

**MV-algebre, Semianelli e le loro  
Applicazioni -  
Abstract**

Sara Vannucci

April 17, 2021

La tesi è divisa in due parti: la prima riguarda gli MV-semianelli, i semianelli involutivi e i loro semimoduli con particolare riferimento ai semimoduli iniettivi e proiettivi; la seconda parte della tesi è focalizzata sui semianelli tropicali e ha lo scopo di caratterizzare gli insiemi che sono immagini di retrazioni non espansive rispetto ad una hemi-norma che gioca un ruolo chiave in geometria tropicale.

I semianelli e i semimoduli e le loro applicazioni compaiono in vari ambiti della Matematica, dell'Informatica, della Fisica così come in molte altre aree della scienza moderna (vedere, per esempio, [3]). Le MV-algebre sorgono in letteratura come semantica algebrica della logica proposizionale di Łukasiewicz, una delle più studiate logiche multi-valoriali. Una connessione tra le MV-algebre e una speciale categoria di semianelli additivamente idempotenti (chiamati MV-semianelli o semianelli di Łukasiewicz) è stata per la prima volta osservata in [1]. Da una parte, ogni MV-algebra ha due *ridotti semianelli* isomorfi tra loro tramite l'operazione involutiva unaria  $*$  delle MV-algebre (vedere [2, Proposition 4.8]); dall'altra parte, la categoria degli MV-semianelli definita in [2] è isomorfa a quelle delle MV-algebre. L'equivalenza tra MV-algebre e MV-semianelli ci permette di importare risultati e tecniche della teoria dei semianelli e dei semimoduli nello studio delle MV-algebre così come sfruttare proprietà e teoremi relativi alle MV-algebre nello studio dei semimoduli sugli MV-semianelli.

Infatti, così come la teoria dei moduli è un capitolo essenziale della teoria degli anelli, così la teoria dei semimoduli rappresenta un capitolo fondamentale della teoria dei semianelli e due dei più importanti oggetti di studio nella teoria dei semimoduli sono i semimoduli iniettivi e proiettivi.

Sebbene, in generale, descrivere la struttura dei semimoduli iniettivi e proiettivi sia un problema difficile, noi daremo un criterio per l'iniettività dei semimoduli su semianelli additivamente idempotenti che useremo per descrivere la struttura dei semimoduli iniettivi sugli MV-semianelli con un centro booleano atomico, i. e. gli elementi booleani dell'MV-semianello formano un reticolo atomico.

Nelle prime tre sezioni forniremo tutte le necessarie nozioni, fatti ed esempi riguardanti i semianelli e le MV-algebre. La suddetta equivalenza tra MV-algebre ed MV-semianelli sarà richiamata così come quella tra MV-semianelli e "semianelli accoppiati" originariamente presentata in [1]. Nella Sezione 1.4 indagheremo le congruenze e gli ideali sugli MV-semianelli. Contrariamente a quello che succede per le MV-algebre, congruenze ed ideali non sono in biezione negli MV-semianelli e, mentre i semianelli "congruence-simple" coincidono con le MV-algebre semplici, l'unico MV-semianello "ideal-simple" è il semicampo booleano  $\{0, 1\}$ .

Nel Capitolo 2, investigheremo il semianello dei polinomi nella variabile  $x$  sul

semicampo booleano  $\{0, 1\}$  valutato sull'MV-semianello standard  $([0, 1], \vee, \odot, 0, 1)$ , denoteremo questo semianello come  $\mathbb{B}[x]$ . In particolare, proveremo che esso coincide con il semianello delle funzioni di McNaughton convesse e non decrescenti su  $[0, 1]$  con operazioni definite punto per punto e che è anche isomorfo al semianello  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$ .

Nel Capitolo 3 presenteremo una equivalenza tra reticoli residuati involutivi e una classe speciale di semianelli detti *semianelli involutivi* che può essere vista come una generalizzazione dell'equivalenza tra MV-algebre e MV-semianelli dato che la varietà dei reticoli residuati involutivi contiene strettamente quella delle MV-algebre. La prospettiva dei semianelli ci aiuta ad individuare una condizione necessaria e sufficiente perché l'intervallo  $[0, 1]$  sia una sottoalgebra di un reticolo residuato involutivo. Questo risultato è significativo perché con 0 e 1 non intendiamo gli elementi minimo e massimo del reticolo: 0 è una costante aggiuntiva e 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione. In particolare, dimostriamo che  $[0, 1]$  è una sottoalgebra di un reticolo residuato involutivo se e solo se 0 è un elemento idempotente per la moltiplicazione. Questo capitolo si basa su un lavoro scritto in collaborazione con Peter Jipsen dal titolo "Injective and projective semimodules over involutive semirings" che è stato sottoposto per la pubblicazione.

Il Capitolo 4 riguarda i semimoduli iniettivi e proiettivi. In primo luogo, forniremo tutte le nozioni fondamentali e i risultati riguardanti i semimoduli e daremo le definizioni di semimoduli iniettivi e proiettivi. Mentre per i moduli sugli anelli abbiamo varie definizioni equivalenti di semimoduli iniettivi e proiettivi (vedere [6]), sfortunatamente per i semimoduli questo non vale poiché le differenti definizioni di semimoduli iniettivi e proiettivi analoghe a quelle per i moduli non determinano la stessa classe di semimoduli. Nel corso della tesi faremo sempre riferimento alla definizione categoriale dei semimoduli iniettivi e proiettivi (i. e. gli oggettivi iniettivi e proiettivi nella categoria dei semimoduli su un dato semianello). Uno dei principali risultati presentati nel Capitolo 4 è il seguente criterio per l'iniettività dei semimoduli su semianelli additivamente idempotenti, cioè semianelli per cui la somma è idempotente.

**Teorema.** *Sia  $S$  un semianello additivamente idempotente e  $M$  un semimodulo su  $S$ . Allora  $M$  è iniettivo se e solo se esiste un insieme  $X$  tale che  $M$  è un retratto dell' $S$ -semimodulo  $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(S, \mathbb{B})^X$ , dove  $\mathbb{B}$  è il semicampo booleano.*

Il semianello booleano  $\mathbb{B}$  è il semianello con due elementi  $\{0, 1\}$  e

$$\text{Hom}_{\mathbb{B}}(S, \mathbb{B})^X$$

è l'insieme dei morfismi da  $S$  a  $\mathbb{B}$  visti come  $B$ -semimoduli o, equivalentemente, join-semireticolati.

Proveremo anche che lo stesso criterio può essere riformulato in termini ideali di join-semireticolati.

Riguardo ai semimoduli proiettivi, è ben noto che in ogni varietà di algebre gli oggetti proiettivi coincidono con i retratti degli oggetti liberi. Nella categoria dei semimoduli su un semianello  $S$ , l'algebra libera su un insieme  $X$  è l'insieme delle funzioni da  $X$  a  $S$  con supporto finito, i. e.  $S^{(X)} = \{f : X \rightarrow S \mid f(x) = 0 \text{ per tutti gli elementi } x \in X \text{ tranne al più un numero finito}\}$  ([2]). Così otteniamo la seguente caratterizzazione dei semimoduli proiettivi:

**Teorema.** *Sia  $S$  un semianello. Un semimodulo su  $S$ ,  $P$ , è proiettivo se e solo se è un retratto del semimodulo  $S^{(X)}$  per qualche insieme  $X$ .*

I risultati di questi capitoli sono contenuti sia nell'articolo con Peter Jipsen già menzionato sia nell'articolo "On injectivity of semimodules over additively idempotent division semirings and chain MV-semirings" (scritto con Antonio Di Nola, Giacomo Lenzi and Tran Giang Nam, pubblicato nel 2019).

Nel Capitolo 5, applicando i precedenti criteri, caratterizziamo gli MV-semianelli "self-injective" con centro booleano atomico. Nel seguente Teorema denotiamo con  $A^{\vee\odot}$  uno dei due ridotti semianelli della MV-algebra  $A$ ; in particolare, il semianello  $A^{\vee\odot}$  ha l'insieme  $A$  come universo e le operazioni di MV-algebra  $\vee$  e  $\odot$  come sue operazioni di semianello.

**Teorema.** *Per ogni MV-algebra  $A$  con centro booleano atomico, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) *Il semianello  $A^{\vee\odot}$  è "self-injective";*
- (2) *Tutti i semimoduli su  $A^{\vee\odot}$  finitamente generati proiettivi sono iniettivi;*
- (3) *Tutti i semimoduli su  $A^{\vee\odot}$  ciclici (generati da un solo elemento) proiettivi sono iniettivi;*
- (4)  *$A$  è una MV-algebra completa.*

Diamo anche una descrizione dei semimoduli iniettivi (finitamente generati) su MV-semianelli finiti. In particolare, abbiamo che su MV-semianelli finiti i semimoduli finitamente generati proiettivi ed iniettivi coincidono.

Infine, dimostriamo che le algebre booleane complete coincidono con gli MV-semianelli per i quali ogni ideale principale è un semimodulo iniettivo. Questo capitolo si basa sull'articolo scritto con Di Nola et al. summenzionato.

Nel Capitolo 6, analogamente a quanto fatto per gli MV-semianelli, studiamo i semimoduli iniettivi e proiettivi sui semianelli involutivi e generalizziamo alcuni dei risultati riguardanti i semimoduli sugli MV-semianelli. Infatti, molti dei risultati sugli MV-semimoduli possono essere dimostrati utilizzando solo la proprietà involutiva della negazione dei MV-semianelli e non il loro isomorfismo con le MV-algebre. Così, è stato naturale generalizzare questi risultati ad una classe più ampia di semianelli (involutivi) e che contengono gli MV-semianelli come caso particolare. Mostriamo, per esempio, che anche per semianelli involutivi finiti, i semimoduli finitamente generati iniettivi e proiettivi coincidono. Possiamo quindi domandarci se, rimuovendo l'ipotesi involutiva, vale ancora la coincidenza di semimoduli iniettivi e proiettivi. La risposta è negativa e forniremo un controesempio. Di conseguenza osserviamo che, anche se l'involuzione compare solo nel semianello e non entra in gioco la struttura del semimodulo, gioca comunque un ruolo fondamentale nello studio dei semimoduli iniettivi e proiettivi.

Nella Sezione 6.1 richiameremo la definizione di MV-semimodulo forte e la generalizzeremo ai semimoduli su semianelli involutivi. Inoltre, proveremo che i semimoduli forti coincidono con i semimoduli "faithful", dove la nozione di "faithful" semimodulo è una generalizzazione dell'analoga definizione per i moduli.

È interessante osservare che, nonostante la nozione di semimodulo forte possa essere definita solo per semimoduli su particolari semianelli come gli MV-semianelli o i semianelli involutivi, coincide con quella di semimodulo "faithful" che, al contrario, può essere definito su ogni semianello. Questo capitolo è basato sull'articolo con Peter Jipsen summenzionato.

La seconda parte della tesi è dedicata a una speciale classe di semimoduli sul semianello  $\mathbb{R}$  privato dello zero, chiamati *coni ambitropicali*, e le loro applicazioni alla teoria dei giochi. Essi differiscono dagli usuali semimoduli poiché hanno una struttura reticolare. In particolare dimostreremo che essi coincidono con le retrazioni di una classe di mappe, dette *operatori di Shapley*, che sono operatori che descrivono l'evoluzione del valore di un gioco a somma zero come funzione dell'orizzonte.

Prima di definire gli operatori di Shapley, spiegheremo brevemente a quali classi di giochi si possono applicare. Considereremo giochi ripetuti a somma zero con un numero finito di stati  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Denoteremo i due giocatori con MIN e MAX e i loro insiemi di azioni dipendenti dallo stato del gioco  $i$ , rispettivamente, con  $A_i$  e  $B_i$ . Siano  $a \in A_i$  e  $b \in B_i$  le azioni scelte dai due giocatori, allora  $r_i^{ab}$  rappresenta il pagamento di transizione (che il giocatore MIN paga al giocatore MAX) e il vettore  $(P_{ij}^{ab})_{j \in [n]}$  rappresenta la probabilità di transizione (da uno stato ad un altro stato). Notiamo che entrambe queste quantità dipendono dallo stato corrente del gioco  $i$  e dalle azioni scelte dai due giocatori.

Per questa classe di giochi il valore del gioco (che è un vettore di  $\mathbb{R}^n$ ), se

esiste, soddisfa la seguente formula ricorsiva:

$$v^0 = 0 \quad v^k = T(v^{k-1})$$

dove  $T$  è un operatore da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  la cui  $i$ -esima coordinata è data da

$$T_i(x) = \min_{a \in A_i} \max_{b \in B_{i,a}} \left( r_i^{ab} + \sum_{j \in [n]} P_{ij}^{ab} x_j \right) \quad (1)$$

Il vettore  $v^k = (v_i^k)_{i \in [n]} = T^k(0)$ , dove  $T^k$  denota la  $k$ -esima iterazione di  $T$ , fornisce il valore del gioco nell'orizzonte  $k$ , come funzione dello stato iniziale  $i$ . Un problema centrale nella teoria dei giochi a somma zero consiste nel caratterizzare il pagamento medio per unità di tempo, i. e. il vettore  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(0)/k$ .

Questo viene studiato tramite il l' "ergodic eigenproblem", che consiste nel trovare l' "autovettore ergodico"  $u \in \mathbb{R}^n$  e l' "autovalore ergodico"  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che

$$T(u) = \lambda e_n + u$$

dove  $e_n$  denota il vettore di  $\mathbb{R}^n$  le cui coordinate sono identicamente uguali a 1. Allora, il vettore pagamento medio esiste ed è della forma  $\lambda e_n$ , il che significa che il pagamento medio è uguale a  $\lambda$ , per ogni scelta dello stato iniziale. Perciò, è interessante caratterizzare l'insieme degli autovettori di  $T$ .

Sostituendo  $T$  con  $-\lambda e_n + T$ , questo è equivalente a caratterizzare gli insiemi di punti fissi degli operatori della forma 1.

Dato che gli operatori per i giochi ripetuti della forma 1 coincidono con operatori monotoni e additivamente omogenei da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  ([5]), possiamo studiare gli insiemi di punti fissi di questi operatori che chiameremo "operatori di Shapley astratti". Ne diamo la definizione:

**Definition.** Un *operatore di Shapley* è una mappa  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che soddisfa

1.  $x \leq y$  implica  $T(x) \leq T(y)$ ;
2.  $T(\lambda e_n + x) = \lambda e_n + T(x)$ ,

L'interesse per le *retrazioni di Shapley* è anche motivato da ragioni legate al concetto di convessità.

A tal proposito, consideriamo il seguente risultato di analisi convessa:

**Teorema** (Sottoinsiemi chiusi e convessi di  $\mathbb{R}^n$ ). *Un sottoinsieme  $C \subset \mathbb{R}^n$  è chiuso e convesso se e solo se è l'immagine di una retrazione non espansiva rispetto ad una norma Euclidea.*

Alla luce del precedente teorema possiamo indagare una nozione generalizzata di convessità. Infatti, possiamo studiare gli insiemi che sono immagini di retrazioni non espansive rispetto, non solo a norme Euclidee, ma anche rispetto a altre famiglie di norme o hemi-norme.

Ricordiamo che una *hemi-norma* è una funzione  $f$  da uno spazio reale  $X$  in  $\mathbb{R}$  tale che:

è subadditiva, i. e.  $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \forall x, y \in X$  e positivamente omogenea, i. e.  $f(\alpha x) = \alpha f(x) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \forall x \in X$ .

Siamo interessati in particolare alla hemi-norma

$$\mathbf{t}(x) := \max_{i \in [n]} x_i$$

Gli operatori di Shapley sono legati alla hemi-norma  $\mathbf{t}$  dal seguente risultato ([4])

**Proposition.**  *$T$  è un operatore di Shapley se e solo se è non espansivo rispetto alla hemi-norma  $\mathbf{t}$*

$$\mathbf{t}(T(x) - T(y)) \leq \mathbf{t}(x - y) .$$

Così, gli insiemi che sono immagini di retrazioni non espansive rispetto alla hemi-norma  $\mathbf{t}$  coincidono con i retratti di Shapley (immagini di operatori di Shapley idempotenti).

Uno dei principali risultati del Capitolo 7 mostra che questi insiemi sono chiusi (rispetto alla topologia Euclidea) coni ambitropicali, i. e. coni additivi che sono anche reticoli rispetto all'ordine componente per componente di  $\mathbb{R}^n$ .

Nelle prime due sezioni del Capitolo 7 forniremo le motivazioni del nostro lavoro, definizioni e risultati fondamentali.

La Sezione 7.3 contiene definizioni e risultati riguardanti gli operatori di Shapley.

Nella Sezione 7.4 ci sono i due risultati principali del capitolo. Il primo caratterizza i retratti di Shapley in termini di proprietà reticolari (infatti, un cono ambitropicale è chiuso se e solo se è un reticolo condizionalmente completo):

**Teorema.** *Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1.  *$E$  è un cono ambitropicale chiuso;*
2.  *$E$  è un retratto di Shapley di  $\mathbb{R}^n$ ;*
3.  *$E$  è l'insieme dei punti fissi di un operatore di Shapley idempotente  $T$ .*

Il secondo dà una caratterizzazione geometrica dei retratti di Shapley in termini di insiemi di esistenza di migliore approssimazioni co-tropicale; dove

un *insieme di esistenza di migliore co-approssimazione* è un sottoinsieme  $E$  di uno spazio di Banach  $(X, \|\cdot\|)$  tale che, per ogni  $z \in X$ , l'insieme

$$B_E^{\|\cdot\|}(z) := \{x \in X \mid \|y - x\| \leq \|y - z\|, \forall y \in E\}$$

contiene un elemento di  $E$ .

Nel seguente teorema denotiamo con  $P_E^{\max}$  l'operatore da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  definito da

$$P_E^{\max}(x) := \sup\{y \in E^{\max} \mid y \leq x\}$$

dove  $E$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}^n$  e  $E^{\max}$  è l'insieme degli elementi della forma

$$\sup\{\lambda_f + f \mid f \in E\} \tag{2}$$

dove  $\lambda_f + f$  denota il vettore  $(\lambda_f + f_i)_{i \in [n]}$  e  $\lambda_f \in \mathbb{R}_{\max}$  sono tali che la famiglia di elementi  $(\lambda_f + f)_{f \in E}$  è superiormente limitata e i  $\lambda_f$  non sono identicamente uguali a  $-\infty$ .

L'operatore  $P_E^{\min}$  e l'insieme  $E^{\min}$  sono definiti analogamente.

**Teorema.** *Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1.  $E$  è un retratto di Shapley di  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $E$  è un insieme di esistenza di migliore co-approssimazioni tropicale;
3. per ogni  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $[P_E^{\max}(z), P_E^{\min}(z)] \cap E \neq \emptyset$ ;
4.  $P_E^{\min}(z) \in E$  vale per ogni  $z \in E^{\max}$ ;
5.  $P_E^{\max}(z) \in E$  vale per ogni  $z \in E^{\min}$ ;
6.  $E$  è l'insieme di punti fissi dell'operatore  $\bar{Q}_E^+ = P_E^{\max} \circ P_E^{\min}$ ;
7.  $E$  è l'insieme di punti fissi dell'operatore  $\bar{Q}_E^- = P_E^{\min} \circ P_E^{\max}$ .

Nella Sezione 7.5, mostriamo che varie classi canoniche di insiemi in geometria tropicale sono speciali class di coni ambitropicali, che possono essere caratterizzati tramite appropriate modifiche dei risultati precedenti.

Il Capitolo 8 contiene una generalizzazione dei due teoremi precedenti a mappe che preservano l'ordine definite su reticoli condizionalmente completi. La seconda parte della tesi (Capitoli 7 e 8) è basata su un lavoro in collaborazione con Stéphane Gaubert e Marianne Akian che sarà presto sottoposto per la pubblicazione.



L'Appendice A contiene la prova del teorema riguardante i sottoinsiemi chiusi e convessi di  $\mathbb{R}^n$ ; l'Appendice B contiene un esempio grafico di poliedro ambitropicale.



# Bibliography

- [1] Di Nola A. and Gerla B.: Algebras of Łukasiewicz's logic and their semiring reducts, *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, 134–154, *Contemp. Math.*, **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] Di Nola A. and Russo C. : Semiring and semimodule issues in MV-algebras. *Communications in Algebra*, **41** (2013), 1017–1048.
- [3] Golan J. S. : *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.
- [4] Gunawardena J. and Keane M.: On the existence of cycle times for some nonexpansive maps. *Hewlett-Packard Labs*, **HPL-BRIMS-95-003** (1995).
- [5] Kolokoltsov V. N.: On linear, additive, and homogeneous operators in idempotent analysis, *Idempotent Analysis*, **13**, (1992), 87 – 101
- [6] Wisbauer R.: *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

**MV-algebras, Semirings and their  
Applications -  
Abstract**

Sara Vannucci

April 17, 2021

The thesis is divided in two parts: the first part regards MV-semirings, involutive semirings and semimodules over them with particular attention to injective and projective semimodules; the second part of the thesis is focused on the tropical semiring and has the purpose to characterize the sets which arise as images of retractions that are nonexpansive with respect to a hemi-norm which plays a key role in tropical geometry.

Semirings and semimodules, and their applications, arise in various branches of Mathematics, Computer Science, Physics, as well as in many other areas of modern science (see, for instance, [3]). MV-algebras arose in the literature as the algebraic semantics of Łukasiewicz propositional logic, one of the longest-known many-valued logic. A connection between MV-algebras and a special category of additively idempotent semirings (called *MV-semirings* or *Łukasiewicz semirings*) was first observed in [1]. On the one hand, every MV-algebra has two *semiring reducts* isomorphic to each other by the involutive unary operation  $*$  of MV-algebras (see, e.g., [2, Proposition 4.8]); on the other hand, the category of MV-semirings defined in [2] is isomorphic to the one of MV-algebras. The term equivalence between MV-algebras and MV-semirings allows us to import results and techniques of semiring and semimodule theory in the study of MV-algebras as well to use properties and theorems regarding MV-algebras in the study of semimodules over MV-semirings.

Indeed, as the theory of modules is an essential chapter of ring theory, so the theory of semimodules is a crucial aspect in semiring theory and two of the most important objects in semimodule theory are projective and injective semimodules.

Although, in general, describing the structure of projective and injective semimodules seems to be a quite difficult task, we shall give a criterion for injectivity of semimodules over additively idempotent semirings which we shall use to describe the structure of injective semimodules over MV-semirings with an atomic Boolean center, i. e. the boolean elements of the MV-semiring form an atomic lattice.

In the first three sections we shall provide all necessary notions, facts and examples on semirings and MV-algebras. The aforementioned term equivalence between MV-algebras and MV-semirings shall be recalled as well as the one between MV-semirings and coupled semirings originally presented in [1].

In Section 1.4 we shall discuss congruences and ideals in MV-semirings. Contrarily to what happens for MV-algebras congruences and ideals are not in bijection in MV-semirings and while congruence simple MV-semirings coincide with simple MV-algebras, the only ideal simple MV-semiring is the boolean semifield  $\{0, 1\}$ .

In Chapter 2 we shall investigate the semiring of polynomials in the variable  $x$  over the boolean semifield  $\{0, 1\}$  evaluated on the standard MV-semiring  $([0, 1], \vee, \odot, 0, 1)$  and we shall denote such semiring as  $\mathbb{B}[x]$ . In particular, we shall prove that it coincides with the semiring of nondecreasing convex McNaughton functions over  $[0, 1]$  with pointwise operations and that it is also isomorphic to the semiring  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$ .

In Chapter 3 we shall present a term equivalence between involutive residuated lattices and a special class of semirings called *involutive semirings* which can be seen as a generalization of the one between MV-algebras and MV-semirings since the variety of involutive residuated lattices strictly contains the one of MV-algebras. The semiring perspective helps us find a necessary and sufficient condition for the interval  $[0, 1]$  to be a subalgebra of an involutive residuated lattice. This result is meaningful because with 0 and 1 we don't mean the top and bottom elements of the involutive residuated lattice: 0 is an additional constant and 1 is the neutral element of the multiplication. In particular, we show that  $[0, 1]$  is a subalgebra of an involutive residuated lattice if and only if 0 is a multiplicatively idempotent element. This chapter is based on a joint paper with Peter Jipsen titled "Injective and projective semimodules over involutive semirings" which is currently revised and resubmitted.

Chapter 4 is about injective and projective semimodules. First, we shall provide all the basic notions and results about semimodules and then we shall give the definitions of injective and projective semimodules. While for modules over rings, we have various equivalent definitions of injective and projective modules (see [6]), unfortunately this is not the case for semimodules over semirings because the different definitions of injective and projective semimodules analogous to the ones for modules don't lead to the same class of semimodules. Through the thesis we shall always refer to the categorical definition of injective and projective semimodules (i. e. injective and projective objects in the category of semimodules over a given semiring). One of the main results presented in Chapter 4 is the following criterion for injectivity of semimodules over additively idempotent semirings, i. e. semirings for which the sum is idempotent:

**Theorem.** *Let  $S$  be an additively idempotent semiring and  $M$  a left  $S$ -semimodule. Then  $M$  is injective if and only if there exists a set  $X$  such that  $M$  is a retract of the left  $S$ -semimodule  $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(S, \mathbb{B})^X$ , where  $\mathbb{B}$  is the Boolean semifield.*

The boolean semifield  $\mathbb{B}$  is the two-element semiring  $\{0, 1\}$  and

$$\text{Hom}_{\mathbb{B}}(S, \mathbb{B})^X$$

is the set of morphisms from  $S$  to  $\mathbb{B}$  seen as  $B$ -semimodules or, equivalently, join-semilattices.

We shall also prove that the same criterion can be restated in terms of ideals of join-semilattices.

Regarding projective semimodules, it is well-known that in any variety of algebras the projective objects are the retracts of free objects. In the category of semimodules over a semiring  $S$ , the free object over a set  $X$  is the set of functions from  $X$  to  $S$  with finite support, i. e.  $S^{(X)} = \{f : X \rightarrow S \mid f(x) = 0 \text{ for all but finitely many } x \in X\}$  ([2]). So, we obtain the following characterization of projective semimodules.

**Theorem.** *Let  $S$  be a semiring. An  $S$ -semimodule  $P$  is projective if and only if it is a retract of the semimodule  $S^{(X)}$  for some set  $X$ .*

The results of this chapter come both from the aforementioned joint paper with Peter Jipsen and from the paper “On injectivity of semimodules over additively idempotent division semirings and chain MV-semirings” (joint work with Antonio Di Nola, Giacomo Lenzi and Tran Giang Nam, published in 2019).

In Chapter 5, using the aforementioned criteria, we characterize self-injective MV-semirings with an atomic Boolean center. In the following theorem we denote with  $A^{\vee\odot}$  one of the two isomorphic semiring reducts of the MV-algebra  $A$ ; in particular the semiring  $A^{\vee\odot}$  has the set  $A$  as its universe and the MV-algebra operations  $\vee$  and  $\odot$  as its semiring operations.

**Theorem.** *For any MV-algebra  $A$  with an atomic Boolean center, the following conditions are equivalent:*

- (1) *The semiring  $A^{\vee\odot}$  is self-injective;*
- (2) *All finitely generated projective  $A^{\vee\odot}$ -semimodules are injective;*
- (3) *All cyclic (generated by one element) projective  $A^{\vee\odot}$ -semimodules are injective;*
- (4)  *$A$  is a complete MV-algebra.*

We also give a description of (finitely generated) injective semimodules over finite MV-semirings. In particular we have that over a finite MV-semiring finitely generated projective and injective semimodules coincide.

Finally, we show that complete Boolean algebras are precisely the MV-semirings in which every principal ideal is an injective semimodule. This chapter is based on the aforementioned joint paper with Di Nola et al.

Then, in Chapter 6, analogously to what we do for MV-semirings, we investigate injective and projective semimodules over involutive semirings and we shall generalize some of the results regarding semimodules over MV-semirings. Indeed, many of the results regarding MV-semimodules can be proven taking into account only the involutive property of MV-semirings and not their isomorphism to MV-algebras. So, it was natural to generalize these results to a broader class of semirings (which are involutive) and that contains MV-semirings as special cases. We show for example that, also for finite commutative involutive semirings, finitely generated injective and projective semimodules coincide. This result could make us wonder if, removing the hypothesis of involution, the coincidence of finitely generated injective and projective still holds. The answer is no and we shall provide a counterexample. It leads us to observe that, even if the involution appears only in the semiring and it doesn't affect at all the structure of the semimodule, it still plays a fundamental role in the study of injective and projective semimodules.

In Section 6.1 we shall recall the definition of strong MV-semimodules and generalize it to semimodules over involutive semirings. Furthermore, we shall prove that strong semimodules coincide with faithful semimodules, where the notion of faithful semimodule is a generalization of the one of faithful module. The interesting thing is that, despite the fact that strong semimodules can be defined only for particular semirings such as MV or involutive semirings, they coincide with faithful semimodules which, on the contrary, can be defined on every semiring. This chapter is based on the aforementioned joint work with Peter Jipsen.

The second part of the thesis is devoted to a special class of semimodules over the zero-free semiring  $\mathbb{R}$  called *ambitropical cones* and their applications to game theory. They differ from the standard definition of semimodules since they have a lattice structure. In particular we shall prove that they coincide with the retractions of a class of maps called *Shapley operators* which are operators that describe the evolution of the value function of a zero-sum game as a function of the horizon.

Before giving the definition of Shapley operators we shall briefly explain the class of games to which they apply. We shall consider two-player zero-sum repeated games with a finite state space  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . We shall denote the two players MIN and MAX and their sets of actions dependent on the state  $i$ , respectively,  $A_i$  and  $B_i$ . Let  $a \in A_i$  and  $b \in B_i$  be the actions selected by the two players, then  $r_i^{ab}$  represents the transition payment (that player MIN pays to player MAX) and the vector  $(P_{ij}^{ab})_{j \in [n]}$  represents the transition probability (from a state to another state). Note that both these quantities depend on the current state of the game  $i$  and on the actions of the two players.

For this class of games the value vector (of  $\mathbb{R}^n$ ), if it exists, satisfies the



following recursive formula:

$$v^0 = 0 \quad v^k = T(v^{k-1})$$

where  $T$  is an operator from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}^n$  whose  $i$ th coordinate is given by

$$T_i(x) = \min_{a \in A_i} \max_{b \in B_{i,a}} \left( r_i^{ab} + \sum_{j \in [n]} P_{ij}^{ab} x_j \right) \quad (1)$$

The vector  $v^k = (v_i^k)_{i \in [n]} = T^k(0)$ , where  $T^k$  denotes the  $k$ th of  $T$ , gives the value of the game in horizon  $k$ , as a function of the initial state  $i$ . A central problem in the theory of zero-sum game is to characterize the mean payoff per time unit, i.e., the vector  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(0)/k$ . This is studied by means of the ergodic eigenproblem, which consists in finding  $u \in \mathbb{R}^n$ , the “ergodic eigenvector”, and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , the “ergodic eigenvalue”, such that

$$T(u) = \lambda e_n + u$$

where  $e_n$  denotes the vector of  $\mathbb{R}^n$  whose entries are identically 1. Then, the mean payoff vector does exist, and is of the form  $\lambda e_n$ , meaning that the mean payoff is equal to  $\lambda$ , for all choices of the initial state. Therefore, it is of interest to characterize the set of eigenvectors of  $T$ . By replacing  $T$  by  $-\lambda e_n + T$ , this is equivalent to characterizing the fixed point sets of operators of the form 1.

Since the operators for repeated games of the form of 1 coincide with monotone and additively homogeneous operators from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}^n$  ([5]), we can investigate fixed point sets of these operators that we shall call “abstract” Shapley operators. This motivates the following definition:

**Definition.** A *Shapley operator* is a map  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  that satisfy

1.  $x \leq y$  implies  $T(x) \leq T(y)$ ;
2.  $T(\lambda e_n + x) = \lambda e_n + T(x)$ ,

The interest in *Shapley retractions* is also motivated by reasons related to the concept of convexity.

Indeed, let us consider the following result from convex analysis:

**Theorem** (Closed and convex subsets). *A subset  $C \subset \mathbb{R}^n$  is closed and convex if and only if it is the image of a nonexpansive retraction in a Euclidean norm.*

In the light of the previous theorem we can investigate a generalized notion of convexity. Indeed, we can study the sets which arise as images of

retractions that are nonexpansive with respect not only to Euclidean norms but also to other families of norms or hemi-norms.

We recall that a *hemi-norm* is a function  $f$  from a real vector space  $X$  to  $\mathbb{R}$  such that: it is subadditive, i. e.  $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \forall x, y \in X$  and positively homogeneous, i. e.  $f(\alpha x) = \alpha f(x) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \forall x \in X$ .

We will be especially interested in the hemi-norm

$$\mathbf{t}(x) := \max_{i \in [n]} x_i$$

Shapley operators are linked to the hemi-norm  $\mathbf{t}$  through the following result ([4])

**Proposition.**  *$T$  is a Shapley operator if and only if it is nonexpansive in the “ $\mathbf{t}$ ” hemi-norm:*

$$\mathbf{t}(T(x) - T(y)) \leq \mathbf{t}(x - y) .$$

So, the sets which arise as images of retractions that are nonexpansive with respect to the hemi-norm  $\mathbf{t}$  coincide with Shapley retracts (images of idempotent Shapley operators).

One of the main results of Chapter 7 shows that these sets are closed (with respect to Euclidean topology) ambitropical cones, i. e. additive cones which are also lattices wrt the componentwise order on  $\mathbb{R}^n$ .

In the first two sections of Chapter 7 we shall provide motivation for our work, basic definitions and results.

Section 7.3 contains definitions and results regarding Shapley operators.

In Section 7.4 we have the two main results of the chapter. The first one characterizes Shapley retracts in terms of lattice properties (indeed, an ambitropical cone is closed if and only if it is a conditionally complete lattice):

**Theorem.** *Let  $E$  be a subset of  $\mathbb{R}^n$ . The following assertions are equivalent:*

1.  $E$  is a closed ambitropical cone;
2.  $E$  is a Shapley retract of  $\mathbb{R}^n$ ;
3.  $E$  is the fixed point set of an idempotent Shapley operator  $T$ .

The second one gives a geometric characterization of Shapley retracts in terms of sets of existence of best tropical co-approximation; where a *set of existence of best co-approximation* is a subset  $E$  of a Banach space  $(X, \|\cdot\|)$  such that, for all  $z \in X$ , the set

$$B_E^{\|\cdot\|}(z) := \{x \in X \mid \|y - x\| \leq \|y - z\|, \forall y \in E\}$$

contains an element of  $E$ .

In the following theorem we denote by  $P_E^{\max}$  the operator from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}^n$  defined by

$$P_E^{\max}(x) := \sup\{y \in E^{\max} \mid y \leq x\}$$

where  $E$  is a nonempty subset of  $\mathbb{R}^n$  and  $E^{\max}$  is the set of elements of the form

$$\sup\{\lambda_f + f \mid f \in E\} \tag{2}$$

where  $\lambda_f + f$  denote the vector of  $(\lambda_f + f_i)_{i \in [n]}$  and  $\lambda_f \in \mathbb{R}_{\max}$  are such that the family of elements  $(\lambda_f + f)_{f \in E}$  is bounded from above and the  $\lambda_f$  are not identically  $-\infty$ . The operator  $P_E^{\min}$  and the set  $E^{\min}$  are defined analogously.

**Theorem.** *Let  $E$  be a subset of  $\mathbb{R}^n$ . The following assertions are equivalent:*

1.  $E$  is a Shapley retract of  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $E$  is a set of existence of best tropical co-approximation;
3. for all  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $[P_E^{\max}(z), P_E^{\min}(z)] \cap E \neq \emptyset$ ;
4.  $P_E^{\min}(z) \in E$  holds for all  $z \in E^{\max}$ ;
5.  $P_E^{\max}(z) \in E$  holds for all  $z \in E^{\min}$ ;
6.  $E$  is the fixed point set of the operator  $\bar{Q}_E^+ = P_E^{\max} \circ P_E^{\min}$ ;
7.  $E$  is the fixed point set of the operator  $\bar{Q}_E^- = P_E^{\min} \circ P_E^{\max}$ .

In Section 7.5, we show that several canonical classes of sets in tropical geometry are special cases of ambitropical cones, that can be characterized through Shapley operators by suitable strengthening of the previous results.

Chapter 8 contains a generalization of the two previous theorems to order preserving maps over conditionally complete lattices. The second part of the thesis (Chapter 7 and Chapter 8) is based on a joint work with Stéphane Gaubert and Marianne Akian which is going to be submitted soon.

Appendix A is the Proof of the Theorem regarding closed and convex subsets of  $\mathbb{R}^n$ ; appendix B consists of an example of an ambitropical polyhedron.

# Bibliography

- [1] Di Nola A. and Gerla B.: Algebras of Łukasiewicz's logic and their semiring reducts, *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, 134–154, *Contemp. Math.*, **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] Di Nola A. and Russo C. : Semiring and semimodule issues in MV-algebras. *Communications in Algebra*, **41** (2013), 1017–1048.
- [3] Golan J. S. : *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.
- [4] Gunawardena J. and Keane M.: On the existence of cycle times for some nonexpansive maps. *Hewlett-Packard Labs*, **HPL-BRIMS-95-003** (1995).
- [5] Kolokoltsov V. N.: On linear, additive, and homogeneous operators in idempotent analysis, *Idempotent Analysis*, **13**, (1992), 87 – 101
- [6] Wisbauer R.: *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.