Universitá degli Studi di Salerno
Dipartimento di Matematica
Dottorato di Ricerca in Matematica
XII Ciclo

# Bornological Convergences on Local Proximity Spaces and $\omega_\mu-$metric Spaces

Abstract Tesi di Dottorato in Geometria

Tutor:
Ch.ma Prof.ssa
Anna Di Concilio

Dottoranda:
Clara Guadagni

Coordinatore:
Ch.ma Prof.ssa
Patrizia Longobardi

Anno Accademico 2014/2015

The main topics of this thesis are *local proximity spaces* jointly with some *bornological convergences* naturally related to them, and $\omega_\mu$*–metric spaces*, in particular those which are *Atsuji spaces* (or *UC spaces*), jointly with their hyperstructures. Local proximities spaces carry with them two particular features: proximity [48] and boundedness [37], [40]. Proximities allow us to deal with a concept of nearness even though not providing a metric. Proximity spaces are located between topological and metric spaces. Boundedness is a natural generalization of the metric boundedness. When trying to *refer macroscopic phenomena to local structures*, local proximity spaces appear as a very attractive option. For that, jointly with Prof. A. Di Concilio, in a first step we displayed a uniform procedure as an exhaustive method of generating all local proximity spaces starting from unform spaces and suitable bornologies. After that, we looked at suitable topologies for the hyperspace of a local proximity space. In contrast with the proximity case, in which there is no canonical way of equipping the hyperspaces with a uniformity, the same with a proximity, the local proximity case is simpler.
Apparently, at the beginning, we have three natural different ways to topologize the hyperspace $CL(X)$ of all closed non-empty subsets of $X$: we can think at a local Fell hypertopology or a kind of hit and far-miss topology or also a particular uniform bornological topology. We proved that they match.

In the light of the previous local proximity results, we looked for necessary and sufficient conditions of uniform nature for two different uniform bornological convergences to match. This led us to focus on a special class of uniformities: those with a linearly ordered base. They are connected with an interesting generalization of metric spaces, $\omega_\mu$–metric spaces. These spaces are endowed with special distances valued in ordered abelian additive groups.

Furthermore, in relation with $\omega_\mu$–metric spaces, we looked at generalizations of well known hyperspace convergences, as Hausdorff and Kuratowski convergences obtaining analogue results with respect to the standard case, [28].

Finally, we dealt with *Atsuji spaces*.We were interested in the problem of constructing a dense extension $Y$ of a given topological space $X$, which is *Atsuji* and in which $X$ is topologically embedded. When such an extension there exists, we say that the space $X$ is *Atsuji extendable*. *Atsuji spaces* play an important role above all because they allow us to deal with a very nice structure when we concentrate on the most significant part of the space, that is the derived set. Moreover, we know that each continuous function between metric or uniform spaces is uniformly continuous on compact sets. It is possible to have an analogous property on a larger class of topological spaces, Atsuji spaces. They are situated between complete metric spaces and compact ones.

We proved a necessary and sufficient condition for a metrizable space $X$ to be *Atsuji extendable*.Moreover we looked at conditions under which a continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ can be continuously extended to the *Atsuji extension* $Y$ of $X$.

UC metric spaces admit a very long list of equivalent formulations. We extended many of these to the class of $\omega_\mu-$metric spaces.

The results are contained in [29].

Finally it is presented the idea about the work done jointly with Professor J.F. Peters ( University of Manitoba , Canada). Our research involved the study of more general proximities leading to a kind of *strong farness*, [52]. Strong proximities are associated with Lodato proximities and the Efremovič property.We say that $A$ and $B$ are $\delta-$*strongly far*, where $\delta$ is a Lodato proximity, and we write $\underset{\Cup}{\not\delta}$ if and only if $A \not\delta B$ and there exists a subset $C$ of $X$ such that $A \not\delta X \setminus C$ and $C \not\delta B$, that is the Efremovič property holds on $A$ and $B$. Related to this idea we defined also a new concept of *strong nearness*, [53]. Starting by these new kinds of proximities we introduced also new kinds of hit-and-miss hypertopologies, concepts of strongly proximal continuity and strong connectedness. Finally we looked at some applications that in our opinion might reveal interesting.

Gli argomenti su cui è incentrata tale tesi sono *spazi di prossimità locali* con particolari *convergenze bornologiche* naturalmente collegate ad essi, ed $\omega_\mu$*−spazi metrici*, in particolare quelli che risultano spazi di Atsuji, con le loro iperstrutture. Gli spazi di prossimità locali sono caratterizzati da due elementi: prossimità [48] e *boundedness* [37], [40]. Le prossimità permettono di trattare con il concetto di vicinanza, pur senza introdurre alcuna metrica. Gli spazi di prossimità sono collocati in una posizione intermedia tra gli spazi topologici e quelli metrici. Una *boundedness*, invece, rappresenta una naturale generalizzazione del concetto di limitatezza in senso metrico.

Nel tentativo di *riferire fenomeni macroscopici a strutture locali*, gli spazi di prossimità locali appaiono come un'opzione molto attraente. Pertanto, in collaborazione con la Prof.ssa A. Di Concilio, in un primo momento abbiamo individuato una procedura uniforme come metodo esaustivo per generare tutti gli spazi di prossimità locali partendo da spazi uniformi e bornologie opportune.

In un secondo momento, l'attenzione è stata rivolta verso topologie adatte per l'iperspazio dei chiusi non vuoti di uno spazio di prossimità locale. In contrasto con il caso prossimale, in cui non vi è alcun modo canonico di dotare l'iperspazio con un'uniformità o prossimità, il caso prossimale locale risulta piú semplice. Apparentemente potremmo considerare tre diversi modi di topologizzare CL$(X)$, l'iperspazio dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di $X$: potremmo considerare una ipertopologia di *Fell locale*, oppure un tipo di topologia *hit and far-miss*, o ancora un particolare tipo di *topologia uniforme bornologica*. Abbiamo provato che, in realtà, esse coincidono.

A partire da tale risultato, l'obiettivo successivo è stato quello di individuare condizioni necessarie e sufficienti che permettessero di ottenere la coincidenza di convergenze uniformi bornologiche associate ad uniformità e bornologie distinte. Ció ci ha condotto a considerare una classe speciale di uniformità: quelle con basi linearmente ordinate. Esse sono collegate ad un'interessante generalizzazione degli spazi metrici, gli spazi $\omega_\mu$−metrici. Tali spazi sono dotati di speciali distanze a valori in gruppi abeliani linearmente ordinati. Inoltre, in relazione agli spazi $\omega_\mu$−metrici, ci siamo concentrate su generalizzazioni di risultati noti per convergenze su iperspazi, in particolare convergenze di Hausdorff e di Kuratowski, [28].

Abbiamo poi trattato gli *spazi di Atsuji*. Ci siamo interessate al problema di costruire estensioni dense di spazi topologici, che fossero di *Atsuji* ed in cui lo spazio di partenza fosse immerso topologicamente. Gli spazi di Atsuji svolgono un ruolo importante, in particolare perchè ci consentono di trattare con una struttura molto buona quando ci concentriamo sulla parte piú significativa dello spazio, l'insieme derivato. Essi sono collocati tra gli spazi metrici completi e quelli compatti. A tal proposito, abbiamo individuato una condizione necessaria e sufficiente per uno spazio metrizzabile affinchè ammetta una un'estensione densa topologica di *Atsuji*. Inoltre abbiamo considerato condizioni affinchè funzioni continue sullo spazio di partenza fossero estendibili con continuità all'estensione di *Atsuji*.

Gli spazi metrici UC ammettono una lista molto lunga di caratterizzazioni equivalenti. Abbiamo esteso molte di esse alla classe degli spazi $\omega_\mu$−metrici. I risultati sono contenuti in [29].

Infine la tesi contiene le idee sviluppate durante il lavoro di ricerca in collaborazione con il Prof. J.F. Peters (University of Manitoba, Canada). Tale lavoro ha riguardato lo studio di prossimità piú generali che ci hanno condotto al concetto di *forte lontananza (strong farness)*, [52]. Queste relazioni sono associate a prossimità di Lodato ed alla proprietà di Efremovič. Diciamo che due sottoinsiemi $A$ e $B$ sono $\delta$−*strongly far*, dove $\delta$ è una prossimità di Lodato, e scriviamo $\underset{\mathbb{W}}{\not\delta}$ se e solo se $A \not\delta B$ ed esiste un sottoinsieme $C$ di $X$ tale che $A \not\delta X \setminus C$ e $C \not\delta B$, cioè la proprietà di Efremovič vale su $A$ e $B$. In relazione a quest'idea abbiamo anche definito il nuovo concetto di *forte vicinanza (strong nearness)*, [53]. Partendo da questi nuovi tipi di vicinanza / lontananza abbiamo introdotto nuovi tipi di ipertopologie *hit and far-miss*, concetti di *continuità fortemente prossimale* e *connessione forte*. Infine abbiamo rivolto l'attenzione ad alcune applicazioni che, secondo la nostra opinione, potrebbero risultare interessanti.

## References


[1] O.T. Alas, A. Di Concilio, *Uniformly continuous homeomorphisms*, Topology and Appl., **84**, (1998), 33-42.

[2] O.T. Alas, A. Di Concilio, On local versions of metric uc-ness, hypertopologies and function space topologies, Topology Appl. ,**122**, (2002) 3-13.

[3] E.M. Alfsen, O. Njastad, *Totality of uniform structures with linearly ordered base*, Fund. Math. (1963) 253-256.

[4] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, *On supercomplete $\omega_\mu-$metric spaces*, Bull. Pol. Acad. Sci., **44**, (1996), 3:299-310 .

[5] G. Artico, R. Moresco, *$\omega_\mu-$ additive topological spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67**, (1982), 131-141.

[6] M.Atsuji, *Uniform continuity of continuous functions in metric spaces,* (1957).

[7] H. Attouch, R. Lucchetti, R. J.-B. Wets, *The topology of the $\rho-$Hausdorff distance* , Ann. Mat. Pura Appl., VI **CLX**, (1991), 303-320.

[8] G. Beer, *Between compactness and completeness*, Topology and Appl., **155**, 503-514 (2008).

[9] G. Beer, *Embeddings of bornological universes*, Set-Valued Anal. **16**,(2008)477-488.

[10] G.Beer, *Metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous and Hausdorff distance,* Proceedings of the Amer.Math. Soc. **95**,number 4, (1985).

[11] G. Beer, *More about metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous,* Bull.Austral.Math.Soc. **33** (1986), 397-406.

[12] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets* , Kluwer, Dordrecht, (1993).

[13] G.Beer, *UC spaces revisited,* American Math. Monthly, **95**, n.8 (1988).

[14] G. Beer, C. Costantini, S. Levi, *Bornological convergence and shields*, Mediterr. J. Math. **10**, (2013), 529-560a .

[15] G. Beer, C. Costantini, S. Levi , *Total boundedness in metrizable spaces*, Quad. scientif. del dip. Dip. di Mat. dellUniv. di Torino, (2009) .

[16] G. Beer, A. Di Concilio, *A generalization of boundedly compact metric spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **32**, (1991), 361-367.

[17] G.Beer, A. Di Concilio, *Uniform continuity on bounded sets and the Attouch-Wets topology* , Proc. Amer. Math. Soc., **112** (1991), 235-243.

[18] G. Beer, S. Naimpally, J. Rodriguez-Lopez, *$\delta-$topologies and bounded convergences*, J.Math. Anal. Appl. 339 (2008) 542-552.

[19] G.Beer, S.Levi, *Pseudometrizable bornological convergence is Attouch-Wets convergence*, J. Convex Anal., **15** (2008), 439-453.

[20] G.Beer, S.Levi, *Strong uniform continuity*, J. Math. Anal. Appl. **350**, (2009) 568-589.

[21] G. Beer, S. Naimpally, J. Rodriguez-Lopez , *$\delta$-topologies and bounded convergences*, J.Math. Anal. Appl. **339** (2008) 542-552.

[22] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics - General Topology*, Pt.1, Addison-Wesley Educational Publishers Inc., (1967).

[23] L.W. Cohen, C. Goffman, *The topology of ordered abelian groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, (1949), 310-319 .

[24] A. Di Concilio, *Action, uniformity and proximity Theory and Applications of Proximity, Nearness and Uniformity*, II Universitá di Napoli, Aracne Editrice, (2009), 72-88.

[25] A. Di Concilio, *Proximity: a powerful tool in extension theory, function spaces, hyperspaces, boolean algebra and point-set topology*, F. Mynard and E. Pearl(eds), Beyond Topology, Contemporary Mathematics Amer. Math. Soc.,**486**, (2009), 89-114.

[26] A. Di Concilio, *Topologizing homeomorphism groups*, J. Funct. Spaces Appl., (2013) 1-14.

[27] A. Di Concilio, C. Guadagni, *Bornological convergences and local proximity spaces*, Topology and its Appl., **173**, (2014), 294-307.

[28] A. Di Concilio, C. Guadagni, *Hypertopologies on $\omega_\mu-$metric spaces*, pre-print.

[29] A. Di Concilio, C. Guadagni, *UC $\omega_\mu-$metric spaces and Atsuji extensions*, pre-print.

[30] A. Di Concilio, S.A. Naimpally, *Atsuji spaces: continuity versus uniform continuity*, Sixth Brazilian Topology Meeting, Campinas Brazil, (1988), unpublished.

[31] A. Di Concilio, S. Naimpally, *Uniform continuity in sequentially uniform spaces*, Acta Math. Hung., **61 (1-2)**, (1993), 17-19.

[32] D. Dikranjan, D. Repovš *Topics in uniform continuity,* Proc. Ukr. Math. Congr. 2009, **2**, Inst. of Math., National Acad. Sci. Ukraine, Kiev, (2011), 80-116.

[33] G. Di Maio, L. Holá, *On hit-and-miss topologies*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (4) **LXII** (1995), 103-124, MR1419286.

[34] R. Engelking, *General Topology. Revised and Completed edition*, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[35] R. Frankiewicz, W. Kulpa, *On order topology of spaces having uniform linearly ordered bases*, Comment. Math. Univ. Carolin., **20.1**, (1979), 37-41 .

[36] H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1977).

[37] S.T. Hu, *Boundedness in a topological space*,J. Math. Pures Appl. 228 (1949) 287-320.

[38] M. Hušek, H.C. Reichel, *Topological characterizations of linearly uniformizable spaces*, Topology and its Appl., **15**, (1983), 173-188.

[39] J.R.Isbell, *Uniform spaces*, Mathematical Surveys Amer. Math. Soc., **12**, (1964).

[40] S.Leader, *Local proximity spaces,* Math.Ann. **169** (1967), 275-281.

[41] S.Leader, *Extensions based on proximity and boundedness*, Math.Z. **108** (1969), 137-144.

[42] A. Lechicki, S. Levi, A. Spakowski, *Bornological convergences*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 751-770.

[43] U. Marconi, *Some conditions under which a uniform space is fine*,Comment. Math. Univ. Carolin., **34**, (1993), 543-547.

[44] D. Monk, D. Scott, *Additions to some results of Erdos and Tarski*, Fund. Math., **53**, (1964), 335-343.

[45] A.A. Monteiro, M.M. Peixoto, *Le nombre de Lebesgue et la continuité uniforme,* Portugaliae Mathematica, **10**, fasc.3, (1951).

[46] J. Nagata, *On the uniform topology of bicompactifications*, J. Inst. Polytech. Osaka, **1**, (1950), 28-38

[47] S.A. Naimpally, *All hypertopologies are hit-and-miss*, App. Gen. Topology **3** (2002), 197-199.

[48] S.A. Naimpally, *Proximity Approach to Problems in Topology and Analysis*, Oldenburg Verlag, Munchen (2009).

[49] S.A. Naimpally, B.D. Warrack, *Proximity spaces*, Cambridge Tract in Mathematics, no. 59, Cambridge, UK,(1970); paperback (2008).

[50] P. Nyikos, H.C. Reichel, *On uniform spaces with linearly ordered bases II*, Fund. Math., **93**, (1976), 1-10 .

[51] J. Peters, *Topology of digital images: visual pattern discovery in proximity spaces*, Springer Verlag (2014).

[52] J.F. Peters, C. Guadagni, *Strongly far proximity and hyperspace topology*, arXiv[Math.GN] **1502** (2015), no. 02771, 1-6.

[53] J.F. Peters, C. Guadagni, *Strongly near proximity and hyperspace topology*, arXiv[Math.GN] **1502** (2015), 1-6.

[54] J.F. Peters, C. Guadagni, *Strongly Hit and Far Miss Hypertopology & Hit and Strongly Far Miss Hypertopology*, pre-print.

[55] J.F. Peters, C. Guadagni, *Strongly proximal continuity & strong connectedness*, pre-print.

[56] H.C. Reichel, *Some results on uniform spaces with linearly ordered bases*, Fund. Math., **98.1**, (1978), 25-39.

[57] F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, IV Congresso Internazionale dei Matematici, **II**, 18-24,(1908).

[58] C. Ronse, *Regular open or closed sets*, Tech. Rep. Working Document WD59, Philips Research Lab., Brussels, (1990).

[59] W. Shu-Tang, *Remarks on $\omega_\mu$−additive spaces* , Fund. Math., **55**, (1964), 101-112.

[60] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math., **36**, (1949), 56-57.

[61] R. Sikorski, *Remarks on some topological spaces of high power*, Fund. Math., **37**, (1950), 125-136.

[62] F.W. Stevenson, W.J. Thron, *Results on $\omega_\mu$−metric spaces*, Fund. Math. **65**, (1969), 317-324.

[63] T. Vroegrijk, *Uniformizable and realcompact bornological universes*, Appl. Gen. Topol., **10** (2009), 277-287.

[64] S. Willard, *General topology,* Addison-Wesley, (1970).