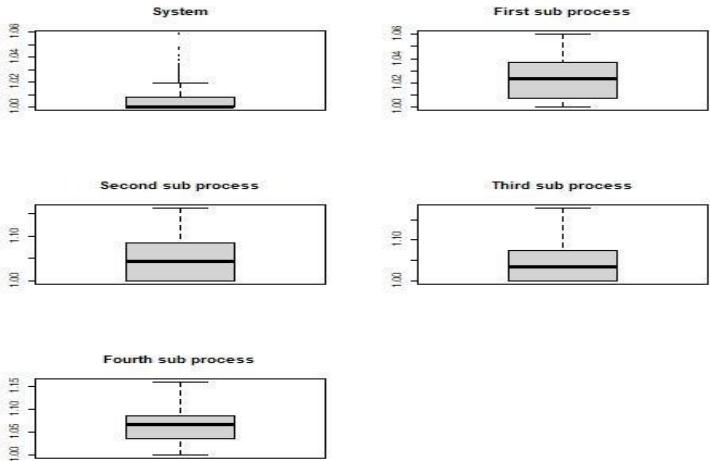


Figura 3: Boxplot degli score DEA

Risolvendo in modo indipendente per ognuno dei sotto processi un modello DEA-VRS con orientamento alla misurazione all’output come quelli indicati nella 10 per il primo sotto processo, nella 14 per il secondo, nella 15 per il terzo e nella 13 per il quarto, si ottengono i risultai riportati nella Tabella 4 sotto.

Tabella 4: Statistiche descrittive modello DEA

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
System	1	1	1	1	1	1

Sub 1	1	1,008	1,023	1,023	1,036	1,06
Sub 2	1	1	1	1	1	1
Sub 3	1	1	1,039	1,045	1,076	1,18
Sub 4	1	1,035	1,066	1,061	1,085	1,158

Confrontando le Tabelle 3 e 4 è evidente come le interrelazioni tra i sotto processi hanno generato differenza nelle misurazioni. Cosa si nota è che con il modello relazionale le efficienze di sotto processo sono nettamente superiori rispetto a quelle ottenute misurando con modelli DEA indipendenti. La distribuzione degli score di efficienza ottenuti con modelli DEA indipendenti è rappresentata in Figura 4. Dalla cui analisi emerge con evidenza come le misurazioni della efficienza con le due differenti strategie (modelli DEA indipendenti e modelli NDEA relazionali) generano significative differenze nella distribuzione degli score di efficienza soprattutto per i sotto processi. Ad esempio, per il primo sotto processo la frequenza delle osservazioni interamente efficienti è di gran lunga superiore con la misurazione con modelli DEA indipendenti

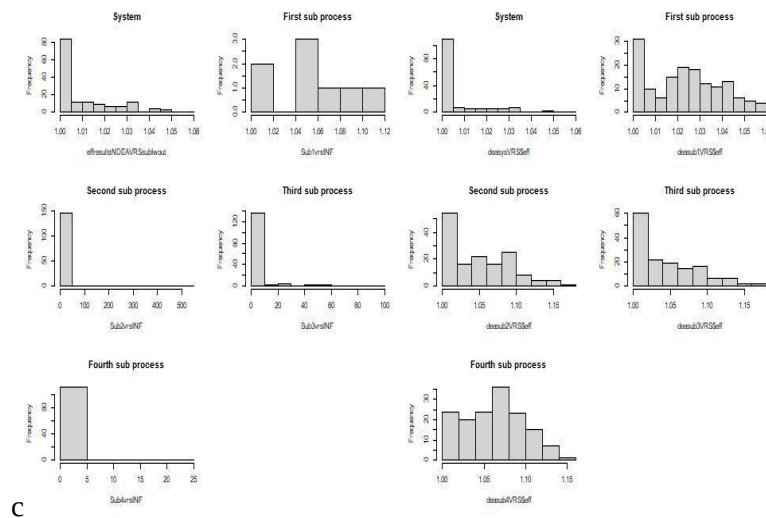


Figura 4: Densità e istogramma score di efficienza con i modello DEA e NDEA VRS output

5. Discussione

Il lavoro ha modellato un processo di produzione a rete con quattro sotto processi

interconnessi tra di loro attraverso variabili intermedie e condivise. La tecnologia di produzione a rete assegnata al processo prevede dunque la produzione di output indesiderabili, l'impiego di risorse condivise (di tipo intermedio e non) e l'impiego di risorse dedicate e di tipo esogeno. Come può notarsi dalla Figura 1 il processo presenta una struttura interna in cui le operazioni di ogni suo sotto processo sono affidate sia a risorse di sistema condivise (x_{if}) con gli altri sottoprocessi sia con variabili intermedie condivise (z) e sia a variabili dedicate (x_{ex}) ai singoli sotto processi. La tecnologia di produzione a rete di tale sistema assume: 1) libera disponibilità di tutti gli input e di tutti gli output e in modo da assumere assenza di costi per la riduzione di essi (tecnologia 3 e 4), 2) sia ritorni di scala costante (tecnologia 3) che ritorni di scala variabili (tecnologia 5 con output indesiderabili) sia per il processo che per i suoi sotto processi, 3) la produzione di output indesiderati (tecnologia 4 e 5). Per misurare l'efficienza relativa abbiamo proposto un modello NDEA sviluppato secondo l'approccio relazionale Kao (2009(a)), e con un orientamento all'output ^{††}. Differentemente da quanto accade in Chen, Du, Sherman and Zhu (2010), per i modelli NDEA con input condivisi il modello NDEA proposto qui, è stato sviluppato per un processo produttivo con 4 sotto processi anziché due. Il modello quindi non adotta l'aggregazione proposta in Liang, Cook and Zhu (2008), ma l'approccio relazionale proposto in Kao (2009(a)), che prevede come funzione obiettivo l'efficienza di sistema e dai vincoli definisce le efficienze di sotto processo. L'approccio relazionale di Kao (2009(a)), nel caso di sistemi a rete in cui gli stessi input X possono essere usati dai diversi sotto processi del sistema e gli stessi output Y possono essere prodotti da più sotto processi oltre a richiedere che gli stessi fattori siano essi X o Y devono avere lo stesso moltiplicatore (u o v) richiede che lo stesso peso sia applicato alle variabili intermedie Z (con pesi w). L'approccio relazionale consente di descrivere le operazioni tra i processi attraverso la specificazione dei vincoli del modello. Una volta ottenute le soluzioni ottime del modello relazionale (u^*, v^*, w^*) le efficienze relative dei sotto processi si ottengono dai vincoli usando questi valori ottimi. Tutti questi passaggi sono quelli seguiti qui nel modello NDEA (17) e nelle formule di efficienza di sistema (18) e dei sotto processi (19,20,21 e 22). Kao (2009(a)), propone questo approccio nel caso di modelli CRS con orientamento all'input il nostro modello invece assume ritorni di scala variabili e aggiunge una variabile libera (μ) sia alla funzione obiettivo che ai vincoli in modo che l'efficienza di scala del processo sia data dalla somma delle variabili libere dei vincoli. Chen, Cook, Kao and Zhu (2014), mostrano che nel caso di DEA network con due sotto processi che l'equivalenza appena citata (l'uso della variabile libera dei modelli DEA convenzionali per trattare i ritorni di scala anche nei modelli DEA Network) può non mantenere. Anche questo, a nostro avviso, potrebbe in parte spiegare score di misurazione ritenuti "anomali" (vedi Tabella 3). Non si esclude però che tale "anomalia" potrebbe essere invece attribuita anche a: 1) natura virtuale dei dati usati per risolvere il modello (la disponibilità di dati reali potrebbe consentire una più attenta valutazione del modello), 2) dalla imposizione di una struttura di preferenza nell'allocazione delle risorse

^{††} Questa è stata una nostra scelta, convinta che sia più interessante il caso di aumentare i buoni output di un processo e allo stesso tempo limitare la produzione di quelli indesiderabili rispetto al caso di ridurre gli input a parità di output buoni e cattivi. Tuttavia, non è difficile passare alla versione del modello con misurazione dell'input

tra i sotto processi Pinto(2020)*, 3) alla numerosità campionaria^{§§}, 4) dalla mi
specificazioni delle relazioni interne.

Il trattamento degli output indesiderabili in questo lavoro ha seguito una delle strategie proposte in letteratura per la modellazione degli stessi Walheer (2018). Nello specifico ha trattato gli output indesiderati attraverso una trasformazione monotona negativa. Ciò ha permesso di trattare nel modello NDEA sia gli output indesiderati che quelli buoni allo stesso modo. Allo stesso tempo tale modo di trattare gli output preserva la convessità come fatto notare da Seiford and Zhu (2002), ed è così possibile usare una misura standard e assumere che l'abbattimento degli output indesiderabili è senza costo (assunzione di libera disponibilità degli output indesiderabili). La plausibilità di tale assunzione potrebbe essere presente nella realtà quando per esempio alle imprese si offrono indennizzi adeguati o altri strumenti per l'abbattimento di output indesiderabili i cui costi sono interamente a carico di terzi oppure quando tale riduzione non comporta la riduzione dell'attività (contrariamente alla assunzione di libera disponibilità debole di Fare, Grosskopf, Lovell and Pasurka (1989). Il modello poi si differenzia anche dal modello in Fukuyama and Weber (2014), che accomodano in un modello NDEA a due stati la misurazione direzionale. Oppure da modelli come quello in Liu, Zhou, Ma, Liu and Shen, (2015), che invece assumono disponibilità debole solo per gli output indesiderabili ma non per gli output desiderabili. Oppure come mostrato sempre in Fukuyama and Weber (2014), di accomodare in modelli relazionali alla Kao and Hwang (2008), gli output indesiderabili direttamente nella funzione obiettivo. Il modello e la proposta si differenzia anche da Fukuyama and Weber (2010), in quanto non si occupa di come trattare gli slack in presenza di output indesiderabili.

Per sintetizzare relativamente alla classificazione di Castelli, Pesenti and Ukovich (2010), il nostro modello NDEA è a variabili condivise, sia di processo che intermedie, e a variabili esogene. Mentre rispetto alla classificazione di Kao (2014), con riferimento alla misurazione è come già detto con misurazione radiale (assumendo valida la dualità tra modelli di inviluppo e dei moltiplicatori per processi con più di due stadi).

Dal punto di vista applicativo, a nostro avviso, il paper costituisce: 1) un avanzamento della modellistica NDEA come modello di misurazione della efficienza relativa di processi di produzione con più di due sotto processi già proposti da Pinto (2020)*, e 2) uno strumento di policy organizzative differente da Pinto(2020)***, considerando una tecnologia di produzione a rete con quattro sotto processi e output indesiderabili.

6. Conclusioni

In conclusione, il paper ha proposto un modello NDEA relazionale Kao (2009) (a), nella versione dei moltiplicatori con assunzione di ritorni di scala variabile e misurazione dell'efficienza all'output. Il processo di produzione oggetto della misurazione con tale modello è stato modellato come un sistema a rete con quattro sotto processi interconnessi tra di loro. La tecnologia a rete attribuita al processo, differentemente da quanto accade in Pinto (2020)*, prevede la produzione di output indesiderabili. Le sub-tecnologie dei

^{§§} Da alcune simulazioni per esempio passando dall'attuale N=150 a N=75 tutti i valori medi e max si abbassano notevolmente.

sotto processi non sempre producono output indesiderabili come accade per esempio per il sotto processo 4 che non produce alcun output indesiderabile. Il funzionamento del sistema si basa sulle operazioni che intercorrono tra i quattro sotto processi e con l'impiego di variabili esogene, intermedie e condivise Castelli, Pesenti and Ukovich (2010). L'obiettivo principale del paper è stato quello di ampliare la modellistica NDEA per la misurazione della efficienza relativa di tecnologie di produzione a rete con più di due sotto tecnologie (come già accade per esempio in Pinto (2020) *, e Pinto (2020)***), considerando anche la produzione di output indesiderabili oltre che input condivisi. Il modello NDEA proposto qui seguendo già quanto proposto in precedenza in Pinto (2020)***, può essere impiegato come uno strumento di policy organizzativa Smith and Street(2008). Tra le policy di interesse che il modello accomoda è certamente quello di ridurre la produzione di esternalità negative Fleishman, Alexander, Bretschneider and Popp (2009), oppure di ridurre i prodotti difettati, o i servizi inadeguati ecc. ecc. Ognuno di tali aspetti è modellato nelle (sub)tecnologie a rete di produzione come output indesiderabili da ridurre. La scelta di non collegarsi a nessuna modellizzazione teorica Fare, Grosskopf, Lovell and Pasurka (1989), Forsund (2017), Walheer (2018), degli output indesiderabili fa sì che il modello può riguardare la misurazione delle performance senza modellarli come un prodotto difettato, piuttosto che come un servizio inappropriato, oppure una emissione nociva o qualsiasi altra possibilità. Ma la base comune adottata dal modello è quella che tali output vengano ridotti anche quando l'attività è in crescita. Dal punto di vista del trattamento di tali output indesiderabili e dal punto di vista della misurazione il modello NDEA proposto qui si differenzia da quello in (Fukuyama & Weber, 2014) oltre per il fatto di prevedere 4 sotto processi anziché 2 anche per aver adottato una misura radiale anziché direzionale come fa quest'ultimo autore. Pertanto, il nostro modello misurerà le performance che a parità di input possono essere migliorate espandendo in maniera proporzionale tutti gli output buoni (desiderabili) e contraendo tutti quelli indesiderabili secondo la formula di proiezione degli output indesiderabili di (Seiford & Zhu, 2002). Il lavoro trattando gli output indesiderabili attraverso la trasformazione proposta in Seiford and Zhu (2002), consente di preservare la convessità. Il nostro modello di misurazione assume poi nessun costo di abbattimento né riduzione degli output indesiderabili. Seguendo Walheer (2018), il lavoro ha trattato tutti gli input della tecnologia a rete come input dedicati alla produzione di tutti gli output del modello (desiderabili e non) e non modella esplicitamente la relazione tra i diversi output. Il modello si presta pertanto a ulteriori modellizzazioni della tecnologia di produzione a rete sottostante. Una evidente possibilità è trattare alcuni input della tecnologia a rete come input dedicati alla produzione solo di alcuni output e trattare la relazione tra i diversi output della tecnologia compresi quelli indesiderabili attraverso l'assiomatizzazione Cherchye, De Rock and Walheer (2015), Walheer (2018). Così come il modello potrebbe essere sviluppato ulteriormente adottando una misura diversa di quella radiale come quella basta sugli slack oppure la misura direzionale Fukuyama and Weber (2014).

Referimenti

Ali, A., & Seiford, L. (1990). Translation invariance in data envelopment analysis. *Operation Research Letters*, 9, p. 403-405. doi:10.1016/0167-6377(90)90061-9

- Banker, R. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 17, p. 35-44. doi:10.1016/0377-2217(84)90006-7
- Banker, R., Charnes, A., & Cooper, W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, p. 1078-92.
- Bogetoft, P., & Otto, L. (2019). Benchmarking with DEA and SFA. *R package version 0.28*.
- Castelli, L., Pesenti, R., & Ukovich, W. (2010). A classification of DEA models when the internal structure of the Decision Making Units is considered. *Annals of Operations Research*, 173, p. 207–235. doi:10.1007/s10479-008-0414-2
- Chambers, R. G., Chung, Y., & Fare, R. (1996). Benefit and distance functions. *Journal of Economics Theory*, 70, p. 407–419. doi:10.1006/jeth.1996.0096
- Chambers, R. G., Chung, Y., & Fare, R. (1998). Profit, directional distance functions and Nerlovian efficiency. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(2), p. 351–364. doi:10.1023/A:1022637501082
- Charnes, A., & Cooper, W. (1962). Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2, p. 181-185. doi:10.1002/nav.3800090303
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, p. 429-444. doi:10.1016/0377-2217(78)90138-8
- Chen, P., Yu, M., Chang, C., Hsu, S., Managi, & S. (2015). The enhanced Russell-based directional distance measure with undesirable outputs: Numerical example considering CO2 emissions. *Omega*, 53, p. 30–40. doi:10.1016/j.omega.2014.12.001
- Chen, Y., Cook, W., Kao, C., & Zhu, J. (2014). Network DEA Pitfalls: Divisional Efficiency and Frontier Projection. In W. Cook, & J. Zhu, *Data Envelopment Analysis. A Handbook on the Modeling of Internal Structures and Networks* (p. 4-53). New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.
- Chen, Y., Du, J., Sherman, H. D., & Zhu, J. (2014). Shared Resources and Efficiency Decomposition in Two-Stage Networks. In W. Cook, *Data Envelopment Analysis. An Handbook to Modeling Internal Structures and Networks* (p. 189-208). Boston, M.A: Springer. doi:10.1007/978-1-4899-8068-7_9
- Chen, Y., Du, J., Sherman, H., & Zhu, J. (2010). DEA model with shared resources and efficiency decomposition. *European Journal of Operational Research*, 207, p. 339–349.

- Cherchye, L., De Rock, B., & Walheer, B. (2015). Multi-output efficiency with good and bad outputs. *European Journal of Operational Research*, 240(3), p. 872-881. doi:10.1016/j.ejor.2014.07.028
- Chung, Y., Fare, R., & Grosskopf, S. (1997). Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach. *Journal of Environmental Management*, 51(3), p. 229-240. doi:10.1006/jema.1997.0146
- Cook, W. D., & Hababou, M. (2001). Sales performance measurement in bank branches. *OMEGA*, 29, p. 299–307. doi:10.1016/S0305-0483(01)00025-1
- Cook, W. D., Hababou, M., & Tuentner, H. (2000). Multicomponent efficiency measurement and Shared Inputs in Data Envelopment Analysis: An Application to Sales and Service Performance in Bank Branches. *Journal of Productivity Analysis*, 14(3), p. 209–224. doi:10.1023/A:1026598803764
- Cook, W., & Zhu, J. (2008). *Data Envelopment Analysis A Handbook on the Modeling of Internal Structures and Networks*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4899-8068-7
- Dyckhoff, H., & Allen, K. (2001). Measuring ecological efficiency with data envelopment analysis (DEA). *Eur J Opl Res*, 132, p. 312-325. doi:10.1016/S0377-2217(00)00154-5
- Ebrahimnejad, A., Tavana, M., Lotfi, F., & Shahverdi, R. (2014). A three-stage Data Envelopment Analysis model with application to banking industry. *Measurement*, 49, p. 308–319. doi:10.1016/j.measurement.2013.11.043
- Fare, R., & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economics Planning Sciences*, 34(35-49). doi:10.1016/j.apm.2012.04.041
- Färe, R., & Grosskopf, S. (2004). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation: Comment. *European Journal of Operational Research*, 157, p. 242–245. doi:10.1016/S0377-2217(03)00191-7
- Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A., & Pasurka, C. (1989). Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach. *Review of Economics and Statistics*, 71(1), p. 90-98. doi:10.2307/1928055
- Farrell, M. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, p. 253–281. doi:10.2307/2343100
- Fleishman, R., Alexander, R., Bretschneider, S., & Popp, D. (2009). Does regulation stimulate productivity? The effect of air quality policies on the efficiency of US power plants. *Energy policy*, 37, p. 4574-4582. doi:10.1016/j.enpol.2009.06.012

- Forsund, F. (2017). Multi-equation Modeling of Desirable and Undesirable Outputs Satisfying the Material Balance. *Empirical Economics*. doi:10.1007/s00181-016-1219-9
- Fukuyama, H., & Weber, W. L. (2010). A slacks-based inefficiency measure for a two-stage system with bad outputs. *Omega: International Journal of Management Science*, 38, p. 398–409. doi:10.1016/j.omega.2009.10.006
- Fukuyama, H., & Weber, W. L. (2014). Two-stage network DEA with bad outputs. In W. Cook, & J. Zhu, *Data Envelopment Analysis. An Handbook on the Modeling Internal Structures and Networks* (p. 451-474). Boston, MA: Springer. doi:10.1007/978-1-4899-8068-7_19
- Halkos, G., & Petrou, K. N. (2019). Treating undesirable outputs in DEA: A critical review. *Economic Analysis and Policy*, 62, p. 97-104. doi:10.1016/j.eap.2019.01.005
- Halkos, G., & Tzeremes, N. (2013). A conditional directional distance function approach for measuring regional environmental efficiency: evidence from UK regions. *Eur J Oper Res*, 227, p. 182–189. doi:10.1016/j.ejor.2012.12.009
- Halkos, P., & Petrou, K. N. (2018). A critical review of the main methods to treat undesirable outputs in DEA. *MPRA Paper*(90374).
- Huang, J., Chen, J., & Yin, Z. (2014). A Network DEA Model with Super Efficiency and Undesirable Outputs: An Application to Bank Efficiency in China. *Mathematical Problems in Engineering*. doi:10.1155/2014/793192
- Kao, C. (2009(a)). Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. *European Journal of Operational Research*, 192(949-962). doi:10.1016/j.ejor.2007.10.008
- Kao, C. (2014). *Network Data Envelopment Analysis. Foundation and Extensions* (Vol. 240). Switzerland: Springer.
- Kao, C. (2014). Network data envelopment analysis: A review. *European Journal of Operational Research*, 239(1), p. 1-16. doi:10.1007/s10479-009-0587-3
- Kao, C., & Hwang, S.-N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185(418-429). doi:10.1016/j.ejor.2006.11.041
- Liang, L., Cook, W. D., & & Zhu, J. (2008). DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. *Naval Research Logistics*, 55, p. 643-653. doi:10.1002/nav.20308

- Liu, W., Meng, W., Li, X. X., & Zhang, D. (2010). DEA Models with Undesirable Inputs and Outputs. *Annals of Operations Research*, 173(1), p. 177-194. doi:10.1007/s10479-009-0587-3
- Liu, W., Zhou, Z., Ma, C. X., Liu, D., & Shen, W. (2015). Two-stage DEA models with undesirable input-intermediate-outputs. *Omega*, 56, p. 74-87. doi:10.1016/j.omega.2015.03.009
- Lovell, C., J.T., P., & J.A., T. (1995). Measuring environmental performance of OECD: a comparison of European and Non-European countries. *European Journal of Operational Research*, 87, p. 507-518. doi:10.1016/0377-2217(95)00226-X
- Lozano, S., & Adenso-Diaz, B. (2018). Increasing Sustainability of Logistic Networks by Reducing Product Losses: A Network DEA approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018. doi:10.1155/2018/3479251
- Lozano, S., & Gutierrez, E. (2011). Slacks-based measure of efficiency of airports with airplanes delays as undesirable outputs. *Comput Oper Res*, 38, p. 131–139. doi:10.1016/j.cor.2010.04.007
- Lozano, S., Gutiérrez, E., & Moreno, P. (2013). Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. *Applied Mathematical Modelling*, 37, p. 1665–1676. doi:10.1016/j.apm.2012.04.041
- Pinto, C. (2020)**. An NDEA Model as Policy Tool to Support Managerial Decisions. *International Journal of Business Administration*, 11(3). doi:10.5430/ijba.v11n3p21
- Pinto, C. (2020)*. Measure the Relative Efficiency of a Four-Stage Production Process with NDEA. *International Journal of Business and Management*, 15(10). doi:10.5539/ijbm.v15n10p35
- Pinto, C. (2020)***. Performances Management When Modelling Internal Structure of a Production Process. *International Journal of Business and Management*, 7(15), p. 133-146. doi:10.5539/ijbm.v15n7p133
- Reinhard, S., Lovell, C., & Thijssen, G. (2000). Environmental Efficiency with multiple environmentally detrimental variables; estimated with SFA and DEA. *Eur J Opl Res*, 121, p. 287–303. doi:10.1016/S0377-2217(99)00218-0
- Scheel, H. (2001). Undesirable outputs in efficiency valuations. *European journal of operational research*, 132(2), p. 400-410. doi:10.1016/S0377-2217(00)00160-0
- Seiford, L., & Zhu, J. (1999 (a)). An investigation of returns to scale under data envelopment analysis. *OMEGA*, 27(1), p. 1-11. doi:10.1016/S0305-0483(98)00025-5

- Seiford, L., & Zhu, J. (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142, p. 16–20. doi:10.1016/S0377-2217(01)00293-4
- Shephard, R. W. (1970). *Theory of Cost and Production Function*. Princeton: Princeton University Press.
- Smith, P., & Street, A. (2008). Measuring the Efficiency of Public Services: The Limits of Analysis. *Journal of the Royal Statistical Society*, 168(2), p. 401–417. doi:10.1111/j.1467-985X.2005.00355.x
- Telle, K., & Larsson, J. (2007). Do environmental regulations hamper productivity growth? How accounting for improvements of plants' environmental performance can change the conclusion. *Ecological Economics*, 61(2-3), p. 438–445. doi:10.1016/j.ecolecon.2006.03.015
- Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197, p. 243–252. doi:10.1016/j.ejor.2008.05.027
- Tone, K., & Tsutsui, M. (2011). Applying an Efficiency Measure of Desirable and Undesirable Outputs in DEA to U.S. Electric Utilities. *Journal of CENTRUM Cathedra*, 4(2), p. 236–249.
- Walheer, B. (2018). Output, input, and undesirable output interconnections in data envelopment analysis: convexity and returns-to-scale. *Annals of Operations Research*, 284, p. 447–467. doi:10.1007/s10479-018-3006-9
- Wu, J., Zhu, Q., Ji, X., & al., e. (2016). Two-stage network processes with shared resources and resources recovered from undesirable outputs. *European Journal of Operational Research*, 251(1), p. 182–197. doi:10.1016/j.ejor.2015.10.049
- Yang, H., & Pollit, M. (2009). Incorporating both undesirable outputs and uncontrollable variable into DEA: the performance of Chinese coal-fired power plants. *European Journal of Operational Research*, 197, p. 1095–1105. doi:10.1016/j.ejor.2007.12.052
- You, S., & Yan, H. (2011). A new approach in modelling undesirable output in DEA model. *Journal of the Operational Research Society*, 62, p. 2146–2156. doi:10.1057/jors.2011.1
- Zanella, A., Camanho, A., & Dias, T. (2015). Undesirable outputs and weighting schemes in composite indicators based on data envelopment analysis. *Eur J Oper Res*, 245, p. 517–530. doi:10.1016/j.ejor.2015.03.036

Zhou, P., Ang, B., & Poh, K. (2008). A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies. *Eur J Oper Res*, 189, p. 1–18.
doi:10.1016/j.ejor.2007.04.042